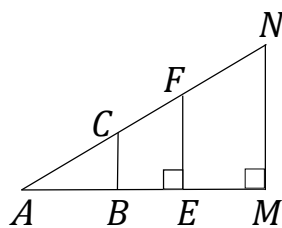


مثلثات، شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است ( بدون متر کردن ). مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، دریانوردی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می گیرد.

### یاد آوری

در سال گذشته خواندید، اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه اند. بنابر این اگر یک زاویه حاده از یک مثلث قائم الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابه اند.



در شکل مقابل، مثلث  $ABC$  و مثلث  $AEF$  و مثلث  $AMN$  متشابه اند. چرا؟

در مثلث های متشابه نسبت به اضلاع متناظر با زاویه برابر مقداری ثابت است. مثلاً در

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{مثلث } ABC \text{ و مثلث } AEF \text{ داریم:}$$

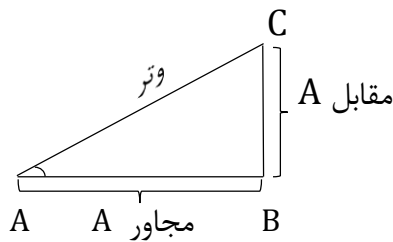
که این تساوی ها را به این شکل می توان نوشت:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{AF}$$

و به همین ترتیب و با در نظر گرفتن مثلث  $AMN$  و دیگر مثلث های متشابه نظیر آن می توان نوشت:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AN} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MN}$$

همان طور که می بینید همه مقادیر بالا مقدار ثابتی هستند که به تعریف آن ها می پردازیم :



### ○ نسبت های مثلثاتی

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

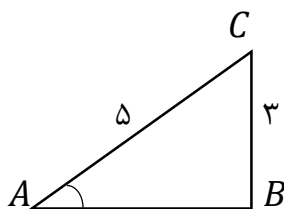
$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan A} = \cot A$$

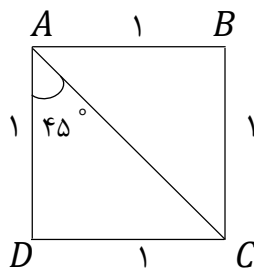


معمولاً زاویه ها را با حروف یونانی  $\alpha$  و  $\theta$  و ... نمایش می دهیم :

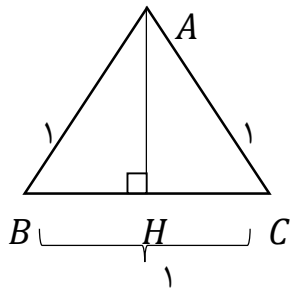
🕒 **تمرین ۱-۲:** در شکل مقابل، نسبت های مثلثاتی زاویه  $A$  را به دست آورید.



🕒 **تمرین ۲-۲:** نسبت های مثلثاتی  $45^\circ$  را با استفاده از مربع واحد به دست آورید.



🕒 **تمرین ۲-۳:** نسبت های مثلثاتی زاویه های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را با استفاده از مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ را به دست آورید.



\* بین نسبت های مثلثاتی  $\tan$  و  $\cot$  هر زاویه ای چه رابطه ای برقرار است؟

\* بین  $\sin$  و  $\cos$  هر زاویه چطور؟

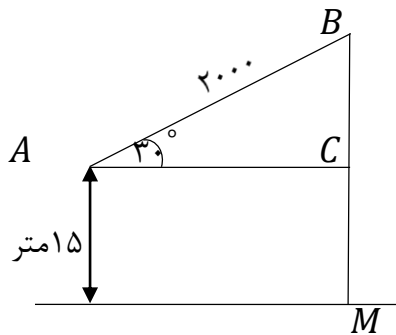
🕒 **تمرین ۲-۴:** به کمک تمرین هایی که حل کردید، جدول زیر را کامل کنید.

مقدار	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$			
$\cos A$			
$\tan A$			
$\cot A$			

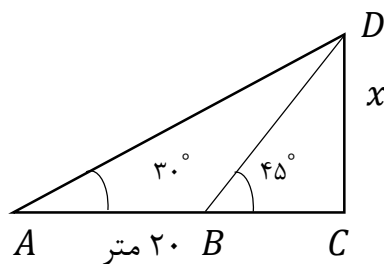
توجه: وقتی  $\alpha$  و  $\beta$  متمم هم باشند، چه اتفاقی برای نسبت های مثلثاتی می افتد؟

🕒 **تمرین ۲-۵:** حاصل  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  را به دست آورید.

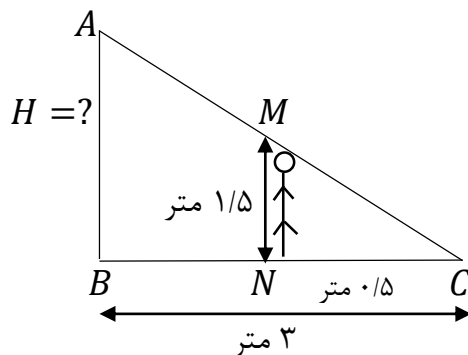
**تمرین ۲-۶:** یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه  $30^\circ$  پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟



**تمرین ۲-۷:** افراد A و B که از هم به فاصله ۲۰ متر و در یک طرف برجی هستند، بالاترین نقطه این برج را به ترتیب با زاویه‌های  $30^\circ$  و  $40^\circ$  می‌بینند. ارتفاع این برج را به دست آورید.



