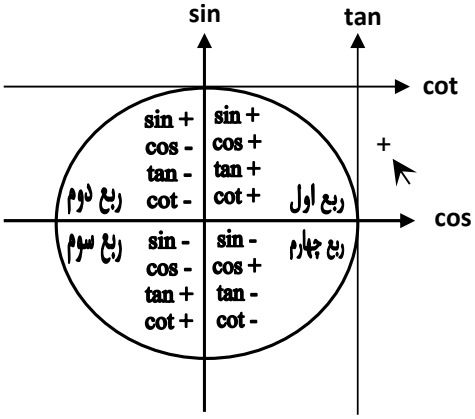
دایره ی مثلثاتی :

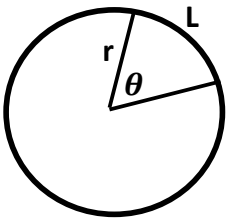
۱- طول شعاع آن یک واحد است.　۲- چهار محور $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta$ روی آن قرار دارند　۳- دارای چهار ربع (ناحیه) می باشد

٤ - علامت های نسبت های مثلثاتی در ناحیه ها متفاوت است. ٥- مرکز آن مبدا مختصات است

٦- جهت مثبت آن حرکت روی محیط دایره خلاف حرکت عقربه ساعت می باشد.



تبدیل واحد های اندازه گیری : $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{۲۰۰}$



در هر قطاع داریم (زاویه بر حسب رادیان): $L = r \times \theta$

جدول نسبت های مثلثاتی (مقدار زاویه ها) :

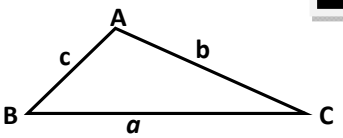
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	x y r	
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	فرمول ها در مثلث	$r^۲ = x^۲ + y^۲$
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$-۱ \le \sin\theta \le ۱$
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$-۱ \le \cos\theta \le ۱$
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\tan\theta \in \mathbb{R}$
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞	$\cot\theta = \frac{x}{y}$	$\cot\theta \in \mathbb{R}$

روابط مربوط به کمان ها

نسبت های مثلثاتی $(\pi - \theta)$ بر حسب θ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} + \theta)$ بر حسب θ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ بر حسب θ (ربع اول)	نسبت های مثلثاتی $(-\theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)
$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$ $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(\pi-\theta) = -\cot(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \cos(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\sin(\theta)$ $\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\cot(\theta)$ $\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\tan(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \cos(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \sin(\theta)$ $\tan\frac{\pi}{۲} - (\theta) = \cot(\theta)$ $\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \tan(\theta)$	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$

نسبت های مثلثاتی $(۲\pi + \theta)$ بر حسب θ (ربع اول)	نسبت های مثلثاتی $(۲\pi - \theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم و سوم)	نسبت های مثلثاتی $(\pi + \theta)$ بر حسب θ (ربع سوم)
$\sin(۲\pi+\theta) = \sin(\theta)$ $\cos(۲\pi+\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(۲\pi+\theta) = \tan(\theta)$ $\cot(۲\pi+\theta) = \cot(\theta)$	$\sin(۲\pi-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(۲\pi-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(۲\pi-\theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(۲\pi-\theta) = -\cot(\theta)$	$\sin(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta) = -\cos(\theta)$ $\cos(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta) = \pm\sin(\theta)$ $\tan(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta) = \mp\cot(\theta)$ $\cot(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta) = \mp\tan(\theta)$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi+\theta) = \tan(\theta)$ $\cot(\pi+\theta) = \cot(\theta)$

روابط خاص در مثلث دلخواه



$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = b\cos A + a\cos B$$

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.c.\cos A$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲a.c.\cos B$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲a.b.\cos C$$

$$s = \frac{۱}{۲}bc\sin A$$

$$s = \frac{۱}{۲}ac\sin B$$

$$s = \frac{۱}{۲}ab\sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل و ۲ برابر و ۳ برابر کمان

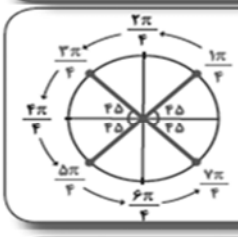
نسبت های مثلثاتی $(\alpha - \beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)	نسبت های مثلثاتی $(\alpha + \beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$
$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta + ۱}{\cot\alpha - \cot\beta}$	$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - ۱}{\cot\alpha + \cot\beta}$

