

درسنامه آموزشی ریاضیات دهم و یازدهم

فصل مثلثات



نویسنده:

مهدی حاجی نژادیان

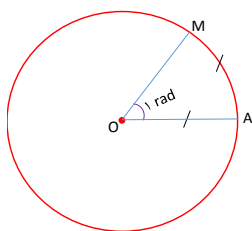
مدرس ریاضی

از دانشگاه صنعتی امیرکبیر

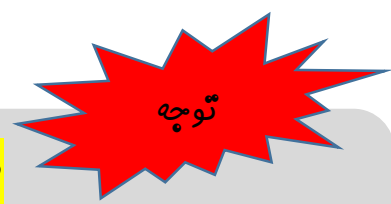
نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تعریف درجه: اگر هر دایره به 360 قسمت مساوی تقسیم شود، هر قسمت را یک درجه گویند.

تعریف رادیان: هر کمانی از دایره که طول آن برابر شعاع باشد، یک رادیان گویند:



$$OA = \widehat{AM}$$



$$\begin{cases} \text{درجه} & \text{رادیان} \\ 360 & 2\pi \\ D & R \end{cases} \rightarrow \frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$



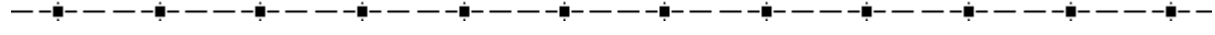
تست های نمونه

تست ۱: زاویه ۴۵ درجه، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) 2π
- (۴) π

حل:

$$\begin{cases} D = 45 \\ R = ? \end{cases} \rightarrow \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$



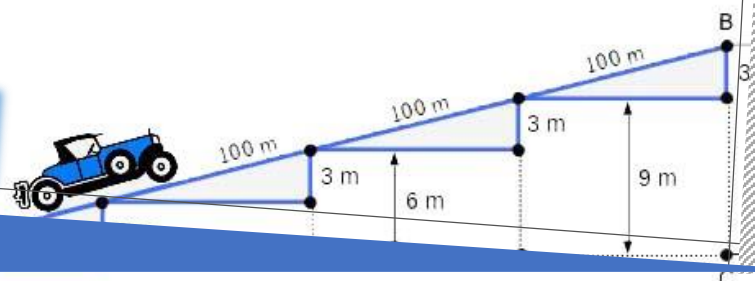
تست ۲: زاویه $\frac{2\pi}{3}$ چند درجه است؟

- (۱) ۱۲۰
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۱۰
- (۴) ۹۰

حل:

$$\begin{cases} D = ? \\ R = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{2}{3} \rightarrow R = \frac{2}{3} \times 180 = 120$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

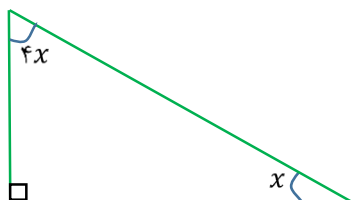


نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تست ۳: در یک مثلث قائم الزاویه، اگر یک زاویه حاده چهار برابر دیگری باشد، زاویه کوچکتر چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{15}$ (۳) $\frac{\pi}{10}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

حل:



$$x + 4x = 90 \rightarrow x = 18$$

$$\text{تبدیل به رادیان: } \frac{18}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{1}{10} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{10}$$

تست ۴: کمان $\frac{2\pi}{9}$ چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۷۲

حل:

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{2\pi}{9}}{\pi} \rightarrow D = 40$$

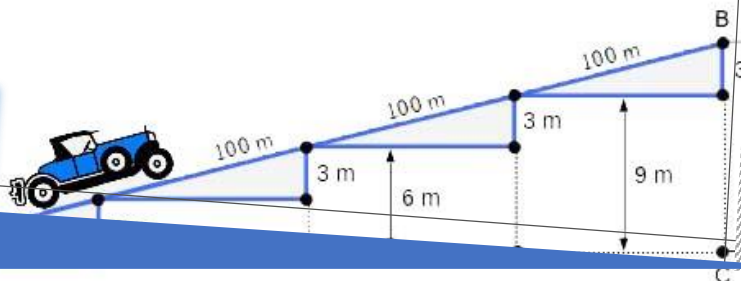
تست ۵: زاویه ۱۶۰ درجه، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{9}$ (۲) $\frac{8\pi}{9}$ (۳) $\frac{9\pi}{8}$ (۴) $\frac{9\pi}{16}$

حل:

$$\begin{cases} D = 160 \\ R = ? \end{cases} \rightarrow \frac{160}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{8\pi}{9}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تست ۶: دستگاهی که در هر ساعت ۱۲۰ دور می زند در هر ثانیه چند رادیان را طی می کند؟

$$\frac{\pi}{5} \quad (۱) \qquad \frac{\pi}{7} \quad (۲) \qquad \frac{\pi}{8} \quad (۳) \qquad \frac{\pi}{۱۵} \quad (۴)$$

حل:

چون تعداد دورها در هر ساعت ۱۲۰ است لذا در هر ثانیه $\frac{۱۲۰}{۳۶۰۰}$ دور زده می شود. بنابراین:

تعداد دورها در هر ثانیه برابر $\frac{۱}{۳۰}$ ، و چون هر دور برابر ۲π رادیان است لذا دستگاه در هر ثانیه $\frac{۱}{۳۰} \times ۲\pi$ یعنی $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان را طی می کند.

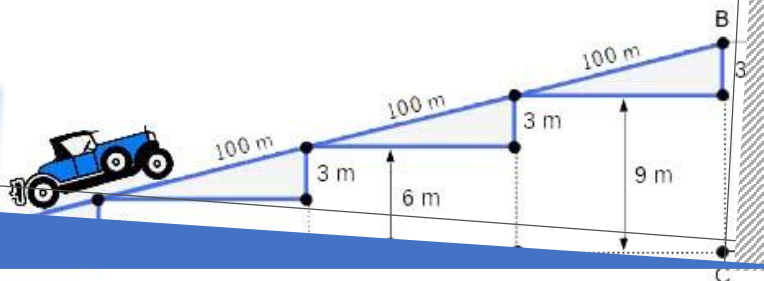
تست ۷: اگر زاویه های α, β متمم یکدیگر باشند و α چهل درجه از زاویه β بیشتر باشد، اندازه زاویه α بر حسب رادیان کدام است؟

$$\frac{\pi}{6} \quad (۱) \qquad \frac{۱۱\pi}{۳۶} \quad (۲) \qquad \frac{۱۳\pi}{۳۶} \quad (۳) \qquad \frac{۱۵\pi}{۳۶} \quad (۴)$$

حل:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ۹۰ \\ \alpha = ۴۰ + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۹۰ \\ \alpha - \beta = ۴۰ \end{cases} \rightarrow ۲\alpha = ۱۳۰ \rightarrow \alpha = ۶۵ \rightarrow \alpha = ۶۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۱۳\pi}{۳۶}$$

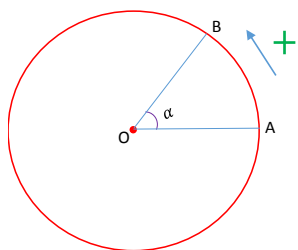
ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



دایره مثلثاتی

دایره ای جهت دار به مرکز مبدا مختصات و شعاع واحد که جهت مثبت آن جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت است را دایره مثلثاتی گویند.

جهت مثلثاتی: در مثلثات جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت را جهت مثبت و جهت موافق حرکت عقربه های ساعت را جهت منفی گویند.

