

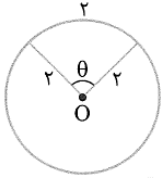
# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

## درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه

**درجه :** اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم زاویه مرکزی روبرو به هر قسمت آن یک درجه است  
**رادیان :** برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبروی آن با شعاع آن مساوی باشد

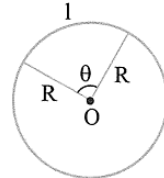
new



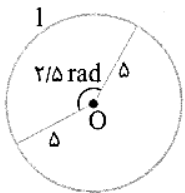
اندازه این زاویه بر حسب درجه، تقریباً برابر  $57/3^\circ$  می باشد. بنابراین  $1 \approx 57/3^\circ$  رادیان

پس در دایره ای به شعاع R، زاویه مرکزی ای که مقابل به کمانی به اندازه R باشد، برابر با یک رادیان است.

$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{\text{طول کمان روبروی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$



در دایره ای به شعاع ۵، اندازه کمان روبرو به زاویه مرکزی ۲/۵ رادیان کدام است؟



۱۰ (۴)

۵ (۳)

۱۲ (۲)

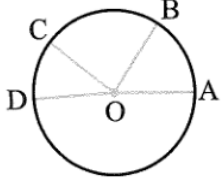
۱۲/۵ (۱)

در این جا  $R = 5$  و  $\theta = 2/5$  است، با توجه به رابطه  $l = R\theta$  داریم:

$$l = R\theta = (5) \times (2/5) = 12/5$$

در شکل مقابل، O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره برابر r می باشد. اگر  $\widehat{AB} = r$  و  $\widehat{BC} = \frac{3}{2}\widehat{AB}$  باشند،

اندازه زاویه AOC بر حسب رادیان کدام است؟



$\frac{7}{2}$  (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

۲ (۱)

$$\widehat{BC} = \frac{3}{2}\widehat{AB} = \frac{3}{2}r$$

اندازه کمان های BC و CD را بر حسب r به دست می آوریم:

در دایره به شعاع r، اگر طول  $\widehat{AB}$  برابر r باشد، آنگاه اندازه زاویه AOB برابر ۱ رادیان است. داریم:

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r \Rightarrow \text{اندازه زاویه AOC برابر } \frac{5}{2} \text{ رادیان است.} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

تبدیل درجه به رادیان و بلعکس :

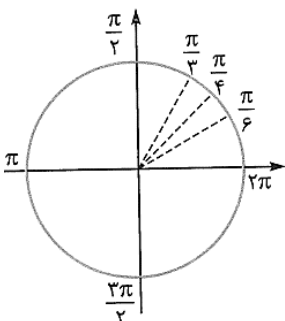
اگر اندازه یک زاویه بر حسب درجه D و بر حسب رادیان R باشد، داریم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{3^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$$

به عنوان مثال می خواهیم اندازه زاویه  $3^\circ$  را بر حسب رادیان بیابیم:

پس  $3^\circ$  همان  $\frac{\pi}{6}$  رادیان است.

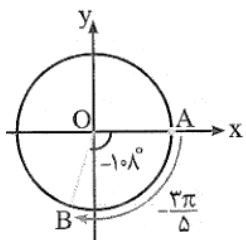


درجه	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
رادیان	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

زاویه  $-108^\circ$  را به رادیان و زاویه  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان را به درجه تبدیل کنید و هر دو زاویه را روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

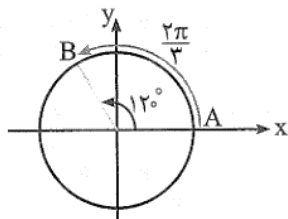


$$D = -108 \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \times (-108) = -\frac{3\pi}{5}$$

$$\text{با توجه به رابطه } R = \frac{\pi}{180} D \text{ داریم:}$$

نمایش این زاویه روی دایره مثلثاتی به صورت روبه‌رو است:

توجه کنید برای نمایش زاویه با اندازه منفی باید از نقطه A در خلاف جهت مثلثاتی حرکت کرد.



$$R = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120$$

$$\text{با توجه به رابطه } D = \frac{180 R}{\pi} \text{ داریم:}$$

در دایره‌ای به شعاع ۴ متر، توسط زاویه  $\alpha$ ، کمانی به طول ۵ متر ایجاد می‌شود. با فرض  $\pi = 3$ ، اندازه  $\alpha$  بر حسب درجه کدام است؟

۸۱ (۴)

۷۵ (۳)

۷۲ (۲)

۶۸ (۱)

طبق فرض  $r = 4$  و  $l = 5$  می‌باشد. بنابراین اندازه  $\alpha$  بر حسب رادیان برابر است با:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{5}{4} \Rightarrow D = \frac{R \times 180}{\pi} = \frac{\frac{5}{4} \times 180}{\pi} \stackrel{\pi=3}{=} \frac{\frac{5}{4} \times 180}{3} = 75 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

یک تسمه فلزی به طول  $10\pi$  را به صورت یک دایره حلقه کرده‌ایم. اندازه کمان مقابل به زاویه مرکزی  $100^\circ$  از این حلقه

