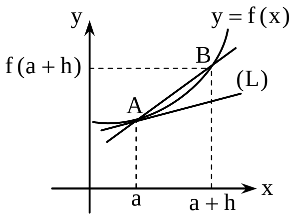
مشتق

۴-۱: مفاهیم اولیه‌ی مشتق



در شکل مقابل در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع $y=f(x)$، خط L را بر نمودار مماس کرده‌ایم. نقطه‌ی B را نیز با مختصات $(a+h,f(a+h))$ روی نمودار در نظر گرفته‌ایم (در شکل، $h>0$، و اگر $h<0$، آن‌گاه B سمت چپ A قرار می‌گیرد). شیب پاره‌خط AB برابر است با: $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$، و واضح است وقتی که $h\to 0$، با نزدیک شدن نقطه‌ی B به نقطه‌ی A، خط AB نیز به خط L نزدیک می‌شود. بنابراین حد کسر بالا همان شیب خط L خواهد شد. به حد کسر فوق، که برابر شیب خط مماس است، مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=a$ می‌گویند.

تعریف: فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. اگر حد زیر وجود داشته باشد، می‌گوییم f در $x=a$ مشتق‌پذیر است و مقدار حد را «مشتق تابع f در $x=a$» می‌نامیم.

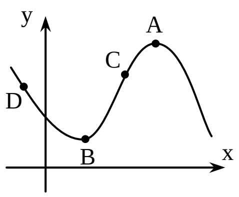
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ **تذکّر (۱):** اگر قرار دهید $x=a+h$، وقتی $h\to 0$، داریم: $x\to a$ و می‌توانیم حد بالا را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

➢ **تذکّر (۲):** شیب خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ برابر $f'(a)$ است. در حالتی که $f'(a)=\infty$، با وجود آن‌که $f'(a)$ وجود ندارد (زیرا عددی حقیقی نیست)، خط مماس وجود دارد و خطی عمودی (موازی محور yها) است.

تست (۱): در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟
(منحنی مربوط به یک تابع مشتق‌پذیر در R است.)



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

حل: در نقاط A و B خط مماس بر منحنی تقریباً افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطه‌ی D، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطه‌ی C، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطه‌ی C، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق‌های یک‌طرفه:

برای وجود داشتن حد در یک نقطه، باید حدهای چپ و راست در آن نقطه موجود و برابر باشند. به این ترتیب می‌توانیم مشتق‌های چپ و راست را تعریف کنیم:

تعریف مشتق چپ و راست:

اگر تابع f در بازه‌ی $(b,a]$ تعریف شده باشد، مقدار حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق چپ تابع f در $x=a$ می‌نامیم:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به‌همین ترتیب برای تابع f که در بازه‌ی $[a,c)$ معین است، مشتق راست f در $x=a$ تعریف می‌شود:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نتیجه: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.

با استفاده از تعریف مشتق، می‌توانیم مشتق توابع مختلف را به‌دست آوریم، ولی در بسیاری از موارد، این کار طولانی و طاقت‌فرسا است. به‌همین دلیل فرمول‌هایی برای مشتق‌گیری توابع وجود دارد که کمی جلوتر به آن‌ها اشاره خواهیم کرد. البته در مسائلی خاص استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری ساده‌تر است که چند نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌کنید:

تست (۲): اختلاف بین مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=0$ **کدام است؟**

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

حل: اولاً چون $0=$ کران‌دار × صفر $=\lim_{x\to 0} f(x)$ و $f(0)=0$، تابع f در $x=0$ پیوسته است. حال داریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\lim_{t\to +\infty}\tan^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}$$

به‌همین ترتیب $f'_-(0)=-\frac{\pi}{2}$ و اختلاف دو مشتق $\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

در توابع شامل جزء صحیح یا قدر مطلق، بهتر است ابتدا با نامساوی‌ها در همسایگی مورد نظر جزء صحیح و قدر مطلق را حذف کنیم.

تست (۳): اگر $f(x)=(x-2)[3x-2]$**، حاصل** $f'_-(2)-f'_+(2)$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

حل: چون $f(2)=0$ داریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)[3x-2]}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}[3x-2]=[4^+]=4$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}[3x-2]=[4^-]=3$، بنابراین $f'_-(2)-f'_+(2)=-1$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

تست (۴): برای تابع $f(x)=|x|\sqrt{2+x}$ **در** $x=0$**، کدام گزینه درست است؟**

۱) مشتق چپ و راست موجود و برابر
۲) مشتق چپ و راست موجود و نابرابر
۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد.
۴) مشتق راست موجود است، ولی مشتق چپ وجود ندارد.

حل: در همسایگی راست و چپ $x=0$ جداگانه ضابطه‌ی تابع و حدهای متناظر را می‌نویسیم:

$$x\to 0^+ : f(x)=x\sqrt{2+x}\Rightarrow f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2+x}=\sqrt{2}$$

$$x\to 0^- : f(x)=-x\sqrt{2+x}\Rightarrow f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{2+x})=-\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست (۵): اگر $f(x)=|x^2-4|[-x^3]$**، حاصل** $f'_+(2)-f'_-(2)$ **کدام است؟**

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۶۸ ۴) -68

حل: ابتدا در همسایگی کوچک راست و چپ $x=2$ ضابطه‌ی تابع را بدون جزء صحیح و قدر مطلق می‌نویسیم:

$$x\to 2^+ : x>2\Rightarrow x^2>4\ ,\ -x^3<-8\Rightarrow f(x)=(x^2-4)[(-8)^-]=-9(x^2-4)$$

$$x\to 2^- : x<2\Rightarrow x^2<4\ ,\ -x^3>-8\Rightarrow f(x)=(4-x^2)[(-8)^+]=-8(4-x^2)$$

حال مثلاً برای محاسبه‌ی $f'_+(2)$ داریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-9(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-9(x+2)=-36$$

به‌همین ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}8(x+2)=32$، بنابراین: $f'_+(2)-f'_-(2)=-68$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی (۱): الف) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}$ را بیابید (m,n,k اعداد حقیقی ثابت هستند).

ب) اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود باشند، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ را بیابید.

حل: الف) با اضافه و کم کردن $f(a)$ در صورت کسر داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{kh}$$

حال مثلاً حد کسر اول را به‌صورت زیر می‌توانیم برحسب $f'(a)$ بیان کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}=\frac{m}{k}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{mh}\xrightarrow{t=mh}\frac{m}{k}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\frac{m}{k}f'(a)$$

به‌همین ترتیب کسر دوم برابر $\frac{n}{k}f'(a)$ می‌شود و جواب نهایی برابر است با: $\dfrac{(m-n)f'(a)}{k}$.

ب) اگر قرار دهیم $t=2h$ و $k=-3h$، آن‌گاه داریم: $t\to 0^+$ و $k\to 0^-$ (وقتی $h\to 0^+$)، و می‌توانیم کسر را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$$

$$=2\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}+3\lim_{k\to 0^-}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=2f'_+(a)+3f'_-(a)$$

نتیجه‌ی قسمت (الف) نکته‌ی مفیدی است که گاه در حل تست‌ها مفید واقع می‌شود:

نکته: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، و m، n و k سه عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

تست (۶): حد کدام‌یک از کسرهای زیر وقتی $\Delta x\to 0$، برابر $f'(x)$ است؟

۱) $\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

۲) $\dfrac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

۳) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

۴) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

حل: در گزینه‌ی (۱) طبق نکته‌ی قبل داریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{2-(-1)}{1}f'(x)=3f'(x)$$

دقت کنید که تغییر نام h به Δx تفاوتی در حد ایجاد نمی‌کند. به‌همین ترتیب حاصل حدهای گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ به‌ترتیب $-f'(x)$، $2f'(x)$ و $f'(x)$ می‌شود. بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی ۴ است.

مسأله‌ی (۲): اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & x\geq 1\\ x^2-3x+6 & x<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h^2)-f(1-2h^2)}{3h^2}$ را به‌دست آورید.

حل: با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر می‌توانیم حاصل کسر را برحسب مشتق‌های چپ و راست f بنویسیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{3h^2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{3h^2}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}+\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{-2h^2}$$

اگر قرار دهیم $t=h^2$ و $k=-2h^2$، وقتی $h\to 0$ داریم: $t\to 0^+$ و $k\to 0^-$ و حاصل حد اول $f'_+(1)$ و حاصل حد دوم $f'_-(1)$ می‌شود. بنابراین جواب نهایی برابر $\frac{1}{3}f'_+(1)+\frac{2}{3}f'_-(1)$ می‌شود. برای محاسبه‌ی مشتق‌ها با توجه به پیوستگی تابع f در $x=1$ می‌توانیم از دو ضابطه مشتق بگیریم، که از فرمول‌های مشتق‌گیری می‌دانیم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & x>1\\ 2x-3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=5\ ,\ f'_-(1)=-1\Rightarrow \text{جواب}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد. حال می‌خواهیم کمی دقیق‌تر نقاطی را بررسی کنیم که در آن‌ها این حد وجود ندارد، یا به عبارت دیگر نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع را. ابتدا به قضیه‌ی زیر دقت کنید.

قضیه: **اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در $x=a$ پیوسته است.**
به عبارت دیگر: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ نیز مشتق‌پذیر نیست.

➢ **تذکّر:** دقت کنید که عکس قضیه‌ی بالا درست نیست. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست (زیرا $f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$).

نتیجه: از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که برای پیدا کردن نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع باید:

۱- نقاط ناپیوستگی را پیدا کنیم. همه‌ی این نقاط، نقاط مشتق‌ناپذیری هم هستند.

۲- نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته است، ولی یکی از مقادیر $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ موجود نباشند، نقاط مشتق‌ناپذیری‌اند. همین‌طور نقاطی که در آن‌ها $f'_+(a)\neq f'_-(a)$.

برای این‌که بفهمیم چه نقاطی را باید در شرط دوم بررسی کنیم، در ادامه نکاتی را بیان خواهیم کرد.

تست (۷): اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$ **، آن‌گاه در $x=0$ کدام گزینه درست است؟**

۱) مشتق راست وجود دارد، ولی چپ وجود ندارد.
۲) مشتق چپ وجود دارد، ولی راست وجود ندارد.
۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد.
٤) مشتق‌پذیر است.

حل: اولاً با توجه به ضابطه تابع در $x=0$ از چپ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. ولی مشتق راست نیز ندارد، زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

تست (۸): کدام تابع در $x=0$ پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $f(x)=x^2[x]$
۲) $f(x)=x|x|$
۳) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
٤) $f(x)=|x|[x]$

حل: توابع گزینه‌های (۱) و (۴) به دلیل عامل‌های صفر کننده‌ی x^2 و $|x|$ در $x=0$ پیوسته‌اند. تابع گزینه‌ی (۲) به وضوح در $x=0$ پیوسته است و برای تابع گزینه‌ی (۳) داریم: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ صفر $\times$ کران‌دار $=0$، پس در $x=0$ پیوسته است. تابع گزینه‌ی (۴) در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}[x]\Rightarrow\begin{cases}f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}[x]=0\\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}[x]=1\end{cases}$$

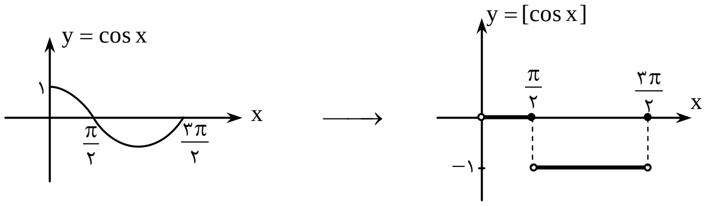
به‌همین ترتیب ثابت می‌شود توابع گزینه‌های دیگر در $x=0$ مشتق‌پذیر هستند. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ تست است.

تست (۹): کدام گزینه برای تابع $f(x)=[\cos x]$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ درست است؟

۱) مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد. **۲) مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.**

۳) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ. **٤) مشتق‌پذیر است.**

حل: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$، تابع از چپ پیوسته است و مشتق چپ آن نیز صفر است.

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

مسأله‌ی (۳): در توابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ x^۳+۱ & x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ x^۳ & x<۰ \end{cases}$، مقادیر مشتق چپ و راست را در $x=۰$ به‌دست آورید.

حل: در هر دو تابع بدون در نظر گرفتن نقطه‌ی $x=۰$ می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۳x^۲ & x<۰ \end{cases} \quad , \quad g'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۳x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

دقت کنید که در ضابطه‌ی مشتق، شرط $x\geq ۰$ در ضابطه‌ی اول توابع، به $x>۰$ تغییر پیدا کرده است. ولی در نقطه‌ی مرزی $x=۰$ چه وضعیتی برقرار است؟ در تابع f داریم:

$$f(۰)=۱ \Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-۱}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲}{x}=۰$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۳}{x}=۰$، در نتیجه: $f'_+(۰)=f'_-(۰)=۰$، یا به بیان دیگر $f'(۰)=۰$.

در تابع g نیز با توجه به $g(۰)=۱$، برای محاسبه‌ی $g'_+(۰)$ از همان روابط $f'_+(۰)$ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $g'_+(۰)=۰$، ولی برای $g'_-(۰)$ داریم:

$$g'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۳-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پس $g'_-(۰)$ وجود ندارد!

در مسأله‌ی (۳) اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که برای محاسبه‌ی $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ می‌توانستیم از همان دو ضابطه‌ی $f'(x)$ استفاده کنیم (از حدهای $\lim_{x\to ۰^+} ۲x$ و $\lim_{x\to ۰^-} ۳x^۲$). ولی در محاسبه‌ی $g'_-(۰)$ نمی‌توانیم از $\lim_{x\to ۰^-} ۳x^۲$ (در ضابطه‌ی دوم $g'(x)$) استفاده کنیم. دقت در صورت سؤال نشان می‌دهد که f در $x=۰$ پیوسته و g فقط از راست پیوسته است، به‌همین دلیل در محاسبه‌ی $f'(۰)$ و $g'_+(۰)$ می‌توانستیم از ضابطه‌های f' و g' استفاده کنیم.

نکته: **در تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$ به شرط پیوستگی f در $x=a$، می‌توانیم برای محاسبه‌ی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ از حد مشتق ضابطه‌ها وقتی $x\to a$ استفاده کنیم.**

➢ **تذکّر:** پیوستگی راست f در $x=a$ برای $f'_+(a)$ و پیوستگی چپ آن برای $f'_-(a)$ کافی است.

تست (۱۰): در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۱ \\ ax+b & x<۱ \end{cases}$، اگر $f'(۱)$ موجود باشد، b کدام است؟

۱) -۲ **۲)** -۱ **۳) صفر** **٤)** ۱

حل: از پیوستگی f در $x=۱$ نتیجه می‌گیریم: $a+b=۱-۲ \Rightarrow a+b=-۱$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x>۱ \\ a & x<۱ \end{cases} \xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)} ۲\times ۱-۲=a \Rightarrow a=۰ \xrightarrow{a+b=-۱} b=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

دیدیم که نقاط ناپیوستگی اولین دسته‌ی نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع هستند. حال به بررسی نقاط دیگر می‌پردازیم.
ابتدا به قضیه‌ی زیر که معادل آن را در بخش حد و پیوستگی نیز بیان کرده‌ایم، دقت کنید:

قضیه: **۱- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f \pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط $g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر خواهند بود.**
۲- اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر و g در $x = f(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع gof نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر است.

با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم توابع چند جمله‌ای، توابع گویا (یعنی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که P و Q دو چند جمله‌ای‌اند)، توابع مثلثاتی و جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چنین توابعی در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیرند. معمولاً نقاط مشتق‌ناپذیری در سه دسته از توابع ظاهر می شوند، ۱- توابع اصم، ۲- توابع شامل قدر مطلق و ۳- توابع شامل جزء صحیح.

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع اصم**
۱- تابع $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$، $n \geq 2$) برای n های فرد تنها در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است و برای nهای زوج، نقاط $x < 0$ نیز از دامنه‌ی آن حذف می‌شوند.
۲- تابع $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ که در آن f یک چند جمله‌ای است، تنها ممکن است در ریشه‌های f مشتق‌ناپذیر باشد. البته برای nهای زوج باید محدوده‌ی دامنه نیز در نظر گرفته شود. به بیان دقیق‌تر، اگر $x = a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m باشد، و $m < n$، تابع g در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است.

➢ **تذکّر:** $x = a$ ریشه‌ی مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m است، اگر $f(x) = (x-a)^m h(x)$ که $x = a$ ریشه‌ی h نیست. برای مثال در $f(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$، عدد $x = 0$ ریشه‌ی ساده‌ی f است، ولی $x = 1$ و $x = -1$ ریشه‌های مکرر f از مرتبه‌ی تکرار ۲ و ۳ هستند.

مثال: تابع $g(x) = \sqrt[3]{x^4(x-1)^2(x+2)}$ در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است. ولی در $x = 0$ با آن‌که ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است، مشتق‌پذیر می‌باشد، زیرا درجه‌ی تکرار $x = 0$ از مرتبه‌ی ۴ است و $3 < 4$. ولی درجه‌ی تکرار ۲ ریشه‌ی دیگر، ۲ و ۱ است که هر دو از ۳ کم‌ترند. مثلاً برای $x = 1$ داریم:

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^4(x-1)^2(x+2)}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^4(x+2)}}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{0^+} = +\infty \rightarrow \text{وجود ندارد } g'_+(1)$$

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع شامل قدر مطلق**
اگر $f(x) = |g(x)|$ و تابع g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، f در صورتی در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است که $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد.

➢ **تذکّر:** برای آن‌که $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد، باید $g(a) = 0$، ولی $g'(a) \neq 0$.

➢ **تذکّر:** در حالت خاصی که g چند جمله‌ای باشد، باید $g(x) = (x-a)h(x)$ طوری‌که $h(a) \neq 0$.

مثال: تابع $f(x) = |x^4(x-1)^3(x+2)|$ تنها در نقطه‌ی $x = -2$ مشتق‌ناپذیر است، زیرا ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق است. ریشه‌های $x = 0$ و $x = 1$ چون ریشه‌های مکرر از درجه‌ی تکرار بیش‌تر از ۱ هستند، نقاط مشتق‌ناپذیری را مشخص نمی‌کنند.

مسأله‌ی (۴): **نقاط مشتق‌ناپذیری تابع** $f(x) = \begin{cases} |(x+1)(x-2)^2| & |x| \leq 3 \\ \frac{\sqrt[3]{(x^2-16)(x+3)^2}}{(x+7)} & |x| > 3 \end{cases}$ **را به‌دست آورید.**

حل: ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است (ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق) که در محدوده‌ی ضابطه (یعنی $|x| \leq 3$) قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقاط $x = \pm 4$ مشتق‌ناپذیر است که نقاط $x = \pm 4$ در محدوده‌ی ضابطه قرار دارند. تنها باید نقاط مرزی $x = \pm 3$ را بررسی کنیم که به‌وضوح تابع در این نقاط ناپیوسته است. بنابراین طول نقاط مشتق‌ناپذیری تابع f عبارت‌اند از:

$\{4, 3, -1, -3, -4\}$

➢ **تذکّر:** همانند بحث پیوستگی، مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری فقط در نقاط دامنه‌ی تابع مطرح می‌شود. مثلاً در این مسأله نقطه‌ی $x=-7$ را نباید جزء نقاط مشتق‌ناپذیری محسوب کنیم، چون اصلاً در دامنه‌ی تابع نیست.

تست (۱۱): اگر تابع $f(x)=(2x^2+ax+b)|(x-1)(x-2)|$ در R مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۳-   ۳) ۶   ۴) ۶-

حل: طبق نکته‌ی قبل، باید $x=1$ و $x=2$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت نباشند، در نتیجه باید هر دو ریشه‌های $2x^2+ax+b$ باشند. یعنی این عبارت به‌صورت $2(x-1)(x-2)$ قابل نوشتن است، در نتیجه:

$$2x^2+ax+b=2(x-1)(x-2)\Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-6x+4\Rightarrow a=-6\ ,\ b=4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع شامل جزء صحیح**
تابع $y=[f(x)]$ در تمام نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر نیز هست (با مشتق برابر صفر)، و در نقاط دیگر ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

مفهوم نکته‌ی بالا واضح است: در نقاطی که تابع $y=[f(x)]$ پیوسته است، نمودار آن از پاره‌خطی افقی تشکیل شده، بنابراین مشتق‌پذیر (با مشتقی برابر صفر) می‌باشد.

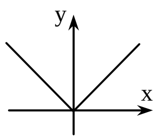
انواع نقاط مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که دسته‌ی اول نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع، همان نقاط ناپیوستگی هستند. ولی نقاط دیگر مشتق‌ناپذیری را (یعنی نقاطی که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست) می‌توانیم به سه دسته‌ی زیر تقسیم کنیم:

۱- نقاط زاویه‌دار: نقاطی که مانند $x=a$ در آن‌ها f پیوسته است و حداقل یکی از دو مقدار $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود است، ولی تابع مشتق‌ناپذیر است.

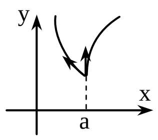
در این نقاط می‌توانیم دو نیم‌مماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می‌دهند.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$ یک نقطه‌ی زاویه‌دار دارد، زیرا:

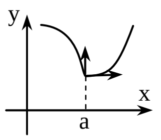


$$f'_+(0)=1\quad,\quad f'_-(0)=-1$$

به دو نمودار مقابل نیز دقت کنید:



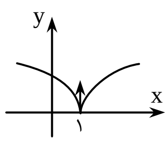
$f'_-(a)=$ عدد حقیقی
$f'_+(a)=+\infty$



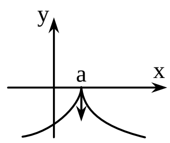
$f'_-(a)=-\infty$
$f'_+(a)=0$

۲- نقاط بازگشت: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو نامتناهی‌اند، ولی با علامت‌های مختلف (یعنی $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$ یا بر عکس).