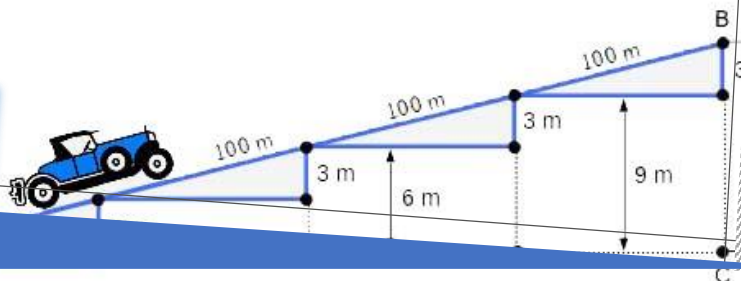


زاویه مثلثاتی: اگر نقطه A مبدا در نظر گرفته شود چنانچه متحرکی را از نقطه A با جهت ثابت (مثبت یا منفی) کمان \widehat{AB} را طی کند بعد از اینکه k بار دایره مثلثاتی را دور می زند و به نقطه B رسید در این صورت زاویه مرکزی مقابل به کمان \widehat{AB} را یک زاویه مثلثاتی گویند و معمولا آن را برابر α می گیرند.

$$\text{درجه } \angle AOB = k \times 360 + \alpha, \quad \text{رادیان } \angle AOB = k \times 2\pi + \frac{\pi}{180} \alpha$$

توجه

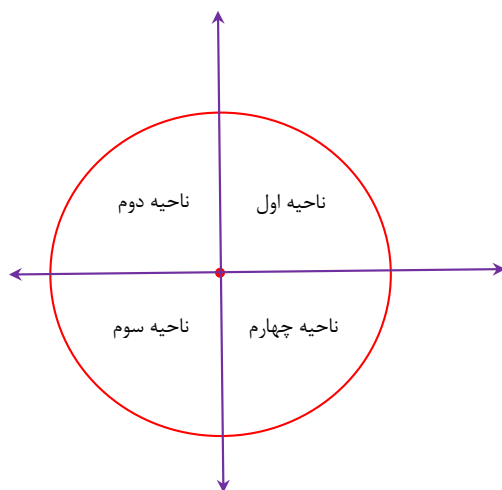
در روابط بالا $k \in \mathbb{Z}$ (عبارت است از اعداد صحیح) و اگر k یک عدد مثبت یا صفر فرض شود، حرکت در جهت مثبت و اگر k یک عدد منفی در نظر گرفته شود، حرکت در جهت منفی خواهد بود.



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



ناحیه های مثلثاتی: معمولا در مثلثات چهار ناحیه مثلثاتی وجود دارد که همان ناحیه های دستگاه مختصاتی هستند.



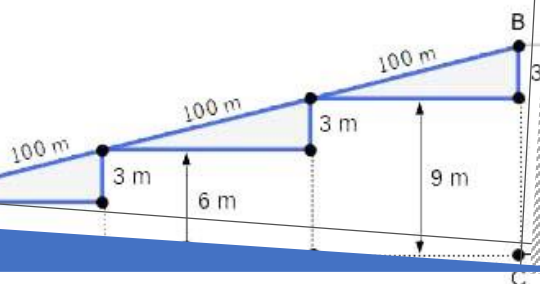
$$\text{ناحیه اول} = \{x \mid 0 \leq x \leq 90\} = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\text{ناحیه دوم} = \{x \mid 90 \leq x \leq 180\} = \left\{x \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right\}$$

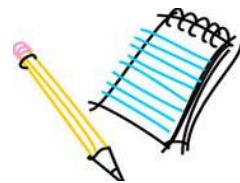
$$\text{ناحیه سوم} = \{x \mid 180 \leq x \leq 270\} = \left\{x \mid \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\text{ناحیه سوم} = \{x \mid 270 \leq x \leq 360\} = \left\{x \mid \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right\}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

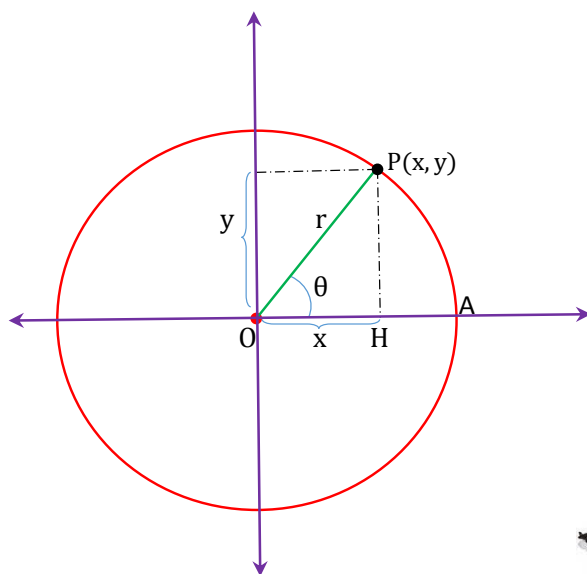


نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



نسبت های مثلثاتی:

دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع r را در نظر بگیرید. فرض کنید که این دایره قسمت مثبت محور x ها را در نقطه A قطع کرده باشد. P را به عنوان متحرکی روی دایره مثلثاتی در نظر بگیرید. نقطه P زاویه $\angle AOP$ را مشخص می کند. اندازه این زاویه را با θ نشان می دهیم. **بنابه قرارداد**، اگر متحرک P در **جهت خلاف حرکت** عقربه های ساعت جابجا شود θ را مثبت می گیریم و در غیر این صورت θ منفی فرض می شود. بنابراین نسبت های مثلثاتی **سینوس**، **کسینوس**، **تانزانت** و **کتانزانت** عبارتند از:



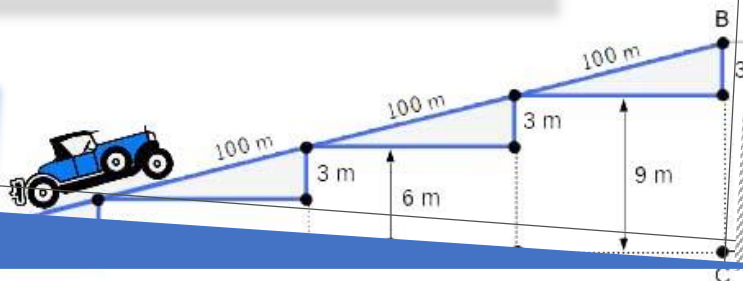
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

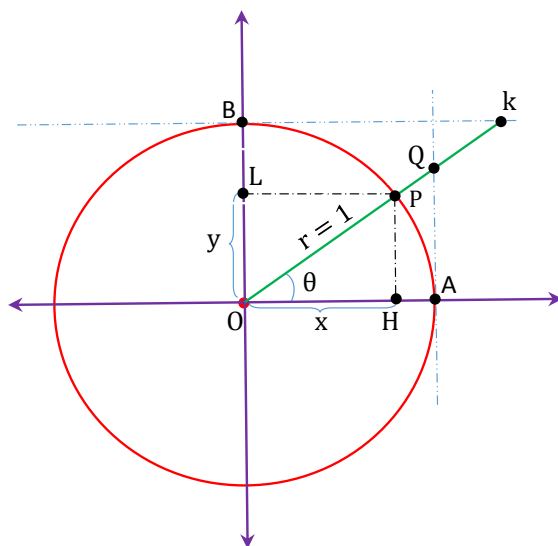


نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



وضع متعارف زاویه: اگر زاویه در دستگاه مختصات طوری قرار گرفته باشد که ضلع آغازی آن روی قسمت مثبت محور X ها و راس آن در مبدا مختصات باشد می گویند زاویه در وضع متعارف قرار دارد.