تقریباً کدام است؟ ( $\pi = 3/1$ )

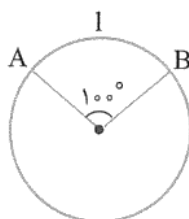
۹/۸ (۴)

۸/۶ (۳)

۸/۲ (۲)

۷/۸ (۱)

محیط دایره همان طول تسمه یعنی  $10\pi$  است. با توجه به این که محیط هر دایره از رابطه  $2\pi R$  به دست می‌آید،



معلوم است که  $R = 5$  است. حالا تنها چیزی که برای محاسبه طول کمان لازم داریم، اندازه زاویه مرکزی بر حسب رادیان است، که می‌شود:  $\frac{5\pi}{9}$

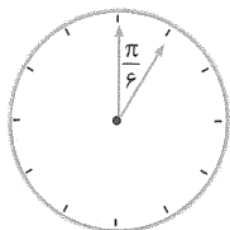
$$l = R\theta \Rightarrow l = 5 \times \frac{5\pi}{9} = \frac{25\pi}{9} \approx \frac{25 \times (3/1)}{9} \approx 8/6$$

یک ساعت دیواری را تصور کنید:

زاویه بین هر دو عدد متوالی روی ساعت چند رادیان است؟

زاویه بین هر دو ساعت متوالی برابر است با  $\frac{1}{12}$  از کل  $360^\circ$  درجه ساعت، یعنی

$$360^\circ \times \frac{1}{12} = 30^\circ \text{؛ هم که همان } \frac{\pi}{6} \text{ است.}$$



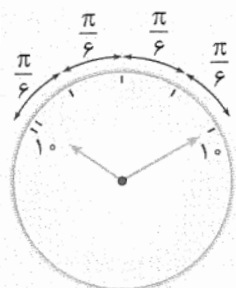
در مدت ۴ ساعت عقربه ساعت‌شمار، چند رادیان حرکت می‌کند؟

$$\text{در مدت زمان ۴ ساعت، عقربه ساعت‌شمار ۴ تا } \frac{\pi}{6} \text{ حرکت می‌کند که می‌شود } 4 \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

در ساعت  $۱۰:۱۰'$  زاویه بین عقربه ساعت شمار و عقربه دقیقه شمار چه قدر است؟



در ساعت  $۱۰:۱۰'$  یعنی  $۴$  تا  $\frac{\pi}{6}$  عقربه دقیقه شمار از عقربه ساعت شمار جلو افتاده است یعنی  $\frac{2\pi}{3}$ ؛ ولی در این مدت عقربه ساعت شمار هم بی کار نبوده و به اندازه  $\frac{\pi}{36}$  جلو آمده است، پس زاویه

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{36} = \frac{23}{36}\pi = \frac{23}{36}\pi$$

بین آنها می شود:

جالب است بدانید که به صورت کلی در ساعت  $h : m'$  زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار بر حسب درجه برابر است با:

$$|\frac{11}{2}m - 30h|$$

در ساعت  $۱:۳۰'$  اندازه زاویه ای که عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار می سازند، بر حسب رادیان کدام است؟



$$\frac{5\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۲)$$

ابتدا زاویه مورد نظر را بر حسب درجه به دست می آوریم.

در ساعت  $۱:۳۰'$ ، زاویه بین دو عقربه بر حسب دقیقه برابر  $۲۷۰' = ۳۰' + ۴ \times ۶۰'$  می باشد، از طرفی کل ساعت به  $۷۲۰' = ۱۲ \times ۶۰'$  تقسیم

می شود. بنابراین:

$$\text{گزینه (۲)} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \times ۱۳۵ = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \times ۱۳۵ = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \times ۱۳۵ = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}$$

رابطه طول کمان (L) با زاویه  $\alpha$  بر حسب درجه :

با نخ به طول 100 سانتی متر یک دایره می سازیم ، اگر طول کمان AB در این دایره 40 سانتی متر باشد اندازه زاویه مرکزی AOB را بیابید ؟

$$\frac{40}{100} = \frac{\alpha}{360} \rightarrow \alpha = 144 \rightarrow \frac{144}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{4\pi}{5}$$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

(برگرفته از کتاب درسی)

زاویه  $\frac{2\pi}{9}$  رادیان چند درجه است؟

- (۱)  $25^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $40^\circ$  (۴)  $50^\circ$

(برگرفته از کتاب درسی)

زاویه  $37/5^\circ$  چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{16}$  (۲)  $\frac{5\pi}{24}$  (۳)  $\frac{5\pi}{18}$  (۴)  $\frac{3\pi}{8}$

زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۳، ۵ و ۷ متناسب می‌باشند. کوچک‌ترین زاویه مثلث بر حسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{5}$  (۲)  $\frac{\pi}{6}$  (۳)  $\frac{\pi}{8}$  (۴)  $\frac{\pi}{9}$