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ در نقطه‌ی $x=1$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا $f'_+(1)=+\infty$ و $f'_-(1)=-\infty$. به نمودار تابع دقت کنید:



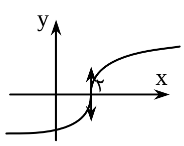
هم‌چنین به نمودار روبه‌رو دقت کنید:



$$\begin{cases}f'_+(a)=-\infty\\ f'_-(a)=+\infty\end{cases}$$

۳- نقاط عطف قائم: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ در نقطه‌ی $x=2$ عطف قائم دارد. به نمودار تابع دقت کنید. داریم: $f'_+(2)=+\infty$ و $f'_-(2)=+\infty$.

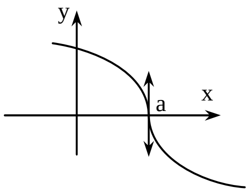


فصل ۴

مفاهیم اولیه‌ی مشتق

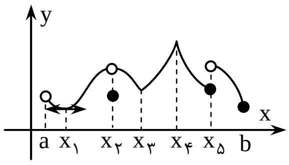
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$
۲) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$
۳) $\begin{cases} f'_+(a)=+\infty \\ f'_-(a)=-\infty \end{cases}$
۴) $\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$

۲- نمودار تابع روبه‌رو در بازه‌ی (a,b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق‌ناپذیر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳- f تابعی فرد است و $f'_+(1)=2$ و $f'_-(1)=1$. مقدار $f'_-(-1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۲−

۴- اگر f یک تابع زوج باشد، با فرض $f'_+(1)=1$ و $f'_-(1)=2$، مقدار $f'_+(-1)$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱−

۵- دو نقطه به طول‌های ۲ و $2+h$ روی منحنی $y=\sqrt{x}$ مفروض‌اند. مقدار حد ضریب زاویه‌ی خط گذرنده بر دو نقطه، وقتی $h\to 0$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۶- شیب وتری که دو نقطه به‌طول‌های ۲ و x را از نمودار تابع هموار $y=f(x)$ به‌هم وصل می‌کند، برابر x^2+2x+4 است. شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ای به‌طول ۲ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۷- در تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & x<-1 \\ |x| & x\geq -1 \end{cases}$، حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۳

۸- در تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{2x^2+x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۴− ۴) وجود ندارد.

۹- اگر مشتق چپ تابع $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{ax^2-x^4}$ در $x=0$ برابر ۱− باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

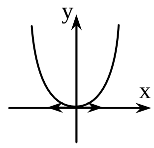
۱۰- اگر مشتق چپ تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{\pi}\tan^{-1}(\dfrac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ برابر ۲ باشد، مقدار a کدام است؟

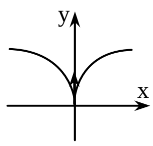
۱) ۴ ۲) ۴− ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

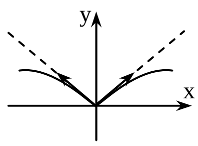
۱۱- مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطه‌ی $x=۰$ کدام است؟

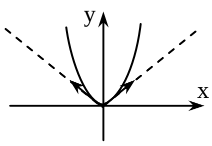
۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

* ۱۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در همسایگی $x=۰$ به کدام شکل است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۳- مقدار مشتق تابع $f(x)=|x\tan^{-۱}x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) وجود ندارد.

۱٤- اگر $g(x)=[x]\sin x$، مقدار $g'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۵- مشتق تابع $f(x)=x+[\frac{x}{۲}]$ در نقطه‌ی $x_۰=۲k-۱$ $(k\in Z)$ کدام است؟

۱) $۲k$ ۲) $۲k-۱$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱٦- در تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$، حاصل $f'_+(۲)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) -۲π ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۷- در تابع $f(x)=[-x]\,|x^۳-۸|$، مجموع مشتق چپ و راست در $x=۲$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

۱۸- مشتق چپ تابع $f(x)=x^۲[-x^۲]+|x^۲-۱|$ در نقطه‌ی $x_۰=-۱$ چقدر است؟

۱) موجود نیست. ۲) صفر ۳) ۲ ۴) -۲

۱۹- در تابع $f(x)=(x-a)[-x]$، که $a\in N$ یک عدد ثابت است، حاصل $f'_+(a)+f'_-(a)$ کدام است؟

۱) $-۲a+۱$ ۲) $-۲a-۱$ ۳) $۲a$ ۴) $۲a-۱$

۲۰- اگر $f(x)=(x^۲-۲x)([x]+[-x])$، حاصل $f'(۲)$ کدام است؟

۱) وجود ندارد. ۲) صفر ۳) -۱ ۴) -۲

۲۱- مشتق راست تابع $f(x)=[\sin x+\cos x]$ در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۲- اگر مشتق راست تابع $f(x)=a\,|\cos x-\sin x|$ در $x_۰=\frac{\pi}{۴}$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۳- کدام گزینه مشتق تابع $f(x)=\sin ۲x$ را در $x=\frac{\pi}{۲}$ بیان می‌کند؟

۱) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+h)}{h}$ ۲) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲h)}{h}$ ۳) $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(\pi+h)-\sin h}{h-\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x-\sin ۲h}{h-\frac{\pi}{۲}}$

۲٤- اگر تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $f'(۱)$ ۲) $۲f'(۱)$ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}f'(۱)$

۲۵- اگر تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x^۲+۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}f'(۲)$ ۲) $\frac{۱}{۲}f'(۲)$ ۳) $\frac{۱}{۸}f'(۲)$ ۴) صفر

۲۶- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x_۰)-f(x_۰-۲h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۷- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=۲$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) $۲+f(x_۰)$ ۴) به مشتق‌پذیری یا مشتق‌ناپذیری f در نقطه‌ی $x=x_۰$ بستگی دارد.

۲۸- هرگاه تابع f در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(x_۰+\frac{۱}{n})-f(x_۰-\frac{۱}{n}))$ کدام است؟ $(n\in N)$

۱) $\frac{۱}{۲}f'(x_۰)$ ۲) $f'(x_۰)$ ۳) $۲f'(x_۰)$ ۴) $-f'(x_۰)$

۲۹- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x+۲h)-f(x-۴h)}{۳h}=\sqrt{۲x}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)-f(۲-h)}{۳h^۲+۲h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۲

۳۰- اگر $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۴})$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(۲-\Delta x)-۱}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\pi$

۳۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^۳(۴+h)-f^۳(۴)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۹

۳۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۴+۱ & x\geq ۱ \\ x^۲-۱ & x<۱ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۳۳- در تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-۱} & x\geq ۲ \\ x^۲-۳ & x<۲ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۲-h)-۱}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) وجود ندارد.

۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{۵}{x}-۳x & x\leq -۱ \\ \frac{۵x+۱}{x+۲}+۲ & x>-۱ \end{cases}$، در این صورت حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(-۱)-f(h-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۱۷ ۴) -۱۷

۳۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+۴}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(\Delta x)-f(۲\Delta x)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۶- با فرض $f(x)=\begin{cases}3x^2-x & x>2\\ 2x+6 & x\le 2\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶− ۴) ۱۷

۳۷- برای تابع $f(x)=|x|$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2)-f(-2-|h|)}{|h|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) $-\sqrt{2}$

۳۸- با فرض $f(x)=|x|\sqrt{x+4}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2h)-f(-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰− ۳) ۲ ۴) ۲−

۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x\ge 1\\ x^3-3 & x<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h^2)-f(1+h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۵− ۲) ۴ ۳) ۷− ۴) ۶

۴۰- اگر تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $f(2)-f'(2)$ ۲) $f(2)-2f'(2)$ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۱- حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2+2(1+h)-3}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴− ۳) ۳ ۴) ۳−

۴۲- عبارت $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x-1}$ برای بیان مشتق چند تابع در $x=1$ می‌تواند به‌کار رود؟

۱) فقط یک تابع ۲) بی‌شمار تابع

۳) هیچ تابع ۴) مربوط به مشتق نیست.

۴۳- مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=2$ به‌صورت $12=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(2+h)^2+k(2+h)-2k-8}{h}$ بیان شده است. مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 1\\ x^3 & x\le 1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(f\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)-f(1)\right)$ کدام است؟ $(n\in N)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۴۵- برای کدام مقدار a و b، تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\ge 2\\ x^2+x+a & x<2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=2$ از راست مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=-b=1$ ۲) $a=b=-1$ ۳) هیچ مقدار a و b ۴) هر مقدار a و b

۴۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2 & x<1\\ bx^3+2x & x\ge 1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶− ۲) ۴− ۳) ۶ ۴) ۴

۴۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2-x+b & |x|\le 2\\ |x-2| & |x|>2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۴۸- به‌ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=\begin{cases} ax+5 & x\geq 1 \\ x^2-a & x<1 \end{cases}$ در R مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-2\}$ ۳) $\{2\}$ ۴) $\varnothing$

۴۹- تابع f با ضابطه‌ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x+1 & 0\leq x<1 \\ 2x+2 & 1\leq x<2 \\ x^2+2 & x\geq 2 \end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۵۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ \sqrt{x+3} & -3\leq x\leq 1 \end{cases}$، در بازه‌ی $[-3,+\infty)$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۵۱- تابع $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & x>0 \\ x+2 & x=0 \\ x & x<0 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزاره درست است؟

۱) f در $x=0$ مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.
۲) f در $x=0$ مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.
۳) f در $x=0$ نه مشتق راست دارد، نه مشتق چپ.
۴) f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۵۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x|x| & x<0 \\ \sqrt{x} & x\geq 0 \end{cases}$ مفروض است. در نقطه‌ی $x_0=0$ کدام گزینه درباره‌ی این تابع درست است؟

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد.
۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۳- توابع $f(x)=\begin{cases} (x-1)\sin\frac{1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} (x-1)^2\sin\frac{1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ چه وضعیتی دارند؟

۱) هر دو مشتق‌پذیر
۲) هر دو مشتق‌ناپذیر
۳) f مشتق‌پذیر و g مشتق‌ناپذیر
۴) f مشتق‌ناپذیر و g مشتق‌پذیر

۵۴- تابع $f(x)=|x-1|[x]$ در نقطه‌ی $x=1$ ....

۱) پیوسته نیست، ولی حد دارد. ۲) مشتق‌پذیر است. ۳) حد ندارد. ۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۵- کدام تابع در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) $f(x)=x^3-2|x|$ ۲) $f(x)=x\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=x(x-|x|)$

۵۶- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=x|x-1|+a|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=0$ ۳) $a=-1$ ۴) همه‌ی مقادیر

۵۷- کدام‌یک از توابع زیر در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $f_1(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$
۲) $f_2(x)=(x-2)[x]$
۳) $f_3(x)=|x-2|(x-2)$
۴) $f_4(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

۵۸- اگر تابع $f(x)=|x^2+x+m|$ در R مشتق‌پذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{1}{4}$ ۲) $m\geq\frac{1}{4}$ ۳) $m\leq\frac{1}{4}$ ۴) $m>\frac{1}{8}$

۵۹- اگر تابع $f(x)=(x-2)^m[x]$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، m کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰- اگر تابع $f(x)=(x-1)^n[x+1]$ در $x=1$ مشتقی مخالف صفر داشته باشد، n کدام عدد می‌تواند باشد؟ $(n\in N)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار n

۶۱- تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[2x+1]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -4

* ۶۲- اگر $f(x)=(x^3+ax+b)[x]$ در $x_0=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۴

۶۳- تابع $f(x)=[\sin^3 x]$ در $x=\pi$ ...

۱) مشتق‌پذیر است. ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

۶۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x[\sin x]$ روی بازه‌ی $(-\pi,\frac{\pi}{2})$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته- مشتق‌پذیر ۲) ناپیوسته- مشتق‌پذیر ۳) پیوسته- مشتق‌ناپذیر ۴) ناپیوسته- مشتق‌ناپذیر

۶۵- کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=[|x|]$ در $x=0$ درست است؟

۱) پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست. ۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) مشتق‌پذیر است.

۶۶- در کدام تابع شرایط $f'_-(0)=+\infty$ و $f'_+(0)=-\infty$ برقرار است؟

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ۴) $f(x)=-\sqrt[3]{x^2}$

۶۷- برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$، نقاط $A(1,0)$ و $B(-2,0)$ به‌ترتیب کدام عنوان را دارند؟

۱) عطف و عطف ۲) عطف و بازگشت ۳) بازگشت و عطف ۴) بازگشت و بازگشت

۶۸- تابع $f(x)=(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۹- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+1}{x^2-4} & x\ge 0\\ \sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۷۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ |x|-1 & |x|>1\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۱- تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x-2} & x<1\\ \dfrac{|x-1|}{x+2} & x\ge 1\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3} & x\ge 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۴- نمودار تابع $f(x)=|x^3|+|x^3+2x^2+x|$ در چند نقطه زاویه‌دار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۵- تابع $y=|x^3+x-1|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) صفر نقطه

۷۶- اگر نمودار تابع $f(x)=|x^3-2x^2+ax|$ فقط یک نقطه‌ی زاویه‌دار داشته باشد، مقدار a کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $|a|\leq 1$ ۲) $|a|\geq 1$ ۳) $|a|<1$ ۴) $a\geq 1$

* ۷۷- تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)|x+1|(x^4+ax^2+bx+c)}$ در R مشتق‌پذیر است. حاصل $a+2b+3c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر

۳) ۱− ۴) هیچ مقداری برای a، b و c وجود ندارد.

۷۸- تابع $f(x)=|x^2-2|x||$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۹- تابع $f(x)=[\sqrt{5}x]$ در بازه‌ی $(0,4)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۰- تابع $y=|\sin x-1|$ در چند نقطه از دامنه‌اش در بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) صفر نقطه

* ۸۱- اگر $f(x)=|\tan x-\cot x|$، آن‌گاه تابع f در بازه‌ی $(0,\pi)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۲- تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x)=||x|-1|$ بر روی R کدام است؟ **(سراسری- ۸۵)**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۳- تابع با ضابطه‌ی $y=x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟ **(سراسری- ۸۷)**

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است. ۲) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. ۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

۸٤- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\in R-Q \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر است؟ **(سراسری - ۸۸)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۵- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$، در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ **(سراسری- ۸۹)**

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۸٦- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطه‌ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام است؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸۵)**

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۸۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x+\frac{1}{3}]+[x]$ روی بازه‌ی $(0,3)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر <u>نیست</u>؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸٦)**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۸- اگر $f(x)=1-|x|$، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطه‌ی $y=f(f(x))$ کدام است؟ **(سراسری خارج از کشور - ۸۸)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۹- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sqrt{x}}{x} & x\geq ۱\\ ax^{۲}+bx & x<۱\end{cases}$، بر روی R مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۹۰- کدام تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟ (آزاد- ۸۶)

۱) $y=[(x-۱)^{۳}]$ ۲) $y=(x-۱)[\sqrt[۳]{x-۱}]$ ۳) $y=[\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}]$ ۴) $y=\sqrt[۳]{x-۱}[(x-۱)^{۳}]$

۹۱- در تابع $y=\begin{cases}x^{۳} & |x|\geq ۱\\ ۲x^{۲}-۱ & |x|<۱\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^{-}}\frac{f(۱+\Delta x)-۱}{\Delta x}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۶)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

۹۲- در تابع $f(x)=|x-۱|+۳|x-۲|$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^{۲})+f(۲+h^{۲})-۴}{h^{۲}}$ کدام است؟ (آزاد- ۸۶)

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) -۱ ۴) ۲

۹۳- برای تابع $f(x)=\frac{|x-۱|+۱}{|x|+۱}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^{+}}\frac{f(۱-۲\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۷)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۹٤- تابع $y=(x^{۳}+۳x^{۲}+ax+b)[x]$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟ (آزاد - ۹۰)

۱) ۵۲ ۲) -۵۲ ۳) -۴ ۴) ۴

فصل ۴

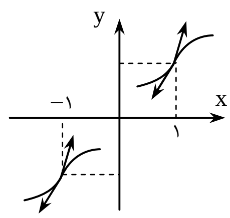
مفاهیم اولیه‌ی مشتق

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۲)** به شیب خطوط مماس بر نمودار تابع دقت کنید.

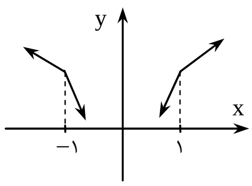
A **۲- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقاط $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ مشتق‌ناپذیر است. نقاط $x_۲$ و $x_۵$ نقاط ناپیوستگی‌اند، نقطه‌ی $x_۳$ نقطه‌ی زاویه‌دار و نقطه‌ی $x_۴$، نقطه‌ی بازگشت است.

B **۳- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. وقتی $f'_+(۱) = ۲$ و $f'_-(۱) = ۱$، مطابق شکل می‌توانیم دو نیم‌مماس به شیب‌های ۲ و ۱ در راست و چپ نمودار در نقطه‌ی به‌طول $x = ۱$ روی آن رسم کنیم. قرینه‌ی این نیم‌مماس‌ها نسبت به مبدأ مختصات را نیز رسم کرده‌ایم که وضعیت نمودار تابع در $x = -۱$ را نشان می‌دهند. مطابق شکل داریم: $f'_-(-۱) = ۲$ و $f'_+(-۱) = ۱$.



B **۴- گزینه‌ی (۱)** از فرض $f'_+(۱) = ۱$ و $f'_-(۱) = ۲$ نتیجه می‌گیریم در نقطه‌ی $x = ۱$ می‌توانیم دو نیم‌مماس با شیب‌های ۱ و ۲ از راست و چپ بر نمودار تابع رسم کنیم. چون f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است، پس مطابق شکل داریم:

$$f'_+(-۱) = -۲\ ,\ f'_-(-۱) = -۱$$



A **۵- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$، دو نقطه $(۲, f(۲))$ و $(۲+h, f(۲+h))$ هستند و ضریب زاویه‌ی خط گذرنده از آن‌ها با کسر $\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}$ بیان می‌شود. پس با $f'(۲) = \lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ کار داریم که برابر است با: $\dfrac{\sqrt{۲}}{۴} = \dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}$.

C **۶- گزینه‌ی (۴)** شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۲, f(۲))$ و $B(x, f(x))$ برابر است با: $\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$. پس طبق فرض داریم: $\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = x^۲ + ۲x + ۴$ و می‌خواهیم $f'(۲)$ را بیابیم:

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}(x^۲ + ۲x + ۴) = ۱۲$$

A **۷- گزینه‌ی (۱)** برای محاسبه‌ی $f'(-۲)$ باید از ضابطه‌ی اول تابع استفاده کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۳ - ۱}{x-۱} = \frac{(x-۱)(x^۲ + x + ۱)}{x-۱} = x^۲ + x + ۱$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x + ۱ \Rightarrow f'(-۲) = -۴ + ۱ = -۳$$

A **۸- گزینه‌ی (۳)** از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۲x}{۲x^۲+x} - ۲}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{-۴x^۲}{۲x^۲+x}}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{-۴x^۲}{(۲x+۱)x^۲} = \frac{-۴}{۱} = -۴$$

A **۹- گزینه‌ی (۴)** می‌دانیم، $f(x) = \frac{۱}{۲}|x|\sqrt{a - x^۲}$، حال با توجه به آن‌که $f(۰) = ۰$، داریم:

$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)}{x} = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt{a-x^۲}}{x} = \frac{-۱}{۲}\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{a}}{۲} = -۱ \Rightarrow a = ۴$$

۱۰- گزینه‌ی (۲) از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم: B

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{\pi}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{a}{\pi}\lim_{t\to -\infty}\tan^{-1}(t)$$

$$=\frac{a}{\pi}\times\frac{-\pi}{2}=-\frac{a}{2}\Rightarrow -\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=-4$$

۱۱- گزینه‌ی (۳) چون $f(0)=0$، داریم: B

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲- گزینه‌ی (۴) مانند تست قبل داریم: $f'_+(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $f'_-(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (دقت کنید که برای $x<0$، باید به‌جای x در مخرج کسر مشتق قرار دهید: $-\sqrt{x^2}$). پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. حال به‌دلیل نامساوی‌های برگشت‌پذیر زیر گزینه‌ی (۳) نیز رد می‌شود: D

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-\sqrt{1-x^2}>\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}x^2>\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow 1-x^2+\frac{1}{4}x^4>1-x^2\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4>0$$

معنی نامساوی‌های بالا این است که برای $x>0$، نمودار تابع بالاتر از نیم مماس راست (با معادله‌ی $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$) قرار می‌گیرد. به‌همین ترتیب برای $x<0$ ثابت می‌شود $f(x)>-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

۱۳- گزینه‌ی (۲) با توجه به نمودار $y=\tan^{-1}x$، برای $x>0$ داریم: $\tan^{-1}x>0$ و برای $x<0$: $\tan^{-1}x<0$. پس x و $\tan^{-1}x$ هم‌علامت‌اند و در نتیجه: $f(x)=x\tan^{-1}x$، بنابراین: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\tan^{-1}x=0$ B

۱۴- گزینه‌ی (۲) در همسایگی کوچک $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $[x]=1$ و $g(x)=\sin x$، بنابراین: $g'(x)=\cos x\Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=0$ B

۱۵- گزینه‌ی (۳) در نقطه‌ی مورد نظر داریم: $\frac{x_0}{2}\notin Z$، بنابراین تابع $y_1=[\frac{x}{2}]$ در این نقطه پیوسته و دارای مشتقی برابر صفر است. پس فقط باید مشتق $y_2=x$ را در نقطه‌ی $x_0=2k-1$ بیابیم که به وضوح برابر ۱ است. B

۱۶- گزینه‌ی (۱) $\sin\pi x$ در $x=2$ صفر می‌شود، پس به‌دلیل عامل صفر کننده در پیوستگی، تابع f در $x=2$ پیوسته است. حال برای $2\le x<3$ داریم: $f(x)=2\sin\pi x$ و بنابراین: $f'(x)=2\pi\cos\pi x\Rightarrow f'_+(2)=2\pi\cos 2\pi=2\pi$ B

۱۷- گزینه‌ی (۴) علامت عبارت x^3-8 مانند علامت عبارت $x-2$ است. بنابراین: B

$$x\to 2^+: x>2\Rightarrow -x<-2\ ,\ x^3-8>0\Rightarrow f(x)=-3(x^3-8)\Rightarrow f'(x)=-9x^2\Rightarrow f'_+(2)=-36$$

$$x\to 2^-: x<2\Rightarrow -x>-2\ ,\ x^3-8<0\Rightarrow f(x)=-2(8-x^3)\Rightarrow f'(x)=6x^2\Rightarrow f'_-(2)=24$$

۱۸- گزینه‌ی (۱) در همسایگی چپ $x_0=-1$ ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم: B

$$x\to(-1)^-\Rightarrow x<-1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow\begin{cases}-x^2<-1\Rightarrow -x^2\to(-1)^-\\ x^2-1>0\Rightarrow |x^2-1|=x^2-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=-2x^2+x^2-1=-x^2-1$$

پس $\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-1-1=-2$ و $f(-1)=1\times(-1)+0=-1$، یعنی تابع f در نقطه‌ی $x_0=-1$ از چپ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

۱۹- گزینه‌ی (۲) ضابطه‌ی تابع را در همسایگی $x=a$ می‌نویسیم: (دقت کنید که $f(a)=0$ و تابع در $x=a$ پیوسته است) B

$$a<x<a+1\Rightarrow -(a+1)<-x<-a\Rightarrow f(x)=(x-a)(-a-1)\Rightarrow f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(-a-1)}{x-a}=-a-1$$

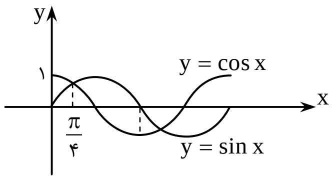
$$a-1<x<a\Rightarrow -a<-x<-(a-1)\Rightarrow f(x)=(x-a)(-a)\Rightarrow f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{(x-a)(-a)}{x-a}=-a$$

پس $f'_+(a)+f'_-(a)=-a-1-a=-2a-1$.