**تمرین ۲-۸:** نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین  $1/5$  متر و طول سایه او در همان لحظه،  $0/5$  متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟



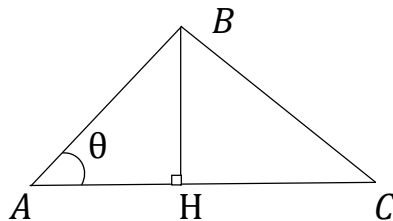
🕒 **تمرین ۲-۹:** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $2 \sin 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{2} + \cos^2 45^\circ$

ب)  $(\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ) \left( \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \right)$

ج)  $\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}}$

د)  $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$



○ به دست آوردن مساحت مثلث با استفاده از نسبت مثلثاتی (sin)

$$S_{ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{BH \times AC}{2} \quad (1)$$

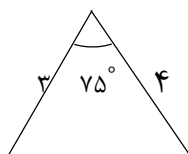
$$\sin \theta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \sin \theta$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin \theta}{2}$$

جایگذاری در رابطه (۱) و داریم:

این رابطه وقتی زاویه منفرجه هم باشد، کار می کند. چون جلوتر نشان می دهیم که دو زاویه مکمل، سینوس های برابر دارند.

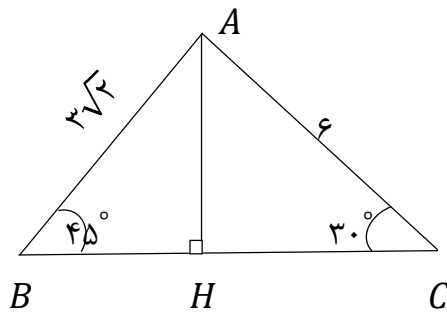
🕒 **تمرین ۲-۱۰:** با استفاده از ماشین حساب  $\sin 75^\circ = 0.96$  به دست می آید. مساحت



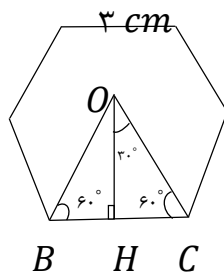
مثلث مقابل را بیابید.

🕒 **تمرین ۲-۱۱:** محوطه گل کاری شده به شکل مثلث بین چند پیاده رو ساخته شده است. مساحت

محوطه را به دست آورید.

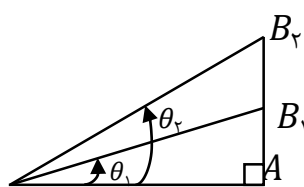
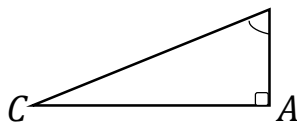


🕒 **تمرین ۲-۱۲:** مساحت شش ضلعی منتظم را به دست آورید.



🕒 **تمرین ۲-۱۳:** در مثلث قائم الزاویه ABC رابطه  $\tan^2 B = (2 - \tan B)^2$  برقرار است و

$AB = 2$ ، مساحت مثلث را به دست آورید.



$$\tan \theta_1 = \frac{AB_1}{AC}$$

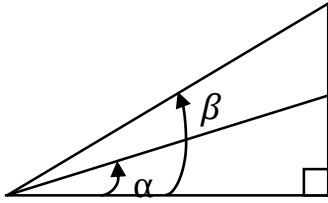
$$\tan \theta_2 = \frac{AB_2}{AC}$$

\* توجه:

$$\xrightarrow{AB_1 < AB_2} \tan \theta_1 < \tan \theta_2$$

**نکته ۱:**

- (۱) با افزایش یک زاویه حاده، تانژانت زاویه، افزایش می یابد.
- (۲) اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به صفر نزدیک می شود.
- (۳) اگر زاویه حاده به  $90^\circ$  نزدیک شود، تانژانت آن بسیار بزرگ می شود. تانژانت  $90^\circ$  تعریف نشده است.

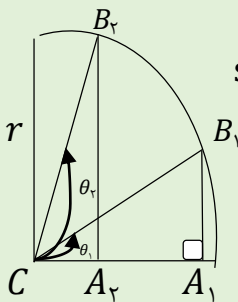
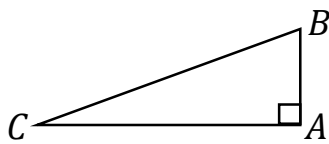


تمرین ۲-۱۴: با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(\tan \alpha - \tan \beta)^2} + \tan \alpha =$$

تمرین ۲-۱۵: در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $(\hat{A} = 90^\circ)$  و  $AC = 3AB$  مقدار  $\sin B$  را به دست

آورید.



$$\sin \theta_1 = \frac{A_1 B_1}{B_1 C}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{A_2 B_2}{B_2 C}$$

$$B_1 C = B_2 C = r$$

$$A_2 B_2 > A_1 B_1$$

$$\sin \theta_2 > \sin \theta_1$$

توجه:

نکته ۲:

(۱) با افزایش یک زاویه حاده، سینوس زاویه افزایش می یابد.