نسبت های مثلثاتی و برد آنها: فرض کنید زاویه θ در وضع متعارف قرار داشته باشد و ضلع پایانی آن دایره مثلثاتی را در نقطه ی $P(x, y)$ قطع کرده باشد در این صورت نسبت های مثلثاتی عبارتند از:



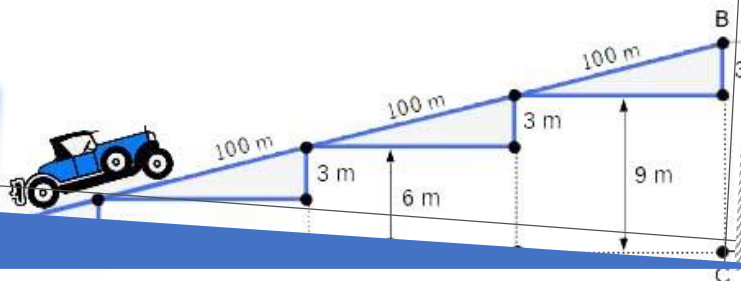
ناحیه اول: $\sin x > 0, \cos x > 0, \tan x > 0, \cot x > 0$

ناحیه دوم: $\sin x > 0, \cos x < 0, \tan x < 0, \cot x < 0$

ناحیه سوم: $\sin x < 0, \cos x < 0, \tan x > 0, \cot x > 0$

ناحیه چهارم: $\sin x < 0, \cos x > 0, \tan x < 0, \cot x < 0$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = y = \overline{OL}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = x = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{HP}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \overline{AQ}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\overline{LP}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{OB}} = \overline{BK}$$



$$\sin\theta \in [-1, 1]$$

$$\cos\theta \in [-1, 1]$$

$$\tan\theta \in \mathbb{R}$$

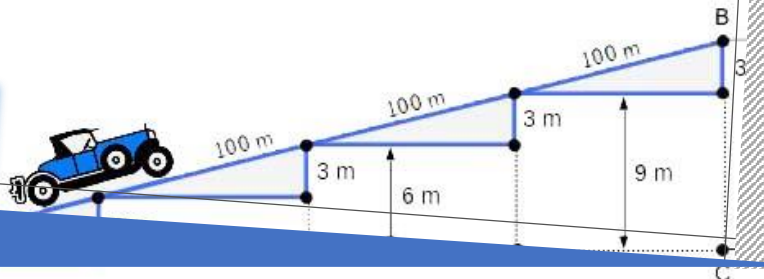
$$\cot\theta \in \mathbb{R}$$



توجه

چون $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ می توان گفت که سینوس و کسینوس توابعی کراندار (محدود) هستند.

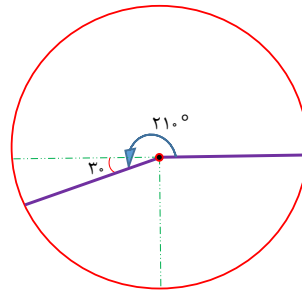
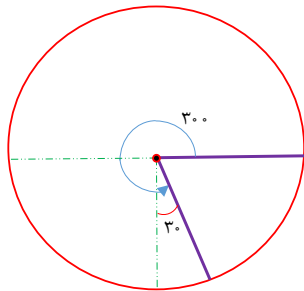
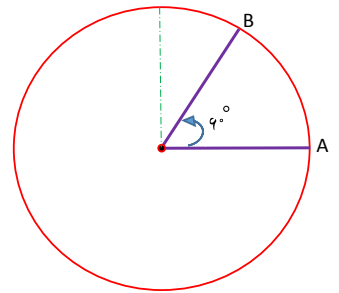
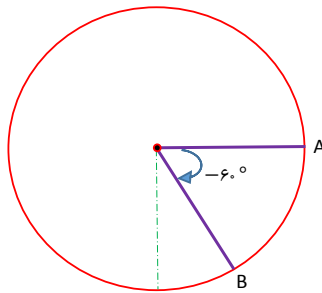
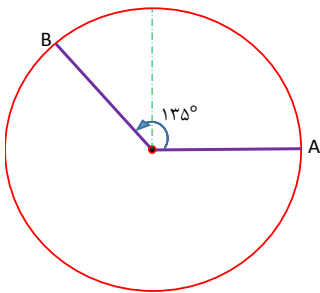
ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



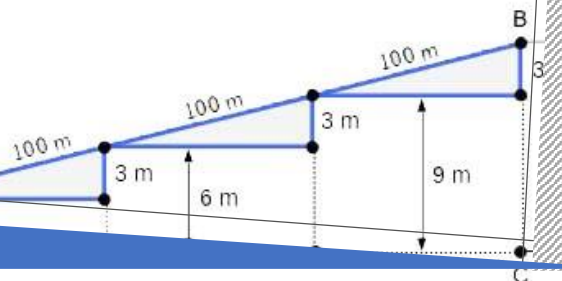
نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



مثال: انتهای کمان های 60° و -60° و 135° و 210° و 300° درجه را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید؟



ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

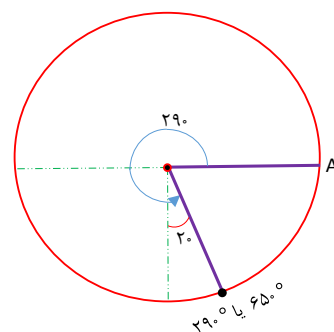
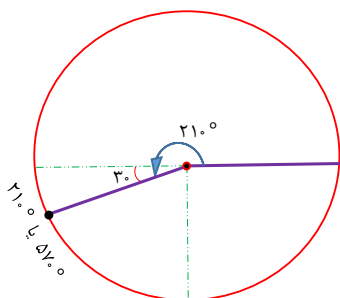
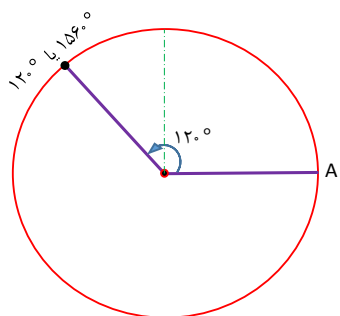


نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

مثال: زاوایای ۶۵° و ۵۷° و ۱۵۶° درجه را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید؟

$$۶۵^\circ = ۱ \times ۳۶^\circ + ۲۹^\circ \rightarrow ۲۹^\circ, \quad ۵۷^\circ = ۱ \times ۳۶^\circ + ۲۱^\circ \rightarrow ۲۱^\circ$$

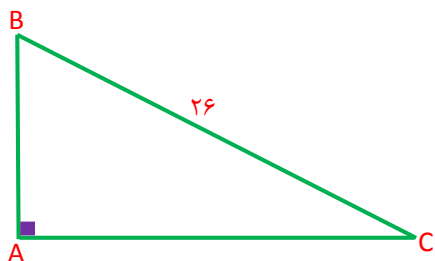
$$۱۵۶^\circ = ۴ \times ۳۶^\circ + ۱۲^\circ \rightarrow ۱۲^\circ$$



مثال: اگر در مثلث قائم الزوایه ABC با $\hat{A} = 90^\circ$ داشته باشیم $BC = ۲۶$ و $\tan B = \frac{۱۲}{۵}$ آنگاه طول

اضلاع قائمه مثلث مفروض را محاسبه کنید؟

جواب:

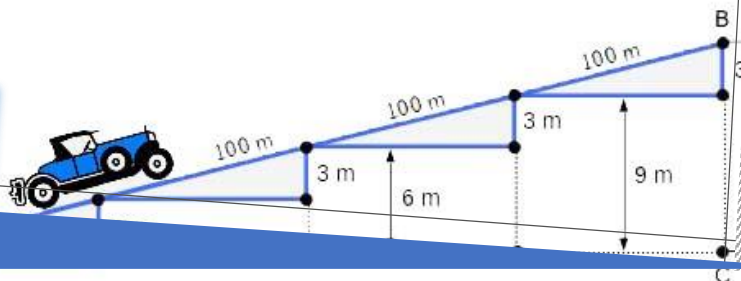


$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{۱۲}{۵} \rightarrow AC = \frac{۱۲}{۵} AB$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \rightarrow (۲۶)^2 = \left(\frac{۱۲}{۵} AB\right)^2 + (AB)^2 \rightarrow$$

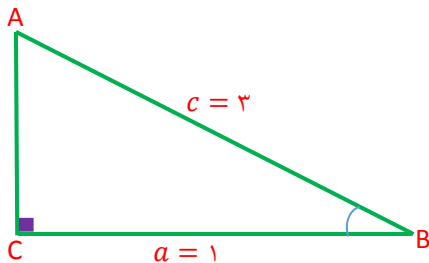
$$(۲۶)^2 = \frac{۱۴۴}{۲۵} AB^2 + (AB)^2 \rightarrow (۲۶)^2 = \frac{۱۶۹}{۲۵} (AB)^2 \rightarrow ۲۶ = \frac{۱۳}{۵} AB \rightarrow AB = ۱۰, AC = ۲۴$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

مثال: در مثلث قائم الزویه ABC که $\hat{C} = 90^\circ$ اضلاع $a = 1$ و $c = 3$ می باشند، حاصل $\cot B$ برابر:



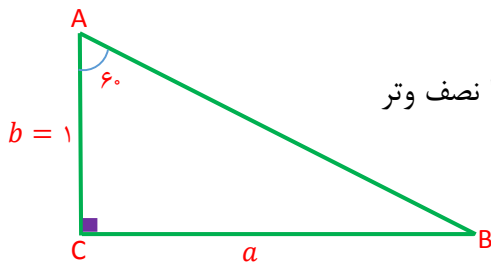
جواب:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \rightarrow AC = \sqrt{3^2 - 1} \rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

$$\cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \cot B = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال: در مثلث قائم الزویه ABC که $\hat{C} = 90^\circ$ درجه و اضلاع $b = 1$ و زاویه $\hat{A} = 60^\circ$ ضلع a را

بدست آورید؟



جواب: نکته: ضلع مقابل به زاویه 30° درجه همیشه برابر است با نصف وتر

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} \rightarrow$$

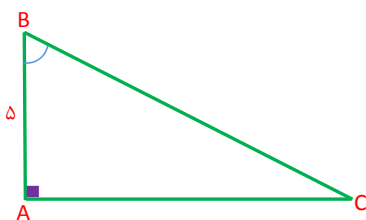
$$AC = \frac{1}{2} AB \stackrel{AC=1}{=} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} AB \rightarrow AB = 2$$

$$\rightarrow a^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = 4 - 1 \rightarrow a = \sqrt{3}$$

مثال: در مثلث ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ درجه و $AB = 5$ و $\sin B = \frac{4}{5}$ دو ضلع دیگر مثلث را بدست

آورید؟

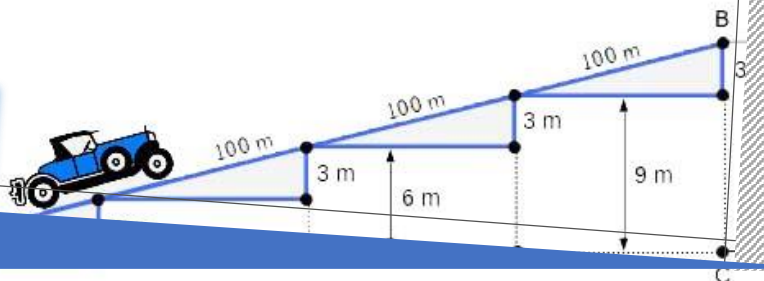
جواب:



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \rightarrow BC = \frac{5}{4} AC \rightarrow \left(\frac{5}{4} AC\right)^2 = (AC)^2 + 25$$

$$\frac{25}{16} AC^2 - AC^2 = 25 \rightarrow \frac{9}{16} AC^2 = 25 \rightarrow AC = \frac{20}{3}, \quad BC = \frac{5}{4} \left(\frac{20}{3}\right) = \frac{25}{3}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

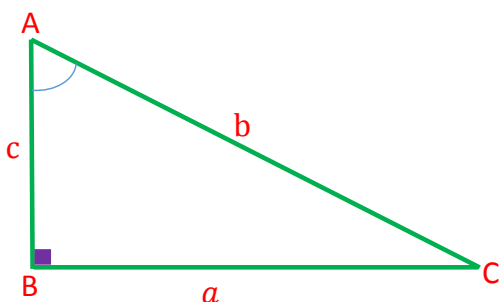


نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



روابط نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزویه:

اگر مثلث قائم الزویه ABC با رأس قائمه B را در نظر بگیریم در اینصورت روابط زیر در مورد نسبت های مثلثاتی آن مثلث برقرار هستند؟



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{وتر}} = \frac{a}{b} = \cos C$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{وتر}} = \frac{c}{b} = \sin C$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{ضلع مجاور } A} = \frac{a}{c} = \cot C$$

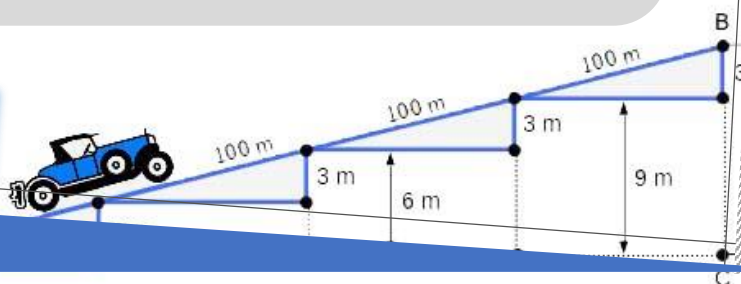
$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{ضلع مقابل } A} = \frac{c}{a} = \tan C$$

توجه

اگر α و β دو زاویه متمم یکدیگر باشند یعنی $\alpha + \beta = 90^\circ$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



مثال: حدود a را چنان تعیین کنید که عبارت $\cos x = 1 - 2a$ گزاره صحیح باشد.

جواب:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -1 \leq 1 - 2a \leq 1 \rightarrow -2 \leq -2a \leq 0 \rightarrow 0 \leq a \leq 1$$

مثال: در صورتی که $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$ باشد حدود K را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\cos \alpha = \frac{2k - 1}{k + 1}$$

جواب:

اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$ باشد یعنی انتهای کمان در ناحیه سوم است و در ناحیه سوم تغییرات نسبت مثلثاتی $\cos \alpha$ عبارت است از: $-1 < \cos \alpha < 0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$-1 < \frac{2k - 1}{k + 1} < 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{2k - 1}{k + 1} < 0 \rightarrow 2k - 1 < 0 \rightarrow k < \frac{1}{2} \\ \frac{2k - 1}{k + 1} > -1 \rightarrow \frac{2k}{k + 1} > 0 \rightarrow k > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < k < \frac{1}{2}$$

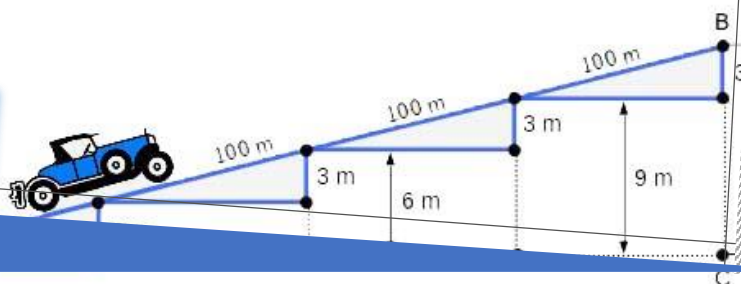
مثال: اگر $\tan^3 \alpha = \frac{1}{2}$ باشد انتهای کمان روبروی زاویه α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد.