B **۲۰- گزینه‌ی (۴)** داریم: $f(۲)=۰$ و می‌دانیم برای $۱<x<۳$ که $x\neq ۲$ داریم: $[x]+[-x]=-۱$. بنابراین در همسایگی $x=۲$ داریم: $f(x)=-(x^۲-۲x)$، یعنی f در $x=۲$ پیوسته است و در نتیجه: $f'(x)=-۲x+۲ \Rightarrow f'(۲)=-۲$.

C **۲۱- گزینه‌ی (۴)** با توجه به آن‌که $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$، وقتی $x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+$، داریم: $x+\frac{\pi}{۴}\to\pi^+$، بنابراین $\sin(x+\frac{\pi}{۴})\to ۰^-$، یعنی تابع $f(x)$ در همسایگی راست $x=\frac{۳\pi}{۴}$ مقدار $[۰^-]=-۱$ را دارد، ولی $f(\frac{۳\pi}{۴})=۰$. پس در این نقطه f از راست ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

C **۲۲- گزینه‌ی (۳)** مطابق نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ که در شکل مقابل رسم شده است، در همسایگی کوچک راست $x=\frac{\pi}{۴}$ داریم: $\sin x>\cos x$. بنابراین:



$$f(x)=a(\sin x-\cos x)\Rightarrow f'(x)=a(\cos x+\sin x)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}a\Rightarrow \sqrt{۲}a=۱\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

B **۲۳- گزینه‌ی(۲)** مشتق تابع $f(x)=\sin ۲x$ را در $x=\frac{\pi}{۲}$ با یکی از دو حد زیر می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$۱)\ \lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{\pi}{۲}+h)-f(\frac{\pi}{۲})}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲h)-\sin\pi}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲h)}{h}$$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x-\sin\pi}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

A **۲۴- گزینه‌ی(۲)** حد مورد نظر را به حدی که بیانگر مشتق تابع است، ربط می‌دهیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}(\sqrt{x}+۱)\times\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=۲f'(۱)$$

B **۲۵- گزینه‌ی (۴)** چون f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)-f(۲)=۰$، در نتیجه حاصل حد خواسته شده نیز $\frac{۰}{۸}=۰$ می‌شود.

B **۲۶- گزینه‌ی (۲)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $f'(x_۰)=-۲$، حال با توجه به نکات بخش آموزش داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+۰\times h)-f(x_۰-۲h)}{h}=(۰-(-۲))f'(x_۰)=۲f'(x_۰)=۲\times(-۲)=-۴$$

B **۲۷- گزینه‌ی(۲)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $f'_+(x_۰)=۲$. با تغییر متغیر $t=-h$ حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(x_۰)-f(x_۰+t)}{-t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(x_۰+t)-f(x_۰)}{t}=f'_+(x_۰)=۲$$

B **۲۸- گزینه‌ی(۳)** اگر قرار دهیم $h=\frac{۱}{n}$، وقتی $n\to\infty$، داریم: $h\to ۰^+$ و حد مورد نظر به‌صورت $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰-h)}{h}$ در می‌آید. چون این حد وجود دارد، بنابر حد دنباله‌ای، حد اولیه نیز وجود دارد و حاصل آن دو یکی است. مقدار حد آخر نیز برابر است با: $(۱-(-۱))f'(x_۰)=۲f'(x_۰)$.

C **۲۹- گزینه‌ی (۱)** طبق نکات بخش آموزش داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+۲h)-f(x-۴h)}{۳h}=\frac{۱}{۳}(۲-(-۴))f'(x)=۲f'(x)\Rightarrow ۲f'(x)=\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}}$$

حال برای کسر دوم می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h(۳h+۲)}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=\frac{۱}{۲}(۱-(-۱))f'(۲)=f'(۲)\xrightarrow{\text{نتیجه بالا}}\text{جواب}=\sqrt{\frac{۲}{۲}}=۱$$

B **۳۰- گزینه‌ی(۳)** اگر قرار دهیم $t=-\Delta x$، آن‌گاه $t\to ۰$ و با توجه به این‌که $f(۲)=۱$ داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to ۰}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{-t}=-\lim_{t\to ۰}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}=-f'(۲)=-\frac{\pi}{۴}\cos(\frac{\pi}{۴}\times ۲)=۰$$

B **۳۱- گزینه‌ی (۱)** اگر قرار دهیم $g(x)=f^{۳}(x)$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{g(۴+h)-g(۴)}{h}=g'(۴)$ را می‌خواهیم. داریم:

$$g(x)=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(۴)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۴}=۳$$

B **۳۲- گزینه‌ی(۴)** مقدار حد همان $f'_-(۱)$ می‌شود، ولی تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته است ($\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۰$، $f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=۲$). پس مشتق چپ ندارد.

تذکّر: اگر در کسر مورد نظر مقادیر مربوط را قرار دهید، حاصل حد را $+\infty$ به‌دست خواهید آورد:

$$h\to ۰^-\Rightarrow ۱+h<۱\Rightarrow f(۱+h)-f(۱)=(۱+h)^{۲}-۱-۲=h^{۲}+۲h-۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}(h+۲-\frac{۲}{h})=+\infty$$

B **۳۳- گزینه‌ی (۲)** با جای‌گذاری $t=-h$، حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-۱}{-t}\xrightarrow{f(۲)=۱}-\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}=-f'_+(۲)$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است ($\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۱$)، بنابراین برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست f در $x=۲$ می‌توانیم از ضابطه‌های آن مشتق بگیریم:

$$x>۲: f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow f'_+(۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{جواب نهایی}=-\frac{۱}{۲}$$

B **۳۴- گزینه‌ی (۱)** تابع در $x=-۱$ پیوسته است. حال داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱)-f(-۱+h)}{h}=-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=-f'_-(-۱)=-(\frac{-۵}{x^{۲}}-۳)\Big|_{x=-۱}=۸$$

A **۳۵- گزینه‌ی (۱)** حد مورد نظر را با جای‌گذاری $h=\Delta x$ می‌توانیم به‌صورت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۰+h)-f(۰+۲h)}{h}$ بنویسیم که با توجه به نکات بخش آموزش، حاصل آن برابر است با:

$$(۱-۲)f'(۰)=-f'(۰)=-\frac{۱}{۲\sqrt{۰+۴}}=-\frac{۱}{۴}$$

C **۳۶- گزینه‌ی (۱)** با اضافه و کم‌کردن $f(۲)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-۲h)-f(۲)}{h}$$

$$\xrightarrow[k=-۲h]{t=۳h}\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{\frac{۱}{۳}t}-\lim_{k\to ۰^+}\frac{f(۲+k)-f(۲)}{-\frac{۱}{۲}k}=۳f'_-(۲)+۲f'_+(۲)$$

حال با توجه به آن‌که f در $x=۲$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست می‌توانیم از مشتق ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۶x-۱ & x>۲\\ ۲ & x<۲\end{cases}\Rightarrow f'_-(۲)=۲\ ,\ f'_+(۲)=۱۱\Rightarrow \text{جواب نهایی}=۳\times۲+۲\times۱۱=۲۸$$

B **۳۷- گزینه‌ی (۳)** با قرار دادن $t=-|h|$، حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲)-f(-۲+t)}{-t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲+t)-f(-۲)}{t}=f'_-(-۲)$$

در همسایگی نقطه‌ی $x=-۲$ داریم: $f(x)=-x$، بنابراین: $f'(x)=-۱$ و در نتیجه: $f'_-(-۲)=-۱$.

C **۳۸- گزینه‌ی (۳)** با اضافه و کم کردن $f(۰)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲h)-f(۰)}{h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۳h)-f(۰)}{h}\xrightarrow[k=-۳h]{t=۲h}\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(۰+t)-f(۰)}{\frac{۱}{۲}t}-\lim_{k\to ۰^+}\frac{f(۰+k)-f(۰)}{-\frac{۱}{۳}k}$$

$$=۲f'_-(۰)+۳f'_+(۰)$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است، و برای $x\to ۰^+$ داریم:

$$f(x)=x\sqrt{x+۴}\Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x+۴}=۲$$

به‌همین ترتیب داریم: $f'_-(۰)=-۲$، بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $۲\times(-۲)+۳\times۲=۲$

C **۳۹- گزینه‌ی (۱)** با اضافه و کم کردن $f(۱)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-۲h^۲)-f(۱)}{h^۲}-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^۲)-f(۱)}{h^۲}\xrightarrow[k\ \ h^۲]{t\ \ -۲h^۲}\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{-\frac{۱}{۲}t}-\lim_{k\to ۰^+}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{k}$$

$$=-۲f'_-(۱)-f'_+(۱)$$

با توجه به آن‌که f در $x=۱$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های بالا می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x>۱\\ ۳x^۲ & x<۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)=-۱\ ,\ f'_-(۱)=۳\Rightarrow \text{جواب نهایی}=-۲\times ۳-(-۱)=-۵$$

C **۴۰- گزینه‌ی(۲) راه اول:** با اضافه و کم کردن $۲f(۲)$ در صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{xf(۲)-۲f(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{xf(۲)-۲f(۲)}{x-۲}-\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=f(۲)\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x-۲}-۲\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f(۲)-۲f'(۲)$$

راه دوم: با توجه به ابهام $\frac{۰}{۰}$ از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(۲)-۲f'(x)}{۱}=f(۲)-۲f'(۲)$$

برای استفاده از این راه باید فرض کنید تابع f' در $x=۲$ پیوسته است.

A **۴۱- گزینه‌ی (۱)** اگر قرار دهیم $f(x)=x^۲+۲x$، آن‌گاه $f(۱)=۳$ و $f'(x)=۲x+۲$، هم‌چنین داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=f'(۱)=۲\times ۱+۲=۴$$

B **۴۲- گزینه‌ی(۲)** اگر قرار دهیم $f(x)=x^۳+x+c$ که c یک عدد حقیقی دلخواه است، $f'(۱)$ را می‌توان با حد مورد نظر بیان کرد.

B **۴۳- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $g(x)=۲x^۲+kx$، حد مورد نظر به‌صورت $\lim_{h\to ۰}\frac{g(۲+h)-g(۲)}{h}$ در می‌آید. بنابراین $g'(۲)=۱۲$ و چون $g'(x)=۴x+k$، نتیجه می‌گیریم:

$$۸+k=۱۲\Rightarrow k=۴$$

C **۴۴- گزینه‌ی (۱)** تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است و می‌دانیم $f'_+(۱)=۲$، زیرا $f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۱\\ ۳x^۲ & x<۱\end{cases}$. بنابراین:

$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=۲$. پس اگر قرار دهیم: $g(h)=\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$، آن‌گاه: $\lim_{h\to ۰^+}g(h)=۲$

حال دنباله‌ی $\{\frac{۱}{n^۲}\}$ را در نظر بگیرید. وقتی $n\to\infty$، داریم: $a_n=\frac{۱}{n^۲}\to ۰^+$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}g(a_n)=\lim_{h\to ۰^+}g(h)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}n^۲(f(۱+\frac{۱}{n^۲})-f(۱))=۲$$

A **۴۵- گزینه‌ی (۴)** برای $x\ge ۲$ تابع یک چند جمله‌ای است $(f(x)=ax^۲+bx)$، بنابراین در $x=۲$ همواره از راست پیوسته و مشتق‌پذیر است.

A **۴۶- گزینه‌ی (۳)** از پیوستگی f در $x=۱$ نتیجه می‌گیریم: $a=b+۲$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax & x<۱\\ ۳bx^۲+۲ & x>۱\end{cases}\xrightarrow[\text{پیوسته}]{x=۱\ \text{در}\ f}f'_+(۱)=۳b+۲\ ,\ f'_-(۱)=۲a\Rightarrow\begin{cases}۲a=۳b+۲\\ a=b+۲\end{cases}\Rightarrow a=۴\ ,\ b=۲$$

A **۴۷- گزینه‌ی (۳)** از پیوستگی f در $x=۲$ نتیجه می‌گیریم: $۴a-۲+b=۰$. حال با فرض پیوستگی در همسایگی $x=۲$ داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax-۱ & -۲<x<۲\\ ۱ & x>۲\end{cases}\xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=۲\ \text{در}\ f}۴a-۱=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{۴a-۲+b=۰}b=۰$$

B **۴۸- گزینه‌ی (۴)** از پیوستگی f در $x=۱$ نتیجه می‌گیریم: $a+۵=۱-a\Rightarrow a=-۲$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & x>۱\\ ۲x & x<۱\end{cases}\xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)}a=۲\rightarrow\ \text{در تناقض با نتیجه‌ی}\ a=-۲$$

B **۴۹- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقطه‌ی $x=1$ ناپیوسته (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) است، زیرا
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1+1=2$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2+2=4$.
هم‌چنین ضابطه‌ی $f'(x)$ را به‌صورت روبه‌رو می‌توان نوشت.

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0<x<1 \\ 2 & 1<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$$

در نقاط $x=0$ و $x=2$ نیز تابع مشتق‌ناپذیر است. پس روی هم یک نقطه‌ی ناپیوستگی و سه نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری داریم.

B **۵۰- گزینه‌ی (۴)** تابع f در $x=-3$ از راست مشتق‌پذیر نیست، پس در بازه‌ی $[-3,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f(-3)=0 \Rightarrow f'_+(-3)=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{\sqrt{x+3}}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}}=+\infty$$

A **۵۱- گزینه‌ی (۱)** تابع f در $x=0$ پیوستگی راست دارد $(f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0)$. تابع $y=1+\cos x$ نیز در R مشتق‌پذیر است. بنابراین f در $x=0$ از راست مشتق‌پذیر است.

B **۵۲- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است. پس برای مشتق چپ و راست آن در این نقطه، می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم. تابع $y_1=x|x|$ در R مشتق‌پذیر است، ولی تابع $y_2=\sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، پس تابع f در $x=0$ فقط مشتق چپ دارد.

B **۵۳- گزینه‌ی (۴)** برای تابع f داریم: $f(1)=0=$ کران‌دار $\times$ صفر $=\lim_{x\to 1} f(x)$، پس تابع f در $x=1$ پیوسته است (و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم g نیز در $x=1$ پیوسته است). f در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است، زیرا:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}\rightarrow \text{وجود ندارد}$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $g'(1)=0$، پس g در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

B **۵۴- گزینه‌ی (۴)** در همسایگی $x=1$ ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1| & 1\le x<2 \\ 0 & 0\le x<1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-1 & 1\le x<2 \\ 0 & 0\le x<1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2 \\ 0 & 0<x<1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f در $x=1$ پیوسته و مشتق ناپذیر

B **۵۵- گزینه‌ی (۱)** گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) در $x=0$ مشتق‌پذیرند، مثلاً برای تابع گزینه‌ی (۴) داریم:

$$f(0)=0 \Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0} x-|x|=0$$

ولی تابع گزینه‌ی (۱) از جمع یک تابع مشتق‌پذیر و یک تابع مشتق‌ناپذیر تشکیل شده، بنابراین خود مشتق‌ناپذیر است.

B **۵۶- گزینه‌ی (۳)** چون $f(x)=(x+a)|x-1|$، اگر $x=1$ ریشه‌ی $x+a$ نباشد، تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است. پس باید $1+a=0$، بنابراین $a=-1$.

B **۵۷- گزینه‌ی (۳)** چون $f_1(x)=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$، تابع f_1 در نقطه‌ی $x=2$ مشتق‌ناپذیر است. هم‌چنین طبق نکات بخش آموزش، تابع گزینه‌ی (۴) نیز در $x=2$ مشتق‌ناپذیر است. تابع گزینه‌ی (۳) مشتق‌پذیر است، زیرا:

$$f'_3(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f_3(x)-f_3(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}|x-2|=0$$

به‌همین ترتیب می‌توانید نشان دهید $f'_2(2)$ وجود ندارد.

B **۵۸- گزینه‌ی (۲)** اگر عبارت x^2+x+m ریشه‌ی ساده (غیر مضاعف) داشته باشد، تابع f در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است. پس برای آن‌که تابع f در R مشتق‌پذیر باشد، باید عبارت x^2+x+m یا ریشه نداشته باشد، یا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی:

$$\Delta\le 0 \Rightarrow 1-4m\le 0 \Rightarrow m\ge \frac{1}{4}$$

B **۵۹- گزینه‌ی (۱)** اگر $m\ge 2$، تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر است، زیرا با فرض $m\ge 2$ داریم: $(m\in N)$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^m[x]}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-2)^{m-1}[x]$$

که چون $m-1\ge 1$، عامل $(x-2)^{m-1}$ در $x=2$ برابر صفر می‌شود و طبق عامل صفر کننده در پیوستگی، مقدار حد نیز برابر صفر می‌شود.

C ۶۰- گزینه‌ی (۴) چون $n \in N$، داریم: $f(۱)=۰$، بنابراین: $f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^n[x+۱]}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)^{n-۱}[x+۱]$

اگر $n=۱$، به حد $\lim\limits_{x\to ۱}[x+۱]$ می‌رسیم که وجود ندارد. اگر $n\geq ۲$، عامل $(x-۱)^{n-۱}$ به‌ازای $x=۱$ برابر صفر می‌شود و طبق نکته‌ی عامل صفر کننده در پیوستگی مقدار حد برابر صفر می‌شود. پس هیچ‌گاه مقدار مشتق غیر صفر نمی‌شود.

C ۶۱- گزینه‌ی (۱) باید $x=۱$ ریشه‌ی مضاعف $x^۲+ax+b$ باشد، یعنی:

$$x^۲+ax+b=(x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow a=-۲ , b=۱$$

تذکّر: برای اثبات نتیجه‌ی فوق به این دقت کنید که اولاً برای پیوسته بودن f در $x=۱$ باید عبارت $x^۲+ax+b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، پس $x=۱$ ریشه‌ی آن است و داریم: $x^۲+ax+b=(x-۱)g(x)$. حال با این فرض می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)g(x)[۲x+۱]}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}g(x)[۲x+۱]$$

برای وجود داشتن حد بالا باز هم باید $x=۱$ ریشه‌ی $g(x)$ باشد، یعنی $x=۱$ ریشه‌ی مضاعف عبارت اولیه است.

D ۶۲- گزینه‌ی (۴) برای آن‌که f در $x=۲$ پیوسته باشد، باید $g(x)=x^۳+ax+b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی باید $g(۲)=۰$، پس $g(x)=(x-۲)h(x)$. حال برای مشتق‌پذیری f در $x=۲$ باید حد زیر موجود باشد:

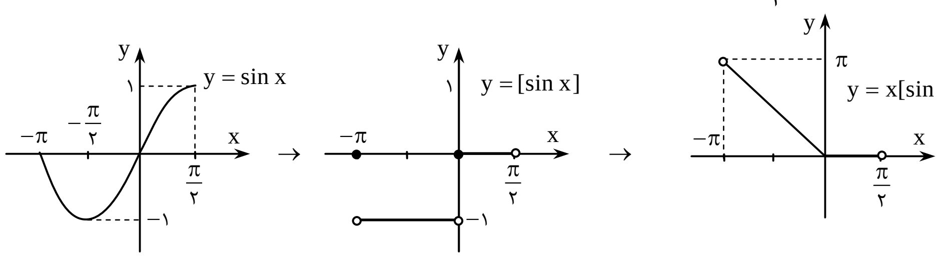
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)h(x)[x]-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}h(x)[x]$$

برای موجود بودن حد بالا باید $h(x)$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی $h(۲)=۰$. پس باید $g(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر باشد، که برای این شرط باید داشته باشیم $g(۲)=g'(۲)=۰$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} g(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۲a+b=۰ \\ g'(۲)=۰ \Rightarrow ۳\times ۴+a=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a=-۱۲ , b=۱۶ \Rightarrow a+b=۴$$

B ۶۳- گزینه‌ی (۳) اگر قرار دهیم $g(x)=\sin^۳ x$، با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $g(\pi)=۰$ و برای $x\to \pi^-$ داریم: $g(x)\to ۰^+$ و برای $x\to \pi^+$ داریم: $g(x)\to ۰^-$، بنابراین تابع $f(x)=[g(x)]$ در نقطه‌ی $x=\pi$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

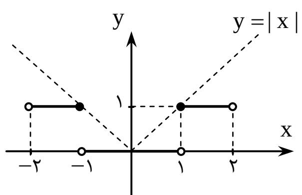
B ۶۴- گزینه‌ی (۳) نمودار $y=x[\sin x]$ را در بازه‌ی $(-\pi,\frac{\pi}{۲})$ رسم می‌کنیم:

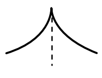


با توجه به نمودار در این بازه تابع پیوسته است، ولی در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

B ۶۵- گزینه‌ی (۴)

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، $f(x)$ در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.