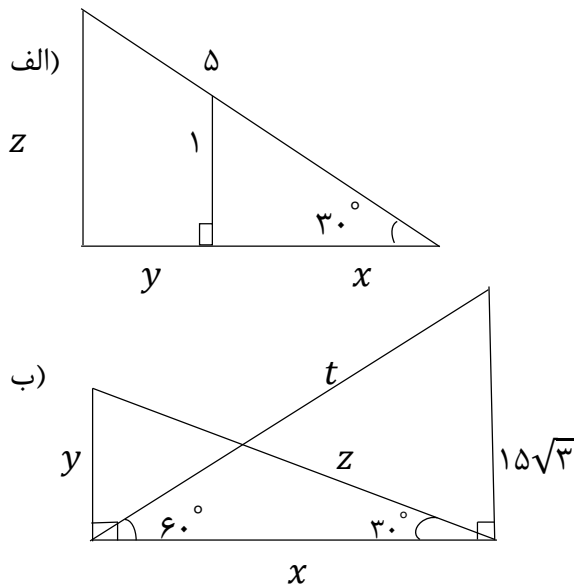
(۲) اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود، سینوس آن به صفر نزدیک می شود و سینوس صفر درجه برابر صفر است.

(۳) اگر زاویه حاده ای به  $90^\circ$  نزدیک شود، سینوس آن به ۱ نزدیک می شود و سینوس  $90^\circ$  برابر ۱ است.

🕒 **تمرین ۲-۱۶:** اگر  $\theta$  زاویه حاده باشد و  $\sin \theta = \frac{2m-1}{3}$  باشد، حدود  $m$  را بدست آورید.

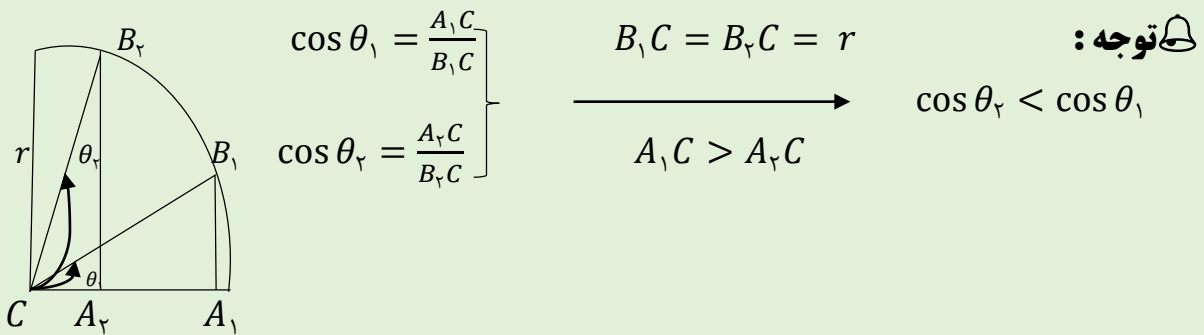
🕒 **تمرین ۲-۱۷:** حاصل عبارت  $|\sin 10^\circ - \sin 90^\circ| + |\sin 10^\circ - \sin 7^\circ| + |\sin 7^\circ - \sin 5^\circ|$  را بدست آورید.

🕒 **تمرین ۲-۱۸:** در هر شکل مقادیر  $x$  و  $y$  و  $Z$  و  $t$  را بدست آورید.



🕒 **تمرین ۲-۱۹:** هواپیمایی می خواهد از روی باند، بلند شود. ابتدا ۴۰۰ متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویه  $45^\circ$  از روی زمین بلند می شود. وقتی به انتهای باند می رسد، در ارتفاع ۱۴۰ متری قرار می گیرد طول کل باند چقدر است؟





### نکته ۳

(۱) با افزایش یک زاویه حاده، کسینوس زاویه کاهش می یابد.

(۲) اگر زاویه ای به صفر نزدیک شود، کسینوس آن به ۱ نزدیک می شود و کسینوس صفر درجه برابر ۱ است.

(۳) اگر زاویه حاده ای به  $90^\circ$  نزدیک شود، کسینوس آن به صفر نزدیک می شود و کسینوس  $90^\circ$  صفر است.

تمرین ۲-۲۰: اگر  $20^\circ < x < 70^\circ$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

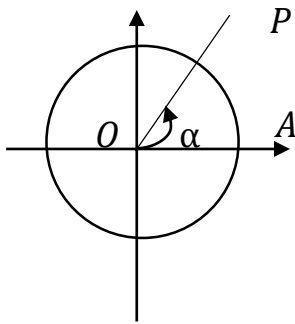
$$(\cos 71^\circ - \cos 19^\circ) + |\cos x - \cos 19^\circ| + |\cos 71^\circ - \cos x| =$$