جواب:

$$\tan^3 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \tan \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \rightarrow \tan \alpha > 0 \rightarrow$$

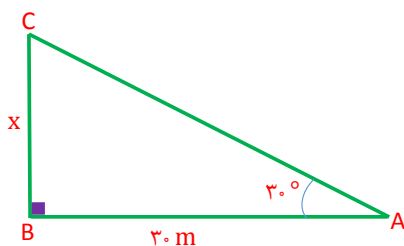
انتهای کمان ممکن است در ناحیه اول یا سوم دایره مثلثاتی باشد.

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

مثال: از نقطه A زاویه فراز بلندترین نقطه ی ساختمانی ۳۰ درجه است. اگر فاصله نقطه A تا پای ساختمان ۳۰ متر باشد ارتفاع ساختمان را بدست آورید؟



جواب:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{30} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30} \rightarrow x = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

مثال: اگر $\sin\theta \times \cos\theta > 0$ باشد انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

جواب:

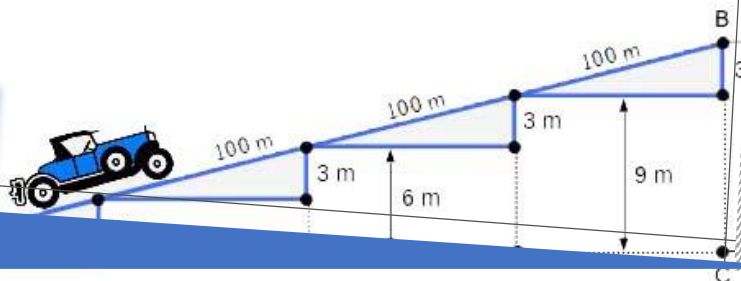
$$\sin\theta \times \cos\theta > 0 \rightarrow \begin{cases} \sin\theta > 0, & \cos\theta > 0 \rightarrow \text{ناحیه اول} \\ \sin\theta < 0, & \cos\theta < 0 \rightarrow \text{ناحیه سوم} \end{cases}$$

مثال: اگر چنانچه $\sin\theta \times \cos\theta < 0$ باشد انتهای کمان روبرو به زاویه α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

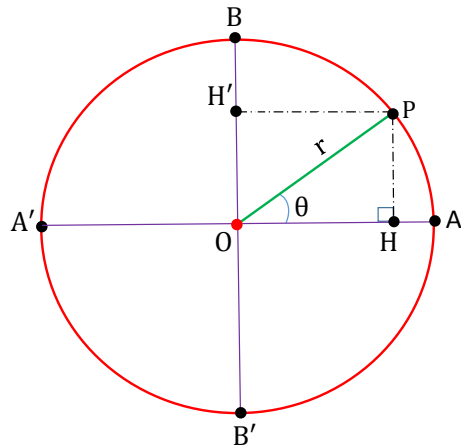
جواب:

$$\sin\theta \times \cos\theta < 0 \rightarrow \begin{cases} \sin\theta > 0, & \cos\theta < 0 \rightarrow \text{ناحیه دوم} \\ \sin\theta < 0, & \cos\theta > 0 \rightarrow \text{ناحیه چهارم} \end{cases}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



روابط بین نسبت های مثلثاتی :

یا توجه به شکل خواهیم داشت :



$$OH' = PH = \sin\theta \quad , \quad OH = PH' = \cos\theta$$

در مثلث قائم الزاویه OPH با توجه به قضیه فیثاغورث داریم :

$$(OH)^2 + (PH)^2 = (OP)^2 = r^2$$

اگر دایره فوق ، به عنوان دایره مثلثاتی مورد نظر باشه آنگاه $r = 1$ و خواهیم داشت :

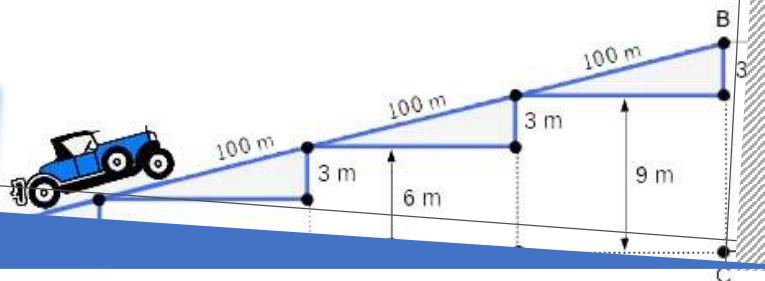
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همچنین برای محاسبه $\tan\theta$ و $\cot\theta$ خواهیم داشت :

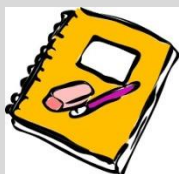


$$\left\{ \begin{array}{l} \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{PH}{OH} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{OH}{PH} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array} \right. \rightarrow \tan\theta \times \cot\theta = 1$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



برخی روابط دیگر...



$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

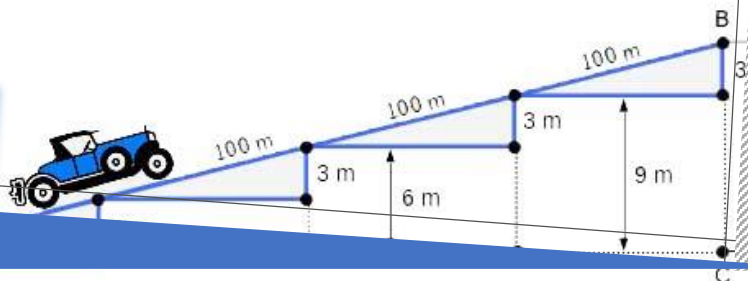
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} \end{cases}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \\ 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} \end{cases}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} \quad , \quad \sin^2\theta = \frac{1}{1 + \cot^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{\cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} \quad , \quad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات



مثال: اگر $\sin\theta = \frac{-8}{17}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ناحیه سوم باشد، سایر نسبت های مثلثاتی θ را محاسبه کنید؟

جواب:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{15}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{15}{8}$$

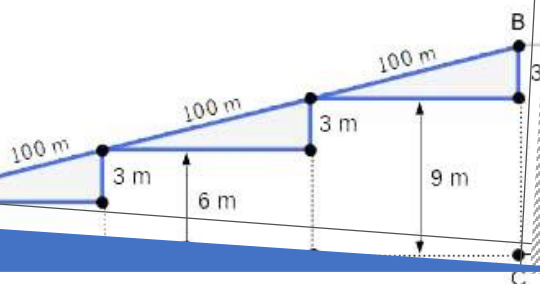
مثال: اگر $\tan\theta = -2$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ناحیه دوم باشد، سایر نسبت های مثلثاتی θ را محاسبه کنید؟