B ۶۶- گزینه‌ی(۴) با توجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $x=۰$ نقطه‌ی بازگشت تابع است و نمودار تابع در همسایگی آن به صورت  می‌شود. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ چنین نموداری دارد.

C ۶۷- گزینه‌ی (۳) با تجزیه‌ی عبارت زیر رادیکال ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲(x+۲)}$ بنویسیم. حال در نقطه‌ی $A(۱,۰)$ داریم:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}\times\sqrt[۳]{x+۲}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt[۳]{x+۲}}{\sqrt[۳]{x-۱}}=\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۰^+}=+\infty$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(۱)=-\infty$، بنابراین با توجه به پیوستگی f در $x=۱$، نقطه‌ی A نقطه‌ی بازگشت تابع است. به‌همین ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_+(-۲)=f'_-(-۲)=+\infty$ و نقطه‌ی $B(-۲,۰)$، نقطه‌ی عطف قائم تابع می‌شود.

تذکّر: این‌گونه تست‌ها را با روش ساده‌تری نیز می‌توان حل کرد که بر اساس تحلیل رفتار نمودار تابع در همسایگی نقطه‌ی مورد نظر است. با این روش در فصل «کاربرد مشتق» آشنا خواهید شد.

A **۶۸- گزینه‌ی (۳)** ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۲)^۲(x+۲)^۲}$ بنویسیم. بنابراین تابع در $x=\pm۲$ مشتق‌ناپذیر است.

B **۶۹- گزینه‌ی (۱)** اولاً در $x=۰$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. ضابطه‌ی دوم در تمام نقاط $R-\{۰\}$ (و در نتیجه برای $x<۰$) مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی اول نیز یک تابع گویا است که در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. بنابراین فقط یک نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری $(x=۰)$ داریم.

B **۷۰- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی تعریف ضابطه $(۱<|x|)$ قرار ندارد. پس فقط باید نقاط مرزی $x=\pm۱$ را بررسی کنیم. در هر دوی این نقاط تابع پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$f(x)=\begin{cases}۱-x^۲ & |x|\le۱\\ x-۱ & x>۱\\ -x-۱ & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-۲x & |x|<۱\\ ۱ & x>۱\\ -۱ & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)=۱\,,\ f'_-(۱)=-۲\,,\ f'_+(-۱)=۲\,,\ f'_-(-۱)=-۱$$

A **۷۱- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی اول در دو نقطه‌ی $x=\pm۱$ مشتق‌ناپذیر است که هر دو در محدوده‌ی $|x|\le۲$ قرار دارند. هم‌چنین تابع در نقاط مرزی $x=\pm۲$ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. مثلاً برای $x=-۲$ داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=|۴-۱|=۳\ ,\quad \lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=-۸-۱=-۹$$

B **۷۲- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x=-۱$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی $x<۱$ قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است. در این نقطه تابع، ناپیوسته نیز است $(\lim_{x\to۱^+}f(x)=۰,\ \lim_{x\to۱^-}f(x)=-۲)$، پس نقاط مشتق‌ناپذیری تابع عبارت‌اند از $x=\pm۱$.

B **۷۳- گزینه‌ی (۲)** اولاً در نقطه‌ی $x=۰$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است $(\lim_{x\to۰^+}f(x)=-۱,\ \lim_{x\to۰^-}f(x)=۴)$. ضابطه‌ی اول (برای $x>۰$)، در $x=۱$ به‌علت حضور $x-۱$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی ضابطه قرار دارد. هم‌چنین در ضابطه‌ی دوم به‌علت حضور $x+۱$، $x=-۱$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت است که ضابطه در آن مشتق‌ناپذیر است. پس روی هم تابع در سه نقطه‌ی $x=۰$ و $x=\pm۱$ مشتق‌پذیر نیست.

B **۷۴- گزینه‌ی (۲)** چون $x^۳+۲x^۲+x=x(x+۱)^۲$، پس $x=-۱$ ریشه‌ی مضاعف عبارت داخل قدر مطلق است و عبارت دوم تنها در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است. ولی عبارت اول در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق‌پذیر است ($x=۰$ ریشه‌ی مکرر $x^۳$ است). پس مجموع دو عبارت در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر و زاویه‌دار است، و نقطه‌ی زاویه‌دار دیگری نداریم.

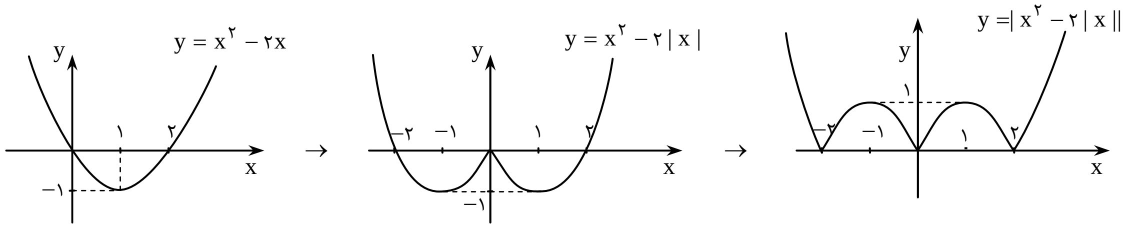
B **۷۵- گزینه‌ی (۱)** تابع $g(x)=x^۳+x-۱$ چند جمله‌ای درجه‌ی سوم است که چون $g'(x)=۳x^۲+۱>۰$، همواره اکیداً صعودی است و تنها یک ریشه‌ی ساده دارد. طبق نکات بخش آموزش $y=|g(x)|$ در این ریشه مشتق‌ناپذیر است.

C **۷۶- گزینه‌ی (۴)** باید $g(x)=x^۳-۲x^۲+ax$ فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد، زیرا ریشه‌های ساده‌ی g، نقاط زاویه‌دار f را مشخص می‌کنند. چون $g(x)=x(x^۲-۲x+a)$، پس $x=۰$ ریشه‌ی g است و چون $a\neq۰$، $x=۰$ ریشه‌ی ساده‌ی g است (زیرا دیگر ریشه‌ی $x^۲-۲x+a$ نیست). پس باید عبارت $x^۲-۲x+a$ دیگر ریشه‌ی ساده نداشته باشد، یعنی: $\Delta\le۰$، بنابراین: $۴-۴a\le۰\Rightarrow a\ge۱$.

D **۷۷- گزینه‌ی (۴)** تابع f باید در نقاط $x=\pm۱$ (ریشه‌های عبارت زیر رادیکال) مشتق‌پذیر باشد، پس باید زیر رادیکال با فرجه‌ی ۳، حداقل توان عوامل $(x-۱)$ و $(x+۱)$ برابر ۳ باشد، یعنی باید عبارت زیر رادیکال بر $(x-۱)^۳(x+۱)^۳$ بخش‌پذیر باشد، پس عبارت درجه‌ی چهار $x^۴+ax^۲+bx+c$ همان $(x-۱)^۲(x+۱)^۲$ یا معادلاً $(x^۴-۲x^۲+۱)=(x^۲-۱)^۲$ می‌باشد. ولی دقت کنید که در این صورت داریم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۳|x+۱|(x+۱)^۲}=\sqrt[۳]{(x-۱)^۳(|x+۱|)^۳}=(x-۱)|x+۱|\to$$ در $x=-۱$ مشتق‌ناپذیر

C **۷۸- گزینه‌ی (۳)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از این‌که $|x|^۲=x^۲$ در رسم نمودار کمک گرفته‌ایم. با توجه به نمودار، تابع در ۳ نقطه به طول‌های $x=۰$ و $x=\pm۲$ مشتق‌ناپذیر است.

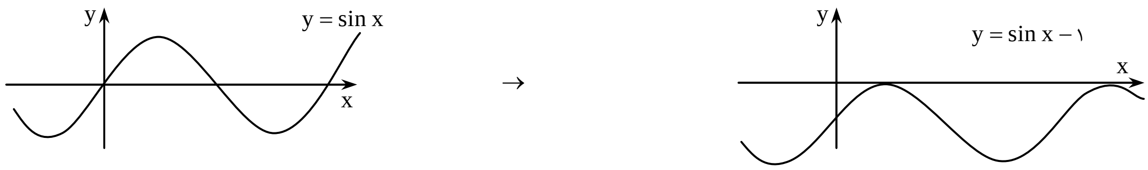


B **۷۹- گزینه‌ی (۲)** در تمام نقاطی که f ناپیوسته است، مشتق‌پذیر نیز نیست و در نقاط دیگر f مشتق‌پذیر است. بنابراین باید تعداد نقاطی را بیابیم که $\sqrt{۵}x\in Z$:

$$۰<x<۴\Rightarrow ۰<\sqrt{۵}x<۴\sqrt{۵}\ \xrightarrow[۸<۴\sqrt{۵}<۹]{\sqrt{۵}x\in Z}\ \sqrt{۵}x\in\{۱,۲,...,۸\}\to$$ ۸ نقطه

C **۸۰- گزینه‌ی(۴)** **راه اول:** تابع $y=|\sin x-1|$ در صورتی در نقطه‌ی $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر است که x_0 ریشه‌ی ساده‌ی $g(x)=\sin x-1$ باشد. یعنی $g(x_0)=0$ ولی $g'(x_0)\neq 0$. در حالی‌که اگر $g(x_0)=0$ یا معادلاً $\sin x_0=1$، داریم: $g'(x_0)=\cos x_0=0$، بنابراین تابع اصلی در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است.

راه دوم: با رسم نمودار تابع نیز می‌توانید به همین نتیجه برسید:



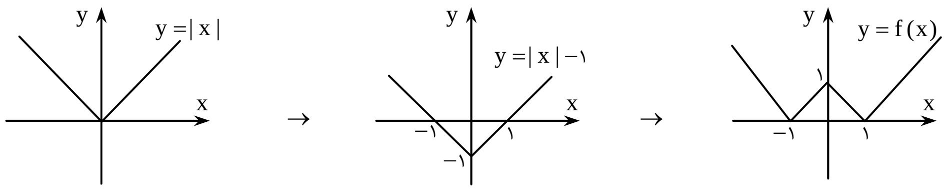
در تابع $y=\sin x-1$، نمودار بر محور x ها در بی‌شمار نقطه مماس است. در تابع $y=|\sin x-1|$، نمودار عیناً نسبت به محور x ها قرینه می‌شود که باز هم در هیچ نقطه‌ای زاویه‌دار یا مشتق‌ناپذیر نیست.

D **۸۱- گزینه‌ی(۳)** اولاً در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$، تابع f تعریف نشده است (در واقع به دلیل حضور $\tan x$ و $\cot x$ در ضابطه‌ی آن، در تمام نقاط $x=\frac{k\pi}{2}$ که $k\in Z$، تابع f نامعین است)، پس به این نقطه کاری نداریم. حال اگر قرار دهیم $g(x)=\tan x-\cot x$، در نقاطی که $g(x)=0$، ولی $g'(x)\neq 0$، تابع $f(x)=|g(x)|$ مشتق‌ناپذیر است. داریم:

$$g(x)=0\Rightarrow \tan x=\cot x\Rightarrow \tan x=\frac{1}{\tan x}\Rightarrow \tan^2 x=1\Rightarrow \tan x=\pm 1\xrightarrow{x\in(0,\pi)} x_1=\frac{\pi}{4}\ ,\ x_2=\frac{3\pi}{4}$$

در هر دوی این نقاط داریم: $g'(x)=1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\neq 0$، بنابراین در هر دو نقطه f مشتق‌ناپذیر است.

B **۸۲- گزینه‌ی(۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه‌ی زاویه‌دار (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

B **۸۳- گزینه‌ی (۱)** ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=0$ پیوسته است. هم‌چنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}|x|=0\ ,\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|-0}{x-0}=0$$

C **۸۴- گزینه‌ی (۱)** چون حد تابع $y=x^2$ تنها در نقطه‌ی $x=0$ برابر صفر (مقدار ضابطه‌ی دوم) می‌شود، پس تابع f تنها در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است (برای توضیح بیش‌تر به تست‌های بخش پیوستگی مراجعه کنید). هم‌چنین با توجه به این‌که $f(0)=0$، داریم: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

و چون مقدار این حد برای هر دو ضابطه‌ی $y_1=x^2$ و $y_2=0$ برابر صفر می‌شود، داریم: $f'(0)=0$.

B **۸۵- گزینه‌ی (۳)** چون $f(0)=0$ داریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x<0$، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. حال داریم:

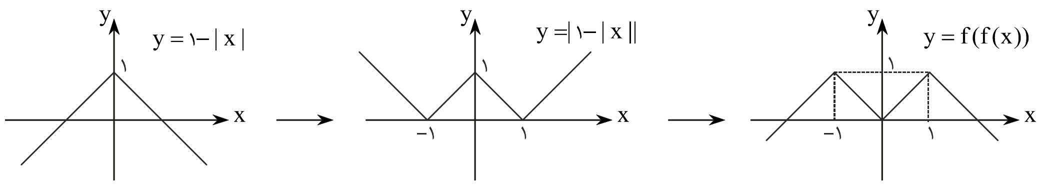
$$f'_-(0)=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B **۸۶- گزینه‌ی (۳)** با توجه به ضابطه، نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری تابع $x=0$ است. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x\geq 0\\ \sqrt{1-x} & x\leq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & x>0\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x<0\end{cases}\xrightarrow{\text{f در x=0 پیوسته}}\begin{cases}f'_+(0)=\frac{1}{2}\\ f'_-(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

B **۸۷- گزینه‌ی (۴)** به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق‌ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x \in Z$ یا $x+\frac{۱}{۳} \in Z$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{۱}{۳}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه‌ی $(۰,۳)$ این نقاط عبارت‌اند از $\{\frac{۲}{۳},۱,\frac{۵}{۳},۲,\frac{۸}{۳}\}$.

B **۸۸- گزینه‌ی (۳)** داریم $f(f(x))=۱-|۱-|x||$، حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، $y=f(f(x))$ در سه نقطه‌ی $x=۰$ و $x=\pm۱$ مشتق‌ناپذیر است.

B **۸۹- گزینه‌ی (۴)** باید تابع در $x=۱$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=۲$. با این فرض داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^{\frac{-۱}{۲}} & x\ge ۱\\ ax^۲+bx & x<۱\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-x^{\frac{-۳}{۲}} & x>۱\\ ۲ax+b & x<۱\end{cases} \xrightarrow{\text{پیوسته } x=۱ \text{ در } f} \begin{cases}f'_+(۱)=-۱\\ f'_-(۱)=۲a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=-۱\\a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۵\end{cases}$$

C **۹۰- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ در $x=۱$ مقداری برابر صفر و برای $x\neq ۱$ مقداری مثبت دارد، پس در $x=۱$ می‌نیمم نسبی دارد و تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس گزینه‌ی (۳) درست است. به دلیلی مشابه تابع گزینه‌ی (۱) در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. هم‌چنین برای تابع گزینه‌ی (۲) داریم:

$$y'|_{x=۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)[\sqrt[۳]{x-۱}]}{x-۱}=\lim_{x\to۱}[\sqrt[۳]{x-۱}]$$

که حد آخر به‌دلیل این‌که در $x=۱$ با می‌نیمم نسبی $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ سروکار نداریم، وجود ندارد (حدهای چپ و راست متفاوت‌اند). گزینه‌ی (۴) را نیز می‌توانید با استدلالی مشابه رد کنید.

B **۹۱- گزینه‌ی (۳)** با توجه به‌آن‌که $f(۱)=۱$، حاصل حد مورد نظر همان $f'_-(۱)$ است. چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است، می‌توانیم $f'_-(۱)$ را با مشتق گرفتن از ضابطه‌ی دوم تابع به‌دست آوریم:

$f'_-(۱)=۴\times۱=۴$

C **۹۲- گزینه‌ی (۴)** داریم: $f(۱)=۳$ و $f(۲)=۱$، بنابراین اگر قرار دهیم $t=h^۲$، آن‌گاه $t\to۰^+$ و داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to۰^+}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{t}+\lim_{t\to۰^+}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}=f'_+(۱)+f'_+(۲)$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to۱^+: x-۱>۰,\ x-۲<۰ \Rightarrow f(x)=x-۱-۳(x-۲)\Rightarrow f'_+(۱)=۱-۳=-۲\\ x\to۲^+: x-۱>۰,\ x-۲>۰\Rightarrow f(x)=x-۱+۳(x-۲)\Rightarrow f'_+(۲)=۱+۳=۴\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \text{جواب}=۲$$

B **۹۳- گزینه‌ی (۲)** اگر قرار دهیم $t=-۲\Delta x$، آن‌گاه $t\to۰^-$ و داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to۰^-}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{-\frac{t}{۲}}=-۲\lim_{t\to۰^-}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{t}=-۲f'_-(۱)$$

در همسایگی کوچک چپ $x=۱$، علامت $x-۱$ منفی و علامت x مثبت است، بنابراین:

$$f(x)=\frac{۱-x+۱}{x+۱}=\frac{-x+۲}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x+۱)^۲}\Rightarrow -۲f'_-(۱)=-۲\times\frac{-۳}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

C **۹۴- گزینه‌ی (۴)** ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=g(x)[x]$ می‌نویسیم. برای پیوستگی تابع f در $x=۲$، طبق نکته‌ی عامل صفر کننده باید $g(۲)=۰$. بنابراین $g(x)=(x-۲)h(x)$ و داریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)h(x)[x]-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲}h(x)[x]$$

برای آن‌که حد بالا موجود باشد، باید $h(۲)=۰$، بنابراین $g(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است و در نتیجه $g(۲)=g'(۲)=۰$. حال داریم:

$$\begin{cases}g(۲)=۰\Rightarrow ۸+۱۲+۲a+b=۰\\ g'(۲)=۰\Rightarrow ۱۲+۱۲+a=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲۴\\b=۲۸\end{cases}\Rightarrow a+b=۴$$

مشتق توابع

۵-۷: آهنگ تغییرات

با مفهوم «آهنگ تغییر» یا «نرخ رشد یا زوال یک متغیر» در مسائل روزمره آشنا هستید. مثلاً وقتی که داخل یک بالن هوا وارد می‌کنیم، حجم و شعاع بالن با سرعت‌های مختلف (و در عین حال مرتبط با هم) افزوده می‌شوند. این نرخ تغییر حجم یا شعاع، همان آهنگ تغییر آن‌ها است. حجم و شعاع بالن نمونه‌ای از «کمیت‌های وابسته» هستند. معمولاً وقتی در یک آزمایش روزمره با چند کمیت وابسته به یکدیگر مواجه‌ایم، به‌دست آوردن آهنگ تغییر یکی از آن‌ها ساده‌تر از کمیت‌های دیگر است. مثلاً در آزمایش «وارد کردن هوا به بالن»، اندازه‌گیری آهنگ تغییر حجم بالن (که همان حجم هوای ورودی به بالن است) با استفاده از درجه‌های منابع تأمین‌کننده‌ی این هوا بسیار ساده است. ولی اندازه‌گیری شعاع بالن و به‌دست آوردن آهنگ تغییر آن به شیوه‌ی کاملاً تجربی امری مشکل است. حال آن‌که کافی است با یک معادله‌ی ساده، آهنگ تغییر این دو کمیت را به هم مربوط سازید تا از یکی، دیگری را به‌دست آورید.

تعریف: **۱- فرض کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد. «آهنگ متوسط تغییر» تابع y نسبت به x در فاصله‌ی $[a,b]$، برابر نسبت تغییرات y به تغییرات x است، یعنی:**

$$\bar{y}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

۲- اگر فاصله‌ی $[a,b]$ به یک لحظه محدود شود، «آهنگ آنی» یا «آهنگ لحظه‌ای» تغییر تابع به‌دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر:

$$\text{آهنگ آنی تغییر} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

پس همواره منظور از آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر، همان مقدار مشتق تابع است. مفهوم آهنگ تغییر معمولاً برای توابعی به کار می‌رود که بر حسب زمان بیان شده‌اند.

مسأله‌ی (۱): تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ مفروض است.

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع را بر بازه‌ی $[3, 3/3]$ بیابید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع را در نقطه‌ی $x=3$ به‌دست آورید.

حل: الف) آهنگ متوسط تغییر، برابر نسبت تغییرات $f(x)$ به تغییرات x است:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)-1\xrightarrow[x_2=3/3]{x_1=3}\frac{1}{2}(x_1+x_2)-1=2/15$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است:

$$f'(x)=x-1\Rightarrow f'(3)=2$$

مسأله‌ی (۲): یک بالن کروی شکل را با هوا پر می‌کنیم.

الف) آهنگ تغییر (متوسط و لحظه‌ای) حجم بالن نسبت به شعاع آن را به‌دست آورید.

ب) آهنگ آنی تغییر شعاع نسبت به حجم را به‌دست آورید.

حل: الف) می‌دانیم حجم کره‌ی بالن از معادله‌ی $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ به‌دست می‌آید. V تابعی از R است (و می‌توانیم آن را با $V(R)$ نشان دهیم). برای آهنگ متوسط تغییر V نسبت به R (از شعاع R_1 تا R_2) داریم:

$$\frac{\Delta V}{\Delta R}=\frac{V_2-V_1}{R_2-R_1}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{R_2^3-R_1^3}{R_2-R_1}=\frac{4}{3}\pi(R_2^2+R_1R_2+R_1^2)$$

برای محاسبه‌ی آهنگ آنی تغییر V نسبت به R، مطابق تعریف، باید مشتق بگیریم:

$$\frac{dV}{dR}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳R^{۲}=۴\pi R^{۲}$$

ب) این بار R را به عنوان تابعی بر حسب V در نظر گرفته‌ایم و می‌خواهیم $\frac{dR}{dV}$ را به‌دست آوریم. از دو طرف معادله بر حسب V مشتق می‌گیریم (به صورت ضمنی):

$$۱=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳R^{۲}\frac{dR}{dV}\Rightarrow\frac{dR}{dV}=\frac{۱}{۴\pi R^{۲}}$$

مسأله‌ی (۳): از یک بالن کروی شکل، هوا با سرعت $۰/۱\ \frac{m^{۳}}{s}$ خارج می‌شود. هنگامی که قطر بالن ۶ متر است، آهنگ تغییر شعاع و مساحت کره را بیابید.