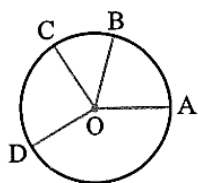
در چهارضلعی محدب ABCD، رابطه  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$  بین اندازه زاویه‌های داخلی آن برقرار است. اندازه زاویه C بر حسب رادیان

کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{12}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳)  $\frac{7\pi}{12}$  (۴)  $\frac{7\pi}{9}$

اگر  $\theta$  زاویه حاده و  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -\frac{1}{4}$  باشد، اندازه زاویه  $\theta$  بر حسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{5\pi}{12}$



در شکل مقابل، O مرکز دایره و طول کمان AB برابر r (شعاع دایره) می‌باشد. اگر  $\widehat{CD} = \frac{5}{2}\widehat{CB}$  و  $\widehat{BC} = \frac{3}{4}\widehat{AB}$

(برگرفته از کتاب درسی)

باشد، اندازه زاویه AOD (کمان ABD) چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{29}{8}$  (۲)  $\frac{27}{8}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{23}{8}$

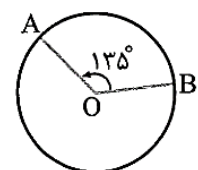
(برگرفته از کتاب درسی)

در دایره‌ای به شعاع ۶۰ سانتی‌متر، اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول یک متر، چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{1}{15}$  (۲)  $\frac{1}{60}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

با توجه به شکل مقابل، اگر طول کمان AB برابر  $3\pi$  باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

- (۱)  $16\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $\frac{9}{16}\pi$  (۴)  $\frac{16}{9}\pi$



اگر روی دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت  $\frac{25\pi}{3}$  کیلومتر طی شود، زاویه دوران بر حسب درجه کدام است؟

- (۱) ۲۳۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۲۷۵ (۴) ۳۰۰

چه مدت طول می‌کشد که عقربه دقیقه‌شمار به اندازه  $\frac{7\pi}{5}$  رادیان دوران کند؟

- (۱) ۵۴ دقیقه (۲) ۵۰ دقیقه (۳) ۴۸ دقیقه (۴) ۴۲ دقیقه

در ساعت  $5:00$  زاویه بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{37\pi}{36}$  (۲)  $\frac{13\pi}{12}$  (۳)  $\frac{43\pi}{36}$  (۴)  $\frac{5\pi}{4}$

ابتدا نقطه A (۱۰) روی دایره مثلثاتی را به اندازه  $140^\circ$  دوران می‌دهیم تا به نقطه B برسیم و سپس نقطه B را به اندازه  $\frac{1}{4}$  دور کامل در

جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا به نقطه C برسند. طول کمان BC کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{3\pi}{5}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{5\pi}{18}$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

مقدار عددی عبارت  $\cos \frac{3\pi}{2} - \tan 2\pi + \frac{2}{\sqrt{3}} \cot \frac{\pi}{3}$  ، کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

۲ (۳)

۱ (۲)

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

حاصل کسر  $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{6}}$  ، کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$\frac{7}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

(برگرفته از کتاب درسی)

حاصل عبارت  $\tan \frac{\pi}{7} \cot \frac{\pi}{7} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + \sin^2 \frac{\pi}{3}$  ، کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{15}{4} \quad (2)$$

$$\frac{13}{4} \quad (1)$$

(برگرفته از کتاب درسی)

مقدار عددی عبارت  $\cos^2 \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{7} - 2 \cot \frac{\pi}{4}$  ، کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

اگر  $\theta \in [0, 2\pi]$  و  $\sin \theta = 1$  باشد، مقدار عددی  $\cos 2\theta + \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin 3\theta$  کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$\sin \frac{4\pi}{7} < 0, \cos \frac{6\pi}{5} < 0, \tan \frac{11\pi}{6} < 0, \cot \frac{13\pi}{8} > 0$$

چند تا از نامساوی‌های روبه‌رو صحیح است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

کدام یک از عبارت‌های زیر، عددی منفی است؟

$$\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} \quad (4)$$

$$\cos \frac{7\pi}{5} + \cot \frac{5\pi}{7} \quad (3)$$

$$\sin \frac{3\pi}{5} - \tan \frac{7\pi}{8} \quad (2)$$

$$\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{7} \quad (1)$$

## درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

هدف ما در این درس پیدا کردن مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای خاص است که به کمک یک روش دو مرحله ای که در ادامه گفته میشه قابل محاسبه هستند است .

این زوایای خاص ( که ۱۲ تا هستند ) عبارتند از :  $(۱۲۰, ۱۳۵, ۱۵۰)$  و  $(۲۱۰, ۲۲۵, ۲۴۰)$  و  $(۳۰۰, ۳۱۵, ۳۳۰)$   
 ناحیه دوم      ناحیه سوم      ناحیه چهارم

### روش دو مرحله ای :

۱- تعیین نسبت مثلثاتی به کمک محور معیار :

محور معیار : باید بینیم زاویه حاده  $\theta$  توسط کدام محور منتقل شده .