جواب:

$$\sin\theta = \pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

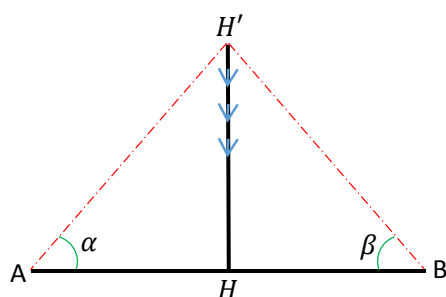


تست ۱: دو نقطه A و B که در دو طرف یک درخت و در امتداد پای یک درخت قرار دارند زاویه فراز آنها به ترتیب α و β است در این صورت ارتفاع درخت بر حسب α و β و AB کدام است؟

$$AB(\cot\alpha + \cot\beta) \quad (۲) \qquad AB(\tan\alpha + \tan\beta) \quad (۱)$$

$$\frac{AB}{\cot\alpha + \cot\beta} \quad (۴) \qquad \frac{AB}{\tan\alpha + \tan\beta} \quad (۳)$$

پاسخ:



$$\tan\alpha = \frac{HH'}{AH} \quad , \quad \tan\beta = \frac{HH'}{BH}$$

$$AH = \frac{HH'}{\tan\alpha} \quad , \quad BH = \frac{HH'}{\tan\beta}$$

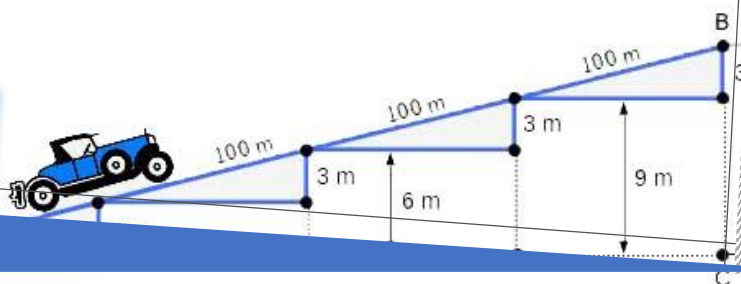
$$AB = AH + HB = \frac{HH'}{\tan\alpha} + \frac{HH'}{\tan\beta} \quad \rightarrow \quad AB = HH' \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} \right) \rightarrow$$

$$HH' = \frac{AB}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{AB}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

تست ۲: اگر $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان X در ناحیه دوم باشد، مقدار $2\cos x$ کدام است؟

- $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۱)

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



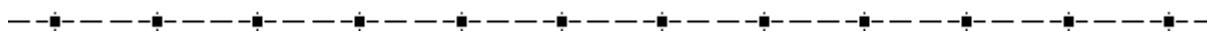
نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

پاسخ:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون انتهای کمان در ناحیه دوم است لذا $\cos x$ منفی است لذا داریم:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2\cos x = -\sqrt{3}$$



تست ۳: کدام یک از نامساویهای زیر بین زوایای 40° و 50° درجه برقرار است؟

$$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ \quad (2) \quad \sin 50^\circ < \sin 40^\circ \quad (1)$$

$$\cot 40^\circ < \cot 50^\circ \quad (4) \quad \tan 50^\circ < \tan 40^\circ \quad (3)$$

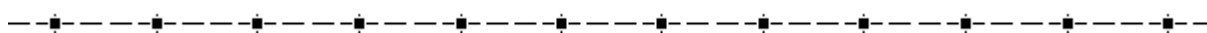
پاسخ:

چون در ناحیه اول تابع سینوس و تانژانت صعودی و توابع کوسینوس و کتانژانت نزولی هستند بنابراین خواهیم داشت:

$$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ, \quad \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$$

$$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ, \quad \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$$

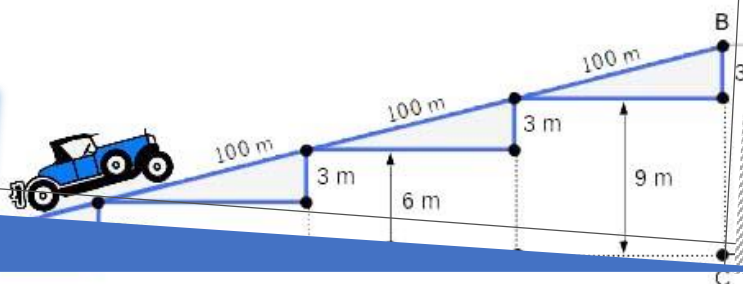
بنابراین فقط گزینه (۲) در رابطه های فوق وجود دارد.



تست ۴: اگر $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ و $\sin x = m + 1$ ، حدود m ؟

$$0 \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \leq m \leq 1 \quad (2) \quad -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \leq m \leq 0 \quad (4)$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

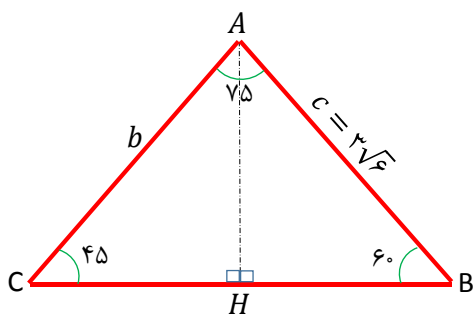
پاسخ:

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} \leq m + 1 \leq 1 \rightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$$

تست ۵: در مثلثی $\hat{A} = 75^\circ$ درجه و $\hat{B} = 60^\circ$ درجه و $c = 3\sqrt{6}$ ، اندازه ضلع b کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ:



$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{3\sqrt{6}} \rightarrow AH = \frac{3\sqrt{18}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AH}{b} \rightarrow b = \frac{\frac{3\sqrt{18}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 9$$

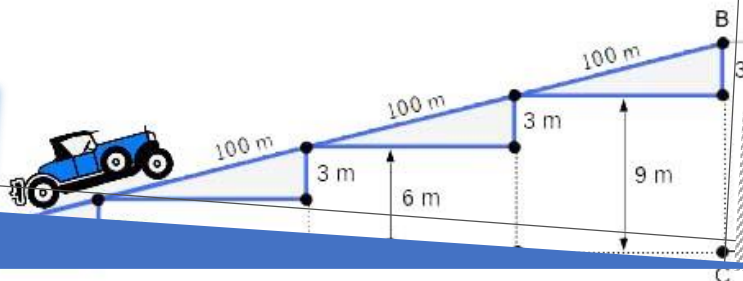
تست ۶: در مثلث ABC می دانیم $\tan A \times \tan B = 1$ ، این مثلث همواره چگونه است؟

- (۱) قائم الزاویه (۲) متساوی الاضلاع (۳) متساوی الساقین ولی قائم الزاویه نیست. (۴) هیچ کدام

پاسخ:

$$\tan A = \frac{1}{\tan B} \rightarrow \tan A = \cot B \rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{گزینه یک}$$

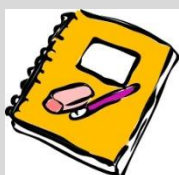
ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی





محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای مختلف:

(۱) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $-\theta$

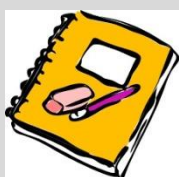


$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot\theta \end{aligned}$$

مثال \Rightarrow $\left(-\frac{\pi}{4} \text{ یا } -45^\circ\right)$

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1 \\ \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\cot\frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

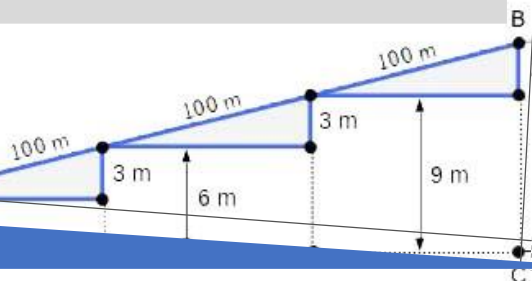
(۲) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $\pi - \theta$



$$\begin{aligned} \sin(\pi - \theta) &= \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) &= -\tan\theta \\ \cot(\pi - \theta) &= -\cot\theta \end{aligned}$$