حل: منظور از سرعت خارج‌شدن هوا، همان سرعت کم‌شدن حجم کره است. می‌دانیم مفهوم «سرعت»، به معنای آهنگ تغییر حجم کره نسبت به زمان است. یعنی V تابعی بر حسب زمان می‌باشد و داریم: $\frac{dV}{dt}=-۰/۱\ \frac{m^{۳}}{s}$. با این فرض می‌خواهیم $\frac{dR}{dt}$ و $\frac{dS}{dt}$ را بیابیم. با توجه به رابطه‌ی $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳R^{۲}\frac{dR}{dt}=۴\pi R^{۲}\frac{dR}{dt}$$

حال در حالت $R=۳$ (قطر کره برابر ۶ متر)، داریم:

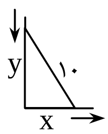
$$\frac{dV}{dt}=-۰/۱\ \frac{m^{۳}}{s}\quad,\quad R=۳\ \Rightarrow\ -۰/۱=۴\pi\times ۳^{۲}\frac{dR}{dt}\Rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{-۰/۱}{۳۶\pi}=-\frac{۱}{۳۶۰\pi}$$

برای محاسبه‌ی آهنگ تغییر مساحت کره، آن را به شعاع ارتباط می‌دهیم:

$$S=۴\pi R^{۲}\Rightarrow\frac{dS}{dt}=۸\pi R\frac{dR}{dt}\xrightarrow{R=۳}\frac{dS}{dt}=۲۴\pi\times\left(-\frac{۱}{۳۶۰\pi}\right)=-\frac{۱}{۱۵}$$

پس شعاع کره با آهنگ تغییر $\frac{۱}{۳۶۰\pi}\frac{m}{s}$ و مساحت کره با آهنگ $\frac{۱}{۱۵}\frac{m^{۲}}{s}$ کاهش می‌یابند.

مسأله‌ی (۴): نردبانی به طول ۱۰ متر به یک دیوار عمودی تکیه داده‌ایم و پایه‌ی آن تا دیوار ۶ متر فاصله دارد. پایه‌ی نردبان با سرعت $۱\ \frac{m}{s}$ شروع به لغزیدن می‌کند. لبه‌ی بالایی نردبان با چه سرعتی روی دیوار به پایین سر می‌خورد؟



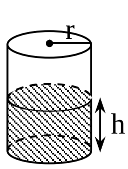
حل: شکل مقابل بیانگر وضعیت شهودی نردبان است. می‌خواهیم وقتی کـه $\frac{dx}{dt}=۱\ \frac{m}{s}$ و $x=۶m$، مقـدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. مانند مثال قبل x و y را با یک تساوی به هم ربط می‌دهیم و از دو طرف تساوی بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$x^{۲}+y^{۲}=۱۰^{۲}=۱۰۰\Rightarrow ۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۰\quad,\quad\frac{dx}{dt}=۱\Rightarrow x+y\frac{dy}{dt}=۰\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}$$

در حالتی که $x=۶m$، داریم: $y=۸m$، بنابراین: $\frac{dy}{dt}=-\frac{۶}{۸}=-\frac{۳}{۴}$. علامت منفی نشان دهنده‌ی حرکت لبه‌ی بالایی در خلاف جهـت لبـه‌ی پایینی است. یعنی یکی در جهت کاهش متغیر و دیگری در جهت افزایش متغیر حرکت می‌کنند. پس در این شرایط لبه‌ی بالایی نردبان بـا سـرعت $۰/۷۵\frac{m}{s}$ به پایین می‌سرد.

مسأله‌ی (۵): از یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع قاعده‌ی $۳m$، آب با آهنگ $۳\frac{lit}{s}$ خارج می‌شود. سطح آب در این مخزن با چه سرعتی پایین می‌رود؟

حل: اگر $r=۳\ m$ شعاع قاعده، h ارتفاع آب در مخزن و V حجم آب باشد، طبق فرض مسأله $\frac{dV}{dt}=-۳\frac{lit}{s}$ و می‌خواهیم $\frac{dh}{dt}$ را حساب کنیم. داریم:



$$\frac{dV}{dt}=-۳\frac{lit}{s}=-۳\times\frac{۱}{۱۰۰۰}\frac{m^{۳}}{s}=-\frac{۳}{۱۰۰۰}\frac{m^{۳}}{s}$$

$$V=\pi r^{۲}h\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\pi r^{۲}\frac{dh}{dt}\Rightarrow-\frac{۳}{۱۰۰۰}=\pi\times ۳^{۲}\times\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{-۱}{۳۰۰۰\pi}\frac{m}{s}$$

نتیجه: **روش کلی حل مسائل آهنگ تغییرات در کمیت‌های وابسته**

۱- مسائل را به دقت بخوانید و در صورت امکان شکل برای آن رسم کنید.

۲- متغیرها را با نمادهای مناسب نامگذاری کنید و هر کدام را به صورت توابعی از زمان در نظر بگیرید.

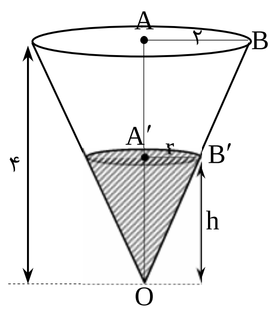
۳- اطلاعات و فرض‌های مسأله را به صورت ریاضی بیان کنید و خواسته‌ی مسأله را مشخص کنید.

٤- معادلاتی بنویسید که توسط آن‌ها متغیرهای مختلف به هم ربط داده شده باشند. اگر می‌توانید با استفاده از هندسه‌ی مسأله (و جای‌گذاری) تعداد متغیرها را کاهش دهید.

۵- از دو طرف معادلات بر حسب زمان مشتق بگیرید و با جای‌گذاری فرض‌ها، خواسته‌ی سؤال را به‌دست آورید.

مسأله‌ی (۶): یک مخزن آب به شکل یک مخروط معکوس با شعاع قاعده‌ی ۲ متر و ارتفاع ۴ متر مفروض است. آب با سرعت $۲\frac{m^۳}{min}$ به داخل مخزن وارد می‌شود. در لحظه‌ای که ارتفاع آب ۲ متر است، نرخ رشد ارتفاع را به‌دست آورید.

حل: ارتفاع آب در مخروط را h و شعاع قاعده‌ی آب را r و حجم آن را V فرض می‌کنیم. می‌دانیم $\frac{dV}{dt}=۲\frac{m^۳}{min}$ و می‌خواهیم در لحظه‌ای که $h=۲\ m$، مقدار $\frac{dh}{dt}$ را بیابیم.



معادله‌ی مربوط‌کننده‌ی متغیرها $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ (فرمول حجم مخروط) است (که هر سه متغیر r، h و V توابعی برحسب زمان هستند)، ولی می‌توانیم با استفاده از تشابه دو مثلث OAB و OA′B′ متغیرها را کاهش دهیم. داریم:

$$\frac{r}{۲}=\frac{h}{۴}\Rightarrow r=\frac{h}{۲}\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{h}{۲})^۲h=\frac{\pi}{۱۲}h^۳\Rightarrow\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{۱۲}\times ۳h^۲\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{۴}h^۲\frac{dh}{dt}$$

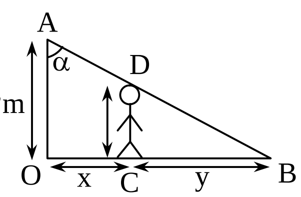
$$\frac{dV}{dt}=۲\ \frac{m^۳}{min}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{۸}{\pi h^۲}\xrightarrow{h=۲}\frac{dh}{dt}=\frac{۲}{\pi}\ \frac{m}{min}$$

مسأله‌ی (۷): در یک خیابان یک لامپ روی تیر چراغ برقی به ارتفاع ۳ متر قرار گرفته است. کودکی با قد ۱/۲ متر با سرعت $۴\frac{m}{s}$ در خیابان می‌دود و از تیر چراغ برق دور می‌شود.

الف) در لحظه‌ای که فاصله‌ی شخص با تیر برق ۲ متر است، سرعت افزایش طول سایه‌ی فرد روی زمین چقدر است؟

ب) اگر α زاویه‌ی رؤیت سایه از ناظری روی لامپ باشد (زاویه‌ی بین خط رؤیت انتهای سایه و راستای عمود)، نرخ رشد α را در این لحظه به‌دست آورید.

حل: در شکل مقابل A مکان لامپ و B انتهای سایه‌ی فرد است. x فاصله‌ی فرد از تیر چراغ و y طول سایه‌ی فرد است. α نیز زاویه‌ی رؤیت انتهای سایه از لامپ است.



طبق فرض: $\frac{dx}{dt}=۴\ \frac{m}{s}$، و لحظه‌ای را برای تحلیل درنظر گرفته‌ایم که $x=۲m$.

الف) در این حالت $\frac{dy}{dt}$ را می‌خواهیم. از تشابه دو مثلث OAB و BDC استفاده می‌کنیم:

$$\frac{y}{x+y}=\frac{۱/۲}{۳}\Rightarrow\frac{y}{x+y}=۰/۴\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{۰/۴}{۱-۰/۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{۲}{۳}\times\frac{dx}{dt}=\frac{۲}{۳}\times ۴=\frac{۸}{۳}\ \frac{m}{s}$$

ب) در این حالت $\frac{d\alpha}{dt}$ را می‌خواهیم. رابطه‌ی مربوط‌کننده‌ی α، x و y به صورت زیر است:

$$\tan\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{x+y}{۳}=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}y$$

حال از دو طرف نسبت به t مشتق بگیرید:

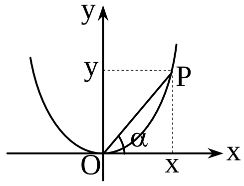
$$(۱+\tan^۲\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۳}\frac{dx}{dt}+\frac{۱}{۳}\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۳(۱+\tan^۲\alpha)}(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt})$$

حال در حالت $x=۲$ داریم:

$$x=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۳}\times ۲+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۱۰}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}|_{x=۲}=\frac{۱}{۳(۱+\frac{۱۰۰}{۸۱})}(۴+\frac{۸}{۳})=\frac{۱۸۰}{۱۸۱}\ \frac{rad}{s}$$

مسألهی (۸): ذرهی P در ربع اول دستگاه مختصات روی سهمی $y=x^۲$ چنان حرکت میکند که تصویر ذره روی محور x ها با سرعت $۱۰\ \frac{m}{s}$ پیش میرود. آهنگ تغییر زاویهی OP با جهت مثبت محور x ها را بیابید وقتی که $x=۳m$.



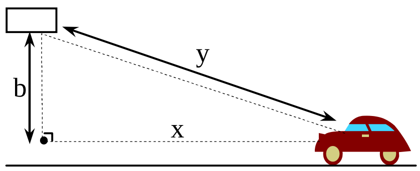
حل: زاویهی مورد نظر را α نامیدهایم. به وضوح همواره $y=x^۲$ و داریم:

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{x^۲}{x}=x\Rightarrow(۱+\tan^۲\alpha)\frac{d\alpha}{dt}=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}\frac{dx}{dt}$$

از فرض سؤال میدانیم: $\frac{dx}{dt}=۱۰\ \frac{m}{s}$، بنابراین:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{۱۰}{۱+\tan^۲\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha=x=۳}\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{x=۳}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱\ \frac{rad}{s}$$

مسألهی (۹): هواپیمای مراقبت جاده با سرعت $a\frac{m}{s}$ در ارتفاع b متری از سطح زمین، بالای جاده در مسیر مستقیمی حرکت میکند و به بالای اتومبیلی نزدیک میشود. رادار هواپیما مشخص میکند که فاصلهی بین اتومبیل روی جاده و هواپیما c متر است، و این فاصله با آهنگ $k\frac{m}{s}$ در حال کاهش میباشد. سرعت اتومبیل در جاده را بیابید.



حل: فاصلهی اتومبیل و هواپیما را y مینامیم و فاصلهی اتومبیل تا تصویر قائم هواپیما را x،
واضح است که $y^۲=b^۲+x^۲$. از فرض سؤال میدانیم: $\frac{dy}{dt}=k\frac{m}{s}$

اگر سرعت هواپیما $V_۱$ و سرعت اتومبیل $V_۲$ باشد، داریم: $V_۱+V_۲=\frac{dx}{dt}$. (دقت کنید که چون هر دو متحرکاند، فاصلهی x از هردوی آنها متأثر است، و نرخ تغییرات x برابر با مجموع نرخ تغییرات اتومبیل و هواپیما میباشد). چون $V_۱=a$، پس: $V_۲=\frac{dx}{dt}-a$ و داریم:

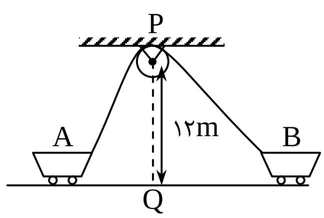
$$y^۲=b^۲+x^۲\Rightarrow ۲y\frac{dy}{dt}=۲x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=k\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{ky}{x}$$

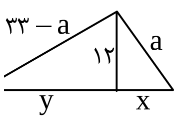
در لحظهی مورد نظر داریم $y=c$، بنابراین: $x=\sqrt{c^۲-b^۲}$ و در نتیجه:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{ky}{x}=\frac{kc}{\sqrt{c^۲-b^۲}}\Rightarrow V_۲=\frac{dx}{dt}-a=\frac{kc-a\sqrt{c^۲-b^۲}}{\sqrt{c^۲-b^۲}}$$

مسألهی (۱۰): واگنهای A و B با طنابی به طول $۳۳m$ که حول قرقرهی P به راحتی حرکت میکند، به هم متصل شدهاند. ارتفاع P از سطح زمین ۱۲ متر است. واگن A با سرعت $۲\frac{m}{s}$ از نقطهی Q دور میشود. در لحظهای که فاصلهی A از Q، ۵ متر است، واگن B با چه سرعتی به Q نزدیک میشود؟



حل: شکل روبهرو را که صورت سادهشدهی شکل اصلی است، در نظر بگیرید. میدانیم $\frac{dy}{dt}=۲\frac{m}{s}$ و میخواهیم $\frac{dx}{dt}$ را بیابیم.



لحظهای را که $y=۵$ است، $t=t_۰$ مینامیم. داریم:

$$y=۵\Rightarrow(۳۳-a)^۲=۵^۲+۱۲^۲\Rightarrow ۳۳-a=۱۳\Rightarrow a=۲۰\Rightarrow x^۲=۲۰^۲-۱۲^۲\Rightarrow x=۱۶$$

حالا آهنگ تغییر متغیرها را حساب میکنیم:

$$(۳۳-a)^۲=۱۲^۲+y^۲\Rightarrow -۲(۳۳-a)\frac{da}{dt}=۲y\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{da}{dt}\Big|_{t=t_۰}=\frac{۲\times۵\times۲}{-۲\times۱۳}=-\frac{۱۰}{۱۳}$$

$$a^۲=۱۲^۲+x^۲\Rightarrow ۲a\frac{da}{dt}=۲x\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_۰}=\frac{۲۰}{۱۶}\times(-\frac{۱۰}{۱۳})=-\frac{۲۵}{۲۶}$$

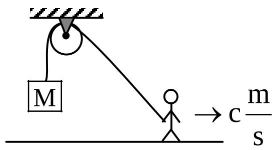
پس واگن دوم با سرعت $\frac{۲۵}{۲۶}\ \frac{m}{s}$ به نقطهی Q نزدیک میشود.

تمرین‌های بخش ۵–۷

۱- شعاع دایره‌ای با سرعت $۲ \frac{cm}{s}$ افزایش می‌یابد. در لحظه‌ای که شعاع برابر $۱۰cm$ است، سرعت افزایش مساحت دایره چقدر است؟

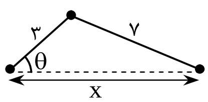
۲- یک ضلع مستطیلی با سرعت $۱۰ \frac{m}{s}$ کاهش و ضلع دیگر با سرعت $۲۰ \frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. سرعت تغییر مساحت و قطر مستطیل را بیابید در لحظه‌ای که ضلع اول برابر $۲۰cm$ و ضلع دوم برابر $۱۰cm$ است.

۳- مقدار گاز مصرفی یک ماشین گازسوز (G) به مسافت طی شده توسط آن (s) وابسته است. مقدار مسافت طی شده نیز به زمان حرکت ماشین (t) وابسته است. اگر $۰/۰۵$ گالن گاز برای طی هر کیلومتر مصرف شود و سرعت ماشین $۳۰\frac{km}{hr}$ باشد، سرعت مصرف گاز چقدر است؟

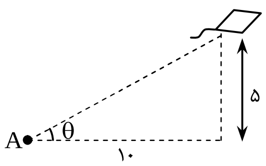


٤- شخص A به وسیله‌ی طنابی به طول b وزنه‌ای به جرم M را نگه داشته است. قرقره در فاصله‌ی a متری سطح زمین قرار دارد. اگر شخص با سرعت $c\frac{m}{s}$ در جهت مشخص شده حرکت کند، در زمانی که فاصله‌ی وزنه تا زمین k متر است، سرعت بالا رفتن وزنه‌ی M را تعیین کنید.

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $BC = ۱۰$ و $AB = AC$. آهنگ تغییر ارتفاع AH به نسبت زاویه‌ی B را در حالت $AB = ۵\sqrt{۲}$ بیابید.

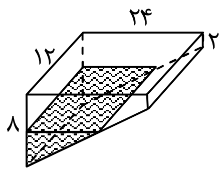


٦- در موتور یک ماشین، میله‌ای به‌طول ۷ سانتی‌متر به یک دسته به شعاع ۳ سانتی‌متر متصل است. محور دسته در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند (در جهت افزایش زاویه‌ی θ)، در نتیجه پیستون حرکت می‌کند (در جهت کاهش x). اگر سرعت حرکت محور دسته ۲۰۰ دور در دقیقه باشد، در لحظه‌ای که $\theta = \frac{\pi}{۳}$، سرعت پیستون چقدر است؟



۷- بادبادکی در ارتفاع ۵ متر از سطح زمین توسط ناظر A با زاویه‌ی θ از سطح افق دیده می‌شود. بادبادک با سرعت $۲\frac{m}{s}$ به‌طور افقی در حال دور شدن از ناظر است. در لحظه‌ای که فاصله‌ی تصویر بادبادک روی زمین از ناظر ۱۰ متر است، سرعت کاهش زاویه‌ی دید ناظر چقدر است؟

۸- نقطه‌ای بر هذلولی $۳x^۲ - y^۲ = ۱۲$ چنان حرکت می‌کند که مختصات y آن با سرعت $۴\frac{m}{s}$ زیاد می‌شود. وقتی که $x = ۴m$ است، مختصات x آن با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



۹- به استخری مطابق شکل روبه‌رو به عرض ۱۲ متر، طول ۲۴ متر، و عمق متغیر ۲ تا ۸ متر، آب با سرعت $۱۶\frac{m^۳}{s}$ داخل می‌شود. در حالتی که عمق آب در بخش عمیق استخر ۲ متر است، سرعت افزایش ارتفاع آب را به‌دست آورید.