محور عمودی (  $\frac{\pi}{2}$  یا  $\frac{3\pi}{2}$  یا  $\frac{5\pi}{2}$  یا  $\frac{7\pi}{2}$  و ... ) باعث تغییر نسبت مثلثاتی می شود ←

محور افقی (  $۰$  یا  $\pi$  یا  $۲\pi$  یا  $۳\pi$  یا  $۴\pi$  و ... ) نسبت مثلثاتی ثابت می ماند

۲- تعیین علامت نهایی : باید بینیم نسبت مثلثاتی اولیه در زاویه اولیه داده شده در کدام ربع قرار دارد و علامت آن چیست ... ←

مقادیر  $\sin ۴۲^\circ$  و  $\cos(\frac{9\pi}{4})$  را بیابید.

چون  $۴۲^\circ$  از  $۳۶^\circ$  بزرگتر است اول یک  $۳۶^\circ$  را از آن کم می کنیم:  $۴۲^\circ - ۳۶^\circ = ۶^\circ$ . حالا می گوییم:

$$\sin ۴۲^\circ = \sin ۶^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{9\pi}{4}$  هم از  $۲\pi$  بزرگتر است پس از  $\frac{9\pi}{4}$  باید  $۲\pi$  را کم کنیم و بعد کسینوسش را حساب کنیم:

$$\cos(\frac{9\pi}{4}) = \cos(\frac{8\pi + \pi}{4}) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

اگر  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$  باشد، حاصل عبارت  $\sin(\alpha - \pi) + \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) + \sin(4\pi - \alpha)$  کدام است؟

$$-\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (1)$$

مقدار عبارت  $\sin \frac{\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{14} - 2 \sin \frac{6\pi}{7}$  را بیابید.

$$(\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7}) + (\cos \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{6\pi}{7})$$

ابتدا عبارت را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\frac{5\pi}{14} + \frac{6\pi}{7} = \frac{17\pi}{14} \quad \text{متمم نیستند}$$

$\frac{6\pi}{7}$  که همان  $\pi - \frac{\pi}{7}$  است پس سینوس هایشان با هم برابرند و چون  $\frac{5\pi}{14} + \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$  است، این دو زاویه متمم‌اند

یعنی  $\cos \frac{5\pi}{14} = \sin \frac{\pi}{7}$  و در نتیجه:  $\cos \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{6\pi}{7} = 0$  پس حاصل کل عبارت صفر می‌شود.

حاصل عبارت  $A = \tan(\pi + \alpha) + \frac{\sin(\pi + \alpha) + 3\sin(3\pi + \alpha) - 4\sin(4\pi + \alpha)}{3\cos(\pi + \alpha) + \cos(5\pi + \alpha)}$  چند برابر  $\tan \alpha$  است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

در عبارت  $k\pi + \alpha$  وقتی  $k$  فرد باشد یک منفی می‌آید پشت  $\sin$  و  $\cos$  ولی اگر زوج باشد هیچ اتفاقی نمی‌افتد.  $\tan$  با جمع شدن مضارب صحیح  $\pi$  عوض نمی‌شود. پس داریم:

$$A = \tan \alpha + \frac{(-\sin \alpha) + 3(-\sin \alpha) - 4\sin \alpha}{3(-\cos \alpha) + (-\cos \alpha)} = \tan \alpha + \frac{-8\sin \alpha}{-4\cos \alpha} = \tan \alpha + 2\tan \alpha = 3\tan \alpha$$

حاصل عبارت  $\frac{\cot(-60^\circ) - \tan(-60^\circ)}{\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4})}$  را به دست آورید؟

ابتدا تک تک اعداد را با کم کردن ضرایب  $36^\circ$  و  $2\pi$ ، کوچک‌تر از  $36^\circ$  کنیم:  $-60^\circ = -(72^\circ - 12^\circ) \Rightarrow 12^\circ$

$$\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi - \pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi + \pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$$

پس باید به جای  $-60^\circ$ ،  $\frac{23\pi}{4}$  و  $\frac{25\pi}{3}$  به ترتیب زوایای  $12^\circ$ ،  $-\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{\pi}{3}$  را قرار دهیم:

$$\frac{\cot(12^\circ) - \tan(12^\circ)}{\sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{\pi}{4})} = \frac{-\tan 3^\circ + \cot 3^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

حاصل  $\sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \tan^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)$  کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)

۳ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ، آن گاه حاصل  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\alpha - \pi)}$  کدام است؟

$\frac{1}{15}$  (۴)

$\frac{1}{5}$  (۳)

$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

با فرض  $\tan 22^\circ = \frac{2}{5}$ ، حاصل عبارت  $\frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos 562^\circ}$  برابر کدام است؟

$\frac{2}{5}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{2}{2}$  (۲)

$\frac{2}{5}$  (۱)

اگر  $\tan \theta = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل کسر  $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{-\cos(11\pi + \theta) + \sin(13\pi - \theta)}$  کدام است؟

$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{1}{7}$  (۳)

$\frac{9}{7}$  (۲)

۳ (۱)