مثال \Rightarrow $\left(\frac{5\pi}{6} \text{ یا } 150^\circ\right)$
 $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$



۳) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $\pi + \theta$



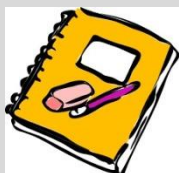
$$\begin{aligned} \sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) &= \tan\theta \\ \cot(\pi + \theta) &= \cot\theta \end{aligned}$$

مثال \Rightarrow (درجه ۲۴۰ یا $\frac{4\pi}{3}$)

$$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) &= \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۴) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $2\pi + \theta$

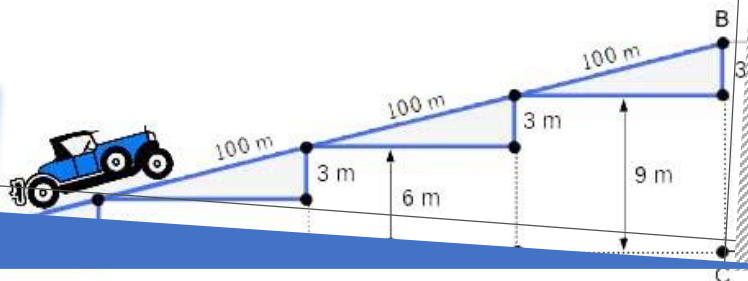


$$\begin{aligned} \sin(2\pi + \theta) &= \sin\theta \\ \cos(2\pi + \theta) &= \cos\theta \\ \tan(2\pi + \theta) &= \tan\theta \\ \cot(2\pi + \theta) &= \cot\theta \end{aligned}$$

مثال \Rightarrow (درجه ۳۹۰ یا $\frac{13\pi}{6}$)

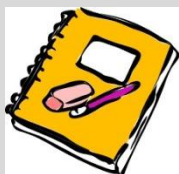
$$\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

۵) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $2\pi - \theta$



$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$$

مثال \Rightarrow $\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ یا 315° درجه

$$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

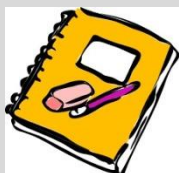
$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

۶) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{2} \pm \theta$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

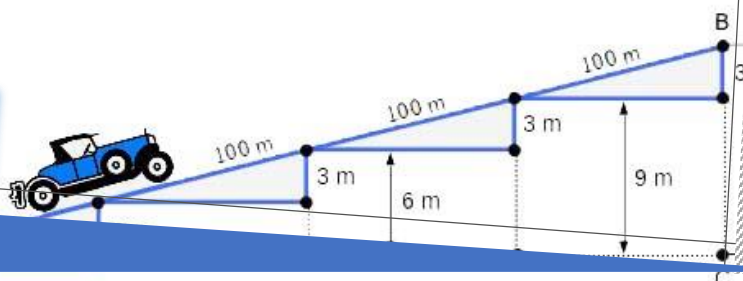
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

۷) محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

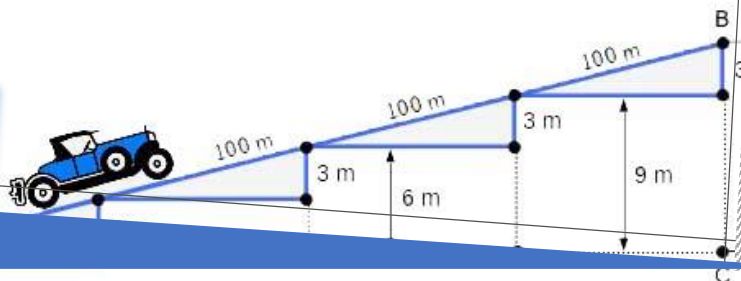


علاوه بر فرمولهای مربوط به $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ و $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$ که ذکر شده است. تمام مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هم سینوس را به کسینوس و برعکس و تانژانت را به کتانژانت و برعکس تبدیل می کنند اما بایستی علامتهای ناحیه مربوط مورد توجه قرار گیرند. مثلا:

$$۱) \cot\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

$$۲) \sin\left(\theta - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(\theta - 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی





تست ۱: سینوس زاویه ۱۲۰۰ درجه کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ:

$$\sin(۱۲۰۰) = \sin(۳ \times ۳۶۰ + ۱۲۰) = \sin ۱۲۰ = \sin(\pi - ۶۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تست ۲: اگر $\tan ۱۹۳ = k$ باشد مقدار $\cos ۱۶۷$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{1+k}}$ (۳) $\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$

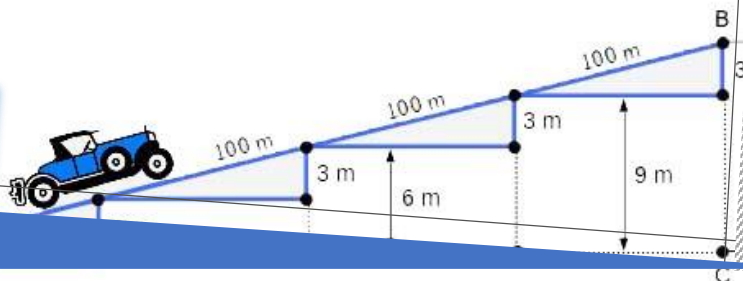
پاسخ:

$$\tan ۱۹۳ = \tan(۱۸۰ + ۱۳) = \tan ۱۳ = k$$

$$\cos ۱۶۷ = \cos(۱۸۰ - ۱۳) = -\cos ۱۳$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + \tan^2 ۱۳ = \frac{1}{\cos^2 ۱۳} \rightarrow \cos^2 ۱۳ = \frac{1}{1+k^2}$$

$$\cos ۱۳ = \sqrt{\frac{1}{1+k^2}} \rightarrow \cos ۱۶۷ = -\cos ۱۳ = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$$



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تست ۳: مقدار عددی عبارت $\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad (۳) \quad \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad (۲) \quad \frac{-\sqrt{3} + 1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ:

$$= \sin\left(\frac{-179 - 1 + 1}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{-179 - 1 + 1}{6}\pi\right)$$

$$= \sin\left(\frac{-180 + 1}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{-180 + 1}{6}\pi\right)$$

$$= \sin\left(-30\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-30\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

تست ۴: با فرض $\tan 35^\circ = 2a - 1$ حاصل $\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟

$$2a - 2 \quad (۴) \quad 2a - 1 \quad (۳) \quad 4a \quad (۲) \quad 2a \quad (۱)$$

پاسخ:

$$\frac{\sin(180^\circ - 35^\circ) - \sin(270^\circ - 35^\circ)}{\cos(360^\circ - 35^\circ)} = \frac{\sin 35^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \tan 35^\circ + 1 = 2a - 1 + 1 = 2a$$

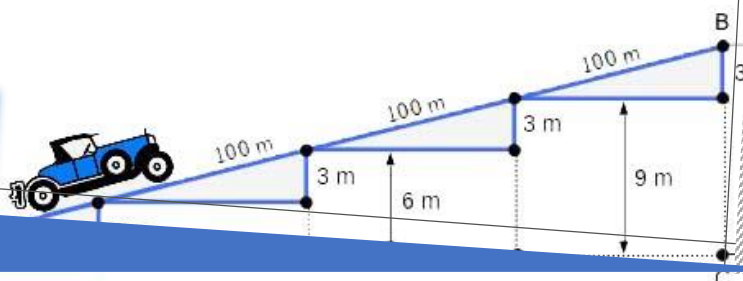
تست ۵: مقدار عددی $\sin 240^\circ + 2\sin 120^\circ + \sin 180^\circ + \sin 150^\circ + \sin 90^\circ$ برابر است با:

$$1 \quad (۴) \quad \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad (۳) \quad 0 \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ:

$$= \sin(180^\circ + 60^\circ) + 2\sin(180^\circ - 60^\circ) + \sin 180^\circ + \sin(180^\circ - 30^\circ) + \sin 90^\circ$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

$$= -\sin(60^\circ) + 2\sin(60^\circ) + 0 + \sin(30^\circ) + 1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