فصل ۵ آهنگ تغییرات

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ٤ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $x=a$ است. a کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

۱) ۱۱/۷۵ ۲) ۱۲/۲۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۳/۷۵

۲- اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در واحد تغییر x، در نقطه‌ی $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، آن‌گاه حد عبارت $\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$، وقتی $h\to ۰$ برابر کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۳- آهنگ متوسط تغییر تابع $y=x^۳+۲x$، وقتی x از ۲ به ۲/۱ می‌رسد، کدام است؟

۱) ۱۳/۸۲ ۲) ۱۳/۹۱ ۳) ۱۴/۵۲ ۴) ۱۴/۶۱

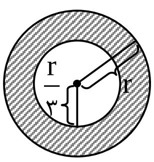
٤- نسبت تغییرات متوسط $f(x)=\sin x$ به تغییرات متغیر $۳x$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۳\pi}$ ۳) $\frac{۲}{۳\pi}$ ۴) $\frac{۳}{۲\pi}$

۵- آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r، در $r_۰=۱۰$ کدام است؟

۱) ۱۰π ۲) ۱۵π ۳) ۲۵π ۴) ۲۰π

٦- اگر A مساحت ناحیه‌ی هاشورزده باشد، $\frac{dA}{dr}$ وقتی $r=۳$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۲) $\frac{۸}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}\pi$

۷- در یک کره به شعاع R، آهنگ تغییر حجم کره نسبت به مساحت آن چقدر است؟

۱) R ۲) $\frac{R}{۲}$ ۳) $۲R$ ۴) $\frac{R}{۴}$

۸- طول هر ضلع مکعب با سرعت ۰/۰۴ متر بر ثانیه افزایش می‌یابد. سرعت افزایش حجم آن در لحظه‌ای که طول ضلع مکعب ۱۵ واحد باشد، چقدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۰

۹- ذره‌ای روی مسیر $۲y^۲-x^۲=۱$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفه‌ی x آن با سرعت ۰/۱ متر بر ثانیه افزایش یابد، در نقطه‌ی $(۱,۱)$ مؤلفه‌ی y آن با چه سرعتی در ثانیه تغییر می‌کند؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

۱۰- ذره‌ای بر روی مسیر $y=۲\cos^۲ x-۱$ حرکت می‌کند. در نقطه‌ای با کدام طول، سرعت مؤلفه‌ی x آن برابر سرعت مؤلفه‌ی y آن است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۶}$

۱۱- در مثلثی به طول قاعده‌ی ۳۲ و ارتفاع ۲۸ واحد، خطی موازی قاعده با سرعت ۰/۰۲ واحد بر ثانیه به رأس مقابل آن نزدیک می‌شود و با دو ضلع دیگر مثلث، مثلث‌های متشابه می‌سازد. در لحظه‌ای که فاصله‌ی این خط تا رأس مقابل ۷ واحد است، سرعت کاهش این مساحت‌ها کدام است؟

۱) ۰/۰۷ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۱۶

۱۲- نقطه‌ی M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر $AB = ۹$ در حرکت است. تصویر نقطه‌ی M بر قطر AB با سرعت ثابت ۰/۰۵ واحد در ثانیه از نقطه‌ی A دور می‌شود. در لحظه‌ای که این فاصله برابر ٦/۲۵ واحد است، سرعت افزایش طول وتر AM کدام است؟

۱) ۰/۰۲۴ ۲) ۰/۰۳۰ ۳) ۰/۰۴۵ ۴) ۰/۰۷۲

۱۳- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع‌های مثلث با سرعت $۴\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابند. در لحظه‌ای که یک ضلع مثلث ۲ متر است، سرعت افزایش مساحت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۸ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

١٤- اگر مقدار بار الکتریکی که t ثانیه در یک هادی جریان دارد، $Q = \frac{۲}{۳}t^۳ + t + ۴\sqrt{t}$ کولن باشد، شدت جریان پس از ۴ ثانیه چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

۱۵- اگر ذره‌ای روی مسیر $\frac{xy^۳}{۱+y^۲} = \frac{۸}{۵}$ حرکت کند و مؤلفه‌ی x آن با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یابد، آن‌گاه وقتی که ذره از نقطه‌ی $(۱,۲)$ می‌گذرد، مؤلفه‌ی y آن با کدام سرعت تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{۵۰}{۹}$ افزایش ۲) $\frac{۵۰}{۹}$ کاهش ۳) $\frac{۶۰}{۷}$ افزایش ۴) $\frac{۶۰}{۷}$ کاهش

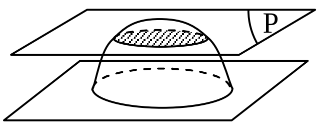
١٦- مخروط دواری با زاویه‌ی رأس ۹۰° مفروض است. آهنگ تغییر حجم این مخروط نسبت به سطح قاعده‌ی آن، وقتی که شعاع قاعده‌ی آن ۶ واحد است، برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۶π ۴) ۳π

۱۷- در دایره‌ای به شعاع ۵، طول وتر AB برابر ۸ است. اگر AB به موازات خود و با سرعت ۰/۲ از مرکز دایره دور شود، سرعت کاهش طول وتر AB چقدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

۱۸- در یک نیم‌کره به شعاع ۲۵ واحد، صفحه‌ی P همواره موازی صفحه‌ی قاعده با سرعت ۰/۰۴ از آن دور می‌شود. در حالی که فاصله‌ی دو صفحه ۱۲ واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره‌ی مقطع صفحه‌ی P و نیم‌کره کدام است؟ (سراسری - ۸۷)



۱) $۰/۴۸\pi$ ۲) $۰/۷۲\pi$
۳) $۰/۸۴\pi$ ۴) $۰/۹۶\pi$

۱۹- نقطه‌ای بر روی منحنی به معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{x+y} = ۵$ در حرکت است. در لحظه‌ای که ذره از نقطه‌ی $(۴,۵)$ عبور می‌کند، اگر سرعت افزایش x برابر ۰/۲ واحد در ثانیه باشد، سرعت تغییر y کدام است؟ (سراسری - ۸۹)

۱) $-۰/۳$ ۲) $-۰/۵$ ۳) $-۰/۴$ ۴) $-۰/۶$

فصل ۵

آهنگ تغییرات

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲)

آهنگ متوسط تغییر $= \dfrac{f(۲۵)-f(۴)}{۲۵-۴} = \dfrac{۵-۲}{۲۱} = \dfrac{۱}{۷}$

آهنگ لحظه‌ای تغییر $= f'(x) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲\sqrt{a}} = \dfrac{۱}{۷} \Rightarrow \sqrt{a} = ۳/۵ \Rightarrow a = ۱۲/۲۵$

۲- گزینه‌ی (۳) از فرض داریم: $f'(۲) = -\dfrac{۳}{۲}$ و چون $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$، پس جواب $\dfrac{۳}{۲}$ می‌شود.

۳- گزینه‌ی (۴) طبق تعریف، آهنگ متوسط تغییر تابع برابر است با:

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = \frac{(x_۲^۳-x_۱^۳)+۲(x_۲-x_۱)}{x_۲-x_۱} = (x_۲^۲+x_۱x_۲+x_۱^۲)+۲ \xrightarrow{x_۲=۲/۱,\, x_۱=۲} ۱۴/۶۱$$

۴- گزینه‌ی (۱)

$$f(x)=\sin x \quad , \quad g(x)=۳x \Rightarrow A=\frac{\Delta f}{\Delta g}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{g(x_۲)-g(x_۱)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲})-\sin(\frac{\pi}{۶})}{۳(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{۲\pi}$$

۵- گزینه‌ی (۴)

$$S=\pi r^۲ \Rightarrow \frac{dS}{dr}=۲\pi r \Rightarrow \frac{dS}{dr}\Big|_{r=۱۰}=۲۰\pi$$

۶- گزینه‌ی (۴)

$$A=\pi r^۲-\pi(\frac{r}{۳})^۲=\frac{۸\pi r^۲}{۹} \Rightarrow \frac{dA}{dr}=\frac{۱۶\pi r}{۹} \Rightarrow \frac{dA}{dr}\Big|_{r=۳}=\frac{۱۶\pi}{۳}$$

۷- گزینه‌ی (۲)

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow \frac{dV}{dR}=۴\pi R^۲ \\ S=۴\pi R^۲ \Rightarrow \frac{dS}{dR}=۸\pi R \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dV}{dS}=\frac{۴\pi R^۲}{۸\pi R}=\frac{R}{۲}$$

۸- گزینه‌ی (۳) اگر ضلع مکعب را a و حجم آن را V بنامیم، داریم:

$$V=a^۳ \Rightarrow \frac{dV}{dt}=۳a^۲\frac{da}{dt}=۳a^۲\times ۰/۰۴ \Rightarrow \frac{dV}{dt}\Big|_{a=۱۵}=۳\times ۱۵^۲\times\frac{۴}{۱۰۰}=۲۷\ \frac{m^۳}{s}$$

۹- گزینه‌ی (۱)

$$۲y^۲-x^۲=۱ \Rightarrow ۴y\frac{dy}{dt}-۲x\frac{dx}{dt}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{x}{۲y}\frac{dx}{dt} \xrightarrow{(x,y)=(۱,۱)} \frac{dy}{dt}\Big|_{(۱,۱)}=\frac{۱}{۲}\times ۰/۱=۰/۰۵$$

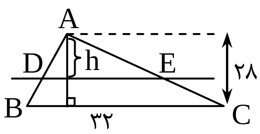
۱۰- گزینه‌ی (۳)

$$y=۲\cos^۲ x-۱ \Rightarrow \frac{dy}{dt}=۴\cos x\times(-\sin x)\times\frac{dx}{dt}=-۲\sin ۲x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt} \Rightarrow -۲\sin ۲x=۱ \Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x=۲n\pi-\frac{\pi}{۶} \text{ یا } ۲x=۲n\pi+\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=n\pi-\frac{\pi}{۱۲} \text{ یا } x=n\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$$

که $n\in Z$، و واضح است که از بین گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) در این شرایط صدق می‌کند.

۱۱- گزینه‌ی (۴) مطابق شکل فاصله‌ی خط تا رأس مقابل را h می‌نامیم. اگر مساحت ADE را بـا S نـشان دهـیم، $\frac{dS}{dt}$ را مـی‌خـواهیم. داریـم: (مساحت ABC را با S' نشان داده‌ایم و k نسبت تشابه است.)

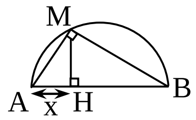


$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S}{S'} = k^۲ = (\frac{h}{AH})^۲$$

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{AH^۲} \times h^۲ = \frac{۳۲}{۲\times ۲۸} h^۲ = \frac{۴}{۷} h^۲ \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{۸}{۷} h \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -۰/۰۲ \Rightarrow \frac{ds}{dt}\Big|_{h=۷} = \frac{۸}{۷} \times ۷ \times (-۰/۰۲) = -۰/۱۶$$

۱۲- گزینه‌ی (۲) با توجه به آن که مثلث AMB در رأس M قائم‌الزاویه است و MH ارتفاع وارد بر وتر آن می‌باشد، از خواص مثلث قـائم‌الزاویـه داریم: $(AM = y)$



$$y^۲ = x.AB \Rightarrow y^۲ = ۹x \Rightarrow ۲y\frac{dy}{dt} = ۹\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{۹}{۲y}\frac{dx}{dt}$$

$$x = ۶/۲۵ \Rightarrow y = \sqrt{۹\times ۶/۲۵} = ۷/۵ \quad , \quad \frac{dx}{dt} = ۰/۰۵ \Rightarrow \frac{dy}{dt}\Big|_{x=۶/۲۵} = \frac{۹}{۲\times ۷/۵} \times \frac{۵}{۱۰۰} = ۰/۰۳$$

۱۳- گزینه‌ی (۲) اگر a طول ضلع مثلث باشد، ارتفاع آن برابر است با: $h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و مساحت آن: $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$. بنابراین:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \frac{da}{dt} \quad , \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{da}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = a \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt}\Big|_{a=۲} = ۲\times ۴ = ۸$$

۱۴- گزینه‌ی (۳) شدت جریان یک هادی همان آهنگ تغییر بار الکتریکی در هادی است. پس:

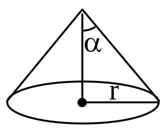
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = ۲t^۲ + ۱ + \frac{۴}{۲\sqrt{t}} \Rightarrow I(۴) = ۳۲ + ۱ + ۱ = ۳۴\,A$$

۱۵- گزینه‌ی (۴)

$$۵xy^۳ = ۸ + ۸y^۲ \Rightarrow ۵(\frac{dx}{dt} y^۳ + x \times ۳y^۲ \frac{dy}{dt}) = ۸ \times ۲y\frac{dy}{dt}$$

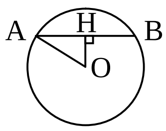
$$\frac{dx}{dt} = ۶ \quad , \quad (x,y) = (۱,۲) \Rightarrow ۵(۶\times ۸ + ۳\times ۴\frac{dy}{dt}) = ۸\times ۴\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}\Big|_{(۱,۲)} = -\frac{۶۰}{۷}$$

۱۶- گزینه‌ی (۲) با توجه به آن که زاویه‌ی رأس مخروط ۹۰° است، داریم: $\alpha = ۴۵^\circ$ و اگر ارتفاع مخروط را h بنامیم، نتیجه مـی‌گیـریم $h = r$. اکنون $\frac{dV}{dS}$ را می‌خواهیم. داریم:



$$\left.\begin{aligned} V = \tfrac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \tfrac{۱}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \pi r^۲ \\ S = \pi r^۲ \Rightarrow \frac{dS}{dr} = ۲\pi r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dV}{dS} = \frac{\pi r^۲}{۲\pi r} = \frac{r}{۲} \xrightarrow{r=۶} \frac{dV}{dS} = ۳$$

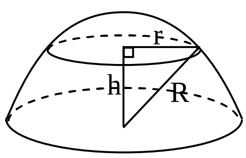
۱۷- گزینه‌ی (۱) اگر طول وتر AB را x و فاصله‌ی OH را h بنامیم، داریم:



$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۵^۲ = h^۲ + (\frac{x}{۲})^۲ \Rightarrow ۰ = ۲h\frac{dh}{dt} + ۲\times\frac{x}{۲}\times\frac{۱}{۲}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{۴h}{x}\times\frac{dh}{dt}$$

$$x = ۸ \Rightarrow h = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{dx}{dt}\Big|_{x=۸} = -\frac{۴\times ۳}{۸}\times ۰/۲ = -۰/۳$$

۱۸- گزینه‌ی (۴) با توجه به شکل، طبق فرض سؤال داریم: $\frac{dh}{dt} = ۰/۰۴$ و می‌خواهیم در حالتی که $h = ۱۲$، $\frac{dS}{dt}$ را بیابیم $(S = \pi r^۲)$. داریم:



$$r^۲ + h^۲ = R^۲ \Rightarrow S = \pi r^۲ = \pi(R^۲ - h^۲) \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -۲\pi h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = ۰/۰۴ \quad , \quad h = ۱۲ \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -۲\pi \times ۱۲ \times (۰/۰۴) = -۰/۹۶\pi$$

۱۹- گزینه‌ی (۲) می‌خواهیم با فرض $\frac{dx}{dt} = ۰/۲$، مقدار $\frac{dy}{dt} = ۰/۲$، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را بیابیم. با مشتق‌گیری از فرض سؤال داریم:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} + \frac{۱}{۲\sqrt{x+y}}(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}) = \xrightarrow[\frac{dx}{dt}=۰/۲]{x=۴,\,y=۵} \frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۶}\times(\frac{۲}{۱۰} + \frac{dy}{dt}) = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{۱}{۲}$$

مشتق توابع

۵-۵: مشتق تابع مرکب و تابع وارون

با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل خوانده‌ایم، می‌توانیم مشتق برخی از توابع پیچیده را به‌دست آوریم. ولی آن قضایا برای محاسبه‌ی مشتق تابعی چون $y=\sqrt{۱+x^{۲}}$ کمکی نمی‌کنند. چون این تابع را می‌توانیم به‌صورت ترکیبی از توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+x^{۲}$ بیان کنیم، پس باید قاعده‌ای برای مشتق توابع مرکب پیدا کنیم.

قضیه: **قاعده‌ی زنجیره‌ای**

فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $F=fog$ ترکیب آن دو باشد. در این صورت داریم:

$$F'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$

◄ **مثال:** فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x}$، $g(x)=x^{۲}-۴$ و $h(x)=fog(x)$. مشتق‌های دو تابع f و g عبارت اند از: $f'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}$ و $g'(x)=۲x$.

بنابراین:

$$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)=\frac{-۱}{(g(x))^{۲}}\times ۲x=\frac{-۲x}{(x^{۲}-۴)^{۲}}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی تقسیم مشتق‌ها، مشتق تابع $h(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴}$ را بیابید و با رابطه‌ی بالا آن را مقایسه کنید.

➢ **تذکّر:** قاعده‌ی زنجیره‌ای را با نماد دیگر مشتق، می‌توان به این شکل جالب نیز بیان کرد:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dg}\times\frac{dg}{dx}$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای، مهم‌ترین بحث محاسبه‌ی مشتق توابع است، که با حل مثال‌های متنوع می‌توانید بر آن تسلط پیدا کنید. در مثال‌های اولیه سعی کنید توابع را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید و با جای‌گذاری در قاعده، مشتق تابع را حساب کنید. در این صورت مهارت‌تان افزایش می‌یابد و می‌توانید در مثال‌های بعدی مستقیماً عمل کنید.

❍ **مسأله‌ی (۱): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f(x)=(۷x-۳)^{۱۰}$ **ب)** $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}+x+۱}}$ **پ)** $f(x)=(\frac{x-۲}{۲x+۱})^{۹}$

ت) $f(x)=\sin x^{۲}$ **ث)** $f(x)=\cos(\sin x)$ **ج)** $f(x)=\sqrt{\sin x^{۲}}$

حل: الف) اگر $g(x)=x^{۱۰}$ و $h(x)=۷x-۳$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=۱۰x^{۹}\ ,\ h'(x)=۷\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=۱۰(۷x-۳)^{۹}\times ۷=۷۰(۷x-۳)^{۹}$$

ب) اگر $g(x)=x^{\frac{-۱}{۳}}$ و $h(x)=x^{۲}+x+۱$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=-\frac{۱}{۳}x^{\frac{-۴}{۳}}\ ,\ \ h'(x)=۲x+۱\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=-\frac{۱}{۳}(x^{۲}+x+۱)^{\frac{-۴}{۳}}\times(۲x+۱)$$

پ) اگر $g(x)=x^{9}$ و $h(x)=\frac{x-2}{2x+1}$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=9x^{8}\ ,\ h'(x)=\frac{1\times1-(-2)\times2}{(2x+1)^{2}}=\frac{5}{(2x+1)^{2}}$$

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=9(\frac{x-2}{2x+1})^{8}\times\frac{5}{(2x+1)^{2}}=\frac{45(x-2)^{8}}{(2x+1)^{10}}$$

ت) اگر $g(x)=\sin x$ و $h(x)=x^{2}$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=\cos x\ ,\ h'(x)=2x\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=\cos x^{2}\times2x$$

ث) اگر $g(x)=\cos x$ و $h(x)=\sin x$، داریم: $f=goh$، حال با توجه به مشتق‌ها داریم:

$$g'(x)=-\sin x\ ,\ h'(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=-\sin(\sin x)\cos x$$

ج) اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=\sin x^{2}$، داریم: $f=goh$ می‌توانیم بنویسیم:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x^{2}}}\times h'(x)$$

اما تابع $h(x)$ خود یک تابع مرکب است و مشتق آن طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای مانند قسمت (ث) به‌دست می‌آید:

$$h'(x)=2x\cos x^{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cos x^{2}}{2\sqrt{\sin x^{2}}}=\frac{x\cos x^{2}}{\sqrt{\sin x^{2}}}$$

در مسأله‌ی (۱)، قسمت‌های (الف)- (ث) نمونه‌هایی از ترکیب دو تابع را حل کردید. ولی در قسمت (ج) تابع نهایی ترکیبی از سه تابع بود. در همه‌ی قسمت‌ها به این نکته دقت کنید که در زنجیره‌ای از توابع، از بیرونی‌ترین تابع شروع می‌کنیم و با مشتق‌گیری مرحله به مرحله به درونی‌ترین تابع می‌رسیم. در مسأله‌ی بعد چند نمونه‌ی پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم.

مسأله‌ی (۲): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin(\cos(\tan x))$ **ب)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x^{3}}}$ **پ)** $f(x)=\sin(x\cos x)$

ت) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **ث)** $f(x)=\sin(\tan(\sqrt{\sin x})$

حل: الف) اگر قرار دهیم $g(x)=\cos(\tan x)$، داریم:

$$g(x)=\cos(\tan x)\Rightarrow g'(x)=-\sin(\tan x)\times(1+\tan^{2}x)$$

$$f(x)=\sin(g(x))\Rightarrow f'(x)=\cos(g(x))g'(x)=-\cos(\cos(\tan x))\times\sin(\tan x)\times(1+\tan^{2}x)$$

ب) اگر قرار دهیم $g(x)=\cos x^{3}$، داریم:

$$g(x)=\cos x^{3}\Rightarrow g'(x)=-\sin x^{3}\times(x^{3})'=-\sin x^{3}\times3x^{2}$$

$$f(x)=(g(x))^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}(g(x))^{\frac{-3}{2}}\times g'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(\cos x^{3})^{\frac{-3}{2}}\sin x^{3}\times x^{2}$$

پ) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=\cos(x\cos x)\times(x\cos x)'=\cos(x\cos x)\times(\cos x+x(-\sin x))=(\cos x-x\sin x)\cos(x\cos x)$$

ت) اگر $g(x)=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$، داریم:

$$g'(x)=1+(\sqrt{x+\sqrt{x}})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$f(x)=\sqrt{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$$

ث) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(\tan(\sqrt{\sin x}))'$$
$$=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(1+\tan^2(\sqrt{\sin x}))\times(\sqrt{\sin x})'=\cos(\tan(\sqrt{\sin x}))\times(1+\tan^2(\sqrt{\sin x}))\times\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\times(\cos x)$$

همان‌طور که در دو مسأله‌ی قبل ملاحظه کردید، قاعده‌ی زنجیره‌ای قاعده‌ای نکته‌دار و پیچیده نیست. نامی هم که بر آن گذاشته‌اند، کاملاً برازنده‌ی مفهوم آن است. همواره در امتحانات نهایی و سؤال‌های کنکور، سؤال‌هایی از قاعده‌ی زنجیره‌ای وجود دارد. مهارت در استفاده این قاعده نیز فقط با تمرین به‌دست می‌آید.

تست (۱): مقدار مشتق $f(x)=\sin^3\sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi^2}{9}$ چقدر است؟ (سراسری – ۸۳)

۱) $\frac{9}{16\pi}$ **۲)** $\frac{9}{8\pi}$ **۳)** $\frac{27}{16\pi}$ **۴)** $\frac{27}{8\pi}$

حل: با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=3\sin^2(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\frac{\pi^2}{9})=3\times\sin^2(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{3})\times\frac{1}{2\times\frac{\pi}{3}}=\frac{27}{16\pi}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست (۲): اگر $f(x)=\sin x$، مقدار مشتق $\frac{fof}{f^2}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (سراسری – ۸۲)

۱) صفر **۲)** $\sin 1$ **۳)** $\cos 1$ **۴)** 1

حل: اگر $g_1(x)=fof(x)$ و $g_2(x)=f^2(x)$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} g_1'(x)=\cos(\sin x)\cos x\Rightarrow g_1'(\frac{\pi}{2})=\cos 1\times 0=0 \\ g_2'(x)=2\sin x\cos x\Rightarrow g_2'(\frac{\pi}{2})=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{fof}{f^2})\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{g_1'(\frac{\pi}{2})g_2(\frac{\pi}{2})-g_2'(\frac{\pi}{2})g_1(\frac{\pi}{2})}{(g_2(\frac{\pi}{2}))^2}=0$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسأله‌ی (۳): فرض کنید f بر R مشتق‌پذیر باشد. مشتق هریک از توابع زیر را بر حسب f' بیان کنید.

الف) $y=f(4x)$ **ب)** $y=f(2-3f(4-5x))$

حل: الف) اگر $g(x)=4x$، داریم:

$$y=fog(x)\Rightarrow y'=f'(g(x))\times g'(x)=f'(4x)\times 4=4f'(4x)$$

ب) اگر $g(x)=2-3f(4-5x)$، داریم:

$$g'(x)=-3f'(4-5x)\times(4-5x)'=-3f'(4-5x)(-5)=15f'(4-5x)$$
$$y=fog(x)\Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)=15f'(2-3f(4-5x))f'(4-5x)$$

تست (۳): اگر $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و $g(x)=f(\frac{1}{x})$، آن‌گاه مقدار $g'(\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{15}$ **۲)** $\frac{15}{16}$ **۳)** $-\frac{15}{16}$ **۴)** $-\frac{16}{15}$

حل: چون $g(x)=f(\frac{1}{x})$، با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=f'(\frac{1}{x})\times(\frac{1}{x})'=f'(\frac{1}{x})\times\frac{-1}{x^2}\Rightarrow g'(\frac{3}{4})=f'(\frac{4}{3})\times(-(\frac{4}{3})^2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(\frac{4}{3})=\frac{3}{5}\Rightarrow g'(\frac{3}{4})=\frac{3}{5}\times\frac{-16}{9}=\frac{-16}{15}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسأله‌ی (۴): اگر مشتق $f(\sin x)$ برابر $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ باشد، مشتق $f(\tan x)$ را به‌دست آورید.