تمام مقادیر  $x$  را که به ازای آن، تساوی  $\tan(x + 25^\circ) = \cot(x + 45^\circ)$  برقرار می باشد، کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$k\pi - \frac{\pi}{18}$  (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{18}$  (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{18}$  (۲)

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{18}$  (۱)

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه متمم باشند، آن گاه  $\tan \alpha = \cot \beta$

$$\tan(\underbrace{x + 25^\circ}_{\alpha}) = \cot(\underbrace{x + 45^\circ}_{\beta}) \Rightarrow (x + 25^\circ) + (x + 45^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 2x + 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2x = 20^\circ \Rightarrow x = 10^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{18}$$

از طرفی با اضافه کردن مضرب صحیح  $\pi$  به تانژانت، مقدار آن تغییر نمی کند:

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

پس تمام مقادیر  $k \in \mathbb{Z}$ ،  $k\pi + \frac{\pi}{18}$  را می توان به جای  $x$  قرار داد و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.



# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

حاصل  $\cot \frac{\pi}{8} + \cot \frac{3\pi}{8} + \cot \frac{4\pi}{8} + \cot \frac{5\pi}{8} + \cot \frac{7\pi}{8}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱)  $2 \cot \frac{\pi}{8}$

$\cot \alpha + \cot \beta = 0$

اگر دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  مکمل باشد، آن گاه:

مکمل یکدیگرند.  $\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \cot \frac{3\pi}{8} + \cot \frac{5\pi}{8} = 0$  ،  $\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \Rightarrow \cot \frac{\pi}{8} + \cot \frac{7\pi}{8} = 0$  مکمل یکدیگرند.

گزینه (۴) صحیح است.  $\Rightarrow \cot \frac{\pi}{8} + \cot \frac{3\pi}{8} + \cot \frac{4\pi}{8} + \cot \frac{5\pi}{8} + \cot \frac{7\pi}{8} = 0 \Rightarrow \cot \frac{\pi}{8} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$



# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

اگر  $x \cos 60^\circ = \cos 12^\circ + \sin 18^\circ + \sqrt{2} \sin 135^\circ$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

حاصل  $\cot(225^\circ) + \sin(-\frac{\pi}{4}) \cos(-\frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{3\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

(بزرگرفته از کتاب درسی)

اگر  $x$  زاویه حاده و  $\sin(4x + 3^\circ) = \sin x$  باشد، مقدار  $\tan^2 x$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)  $\frac{1}{3}$

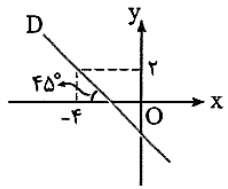
اگر  $x$  زاویه حاده و  $\cos(2x + 10^\circ) = -\cos(x - 10^\circ)$  باشد، مقدار  $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{7}{2}$

(سراسری تجربی)

حاصل  $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱



با توجه به شکل مقابل، عرض از مبدأ خط  $D$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲) -۲ (۳)  $-\frac{5}{2}$  (۴) -۳

(سراسری تجربی)

اگر  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی باشد،  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

حاصل  $4 \cos 8^\circ - 5 \sin 10^\circ - 3 \cos 19^\circ - 2 \sin 28^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $5 \cos 10^\circ$  (۲)  $4 \sin 10^\circ$  (۳)  $-4 \sin 10^\circ$  (۴)  $-5 \cos 10^\circ$

اگر  $\tan 76^\circ = 4$  باشد، حاصل  $\sin^2 10^\circ + \cos^2 8^\circ - \cot 166^\circ$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۴

مقدار عددی عبارت  $\frac{\cos 7^\circ + 2 \sin 11^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 16^\circ + \sin 29^\circ - 3 \sin 11^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $-\frac{2}{5}$  (۴)  $-\frac{4}{5}$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

نقطه P روی دایره مثلثاتی با طول  $-\frac{5}{13}$  و عرض مثبت قرار دارد. اگر  $\theta$  زاویه بین نیم خط  $\vec{OP}$  و جهت مثبت محور x ها باشد،

حاصل  $\sin(\frac{\pi}{4} + \theta) + 2\cos(\frac{3\pi}{4} + \theta)$  چند برابر  $\frac{1}{13}$  است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۹ (۳) -۲۵ (۴) -۱۹

(سزاسازی تهریز)

حاصل عبارت  $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{4} + x)$  کدام است؟

- (۱)  $-2\sin x$  (۲) صفر (۳)  $2\sin x$  (۴)  $2\cos x$

اگر  $\sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha) = 2\sin \alpha$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، مقدار  $\sin \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(بزرگراه از کتاب درسی)

اگر  $\theta \in [0, \pi]$  و  $\sin \theta = \cos \theta$  باشد، مقدار  $\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + 2\cot(\frac{\pi}{4} + \theta)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲) -۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

حاصل  $\cos^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{4\pi}{9}$  چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)  $\frac{3}{4}$