تست ۶: اگر $\tan 22^\circ = \frac{2}{5}$ حاصل $\frac{\sin 112^\circ + \sin 20^\circ}{\cos(-68^\circ)}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ:

$$\frac{\sin(90^\circ + 22^\circ) + \sin(180^\circ + 22^\circ)}{\cos(90^\circ - 22^\circ)} = \frac{\cos 22^\circ - \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = \cot 22^\circ - 1 \xrightarrow{\cot 22^\circ = \frac{5}{2}} \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

تست ۷: حاصل عبارت $\tan 20^\circ 25' + \cot 74^\circ 5'$ برابر است با:

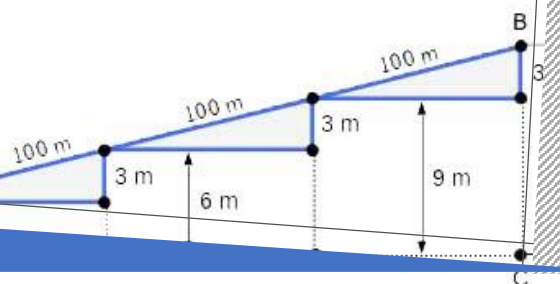
-2 (۴) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) 2 (۱)

پاسخ:

$$= \tan(5 \times 36^\circ + 225^\circ) + \cot(2 \times 36^\circ + 45^\circ) = \tan 225^\circ + \cot 45^\circ$$

$$= \tan(180^\circ + 45^\circ) + \cot 45^\circ = \tan 45^\circ + \cot 45^\circ = 1 + 1 = 2$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تست ۸: حاصل عبارت $\sin\left(\frac{-61\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-61\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ:

$$\sin\left(\frac{-61\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-61 + 1 - 1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow$$

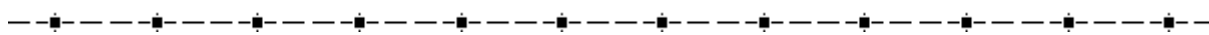
$$\sin\left(-30\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{-61\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-61 + 1 - 1}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$= \cos\left(-30\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

حال داریم:

$$A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$



تست ۹: اگر $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 3\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(516 + \alpha)$$

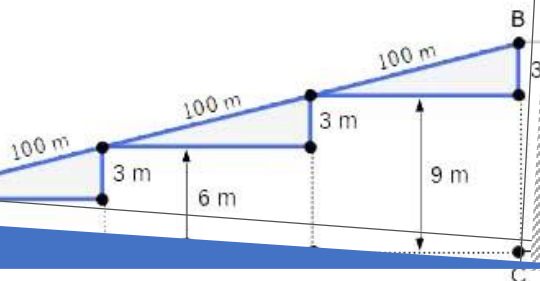
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$= \cos\alpha - 3\sin^2\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(4\pi + \pi + \alpha) \rightarrow$$

$$= \cos\alpha - 3\sin^2\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(\pi + \alpha) \rightarrow$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

$$= \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha \rightarrow$$

$$= 3 \left(\frac{2}{3} \right) - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

تست ۱۰: مقدار عددی $\sin 135^\circ + \cos 45^\circ + \tan 225^\circ + \cot 315^\circ$ برابر است با:

$$2 + \sqrt{2} \quad (1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{2} - 2 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

پاسخ:

$$= \sin(180^\circ - 45^\circ) + \cos 45^\circ + \tan(180^\circ + 45^\circ) + \cot(270^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 45^\circ - \cot 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$$

تست ۱۱: حاصل عبارت $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

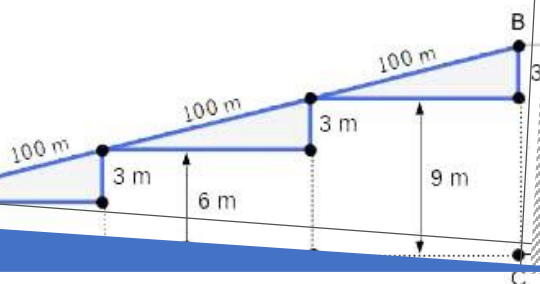
$$-1 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

پاسخ:

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} \rightarrow$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

تست ۱۲: با فرض $\begin{cases} |\sin x| + \sin x = 0 \\ |\cos x| = \cos x \end{cases}$ انتهای کمان x در کدام ناحیه واقع است؟

(۱) دوم (۲) اول (۳) چهارم (۴) سوم

پاسخ:

از قسمت بالایی چون $|\sin x|$ مثبت می باشد لذا مقدار $\sin x$ باید منفی باشد تا حاصل آن صفر شود و همچنین قسمت پایینی $\cos x$ باید مثبت باشد:

$$\begin{cases} \sin x \leq 0 & \text{ناحیه سوم و چهارم} \\ \cos x \geq 0 & \text{ناحیه اول و چهارم} \end{cases} \Rightarrow \text{ناحیه چهارم}$$

تست ۱۳: با فرض $\begin{cases} \cos x(1 + \tan^2 x) < 0 \\ \sin^3 x(1 + \cot^4 x) > 0 \end{cases}$ انتهای کمان x در کدام ناحیه واقع است؟

(۱) دوم (۲) اول (۳) چهارم (۴) سوم

پاسخ:

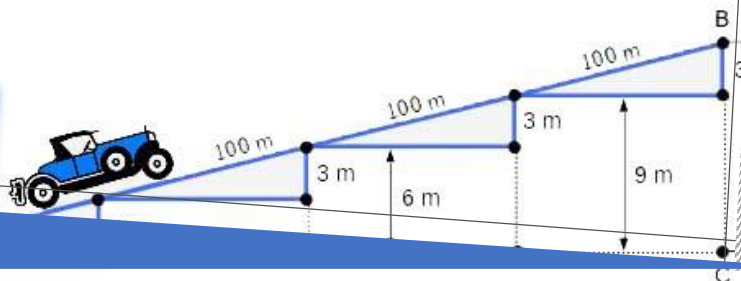
مقدار $1 + \tan^2 x$ و $1 + \cot^4 x$ هر دو مثبت می باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} \cos x < 0 & \text{ناحیه دوم و سوم} \\ \sin x > 0 & \text{ناحیه اول و دوم} \end{cases} \Rightarrow \text{ناحیه دوم}$$

تست ۱۴: از تساوی $\frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{4} + x)} = 2$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $1/5$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی



نویسنده: مهدی حاجی نژادیان مثلثات

پاسخ:

$$\frac{-2 \sin(3\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\sin(\frac{3\pi}{4} + x)} = \frac{-2 \sin x + \sin x}{-\cos x} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x = 2$$

تست ۱۵: با فرض $\tan x = \frac{-1}{4}$ و $\cos x < 0$ ، مقدار $\sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{+\sqrt{5}}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{+\sqrt{5}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

پاسخ:

$$\tan x = \frac{-1}{4} \xrightarrow{\text{عکس}} \cot x = -2 \rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{5} \rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\substack{\cos x < 0 \\ \tan x < 0}} \sin x = +\frac{\sqrt{5}}{5}$$

ویژه: کانون فرهنگی آموزش قلم چی