حل: اگر $g(x)=f(\sin x)$، داریم: $g'(x)=f'(\sin x)\times\cos x$. از طرفی می‌دانیم:

$$g'(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\xrightarrow{g'(x)=f'(\sin x)\times\cos x}f'(\sin x)=\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}$$

اگر قرار دهیم $t=\sin x$، ضابطه‌ی تابع f' را به‌دست می‌آوریم:

$$t=\sin x\Rightarrow f'(t)=\frac{2t}{1+t^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

حالا اگر قرار دهیم $h(x)=f(\tan x)$، داریم:

$$h'(x)=f'(\tan x)(1+\tan^2 x)=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x)=2\tan x$$

تست (۴): مقدار مشتق تابع $f(x)=(x^{100}+x^{50}+50x^2+50x+1)^{10}$ در $x=0$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

حل: اگر عبارت داخل پرانتز را $g(x)$ بنامیم، داریم: $f(x)=(g(x))^{10}$، بنابراین:

$$f'(x)=10(g(x))^9 g'(x)\xrightarrow{x=0}f'(0)=10(g(0))^9 g'(0)$$

داریم: $g(0)=1$. همچنین اگر از $g(x)$ مشتق بگیریم، یک چندجمله‌ای دیگر حاصل می‌شود که عدد ثابت آن برابر ۵۰ است و بقیه‌ی جملات مضربی از توان‌های x هستند. پس:

$$g'(0)=50\Rightarrow f'(0)=10\times1\times50=500$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

در مثال‌ها و تست‌های قبل مفهوم قاعده‌ی زنجیره‌ای و چگونگی استفاده از آن را آموخته‌ایم. اما بسیاری از مواقع قاعده‌ی زنجیره‌ای را باید با قضایای دیگر مخلوط کنید و حتی گاه دست به ابتکارهایی بزنید تا بتوانید مشتق تابع را از روش‌های کوتاه‌تر پیدا کنید. در مسأله‌ی بعد چند نمونه از این مسائل را بررسی می‌کنیم.

مسأله‌ی (۵): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$ **ب)** $f(x)=\dfrac{2\sin x+3}{3\sin x+2}$ **پ)** $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ **ت)** $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$

حل: الف) اگر $g(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ و $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$، داریم: $g(x)=h(x^3)$. تابع h تابعی هموگرافیک است، پس:

$$h'(x)=\frac{1\times(-1)-1\times1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(x)=h'(x^3)\times3x^2=\frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$f(x)=(g(x))^{\frac{1}{4}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}(g(x))^{\frac{-3}{4}}\times g'(x)=\frac{-3}{2}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{\frac{-3}{4}}\times\frac{x^2}{(x^3-1)^2}$$

ب) مانند قسمت (الف) عمل کنید. اگر $g(x)=\dfrac{2x+3}{3x+2}$، $g(x)$ یک تابع هموگرافیک است و داریم:

$$g'(x)=\frac{2\times2-3\times3}{(3x+2)^2}=-\frac{5}{(3x+2)^2}\xrightarrow{f(x)=g(\sin x)}f'(x)=g'(\sin x)\cos x=\frac{-5\cos x}{(3\sin x+2)^2}$$

پ) اگر نخست کسر ضابطه‌ی تابع را گویا کنید، راه کوتاه‌تر می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\times\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=x+\sqrt{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\times2x=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

ت) با توجه به آن‌که $۴x = (۱+x)^۲ - (۱-x)^۲$، داریم:

$$f(x) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{(x+۱)^۲ - (x-۱)^۲}{(x+۱)^۲(x-۱)^۲}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{(x-۱)^۲} - \frac{۱}{(x+۱)^۲}\right)$$

با توجه به این که مشتق $g(x) = x^{-۲}$، برابر است با $g'(x) = -۲x^{-۳}$، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{-۲}{(x-۱)^۳} - \frac{-۲}{(x+۱)^۳}\right) = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{(x-۱)^۳} - \frac{۱}{(x+۱)^۳}\right) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۲(۳x^۲+۱)}{(x-۱)^۳(x+۱)^۳} = \frac{-۳x^۲-۱}{(x-۱)^۳(x+۱)^۳}$$

مسأله‌ی (۶): اگر $f(x) = (۱+x)(۱+۲x)\dots(۱+nx)$، **مقدار** $f'(۰)$ **را بیابید.** $(n \in N)$

حل: ضابطه‌ی f پس از ضرب کردن عبارات به صورت یک چندجمله‌ای درمی‌آید، که درجه‌ی آن برابر n است (چرا؟)، یعنی:

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \dots + a_nx^n$$

واضح است که:

$$f'(x) = a_۱ + ۲a_۲x + \dots + na_nx^{n-۱} \Rightarrow f'(۰) = a_۱$$

پس برای حل مسأله باید ضریب x را در عبارت $f(x)$ بیابیم. برای ایجاد هر جمله‌ی شامل x، باید از یک پرانتز، جمله‌ی شامل x در عددهای ۱ از پرانتزهای دیگر ضرب شود. بنابراین جملات شامل x عبارتند از: x، ۲x، ... و nx که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$x + ۲x + \dots + nx = x(۱+۲+\dots+n) = \frac{n(n+۱)}{۲}x \Rightarrow a_۱ = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

برای درک بهتر، استدلال بالا را خودتان برای $n = ۳$ تکرار کنید.

مسأله‌ی (۷): اگر $f(x) = \sqrt{۴x^۲ + \sqrt{x^۲+۱}}$ و $g(x) = \sqrt{۴x^۲ + ۴ + \sqrt{x^۲+۱}}$، **آن‌گاه ثابت کنید:** $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g'(x)}{f'(x)}$

حل: باید ثابت کنیم $ff' = gg'$. عبارت ff' شما را یاد مشتق چه تابعی می‌اندازد؟ اگر تابع $y = f^۲(x)$ را در نظر بگیریم، داریم: $y' = ۲f(x)f'(x)$. پس کافی است برای حل سؤال ثابت کنیم که مشتق‌های دو تابع $f_۱(x) = f^۲(x)$ و $g_۱(x) = g^۲(x)$ برابرند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f^۲(x) = ۴x^۲ + \sqrt{x^۲+۱} \\ g^۲(x) = ۴x^۲ + ۴ + \sqrt{x^۲+۱} \end{array}\right\} \Rightarrow f^۲(x) - g^۲(x) = -۴ \Rightarrow f_۱(x) - g_۱(x) = -۴ \Rightarrow f_۱'(x) - g_۱'(x) = ۰ \Rightarrow f_۱'(x) = g_۱'(x)$$

عامل صفرکننده

عامل صفرکننده، یکی از نکات مهم در محاسبه‌ی مشتق توابع در نقاطی خاص است که مخصوصاً در کنکورهای سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

مسأله‌ی (۸): الف) اگر $f(x) = \frac{(x-۲)\sqrt[۵]{۲۱x-۱۰}}{(x+۱)^۳}$، **مقدار** $f'(۲)$ **را بیابید.**

ب) اگر $f(x) = \sin x \cos x$، **مقدار** $f'(\pi)$ **را بیابید.**

حل: الف) محاسبه‌ی مشتق $f(x)$ در نقطه‌ی $x = ۲$ از راه تعریف آن، بسیار ساده‌تر از محاسبه‌ی تابع مشتق f است. داریم:

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x) - f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{\frac{(x-۲)\sqrt[۵]{۲۱x-۱۰}}{(x+۱)^۳} - ۰}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۵]{۲۱x-۱۰}}{(x+۱)^۳} = \frac{۲}{۲۷}$$

ب) چون $\sin\pi = ۰$، پس $f(\pi) = ۰$. اگر بخواهیم از تعریف مشتق $f(x)$ استفاده کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi}\frac{f(x) - f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x - ۰}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \times \lim_{x\to\pi}\cos x$$

چون $\sin\pi = ۰$، مقدار حد اول همان مشتق $\sin x$ در نقطه‌ی $x = \pi$ است، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)|_{x=\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x - \sin\pi}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \Rightarrow \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} = \cos\pi = -۱$$

بنابراین: $f'(\pi) = (-۱) \times \lim_{x\to\pi}\cos x = (-۱)\times(-۱) = ۱$

در مسأله‌ی (۸)، در هر دو قسمت مشتق تابع را در نقطه‌ای می‌خواستیم به‌دست آوریم که آن نقطه ریشه‌ی یکی از اجزای تابع بود، یعنی تابع از ضرب چند تابع دیگر تشکیل می‌شد که یکی از آن‌ها به ازای آن نقطه صفر می‌شد. به چنین عاملی اصطلاحاً «عامل صفرکننده» می‌گویند.

نکته: **عامل صفرکننده**

فرض کنید می‌خواهیم مشتق $f(x)=g(x)h(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ بیابیم و می‌دانیم $x=a$ ریشه‌ی $g(x)$ است. در این صورت اگر g در $x=a$ مشتق‌پذیر و h در این نقطه پیوسته باشد، داریم:

$$f'(a)=g'(a)h(a)$$

به بیان دیگر: برای محاسبه‌ی مشتق تابع در نقطه‌ای که ریشه‌ی عامل صفرکننده‌ی آن است، کافی است تنها از همان عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

➢ **تذکّر:** در حالت خاص، اگر $f(x)=(x-a)h(x)$، با شرط پیوستگی h در $x=a$، داریم: $f'(a)=h(a)$

اثبات: با توجه به این که $x=a$ ریشه‌ی g است، داریم:

$$g(a)=0\Rightarrow f(a)=g(a)h(a)=0$$

حال با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(a)$ را می‌یابیم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{x-a}\xrightarrow{f(x)=g(x)h(x)}f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)h(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}\times\lim_{x\to a}h(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\\ \text{پیوسته } x=a \text{ در } h\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}h(x)=h(a)\end{array}\right\}\Rightarrow f'(a)=g'(a)h(a)$$

مسأله‌ی (۹): مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

الف) $f(x)=\sin(\pi x)\cos^{10}(\frac{\pi}{4}x)$ **در** $x=1$

ب) $f(x)=\sin(\pi x)|x-10|$ **در** $x=10$

پ) $f(x)=x[x]$ **در** $x=0$

حل: الف) $x=1$ مقدار $\sin(\pi x)$ را صفر می‌کند. پس تنها کافی است از $\sin(\pi x)$ مشتق بگیریم:

$$\frac{d}{dx}(\sin\pi x)=\cos(\pi x)\times\pi\Rightarrow f'(1)=\pi\times\cos(\pi)\times\cos^{10}(\frac{\pi}{4})=\pi\times(-1)\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{10}=-\frac{\pi}{32}$$

ب) $x=10$ هر دو تابع $\sin(\pi x)$ و $|x-10|$ را صفر می‌کند. ولی $|x-10|$ در $x=10$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)، و عامل صفرکننده همان $\sin\pi x$ است. پس:

$$f'(10)=\pi\times\cos(10\pi)\times|10-10|=0$$

پ) عامل صفرکننده x است، ولی چون $y=[x]$ در $x=0$ پیوسته نیست، نمی‌توانیم از نکته‌ی ذکرشده استفاده کنیم. درواقع این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x[x]-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}[x]=0\quad,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x[x]-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}[x]=-1$$

تست (۵): مشتق تابع $y=\sin2x\tan x+\frac{3x}{x^2-1}$ **در** $x=0$ **کدام است؟ (آزاد – ۸۳)**

۱) صفر
۲) ۳
۳) -1
۴) -3

حل: در هر دو عبارت $\sin2x\tan x$ و $\frac{3x}{x^2-1}$ می‌توانیم از عامل صفرکننده استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\tan x\sin2x\Rightarrow f'(0)=(1+\tan^2 0)\sin0=0\\ g(x)=x\times\dfrac{3}{x^2-1}\Rightarrow g'(0)=\dfrac{3}{0-1}=-3\end{array}\right\}\Rightarrow y'|_{x=0}=f'(0)+g'(0)=-3$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مشتق در توابع چند ضابطه‌ای

در بخش (۵-۳) مثال‌هایی مقدماتی از توابع چندضابطه‌ای حل کردیم و مشتق‌پذیری آن‌ها به ویژه در نقاط مرزی را بررسی کردیم. اکنون با توجه به مطالبی که آموخته‌ایم، می‌توانیم چنین مسائلی را بهتر بررسی کنیم.

◄ **مثال:** فرض کنید مشتق تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۱\\ ۲x-۱ & x<۱\end{cases}$ را می‌خواهیم به‌دست آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=۱$ تابع در بقیه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$$

می‌بینید که شرط ضابطه‌ی اول، یعنی $x\geq ۱$، به $x>۱$ تغییر کرده است. برای یافتن دقیق‌تر مشتق باید نقطه‌ی $x=۱$ را نیز بررسی کنیم. می‌توانیم از تعریف مشتق، دو حد $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۲x-۱-۱}{x-۱}$ را تشکیل دهیم. ولی راه بهتر استفاده از همان ضابطه‌ی $f'(x)$ است. در واقع چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است (چرا؟)، می‌توانیم مقادیر $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ را از همان دو ضابطه‌ی f' به‌دست آوریم، یعنی: $f'_+(۱)=۲\times ۱=۲$ و $f'_-(۱)=۲$، پس $f'(۱)$ وجود دارد و می‌توانیم ضابطه‌ی $f'(x)$ را به شکل دقیق‌تر $f'(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۱\\ ۲ & x\leq ۱\end{cases}$ بنویسیم.

نکته: **اگر یک تابع چندضابطه‌ای در نقطه‌ی مرزی $x=a$ (نقطه‌ی مرزی بین دو ضابطه) پیوسته باشد، برای محاسبه‌ی مقدار مشتق چپ و راست آن در نقطه‌ی $x=a$ می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم.**

مسأله‌ی (۱۰): **مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در R مشتق‌پذیر باشد.**

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<۰\\ ۲\sin x+۳\cos x & x\geq ۰\end{cases}$$

حل: ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. هر دو ضابطه به تنهایی در R پیوسته‌اند، پس تنها باید نقطه‌ی مرزی $x=۰$ را بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}f(x)=f(۰)\Rightarrow a\times ۰+b=۲\sin ۰+۳\cos ۰\Rightarrow b=۳$$

حال مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=۰$، در نقاط دیگر تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & x<۰\\ ۲\cos x-۳\sin x & x>۰\end{cases}$$

برای مشتق‌پذیری تابع در R، باید $f'_+(۰)=f'_-(۰)$. چون f در $x=۰$ پیوسته است، پس می‌توانیم طبق نکته‌ی قبل از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_+(۰)=۲\cos ۰-۳\sin ۰=۲\quad ,\quad f'_-(۰)=a\xrightarrow{f'_+(۰)=f'_-(۰)}a=۲$$

مسأله‌ی (۱۱): **آیا تابع $f(x)=\begin{cases}۲\sin x-۱ & x>۰\\ ۲x-۳ & x\leq ۰\end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر است؟**

حل: خیر! بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه به این صورت مسأله را حل می‌کنند. ابتدا از دو ضابطه مشتق می‌گیرند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲\cos x & x>۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}$$

سپس با استفاده از ضابطه‌ها نتیجه می‌گیرند که $f'_+(۰)=۲$، $f'_-(۰)=۲$ و می‌گویند f در $x=۰$ مشتق‌پذیر است. در حالی که این تابع در $x=۰$ اصلاً پیوسته نیست که مشتق‌پذیر باشد! علّت اشتباه این دانش‌آموزان این است که به شرط پیوستگی در نکته‌ی قبل دقت نکرده‌اند.

* **مسأله‌ی (۱۲): اگر** $f(x)=\begin{cases} x^{2}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$، **مقادیر** $f'(0)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ **را به‌دست آورید.**

حل: با توجه به این که ضابطه‌ی اول در تمام نقاط $R-\{0\}$ مشتق‌پذیر است، از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^{2}\cos(\frac{1}{x})\times(-\frac{1}{x^{2}})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

حد اول برابر صفر است (طبق قضیه‌ی فشردگی)، ولی حد دوم وجود ندارد. پس $\lim\limits_{\to 0} f'(x)$ وجود ندارد. اما نتیجه‌ی جالب این است که $f'(0)$ وجود دارد:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

یادداشت: این تابع نمونه‌ای از توابعی است که در R مشتق‌پذیرند، ولی مشتق آن‌ها در R پیوسته نیست.

تست (۶): تابع f با ضابطه‌ی مقابل به‌ترتیب در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ (سراسری – ۸۲)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x+1 & 0\le x<1 \\ 2x+2 & 1\le x<2 \\ x^{2}+2 & x\ge 2 \end{cases}$$

۱) ۱ ، ۲
۲) ۲ ، ۲
۳) ۱ ، ۳
٤) ۲ ، ۳

حل: برای بررسی پیوستگی باید نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to 0^{-}} 1=\lim_{x\to 0^{+}}(x+1)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^{-}}(x+1)=2\neq\lim_{x\to 1^{+}}(2x+2)=4$$

$$\lim_{x\to 2^{-}}(2x+2)=6=\lim_{x\to 2^{+}}(x^{2}+2)$$

پس تابع تنها در نقطه‌ی $x=1$ ناپیوسته است. برای بررسی مشتق‌ناپذیری، می‌دانیم تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است و علاوه بر آن:

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0<x<1 \\ 2 & 1<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$$

باید تنها نقاط $x=0$ و $x=2$ را بررسی کنیم که با توجه به پیوستگی تابع در این دو نقطه، طبق نکته می‌توانیم از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_{+}(0)=1 \quad , \quad f'_{-}(0)=0 \quad , \quad f'_{+}(2)=4 \quad , \quad f'_{-}(2)=2$$

پس تابع در هر سه نقطه‌ی $x\in\{1,2,3\}$ مشتق‌ناپذیر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق در توابع شامل قدرمطلق

معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند، بهتر است ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و تعیین محدوده، قدرمطلق را حذف کنیم، سپس از تابع مشتق بگیریم.

مسأله‌ی (۱۳): مشتق تابع $f(x)=(x^{2}-1)^{2}|x+1|$ **را به‌دست آورید.**

حل: تابع f را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای بیان کرد:

$$f(x)=(x^{2}-1)^{2}|x+1|=\begin{cases} (x^{2}-1)^{2}(x+1) & x\ge -1 \\ -(x^{2}-1)^{2}(x+1) & x<-1 \end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^{5}+x^{4}-2x^{3}-2x^{2}+x+1 & x\ge -1 \\ -(x^{5}+x^{4}-2x^{3}-2x^{2}+x+1) & x<-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 5x^{4}+4x^{3}-6x^{2}-4x+1 & x>-1 \\ -5x^{4}-4x^{3}+6x^{2}+4x-1 & x<-1 \end{cases}$$

تنها باید در نقطه‌ی $x=-1$ جداگانه مشتق را بررسی کنیم که: $f'_{+}(-1)=f'_{-}(-1)=0$

تست (۷): مشتق تابع $f(x)=|x|+|x+1|+...+|x+99|$ در نقطه‌ی $x=-\frac{9}{2}$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۴)

۱) ۹۰ ۲) ۹۰− ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۰−

حل: در همسایگی $x=-\frac{9}{2}$، علامت عبارت‌های x، $x+1$، $x+2$، $x+3$ و $x+4$ منفی است، ولی علامت عبارات $x+5$، $x+6$، ... و $x+99$ مثبت است. پس:

$$f(x)=-x-(x+1)-(x+2)-(x+3)-(x+4)+(x+5)+(x+6)+...+(x+99)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{-1-1-1-1-1}_{\text{۵ بار}}+\underbrace{1+1+...+1}_{\text{۹۵ بار}}=-5+95=90\Rightarrow f'(-\frac{9}{2})=90$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۸): اندازه‌ی مشتق تابع $y=|x|+|x^2-2x|$ در نقطه‌ی $x=-1$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۵− ۳) ۳− ۴) ۳

حل: نقطه‌ی $x=-1$ ریشه‌ی x^2-2x نیست و مقدار عبارت به ازای آن مثبت می‌شود. پس x^2-2x در همسایگی $x=-1$ مثبت است و می‌توانیم علامت قدرمطلق آن را حذف کنیم. همچنین در همسایگی $x=-1$ به وضوح داریم: $|x|=-x$. پس:

$$y=-x+x^2-2x=x^2-3x\Rightarrow y'=2x-3\xrightarrow{x=-1}y'=-2-3=-5$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی (۱۴): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=|x+1|+|x+2|$ **ب)** $f(x)=\sin|x|$ * **پ)** $f(x)=\sin\pi x|\sin\pi x|$

حل: الف) با تعیین محدوده‌ی قدرمطلق‌ها و حذف آن‌ها ضابطه‌ی f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+1+x+2 & x\ge -1\\ -x-1+x+2 & -2<x<-1\\ -x-1-x-2 & x\le -2\end{cases}=\begin{cases}2x+3 & x\ge -1\\ 1 & -2<x<-1\\ -2x-3 & x\le -2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & x>-1\\ 0 & -2<x<-1\\ -2 & x<-2\end{cases}$$

در نقاط $x=-1$ و $x=-2$ به وضوح تابع مشتق‌پذیر نیست.

ب) با تعیین محدوده داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\ge 0\\ -\sin x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\cos x & x>0\\ -\cos x & x<0\end{cases}$$

تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. ($f'_-(0)=-1$ و $f'_+(0)=1$)

پ) تابع $y=\sin\pi x$ در فاصله‌های $2n\pi<\pi x<(2n+1)\pi$ مثبت و در فاصله‌های $(2n+1)\pi<\pi x<(2n+2)\pi$ منفی است $(n\in Z)$ و ریشه‌های آن در نقاط $x=n$ رخ می‌دهد. پس:

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2\pi x & x\in(2n,2n+1)\\ 0 & x=n\\ -\sin^2\pi x & x\in(2n+1,2n+2)\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2\sin\pi x\cos\pi x\times\pi=\pi\sin 2\pi x & x\in(2n,2n+1)\\ -2\sin\pi x\cos\pi x\times\pi=-\pi\sin 2\pi x & x\in(2n+1,2n+2)\end{cases}$$

در نقاط $x=n$، مشتق راست از یکی از ضابطه‌ها و مشتق چپ از ضابطه‌ی دیگر به‌دست می‌آید، یعنی: $f'_+(n)=f'_-(n)=0$ (زیرا $\sin 2\pi n=0$ برای $n\in Z$). پس تابع در نقاط $x=n$ نیز مشتق‌پذیر است و می‌توانیم فاصله‌های ضابطه‌ی f' را به جای فاصله‌های باز، فاصله‌های بسته بگذاریم.