### دایره مثلثاتی

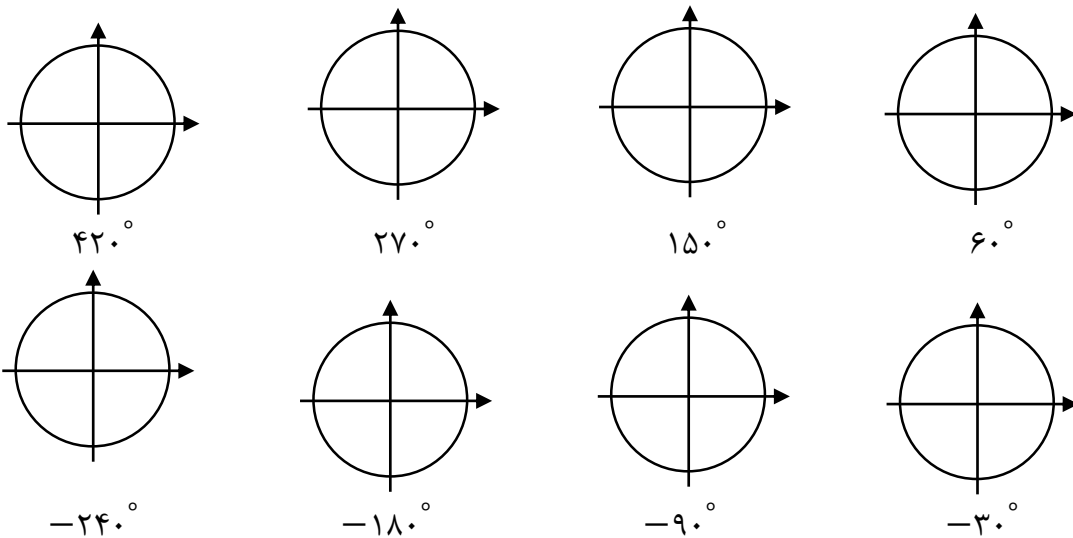
دایره ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، دایره مثلثاتی می نامند. ضلع  $OA$  برای زاویه ثابت است.

اگر نقطه  $P$  در خلاف جهت عقربه های ساعت از نقطه  $A$  شروع به حرکت کند، زاویه مثبت

$\widehat{AOP}$  به دست می آید.



🕒 **تمرین ۲-۲۱:** هر زاویه را روی دایره مثلثاتی رسم کنید.



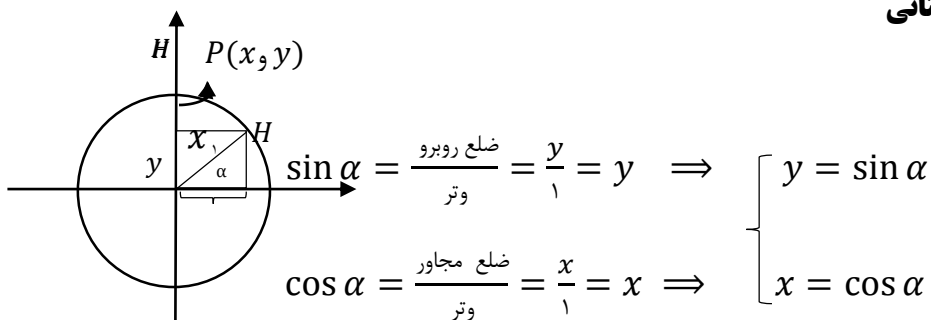
\* ناحیه ای که انتهای کمان روبرو به زاویه  $\alpha$  در آن قرار می گیرد، برای زاویه های مختلف از

$0^\circ$  تا  $360^\circ$  مطابق جدول زیر است:

حدود زاویه $\alpha$	ناحیه ای که $P$ قرار دارد
$0 < \alpha < 90$	اول
$90 < \alpha < 180$	دوم
$180 < \alpha < 270$	سوم
$270 < \alpha < 360$	چهارم

**نسبت های مثلثاتی در دایره مثلثاتی**

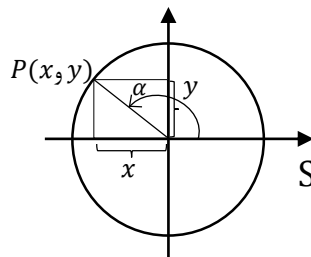
(۱)  $P$  در ناحیه اول:



$$x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

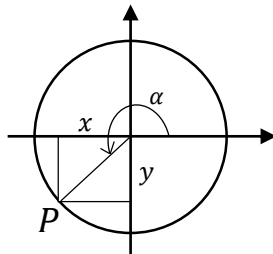
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x} \quad \cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{x}{y}$$

پس اگر  $P$ ، انتهای کمان در ناحیه اول مثلثاتی باشد، طول و عرض مثبت و تمام نسبت های مثلثاتی مثبت اند.