نسبت های مثلثاتی (۳α) بر حسب α	نسبت های مثلثاتی (۲α) بر حسب α
$\sin(۳\alpha) = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$	$\sin(۲\alpha) = ۲\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(۳\alpha) = ۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha$	$\cos(۲\alpha) = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$
$\tan(۳\alpha) = \frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱-۳\tan^۲\alpha}$	$\tan(۲\alpha) = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$
$\cot(۳\alpha) = \frac{۳\cot\alpha - \cot^۳\alpha}{۱-۳\cot^۲\alpha}$	$\cot(۲\alpha) = \frac{\cot^۲\alpha - ۱}{۲\cot\alpha}$

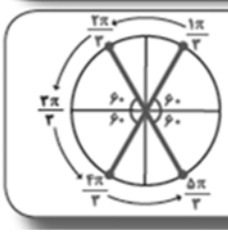
بررسی زوایای پرکاربرد و محور های مختصات از نوع مثلثاتی

۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه: هر کدوم از ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) می‌سازن . بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$)

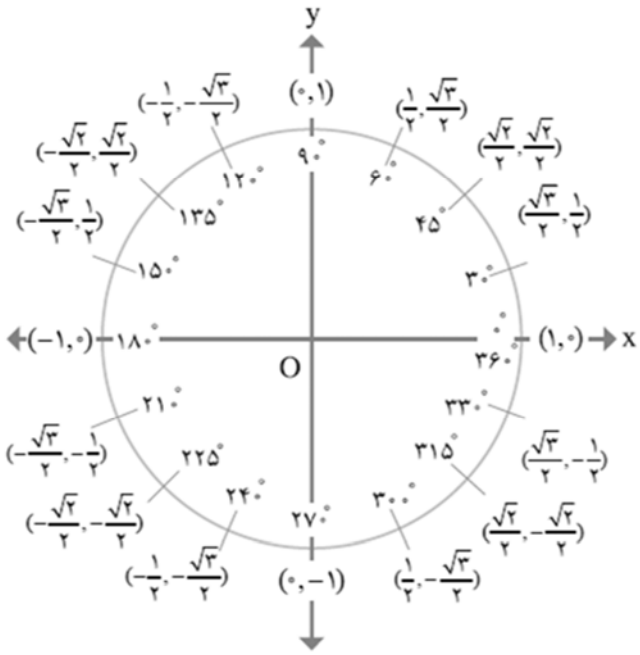
۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه: ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$)