در کدام گزینه، دو زاویه داده شده هم‌انتها نمی‌باشند؟

- (۱)  $90^\circ, 270^\circ$  (۲)  $50^\circ, 670^\circ$  (۳)  $120^\circ, 470^\circ$  (۴)  $\frac{5\pi}{3}, \frac{53\pi}{3}$

حاصل عبارت  $\frac{\sin 300^\circ}{1 - \cos 24^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

حاصل  $\sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{31\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴) صفر

اگر نقطه  $A(1, 0)$  به اندازه  $\frac{4}{3}$  دور کامل در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد تا به نقطه  $A'$  برسد، مختصات نقطه  $A'$  کدام است؟

- (۱)  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (۲)  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (۳)  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  (۴)  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

مقدار عددی عبارت  $\sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{17\pi}{4} + \tan \frac{15\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $2 + \sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2} - 2$  (۴) ۲

حاصل عددی عبارت  $\sin^{-2}(-\frac{3\pi}{4}) + \cos^{-2}(\frac{5\pi}{3}) - 2\tan(\frac{7\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

اگر  $P(1, -2\sqrt{2})$  و  $\theta$  زاویه بین  $\vec{OP}$  با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل  $\sqrt{2}\cos(\frac{9\pi}{4} + \theta) + 2\sin(\theta - \frac{3\pi}{4})$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

حاصل عبارت  $\cos(\frac{5\pi}{4} + \theta) + \sin(5\pi + \theta) + 2\sin(\frac{3\pi}{4} + \theta) - 2\cos(\theta - \pi)$  کدام است؟

- (۱)  $-2\cos \theta$  (۲)  $-2\sin \theta$  (۳)  $2\sin \theta$  (۴)  $2\cos \theta$

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

حاصل عبارت  $\tan(3\pi - \alpha) \cot(10\pi - \alpha) - \sin(3\pi + \alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$  برابر کدام است؟

(۱)  $\sin^2 \alpha$  (۲)  $\cos^2 \alpha$  (۳) ۱ (۴) -۱

اگر  $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{4} \sin(\Delta\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  باشد، حاصل  $2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin(11\pi - x)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{12}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{12}$

اگر  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$  باشد، حاصل کسر  $\frac{2 \sin x + 5 \cos x}{\sin x - \cos x}$  کدام است؟

(۱) -۴ (۲)  $-\frac{7}{3}$  (۳) -۱۲ (۴)  $-\frac{8}{3}$

(سراسری تهرانی)

از تساوی  $2 = \frac{2 \sin(\alpha - 3\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$  مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۱/۵

(سراسری تهرانی - ۹۱۴)

حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض  $\tan 15^\circ = 0/28$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{16}{9}$  (۲)  $-\frac{9}{16}$  (۳)  $\frac{9}{16}$  (۴)  $\frac{16}{9}$

(سراسری تهرانی شارج از کشور - ۹۱۴)

حاصل عبارت  $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ ، با فرض  $\tan 2^\circ = 0/4$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{7}{3}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

(سراسری ریاضی - ۹۱)

اگر  $\tan \theta = 0/2$  باشد، مقدار  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۱/۲ (۳) ۲ (۴) ۳

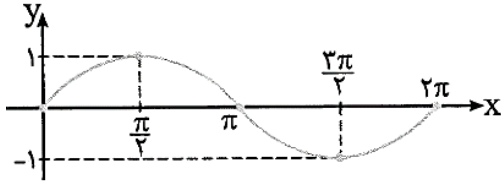
نقاط  $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$  روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل را مشخص می‌کند؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) ۲۴ ضلعی

## درس سوم : توابع مثلثاتی

### رسم تابع SIN :

نمودار تابع  $y = \sin x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار تابع  $y = \sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:

(۱) در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، تابع صعودی است.

(۲) در بازه  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ، تابع نزولی است.

(۳) در بازه  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ ، تابع صعودی است.

(۴) بیشترین مقدار تابع برابر ۱ و کمترین مقدار تابع برابر -۱ است.

کدام گزینه نادرست است؟

$$\sin 100^\circ > \sin 32^\circ \quad (۴)$$

$$\sin 29^\circ > \sin 305^\circ \quad (۳)$$

$$\sin 11^\circ > \sin 25^\circ \quad (۲)$$

$$\sin 4^\circ < \sin 7^\circ \quad (۱)$$

انتهای زاویه‌های  $4^\circ$  و  $7^\circ$  در ناحیه اول قرار دارند و در این ناحیه، مقدار سینوس با افزایش زاویه افزایش می‌یابد. پس:

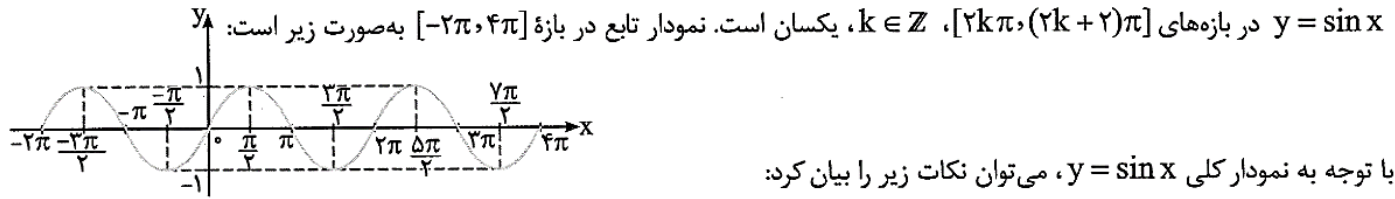
$$4^\circ < 7^\circ \Rightarrow \sin 4^\circ < \sin 7^\circ \quad \checkmark$$

$$9^\circ < 11^\circ < 25^\circ < 27^\circ \Rightarrow \sin 11^\circ > \sin 25^\circ \quad \checkmark$$

$$27^\circ < 29^\circ < 305^\circ < 36^\circ \Rightarrow \sin 29^\circ < \sin 305^\circ \quad \times$$

$\sin 100^\circ$  عددی مثبت و  $\sin 32^\circ$  عددی منفی می‌باشد، پس نامساوی  $\sin 100^\circ > \sin 32^\circ$  برقرار است. بنابراین گزینه (۳) پاسخ تست است.

با توجه به تساوی  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ، مقدار تابع سینوس با اضافه کردن  $2\pi$  رادیان تغییر نمی‌کند. پس نمودار تابع  $y = \sin x$  در بازه‌های  $[0, 2\pi]$ ،  $[2\pi, 4\pi]$  و ... یکسان است. همچنین با توجه به تساوی  $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ ، مقدار تابع سینوس با کم کردن  $2\pi$  رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند، در نتیجه نمودار تابع  $\sin x$  در بازه‌های  $[0, 2\pi]$ ،  $[-2\pi, 0]$ ،  $[-4\pi, -2\pi]$  و ... یکسان است. پس نمودار



با توجه به نمودار کلی  $y = \sin x$ ، می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

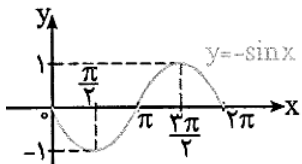
(۱) دامنه تابع  $f(x) = \sin x$  برابر  $\mathbb{R}$  و برد آن بازه  $[-1, 1]$  می‌باشد:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1, 1]$$

(۲) حداکثر مقدار تابع  $y = \sin x$  برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های  $\dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$  این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع  $y = \sin x$  در نقاطی به طول‌های  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

(۳) حداقل مقدار تابع  $y = \sin x$  برابر -۱ است و در نقاطی به طول‌های  $\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$  این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع  $y = \sin x$  در نقاطی به طول‌های  $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

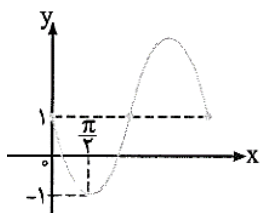
(۴) مقدار تابع  $y = \sin x$  در نقاطی به طول  $x = k\pi$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  برابر صفر است، بنابراین طول نقاط تلاقی نمودار این تابع با محور  $x$  ها از تساوی  $x = k\pi$ ،  $k \in \mathbb{Z}$  به دست می‌آید.



می‌دانیم برای رسم نمودار  $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار  $y = f(x)$  را نسبت به

محور  $x$  ها قرینه کنیم. بنابراین نمودار  $g(x) = -\sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

به کمک ویژگی‌های انتقال و قدرمطلق می‌توان نمودار برخی از توابع مثلثاتی سینوسی را از روی نمودار تابع  $y = \sin x$  رسم کرد.



ضابطه تابع نمودار مقابل، کدام است؟

$$y = -2 \sin x + 1 \quad (2)$$

$$y = -\sin x + 1 \quad (1)$$

$$y = 2 \sin x + 1 \quad (4)$$

$$y = \sin x + 1 \quad (3)$$

نمودار در سمت راست محور  $y$  ها، ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکزیمم است، بنابراین ضریب سینوس  $x$  باید منفی باشد، پس

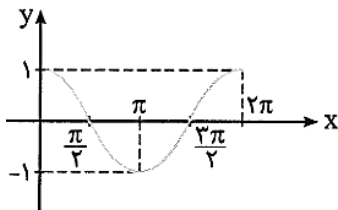
یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) صحیح است. از طرفی تابع به ازای  $x = \frac{\pi}{2}$  کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند. بنابراین با

قرار دادن  $x = \frac{\pi}{2}$  در ضابطه گزینه‌های (۱) و (۲)، باید مقدار  $-1$  برای  $y$  به دست آید:

$$y = -\sin x + 1 \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + 1 = -1 + 1 = 0 \quad \text{نادرست} \quad \times$$

$$y = -2 \sin x + 1 \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

رسم تابع  $\cos$  :



نمودار تابع  $y = \cos x$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار تابع  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  نکات زیر را می‌توان نوشت:

(۲) در بازه  $[\pi, 2\pi]$  تابع صعودی است.

(۱) در بازه  $[0, \pi]$  تابع نزولی است.

(۳) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر  $-1$  می‌باشد.