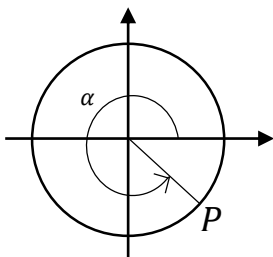
(۲)  $P$  در ناحیه دوم:

$$\sin \alpha = y > 0 \quad \cos \alpha = x < 0 \quad \tan \alpha \text{ و } \cot \alpha < 0$$



(۳)  $P$  در ناحیه سوم:

$$\sin \alpha = y < 0 \quad \cos \alpha = x < 0 \\ \tan \alpha > 0 \quad \cot \alpha > 0$$



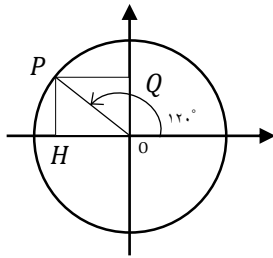
(۴)  $P$  در ناحیه چهارم:

$$\sin \alpha = y < 0 \quad \cos \alpha = x > 0 \\ \tan \alpha < 0 \quad \cot \alpha < 0$$

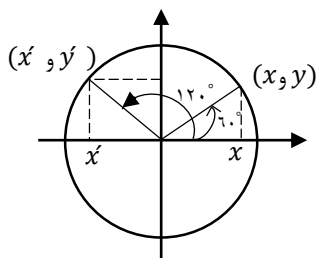
🕒 **تمرین ۲-۲۲:** جدول زیر را کامل کنید.

ناحیه نسبت	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				
$\cot \alpha$				

🕒 **تمرین ۲-۲۳:** می دانیم نقطه  $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$  روی دایره مثلثاتی قرار گرفته و زاویه ایجاد شده  $120^\circ$  است. نسبت مثلثاتی  $120^\circ$  کدام است؟



**نکته و سؤال:** آیا می توانیم بدون داشتن نقطه  $P$  نسبت های مثلثاتی  $120^\circ$  را به دست آوریم؟



🔵 **نکته ۴:** دوزاویه مکمل،  $\sin$  هایشان با هم برابر و  $\cos$  هایشان قرینه هستند و همچنین تانژانت و کتانژانت های قرینه دارند.

🕒 **تمرین ۲-۲۴:** علامت نسبت های مثلثاتی  $1395^\circ$  را مشخص کنید.

🕒 **تمرین ۲-۲۵:** اگر  $\theta$  زاویه ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و  $\sin \theta = \frac{5}{7}$  آیا می توان سایر

نسبت های مثلثاتی  $\theta$  را پیدا کرد؟

🕒 **تمرین ۲-۲۶:** فرض کنید نقطه  $P$  روی دایره مثلثاتی و  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  در ربع سوم

مثلثاتی است. مطلوبست

الف) مختصات نقطه  $P$ ؟

ب) سایر نسبت های مثلثاتی؟

🕒 **تمرین ۲-۲۷:** اگر  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه ای که  $\alpha$  در آن قرار می گیرد،

بحث کنید.

🕒 **تمرین ۲-۲۸:** زاویه ای مثال بزنید که  $\sin$  آن منفی و  $\cos$  آن مثبت باشد.

🕒 **تمرین ۲-۲۹:** اگر  $\tan \theta = \frac{2}{3}$  و  $\theta$  در ربع سوم باشد، سایر نسبت ها را به دست آورید.

🕒 **تمرین ۲-۳۰:** اگر انتهای کمان روبرو به زاویه  $\alpha$  در دایره مثلثاتی نقطه  $(y, -\frac{1}{3})$  باشد

و  $y > 0$ ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را حساب کنید.

🕒 **تمرین ۲-۳۱:** در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید انتهای کمان روبرو به زاویه  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟

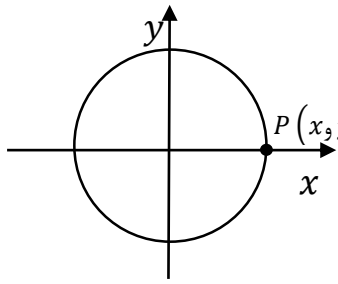
الف)  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$  و  $\sin \alpha \cot \alpha < 0$

ب)  $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$  و  $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$

🕒 **تمرین ۲-۳۲:** زاویه ای مثل  $\alpha$  پیدا کنید که  $\tan \alpha > \cot \alpha$  و زاویه ای مانند  $\beta$  پیدا کنید که  $\cot \beta > \tan \beta$ . ( صفحه ۴۰ کتاب ؛ سوال شماره ۶ )

• از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید؟

○ نسبت های مثلثاتی صفر و  $90^\circ$  و  $180^\circ$  و  $270^\circ$  و  $360^\circ$



$$1 = x = \cos 0^\circ = 1$$

$$\cos 0^\circ = 1 \quad \checkmark \text{ صفر}$$

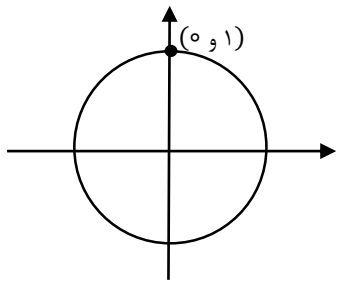
$$y = 0 = \sin 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = 0$$

$$\tan 0^\circ = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \text{تعریف نمی شود}$$