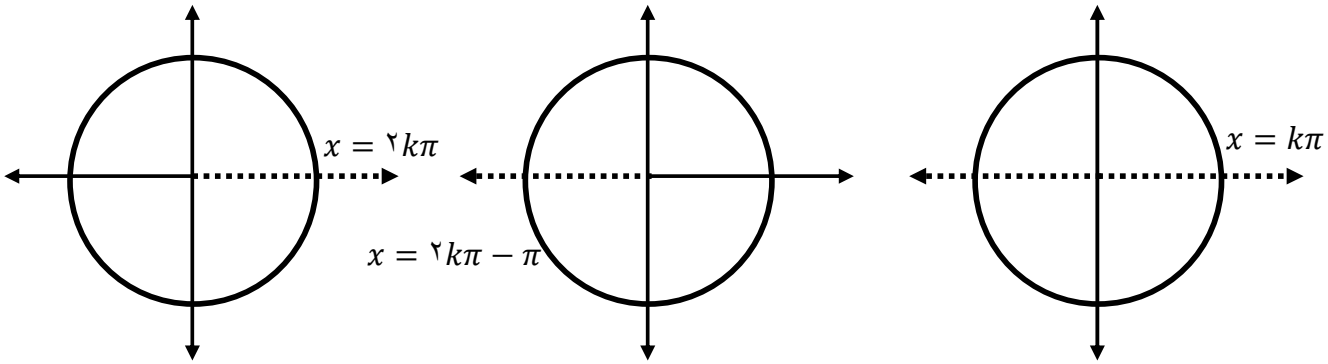


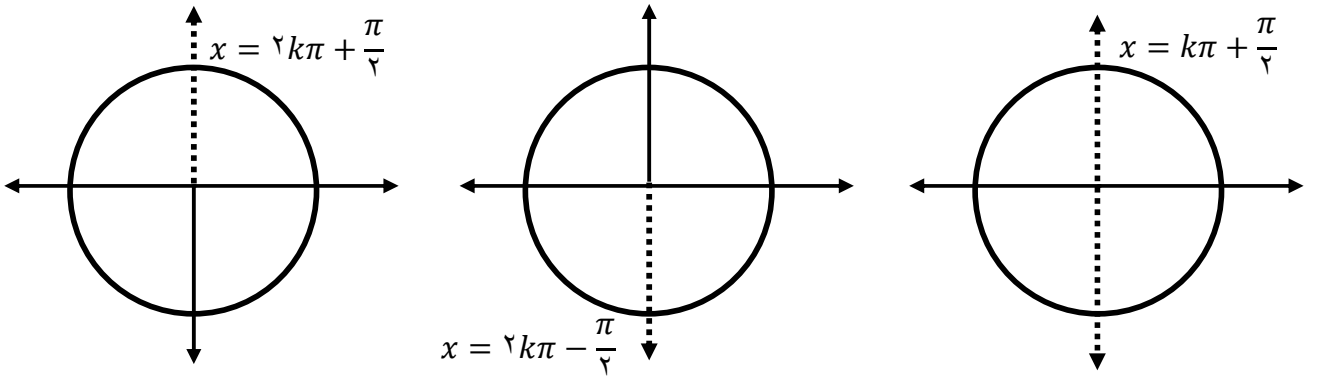
۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه: اضلاع این ضربدر، زاویه‌ی ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ با افق ایجاد می‌کنن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$)

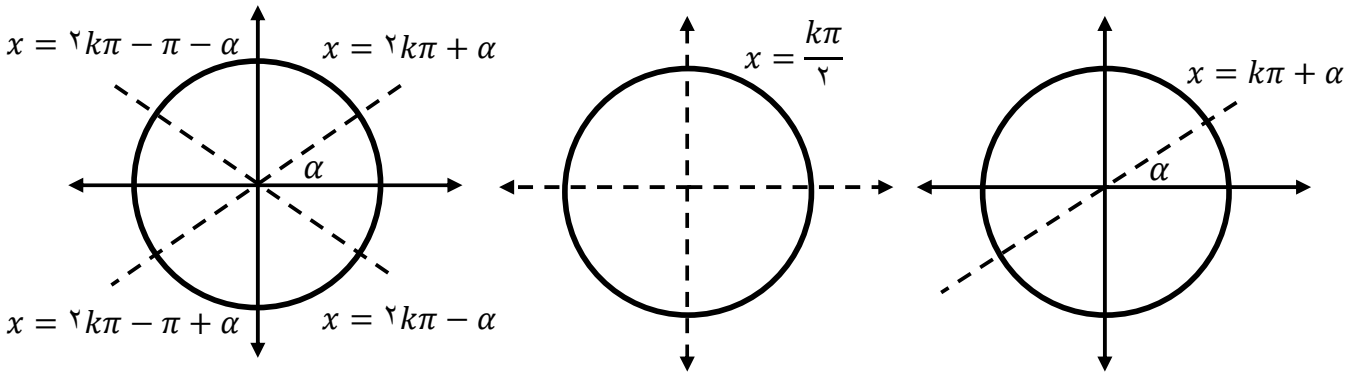


حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.









معادلات مثلثاتی و حالت های خاص $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\sin x = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\text{حالت های}\\ \text{خاص}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\text{حالت های}\\ \text{خاص}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی و حالت های خاص $\tan\theta$ و $\cot\theta$

$$x = k\pi + \alpha$$

$$\tan x = \tan\alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\text{حالت های}\\ \text{خاص}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tan x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \tan x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\cot x = \cot\alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\text{حالت های}\\ \text{خاص}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \cot x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cot x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \cot x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

تبدیل جمع به ضرب	تبدیل ضرب به جمع
$\sin\alpha + \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha - \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)$	$\cos\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha - \cos\beta = -۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\cos\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\tan\alpha . \tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$
$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\cot\alpha . \cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