مشتق در توابع شامل جزءصحیح

مشتق در توابع شامل جزءصحیح نیز مانند مشتق در توابع شامل قدرمطلق است. یعنی در محدوده‌ی مناسب، بهتر است جزءصحیح را حذف کنیم، سپس مشتق بگیریم.

مسأله‌ی (۱۵): مشتق تابع $f(x)=[x]\sin^{2}\pi x$ را به‌دست آورید.

حل: در فاصله‌ی $n<x<n+1$ (که $n\in Z$) داریم: $[x]=n$، بنابراین $f(x)=n\sin^{2}\pi x$. یعنی $[x]$ به صورت یک ضریب عددی ثابت در تابع ظاهر می‌شود که عیناً در مشتق آن تکرار می‌شود. داریم:

$$f'(x)=n\times 2\sin\pi x\cos\pi x\times(\pi)=n\pi\sin 2\pi x\xrightarrow{n=[x]}f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$$

در نقاط $x=n\in Z$، مقدار $\sin\pi x$ برابر صفر می‌شود، پس تابع پیوسته است (چرا؟)، همچنین برای محاسبه‌ی مشتق راست تابع f در $x=n$، باید از $n\sin^{2}\pi x$ مشتق بگیریم و برای مشتق چپ آن از $(n-1)\sin^{2}\pi x$. که هر دو مشتق برابر صفر می‌شوند، در نتیجه:

$$f'(n)=0 \qquad (n\in Z)$$

که می‌توان آن را با نتیجه‌ی اول به صورت $f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$ (برای هر $x\in R$) ترکیب کرد.

تست (۹): مقدار مشتق تابع $y=x^{3}+x[\frac{3}{2}-x]$ در نقطه‌ی $x=2$ چقدر است؟

۱) ۱۲ **۲)** ۱۱ **۳)** ۱۳ **٤)** ۱۰

حل: در نقطه‌ی $x=2$، داریم $[\frac{3}{2}-x]=[-\frac{1}{2}]=-1$، چون به ازای $x=2$ عبارت داخل جزءصحیح عددی صحیح نیست، در یک همسایگی $x=2$، مقدار جزءصحیح برابر -1 است، در نتیجه:

$$y=x^{3}-x\Rightarrow y'=3x^{2}-1\xrightarrow{x=2}y'=3\times 4-1=11$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مشتق تابع وارون

یکی از نتایجی که از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان به‌دست آورد، درباره‌ی مشتق تابع وارون است. فرض کنید f تابعی وارون‌پذیر باشد و $f(a)=b$. از $f(a)=b$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(b)=a$. حال برای مشتق‌گیری از f^{-1}، از رابطه‌ی $f^{-1}(f(x))=x$ استفاده می‌کنیم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=(x)'\Rightarrow(f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=1$$

$$\xrightarrow[f(a)=b]{x=a}(f^{-1})'(b)\times f'(a)=1\Rightarrow(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

قضیه: **مشتق تابع وارون**

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه با فرض $f'(a)\neq 0$ داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مسأله‌ی (۱۶): در هر حالت، مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^{3}+2\sqrt{x}$، $(f^{-1})'(3)=?$

ب) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\geq 1\\ 2x-4 & x<1\end{cases}$، $(f^{-1})'(7)=?$

حل: الف) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=3$. واضح است که $f(1)=3$، بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}$. از طرفی چون $f'(x)=3x^{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$، پس $f'(1)=4$، بنابراین: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{4}$

ب) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=7$. داریم:

$$3x-2=7\Rightarrow x=3$$

پس $f(3)=7$، درنتیجه $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(3)}$. از طرفی به وضوح $f'(3)=3$، بنابراین $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{3}$.

مشتق توابع وارون مثلثاتی

با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع وارون می‌توانیم مشتق توابع وارون مثلثاتی را پیدا کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $(\sin^{-1})'(a)$ را بیابیم. $x_{\circ} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ را درنظر می‌گیریم که $\sin x_{\circ} = a$. طبق قضیه داریم:

$$(\sin^{-1})'(a) = \frac{1}{\sin'(x_{\circ})} = \frac{1}{\cos x_{\circ}}$$

از طرفی چون $x_{\circ} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و $\sin x_{\circ} = a$، نتیجه می‌گیریم: $\cos x_{\circ} = \sqrt{1-a^2}$، بنابراین: $(\sin^{-1})'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

قضیه: **مشتق توابع وارون مثلثاتی**

۱- مشتق تابع $y = \sin^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$

۲- مشتق تابع $y = \cos^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$

۳- مشتق تابع $y = \tan^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{1}{1+x^2}$

۴- مشتق تابع $y = \cot^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

رابطه‌ی اول را ثابت کرده‌ایم. اثبات رابطه‌های دیگر را به خودتان واگذار می‌کنیم.

مسأله‌ی (۱۷): با استفاده از مشتق، اتحاد $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ **را ثابت کنید.**

حل: تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را درنظر می‌گیریم. این تابع در فاصله‌ی $[-1,1]$ پیوسته است. از طرفی در فاصله‌ی $(-1,1)$، با مشتق‌گیری از f داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

می‌دانیم فقط مشتق تابع ثابت برابر صفر است، بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم f تابعی ثابت است. حال با توجه به آن که $f(0) = \sin^{-1}(0) + \cos^{-1}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$، پس مقدار ثابت تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است. به این ترتیب برای هر $-1 < x < 1$ داریم: $f(x) = \frac{\pi}{2}$

برای دو نقطه‌ی مرزی $x = \pm 1$ نیز به راحتی درستی اتحاد اثبات می‌شود.

مسأله‌ی (۱۸): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \tan^{-1}(\frac{2x}{1-x^2})$ $\qquad$ ب) $f(x) = \sin(\tan^{-1}(\tan x))$

حل: الف) با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2} \times (\frac{2x}{1-x^2})' = \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2} \times \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{1+2x^2+x^4} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

ب) با استفاده‌ی متوالی از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x)) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} \times (1+\tan^2 x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x))$$

خواص متقابل f و f'

درباره‌ی ویژگی‌های متقابل f و f' احکامی را می‌توان ثابت کرد که در این جا ما به ذکر دو نکته‌ی نسبتاً مهم از آن‌ها بسنده می‌کنیم.

۱– زوج و فرد بودن

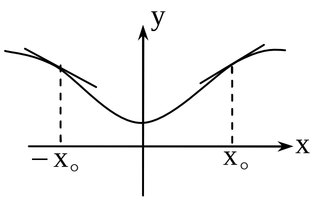
نکته: **اگر تابع f زوج باشد، آن‌گاه f' فرد است و اگر f فرد باشد، آن‌گاه f' زوج است.**

اثبات: اگر f زوج باشد، داریم: $f(-x)=f(x)$. از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم. اگر قرار دهیم $g(x)=f(-x)$، طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم: $g'(x)=f'(-x)\times(-۱)=-f'(-x)$. از طرفی چون $g(x)=f(-x)=f(x)$، داریم: $g'(x)=f'(x)$، بنابراین:

$$-f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$

این شرط نشان می‌دهد که تابع f'، تابعی فرد است. تنها باید ثابت کنیم دامنه‌ی آن نسبت به صفر متقارن است. با توجه به این که نمودار f نسبت به محور عرض‌ها متقارن است (چرا؟)، اگر نقطه‌ای سمت راست محور عرض‌ها قرار داشته باشد و مماسی قابل رسم بر نمودار تابع در آن نقطه موجود باشد، در قرینه‌ی آن نیز چنین مماسی قابل رسم است. پس اگر f در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، در $x=-x_۰$ نیز مشتق‌پذیر است.

بنابراین دامنه‌ی f' نسبت به صفر متقارن است. برای درک بهتر به شکل روبه‌رو نگاه کنید که نمونه‌ای از یک تابع زوج با نمودار متقارن نسبت به محور y ها است. دو خط که در نقاط $x_۰$ و $-x_۰$ بر نمودار مماس شده‌اند، به وضوح شیبی قرینه دارند.



به همین ترتیب اگر f فرد باشد، می‌توان ثابت کرد f' زوج است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=f(-x)\Rightarrow g'(x)=f'(-x)\times(-۱) \\ f(-x)=-f(x)\Rightarrow g(x)=-f(x)\Rightarrow g'(x)=-f'(x)\end{array}\right\}\Rightarrow -f'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

پس تابع f' زوج است. سعی کنید این نتیجه را با نمودار f نیز توجیه کنید.

مسأله‌ی (۱۹): اگر $f(x)=\dfrac{x^۸+\cos x-۱۳۸۶}{x^۴-۲}$، مقدار $f'(۰)$ را بیابید.

حل: تابع f زوج است و در $x=۰$ مشتق‌پذیر است (چرا؟)، پس مشتق آن فرد است. می‌دانیم اگر تابع فردی در نقطه‌ی $x=۰$ مقدار داشته باشد، حتماً مقدار آن صفر است، پس: $f'(۰)=۰$

پرسش: آیا عکس نکته‌ی اخیر نیز، گزاره‌ای درست است؟ یعنی اگر f' فرد باشد، آن‌گاه f زوج است؟ یا اگر f' زوج باشد، لزوماً f فرد است؟

پاسخ: اگر f' زوج باشد، درباره‌ی f نمی‌توان حکمی صادر کرد. مثلاً $f(x)=x^۳+x+۱$، نه زوج است و نه فرد، ولی $f'(x)=۳x^۲+۱$ تابعی زوج است.

اما اگر f' فرد باشد، قطعاً f زوج است (البته به شرط آن‌که f در R مشتق‌پذیر باشد). زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)+f'(x)=۰ \\ g(x)=f(-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(-x)=-g'(x)\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)-g'(x)=۰\Rightarrow (f-g)'(x)=۰$$

اگر مشتق یک تابع مشتق‌پذیر در R صفر باشد، آن تابع قطعاً یک تابع ثابت است. یعنی عدد ثابت $c\in R$ وجود دارد که:

$$f(x)-g(x)=c\Rightarrow f(-x)=f(x)-c$$

رابطه‌ی فوق برای هر $x\in R$ برقرار است، اگر قرار دهیم $x=۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(۰)=f(۰)-c\Rightarrow c=۰\Rightarrow f(-x)=f(x)\Rightarrow \text{زوج } f$$

۲- تناوب

نکته: **اگر تابع f متناوب باشد، آن‌گاه f' نیز متناوب است.**

درک شهودی نکته‌ی فوق بسیار واضح است. چون تابع f متناوب است، رفتار آن در فاصله‌های دوره‌ی تناوب آن عیناً تکرار می‌شود، پس از نظر خطوط مماس بر منحنی نیز عیناً رفتاری مشابه خواهد داشت و f' نیز متناوب می‌شود. برای اثبات دقیق‌تر فرض کنید T دوره‌ی تناوب f باشد، آن‌گاه : $f(x+T)=f(x)$ و از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f'(x+T)\times(x+T)'=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)\times ۱=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$$

پس f' نیز متناوب است.

پرسش: آیا عکس این نکته نیز برقرار است؟ یعنی اگر f' متناوب باشد، f نیز متناوب است؟

پاسخ: خیر. مثلاً تابع $f(x)=x+\cos x$ تابعی متناوب نیست، ولی مشتق آن $f'(x)=۱-\sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است.

کاربردهایی از مشتق

بحث تابع مشتق و خواص آن به پایان رسیده است. در انتهای این بخش چند مسأله‌ی نمونه حل می‌کنیم که شاید مانند مثال‌های قبل در کنکور و آزمون‌های مشابه آن، اهمیت نداشته باشند، ولی درک شما را از مفهوم مشتق کامل‌تر می‌کنند و علاوه بر آن مسائلی جالب و زیبا هستند!

ابتدا از کاربرد مشتق در معادلات تابعی می‌گوییم. در ریاضیات عالی، بسیاری از توابع را پیش از آن که ضابطه‌ای صریح برای آن‌ها بیابند، با معادلات تابعی توصیف می‌کنند و بعضی از خواص آن‌ها را کشف می‌کنند. یکی از این خواص، طبیعتاً مشتق تابع است!

* **مسأله‌ی (۲۰): الف) تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی و مثبت x و y در معادله‌ی $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید:** $f'(x)=\frac{۱}{x}f'(۱)$

ب) تابع مشتق‌پذیر f برای تمام مقادیر حقیقی x و y در معادله‌ی $f(x+y)=f(x)f(y)$ صدق می‌کند. ثابت کنید: $f'(x)=f'(۰).f(x)$

حل: الف) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x=y=۱$، به‌دست می‌آوریم:

$$f(۱)=۲f(۱)\Rightarrow f(۱)=۰$$

اکنون برای به‌دست آوردن مشتق تابع از تعریف آن استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

برای آن‌که حد فوق را بتوانیم ساده کنیم، و به نوعی از معادله‌ی تابعی استفاده کنیم، $x+h$ را به صورت ضرب دو عدد می‌نویسیم که $f(x+h)$ به معادله‌ی تابعی مربوط شود:

$$x+h=x(۱+\frac{h}{x})\Rightarrow f(x+h)=f(x(۱+\frac{h}{x}))=f(x)+f(۱+\frac{h}{x})\Rightarrow f(x+h)-f(x)=f(۱+\frac{h}{x})$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+\frac{h}{x})}{h}\xrightarrow{f(۱)=۰}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+\frac{h}{x})-f(۱)}{h}$$

$$t=\frac{h}{x}\to ۰\Rightarrow f'(x)=\lim_{t\to ۰}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{tx}=\frac{۱}{x}\lim_{t\to ۰}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{t}=\frac{۱}{x}f'(۱)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در معادله‌ی قسمت (الف) صدق می‌کنند (که در ریاضیات به آن معادله‌ی دوم کوشی می‌گویند)، تابع $f(x)=\log x$ است.

ب) اگر در معادله‌ی تابعی قرار دهیم $x=y=۰$، نتیجه می‌گیریم:

$$f(۰)=(f(۰))^۲\Rightarrow f(۰)=۰ \text{ یا } f(۰)=۱$$

اگر $f(0)=0$، با قرار دادن $y=0$ در معادله‌ی تابع داریم: $f(x)=f(x)f(0)=0$، در نتیجه تابع f، یک تابع ثابت با مقدار صفر است که در حکم سؤال به وضوح صدق می‌کند. در حالت دیگر، یعنی $f(0)=1$، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-1)}{h}$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$

یادداشت: نمونه‌ای از توابعی که در این معادله صدق می‌کنند (که به آن معادله‌ی سوم کوشی می‌گویند)، توابع نمایی هستند، مثلاً $f(x)=2^x$.

با استفاده از مشتق می‌توان بعضی از اتحادها را نیز ثابت کرد:

مسأله‌ی (۲۱): با استفاده از اتحاد $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$، اتحاد مشابه برای $\cos(x+a)$ را ثابت کنید.

حل: از دو طرف اتحاد فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم. دقت کنید که a پارامتر است و با آن مثل یک عدد ثابت برخورد می‌کنیم.

$$g(x)=\sin(x+a)\Rightarrow g'(x)=\cos(x+a)\times 1=\cos(x+a)$$

$$g(x)=\sin x\cos a+\cos x\sin a\Rightarrow g'(x)=\cos x\cos a-\sin x\sin a$$

مقایسه‌ی دو تساوی فوق، اتحاد $\cos(x+a)=\cos x\cos a-\sin x\sin a$ را نتیجه می‌دهد.

مسأله‌ی (۲۲): ابتدا ثابت کنید: $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=1+x+x^2+\ldots+x^n$ و با استفاده از آن حاصل $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ را به‌دست آورید.

حل: اثبات اتحاد اول که به راحتی با اتحاد چاق و لاغر انجام می‌شود. حال از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق بگیرید.

$$f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n\Rightarrow f'(x)=0+1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

$$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

برابری دو تساوی بالا، پاسخ سؤال را حاصل می‌کند.

تمرین‌های بخش ۱–۶

۱- **مشتق هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$　ب) $f(x)=(1+\frac{\sqrt{x-2}}{3})^4$　پ) $f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{3x+4}}$

ت) $f(x)=\sin(\sin(\sin x))$　ث) $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$　ج) $f(x)=\sin^3(x^3+x^2)$

چ) $f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$　ح) $f(x)=\sqrt{\cos(\sin^2 x)}$

۲- **اگر f بر R مشتق‌پذیر باشد، مشتق هریک از توابع زیر را بر حسب f' بیان کنید.**

الف) $y=f(5x-x^2)$　ب) $y=f(2f(3f(x)))$　پ) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$

۳- **مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^4}{1+x^4}}$　ب) $f(x)=\cos^3(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$　پ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

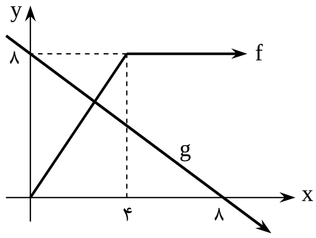
ت) $f(x)=(x^2-3x+1)^5\sin(x^2+3x-1)^5$　ث) $f(x)=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

ج) $f(x)=\sin^{n}x\cos nx$ چ) $f(x)=\dfrac{۴x+۶}{\sqrt{x^{۲}+۳x+۴}}$ ح) $f(x)=\dfrac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$

خ) $f(x)=\dfrac{(۲-x^{۲})(۳-x^{۳})}{(۱-x)^{۲}}$ د) $f(x)=\tan x-\frac{۱}{۳}\tan^{۳}x+\frac{۱}{۵}\tan^{۵}x$

ذ) $f(x)=\sin(\cos^{۲}(\tan^{۳}x))$

۴- در شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g رسم شده است. اگر $h(x)=f(g(x))$ و $k(x)=g(f(x))$، حاصل $h'(۱)$ و $k'(۲)$ را به‌دست آورید.



۵- فرض کنید $\frac{d}{dx}(f(x)-f(۲x))\big|_{x=۱}=۵$ و $\frac{d}{dx}(f(x)-f(۲x))\big|_{x=۲}=۷$. حاصل $\frac{d}{dx}(f(x)-f(۴x))\big|_{x=۱}$ را به‌دست آورید.

۶- در هر حالت مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)}{\sqrt{x^{۲}+۳}}$، $f'(۱)=?$

ب) $f(x)=\sin x\cos^{۸}x$، $f'(\pi)=?$ ، $f'(\frac{\pi}{۲})=?$

پ) $f(x)=(x+۳)(x-۲)^{۲}[x-۲]$، $f'(۲)=?$ ، $f'(-۳)=?$

۷- اگر تابع f بر R مشتق‌پذیر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\leq ۱ \\ \dfrac{۱}{|x|} & x>۱ \end{cases}$$

* **۸-** اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}[\frac{۱}{x}] & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$، آن‌گاه $f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰}f'(x)$ را به‌دست آورید.

۹- در هر حالت، حاصل حد خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۲+\sqrt{۲۴+۲x-x^{۲}}$، $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$

ب) $f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\geq ۱ \\ x^{۲}+۳ & x<۱ \end{cases}$، $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h^{۲})-f(۱)}{h^{۲}}$

پ) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳x & x\geq ۱ \\ x^{۳}-۳ & x<۱ \end{cases}$، $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱-۲h^{۲})-f(۱+h^{۲})}{h^{۲}}$

۱۰- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin x-|\sin x|$ ب) $f(x)=\tan x|\sin x|$

پ) $f(x)=|x-۱|+|x-۲|+|x-۳|$ ت) $f(x)=|x^{۲}-۳x|+|x-۲|$

* **۱۱-** تابعی متناوب با دوره‌ی اصلی تناوب T مثال بزنید که دوره‌ی تناوب تابع مشتق آن برابر $\frac{۱}{۳}T$ باشد.

۱۲- در هر حالت، مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲x}+۳x+\sqrt[۳]{x}$ ، $(f^{-۱})'(۳۰)=?$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & x<۰ \end{cases}$ ، $(f^{-۱})'(۱۰)=?$ ، $(f^{-۱})'(-۵)=?$

۱۳- با استفاده از مشتق اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\cot^{-۱}x+\tan^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}$

ب) $\sin^{-۱}x=\cos^{-۱}(\sqrt{۱-x^۲})$ (برای $۰\leq x\leq ۱$)

۱٤- مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\tan^{-۱}(\sin^۲ x)$

ب) $f(x)=\cot^{-۱}(\frac{x^۲+۱}{x^۲-۲})$

پ) $f(x)=\frac{\cos^{-۱}x}{x}$

* ۱۵- الف) تابع مشتق‌پذیر f در معادله‌ی تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند (به این معادله، معادله‌ی اول کوشی می‌گویند). ثابت کنید: $f'(x)=f'(۰)$

ب) تابع مشتق‌پذیر f برای همه‌ی مقادیر x و y در معادله‌ی تابعی $f(xy)=f(x)f(y)$ صدق می‌کند (به این معادله، معادله‌ی چهارم کوشی می‌گویند). ثابت کنید برای $x\neq ۰$ داریم: $f'(x)=\frac{f(x)}{x}f'(۱)$

* ۱٦- فرض کنید $f(x)=۱+x+x^۲+\cdots+x^n$. تابع $g(x)=xf'(x)$ را تشکیل دهید و با استفاده از آن مجموع $S=x+۴x^۲+۹x^۳+\cdots+n^۲x^n$ را بیابید.

* ۱۷- اتحاد دوجمله‌ای نیوتن را برای بسط $(۱+x)^n$ درنظر بگیرید و با استفاده از آن مجموع زیر را حساب کنید:

$$S=\binom{n}{۱}+۲\binom{n}{۲}+۳\binom{n}{۳}+\ldots+n\binom{n}{n}$$