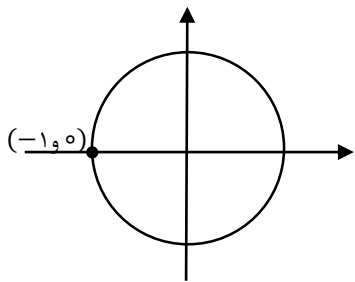
$$x = \cos 90^\circ = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \checkmark$$

$$y = \sin 90^\circ = 1$$

$$\cot 90^\circ = 0$$

$$\tan 90^\circ = \text{تعریف نمی شود}$$



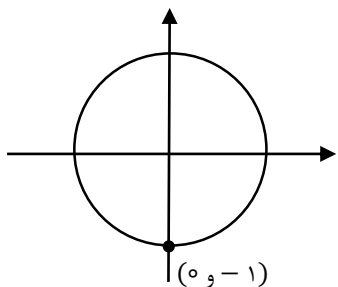
$$x = \cos 180^\circ = -1$$

$$\cos 180^\circ = -1 \quad \checkmark$$

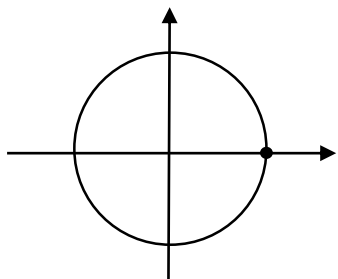
$$y = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cot 180^\circ = \text{تعریف نمی شود}$$

$$\tan 180^\circ = 0$$



$$\sin 270^\circ = -1 \quad \checkmark$$



$$\cos 360^\circ = 1 \quad \checkmark$$

تمرین ۲-۳۳: جدول زیر را کامل کنید.

نسبت \ زاویه	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\tan \alpha$					
$\cot \alpha$					

$$-1 \leq y \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

نکته ۵

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

تمرین ۲-۳۴: اگر  $\alpha$  زاویه دلخواهی باشد، محدوده مناسبی برای عبارت های زیر به دست آورید.

الف)  $A = 2 + 3 \sin \alpha$

ب)  $B = \frac{1}{3 - 2 \cos \alpha}$

تمرین ۲-۳۵: مجموع حد اقل و حد اکثر عبارت  $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$  را به دست آورید.

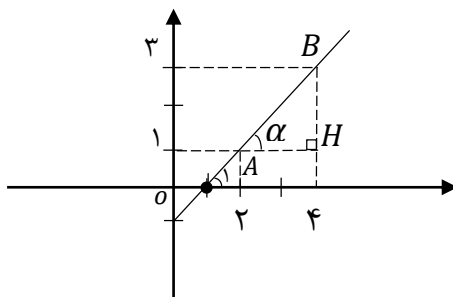


🕒 **تمرین ۲-۳۶:** اگر  $180^\circ < \alpha < 225^\circ$  حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{-|\sin \alpha - \cos \alpha| - |\sin \alpha + \cos \alpha|}{|\tan \alpha - \cot \alpha| + |\tan \alpha + \cot \alpha|}$$

### ○ ارتباط شیب خط و تانژانت:

نقاط  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  را روی خط  $y = x - 1$  در نظر بگیرید. شیب این خط برابر ۱ است.



$$m_{AB} = \frac{3-1}{4-2} = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{BH}{AH} = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \text{شیب خط}$$

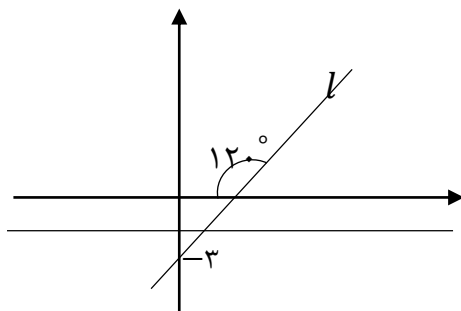
طبق قضیه خطوط موازی و مورب:

$$\hat{O}_1 = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \text{شیب خط} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

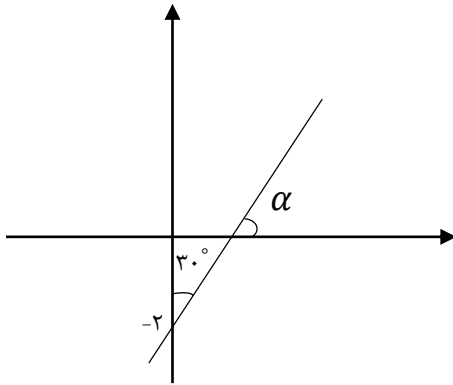
- اگر زاویه بین خط و جهت مثبت محور  $x$  ها  $\alpha$  باشد، شیب خط برابر  $\tan \alpha$  خواهد بود.
- اگر  $\alpha$  زاویه منفرجه باشد، شیب خط یا همان  $\tan \alpha$  منفی خواهد بود.

🕒 **تمرین ۲-۳۷:** معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور  $x$  ها،  $45^\circ$  است و نقطه  $(0, 5)$  (۲ و روی آن قرار دارد).

🕒 **تمرین ۲-۳۸:** با توجه به شکل زیر، معادله خط  $l$  را بیابید.

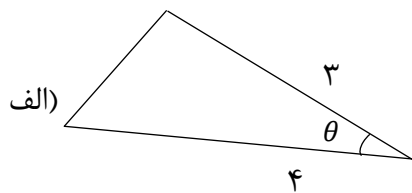


🕒 **تمرین ۲-۳۹:** معادله خط مقابل را بنویسید.