فرمول های پرکاربرد مثلثات در سوالات

۱) $\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$

۲) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

٤) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$

٥) $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{۲}\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$

٦) $۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$

۷) $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$

۸) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{۲}{\sin ۲\theta}$

۹) $\cos^{۲}\theta = \dfrac{۱+\cos ۲\theta}{۲}$

۱۰) $\sin^{۲}\theta = \dfrac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$

۱۱) $\tan\alpha . \cot\beta = ۱$

۱۲) $۱ + \tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$

۱۳) $\sin ۲\theta = \dfrac{۲\tan\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

۱۴) $\cos ۲\theta = \dfrac{۱-\tan^{۲}\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

۱۵) $\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\theta - ۱$

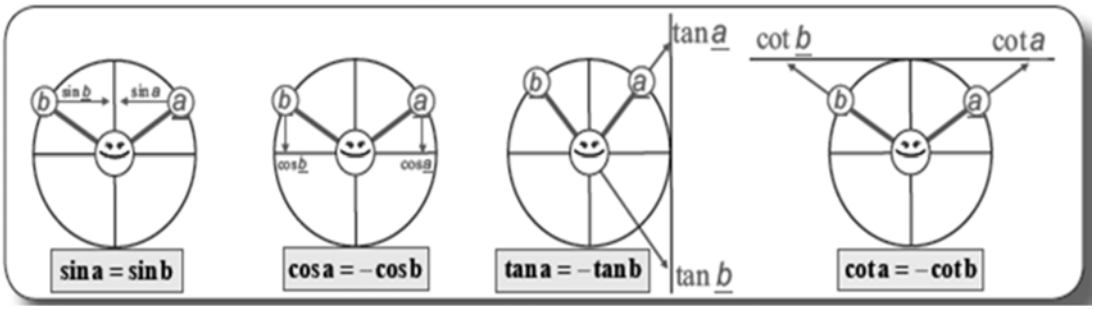
۱۶) $\sin^{۴}\theta + \cos^{۴}\theta = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^{۲} ۲\theta$

۱۷) $(\sin\theta \pm \cos\theta)^{۲} = ۱ \pm \sin ۲\theta$

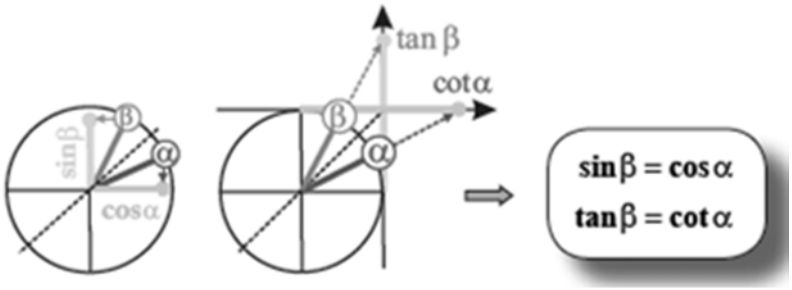
۱۸) $\cot\theta - \tan\theta = ۲\cot ۲\theta$

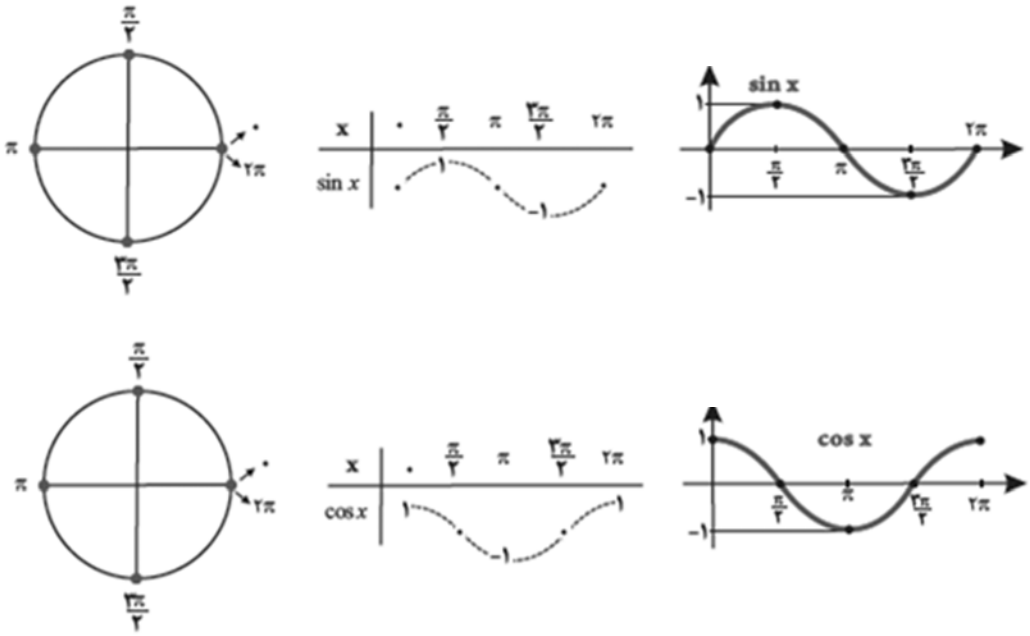
۱۹) $\tan^{۲}\theta = \dfrac{۱-\cos ۲\theta}{۱+\cos ۲\theta}$