کدام گزینه نادرست است؟

$$\cos 19^\circ < \cos 28^\circ \quad (4)$$

$$\cos 25^\circ < \cos 20^\circ \quad (3)$$

$$\cos 14^\circ > \cos 17^\circ \quad (2)$$

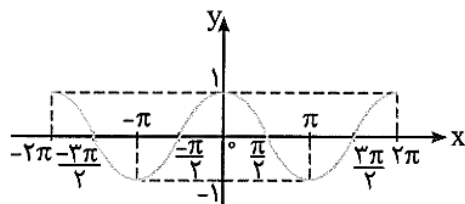
$$\cos \frac{\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{5} \quad (1)$$

در ناحیه‌های اول و دوم، مقدار تابع  $y = \cos x$  با افزایش مقدار  $x$  کم می‌شود:

$$\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{5} \quad \checkmark, \quad 14^\circ < 17^\circ \Rightarrow \cos 14^\circ > \cos 17^\circ \quad \checkmark$$

در ناحیه‌های سوم و چهارم، با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $\cos x$  نیز بیش‌تر می‌شود:

$$25^\circ > 20^\circ \Rightarrow \cos 25^\circ > \cos 20^\circ \quad \times, \quad 28^\circ > 19^\circ \Rightarrow \cos 28^\circ > \cos 19^\circ \quad \checkmark \Rightarrow \text{گزینه (۳) پاسخ تست است.}$$



نمودار تابع  $y = \cos x$  در بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار کلی  $y = \cos x$ ، نکات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [-1, 1]$$

(۱) دامنه تابع  $y = \cos x$  برابر  $\mathbb{R}$  و برد آن بازه  $[-1, 1]$  می‌باشد:

# حسابان ۱

فصل چهارم : مثلثات

کمترین و بیشترین مقدار تابع  $f(x) = -3 \cos x + 5$  را به دست آورید.

از نامساوی  $-1 \leq \cos x \leq 1$  و خواص نامساوی‌ها، حدود  $f(x)$  را مشخص می‌کنیم:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq -3 \cos x \leq 3 \xrightarrow{+5} 2 \leq -3 \cos x + 5 \leq 8 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 8$$

بنابراین کمترین مقدار تابع  $f$  برابر ۲ و بیشترین مقدار تابع برابر ۸ می‌باشد.

\* برای به دست آوردن کمترین و بیشترین مقدار توابع با ضابطه‌های  $f(x) = a \sin x + b$  و  $g(x) = a \cos x + b$ ، کافی است به جای  $\sin x$  و  $\cos x$  یک بار  $-1$  و بار دیگر  $1$  قرار دهیم.

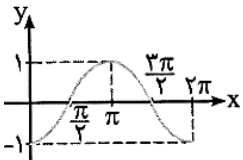
(۲) حداکثر مقدار تابع  $y = \cos x$  برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$  این مقدار را اختیار می‌کند

و در حالت کلی تابع  $y = \cos x$  در نقاطی به طول‌های  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

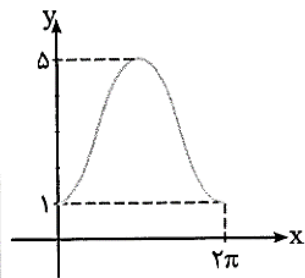
(۳) حداقل مقدار تابع  $y = \cos x$  برابر  $-1$  است و در نقاطی به طول‌های  $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$ ، کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

(۴) مقدار تابع  $y = \cos x$  در نقاطی به طول  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  برابر صفر است. در واقع طول نقاط تلاقی نمودار  $y = \cos x$  با

محور  $x$  ها از تساوی  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  به دست می‌آید.



همانند توابع سینوسی با قرینه کردن نمودار توابع کسینوسی نسبت به محور  $x$  ها، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم دو تابع  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = -\cos x$  جابه‌جا می‌شوند. نمودار  $y = -\cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت مقابل است:



نمودار تابع  $y = a \cos x + b$  به صورت مقابل است. مقدار تابع به ازای  $x = \frac{7\pi}{3}$  کدام است؟

۴ (۱)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$  (۴)

۳ (۲)

با توجه به نوع نمودار رسم‌شده، باید ضریب  $\cos x$  عددی منفی باشد. این تابع به ازای  $x = 0$ ، کمترین مقدار و به ازای  $x = \pi$ ، بیشترین مقدار را اختیار می‌کند:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow a \cos 0 + b = 1 \\ x=\pi \Rightarrow y=5 \Rightarrow a \cos \pi + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3, a = -2$$

$$\Rightarrow y = -2 \cos x + 3 \Rightarrow y\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -2 \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + 3 = -2 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = -2 \times \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

نمودار تابع  $y = \cos x$  را به کمک انتقال نمودار  $y = \sin x$  می‌توان رسم کرد. با توجه به تساوی

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ، اگر نمودار  $y = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = \cos x$  به دست می‌آید و

هم‌چنین می‌توان نمودار  $y = \sin x$  را با انتقال نمودار  $y = \cos x$  به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  به سمت راست رسم کرد.