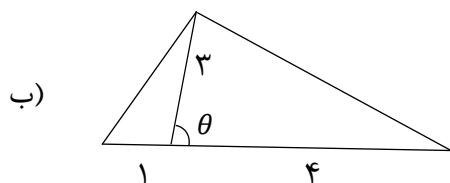


🕒 **تمرین ۲-۴۰:** خط  $\sqrt{2}y + \sqrt{6}x = 3$  با جهت مثبت محور  $x$  ها چه زاویه ای می سازد؟

🕒 **تمرین ۲-۴۱:** مساحت شکل های زیر را به دست آورید.



$$\cos \theta = \frac{5}{13}$$



$$\sin \theta = \frac{3}{4}$$

**اتحادهای مثلثاتی**

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \div \sin^2 \alpha \\ \hline 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \div \cos^2 \alpha \\ \hline 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{array} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \end{array} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \text{ و } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{array} \right\}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (6)$$

🕒 **تمرین ۲-۴۲:** درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$۱) \left( \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$۲) \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$۳) \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$۴) 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

$$۵) \frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$۶) \frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \tan \theta$$

$$۷) \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$۸) \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = 1$$

$$۹) \cos^2 \theta (\sec^2 \theta) = \sec^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$۱۰) \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} - 1} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} + 1} = \frac{2}{\tan^2 x}$$

$$۱۱) (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$$

$$۱۲) (\sin \theta + \cos \theta - 1)(\sin \theta + \cos \theta + 1) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$۱۳) \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$$

$$۱۴) \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{4 \tan \theta}{\cos \theta}$$

$$۱۵) \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\sin^4 \theta - \sin^2 \theta}$$

$$۱۶) \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta)} = \frac{2 \tan \theta}{\tan \theta - 1}$$

$$۱۷) \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\cot^4 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cot^2 \theta}$$

$$۱۸) \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = ۱ - ۳ \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$۱۹) \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\cos^4 \theta} = (\tan \theta + ۱)(\tan \theta - ۱)$$

🕒 **تمرین ۲-۴۳:** اگر  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، حاصل  $\sin x \cos x$  را به دست آورید.

🕒 **تمرین ۲-۴۴:** اگر  $\sin \alpha = ۲a + b$  و  $\cos \alpha = a - ۲b$  باشد، چه رابطه ای بین  $a$  و  $b$  برقرار است؟

🕒 **تمرین ۲-۴۵:** اگر  $\theta$  زاویه ای در ربع دوم باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = |\sin \theta| + |\cos \theta| + |۱ - \sin \theta| - |۱ - \cos \theta|$$

🕒 **تمرین ۲-۴۶:** اگر  $\tan \theta = ۲$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{(۱ + \cos \alpha)(\tan \alpha - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

🕒 **تمرین ۲-۴۷:** اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

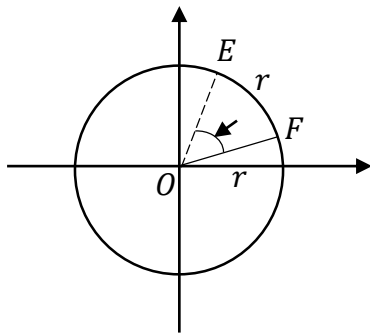
$$\text{الف) } (1 + \tan x + \cot x) \left( \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{ب) } \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

### ○ واحدهای زاویه :

(۱) درجه :

اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت (مساوی) تقسیم کنیم، به زاویه مرکزی که از یک قسمت آن ایجاد می شود، را یک درجه می گوئیم.



(۲) رادیان :

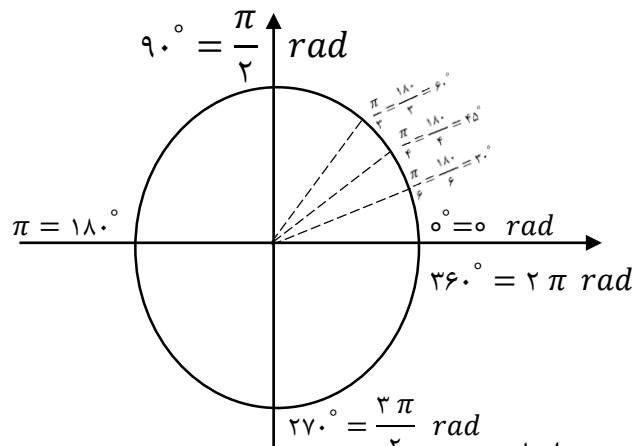
اگر در دایره ای به شعاع  $r$ ، کمانی به طول  $r$  جدا کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبرو به این کمان برابر ۱ رادیان می باشد.

$$(*) \quad \widehat{FOE} = \frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع}} = \frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{L}{r} \quad L = r\theta$$

پس اگر بخواهیم بدانیم کل دایره چند رادیان است؛ با توجه به فرمول (\*):

$$= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \quad \text{rad}$$

$$۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲} \text{ rad} \quad \text{و} \quad ۱۸۰^\circ = \pi \text{ rad} \quad \text{و} \quad ۳۶۰^\circ = ۲\pi \text{ rad}$$



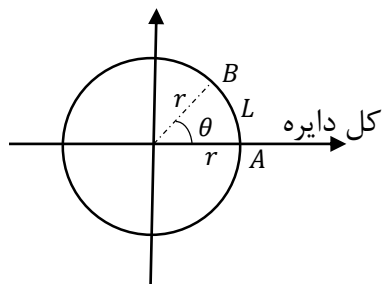
رابطه بین اندازه زاویه بر حسب (درجه و) رادیان : رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۱۸۰} D$$

🕒 **تمرین ۲-۴۸:**  $۴۵^\circ$  را بر حسب رادیان بنویسید.