$\alpha+\beta=\pi \Longrightarrow$ β و α مکملند



$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow$ β و α متممند



در هر یک از قسمت های زیر u بر حسب x فرض شده ، همچنین a عدد ثابتی است .				
ردیف	تابع	مشتق	مثال	
۱	$y=\sin(x)$	$y'=\cos(x)$	$y=\sin(x)$	$y'=\cos(x)$
۲	$y=\sin(ax)$	$y'=a\cos(ax)$	$y=\sin(۹x)$	$y'=۹\cos(۹x)$
۳	$y=\sin(u)$	$y'=u'\cos(u)$	$y=\sin((۳x+۱)^۲)$	$y'=۶(۳x+۱)\cos(۳x+۱)^۲$
٤	$y=\sin^n u$	$y'=nu'\cos(u)\sin(u)^{n-۱}$	$y=sin^۵ ۳x$	$y'=۵(۳)\,cos\,۳x\,sin^۴ ۳x$
٥	$y=\cos(x)$	$y'=-\sin(x)$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
٦	$y=\cos(ax)$	$y'=-a\sin(ax)$	$y=\cos ۹x$	$y'=-۹\sin ۹x$
۷	$y=\cos(u)$	$y'=-u'\sin(u)$	$y=\cos(x^۲-۳)$	$y'=-۲x\sin(x^۲-۳)$
۸	$y=\cos^n u$	$y'=-nu'\sin(u)\,(\cos(u))^{n-۱}$	$y=\cos^۳ ۵x$	$y'=-۳\sin ۵x(\cos ۵x)^۲$
۹	$y=\tan(x)$	$y'=(۱+\tan^۲ x)$	$y=\tan x$	$y'=(۱+\tan^۲ x)$
۱۰	$y=\tan(ax)$	$y'=a(۱+\tan^۲ ax)$	$y=\tan ۲x$	$y'=۲(۱+\tan^۲ ۲x)$
۱۱	$y=\tan(u)$	$y'=u'(۱+\tan^۲ u)$	$y=\tan(۳x+۴)$	$y'=۳(۱+\tan^۲(۳x+۴))$
۱۲	$y=\tan^n u$	$y'=nu'(۱+\tan^۲ u)(\tan u)^{n-۱}$	$y=\tan^۳ ۲x$	$y'=۲(۳)(۱+\tan^۲ ۲x)(\tan ۲x)^۲$
۱۳	$y=\cot(x)$	$y'=-(۱+\cot^۲ x)$	$y=\cot x$	$y'=-(۱+\cot^۲ x)$
۱٤	$y=\cot(ax)$	$y'=-a(۱+\cot^۲ ax)$	$y=\cot ۵x$	$y'=-۵(۱+\cot^۲ ۵x)$
۱۵	$y=\cot(u)$	$y'=-u'(۱+\cot^۲ u)$	$y=\cot(x^۳-۱)$	$y'=-۳x^۲(۱+\cot^۲(x^۳-۱))$
۱٦	$y=\cot^n u$	$y'=-nu'(۱+\cot^۲ u)(\cot u)^{n-۱}$	$y=\cot^۶(x^۲)$	$y'=-۱۲x(۱+\cot^۲(x^۲))\cot^۵(x^۲)$

نمودارهای مثلثاتی