### 🕒 فرمول مساحت قطاع :

اگر  $\theta$  زاویه ای بر حسب رادیان و  $L$  کمان روبروی آن بر حسب واحد باشد، در این صورت  $L = r\theta$  و مساحت قطاع از رابطه زیر به دست می آید :



$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{۲} r^2 \theta$$

🕒 **تمرین ۲-۴۹:** در دایره ای به شعاع ۶ سانتی متر، اندازه زاویه مرکزی  $\frac{\pi}{۶}$  رادیان است. اندازه هر یک از پارامترهای زیر را بیابید.

$$L = r\theta = ۶ \times \frac{\pi}{۶} = \pi$$

الف) طول کمان متناظر به آن زاویه را بیابید.

ب) مساحت قطاع متناظر به آن زاویه را بیابید.

$$S = \frac{1}{۲} r^2 \theta = \frac{1}{۲} \times ۳۶ \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۳۶\pi}{۱۲} = ۳\pi$$

**تذکر:** زاویه های معروف را بر حسب رادیان بدانید.

گفتیم که: رادیان  $2\pi = 360^\circ$ . پس:  $180^\circ = \pi \text{ rad}$  بنابراین:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180^\circ}{2} = 270^\circ$$

$$\frac{5\pi}{3} = 5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \times 60^\circ = 300^\circ$$

### نمونه سوالات پایان فصل

۱ اگر  $\sin x = 2a - b$  و  $\cos x = a + 2b$ ، ثابت کنید:  $a^2 + b^2 = \frac{1}{5}$

۲ اگر در مثلث  $ABC$ ،  $\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = 1$ ، نوع مثلث را مشخص کنید.

۳ ثابت کنید:  $(x \sin a - y \cos a)^2 + (x \cos a + y \sin a)^2 = x^2 + y^2$

۴ ثابت کنید:  $\tan x - \csc x \cdot \sec x (1 - 2 \cos^2 x) = \cot x$

۵ اگر  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  و  $\tan \alpha = 10$ ، سایر نسبت های مثلثاتی نظیر  $\theta$  را بیابید.

۶ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{\sin^2 25^\circ - 5 \tan^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ}{\sqrt{\cot^2 45^\circ - \frac{\cos 48^\circ}{\sin 52^\circ}}}$$

۷ ثابت کنید در هر مثلث، تساوی زیر برقرار است:

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

۸ حد اقل و حد اکثر عبارت مقابل را به دست آورید.

$$A = 4 - 6|\cos x|$$

۹ اگر  $\cot x = \sqrt{4 - m}$  و  $\sin x = \sqrt{\frac{3}{m}}$  باشند، مقدار  $m$  به دست آورید.

۱۰ اگر  $x$  زاویه ای در ربع اول یا سوم باشد، ثابت کنید  $(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})^2 (\tan x + \cot x - 2)$  همواره یک مربع کامل است.



- ۱۱ اگر  $a \sin x + b \cos x = 2c$  و  $b \sin x - a \cos x = c$  ثابت کنید:  $a^2 + b^2 = 5c^2$
- ۱۲ حد اقل و حد اکثر عبارات زیر را پیدا کنید.
- الف)  $A = \sin^2 x - 4 \sin x + 1$       ب)  $5 - 4|\cos x|$
- ۱۳ درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.
- الف)  $\frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} + \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = 2 \tan^2 x$
- ب)  $\sec^2 x = (1 - \cos^2 x) \sec^2 x \times \csc^2 x$
- ج)  $1 - \cot^2 \theta = \cos^2 \theta - \csc^2 \theta \cos^2 \theta$
- د)  $\sec x - \sec x \sin^2 x = \cos x$
- هـ)  $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\theta \neq 90^\circ)$
- و)  $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}$
- ۱۴ نشان دهید عبارت مقابل، مستقل از  $x$  می باشد:  $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}$
- ۱۵ اگر  $\sin x (1 + \cot^2 x) < 0$  باشد، انتهای کمان در کدام ناحیه است؟
- ۱۶ اگر  $\sin x \cos x = -\frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\sin x - \cos x$  را محاسبه کنید.
- ۱۷ اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$  کدام است؟
- ۱۸ اگر  $\sin(x - y) + \cos(x + y) = 2$  باشد؛ مقدار  $x$  و  $y$  را بیابید.
- ۱۹ اگر  $\sin x = \frac{m+2}{m+3}$  و  $\cot x = \frac{m+1}{m+2}$  مقدار  $m$  را پیدا کنید.
- ۲۰ ثابت کنید عبارت مقابل، مربع کامل است:  $2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$
- ۲۱ اگر  $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$  باشد، حاصل عبارت  $\sin^2 x + \cos^2 x$  را بیابید.