

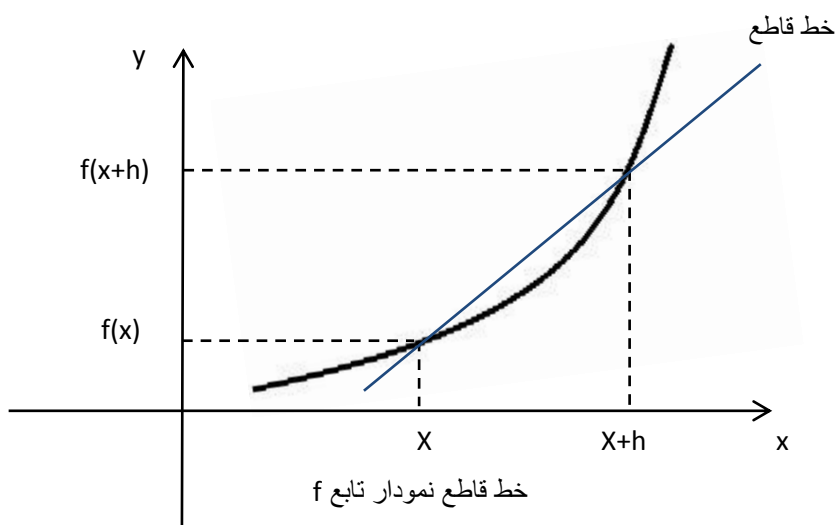
آشنایی با مفهوم مشتق: برای نوشتن معادله خط گذرنده از دو نقطه در معادله کلی خط (یعنی  $y=ax+b$ ) نقطه دهی می کردیم، اما با این روش نمای کلی خط گذرنده از این دو نقطه قبل از یافتن معادله، امکان پذیر نبود. برای بهبود این مشکل مفهومی به اسم شیب خط تعریف شده است.

اگر  $(x, f(x))$  نقطه ای از نمودار تابع  $y = f(x)$  و  $(x+h, f(x+h))$  نقطه دیگری از این نمودار باشد آنگاه تغییرات مقادیر تابع بانماد  $\Delta f(x)$  نشان داده شده و به فرم:  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$  تعریف می شود به طور مشابه با نماد  $\Delta x$  تغییرات مقادیر  $x$  را نشان می دهیم. لذا شیب خط قاطع عبارت است از:

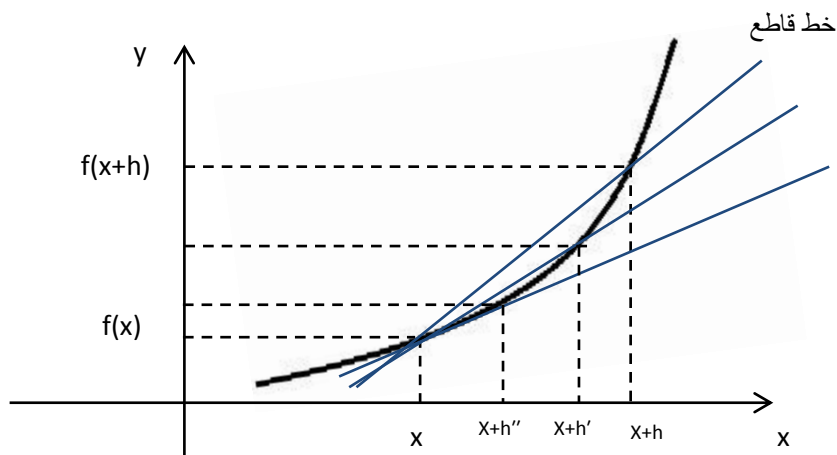
$$m = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

در کسر بالا اگر  $x$  ثابت نگه داشته شود و مقدار  $h$  (یعنی فاصله دو نقطه) کم و کمتر گردد و به صفر نزدیک و نزدیکتر شود در این صورت کسر بالا به مقداری میل می کند که به آن شیب خط مماس گفته می شود. به عبارت دیگر، حاصل حدزیر (در صورت وجود) ضریب زاویه خط مماس نمودار  $f$  در  $x$  را به دست می دهد:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



از لحاظ هندسی با کوچکتر شدن  $h$  خط قاطع منحنی به مماس بر منحنی تبدیل می گردد و داریم:



با میل کردن  $h$  به سمت صفر شیب خط قاطع به مقدار شیب خط مماس در نقطه  $x$  میل می کند.

**تعریف مشتق تابع:** برای تابع  $f$  که در همسایگی نقطه  $a$  تعریف شده است، اگر حد زیر:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وجود داشته باشد، می‌گوییم  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است. این حد یکتارا با  $f'(a)$  نمایش داده و آن را مشتق تابع  $f$  در  $a$  می‌نامند. برطبق این تعریف، مقدار مشتق برابر است با نرخ تغییرات مقدار تابع، زمانی که این تغییرات به سمت صفر میل می‌کند. با تبدیل  $h$  به  $x-a$  تعریف دوم مشتق به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

لذا در مجموع داریم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

مثال: باکمک تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$  را در نقطه  $x=2$  به دست آورید.

جواب: روش اول:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2+1}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{2+1} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+\Delta x)+1} - \sqrt{2+1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+\Delta x} - \sqrt{3})(\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3})}{\Delta x(\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + \Delta x - 3}{\Delta x(\sqrt{3+\Delta x} + \sqrt{3})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{3+0} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)+1} - \sqrt{2+1}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(2\sqrt{3})} \blacksquare
 \end{aligned}$$

**نمادگذاری های مشتق:** مشتق تابع  $f$  را با  $f'$  نیز می توان نشان داد. این نماد بر آن تاکید دارد که  $f'$  تابع جدیدی است که با مشتق گیری از تابع  $f$  به دست آمده است و مقدارش در  $x$  با  $f'(x)$  نموده می شود. می دانیم؛ مختصات  $x$  و  $y$  واقع بر نمودار  $f$  به معادله  $y=f(x)$  به هم مربوط می شوند و علامت  $y'$  نیز برای نمایش  $f'(x)$  به کار می رود که مقدارش در  $x$  به صورت  $y'$  نوشته می شود و مشتق مراتب بالاتر را به صورت  $f'$  (مشتق اول)،  $f''$  (مشتق دوم)،  $f'''$  (مشتق سوم)، ...  $f^{(n)}$  (مشتق  $n$  ام) نشان می دهند. (با استفاده از نمادگذاری دیگری می توان کسر  $\frac{df(x)}{dx}$  را با نماد  $\frac{df(x)}{dx}$  معرفی کرد که به صورت  $\frac{d}{dx} f(x)$  نیز نوشته می شود. این نماد نمایش دیفرانسیلی مشتق نامیده می شود و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مشتق مراتب بالاتر به شکل  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$  نوشته می شود.

**مشتق های یک طرفه:** از آنجایی که مطالعه رفتار تابع در همه ی نقاط امکان پذیر نمی باشد (یابه دلیل محدودیت دامنه ی تابع یا محدودیت فاصله ی تعریف شده برای تابع) همواره برای این مطالعه یک محدوده ی خاص در نظر گرفته می شود و لذا به تبع آن تعاریف جدیدی برای مشتق تابع حاصل می شود که عبارتند از:

**مشتق راست:** اگر تابع  $f$  در  $[a, b]$  تعریف شده باشد آنگاه حاصل حد زیر، در صورت وجود مشتق راست تابع در  $x=a$  می باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

و  $f'(a)$  با نماد نمایش داده می شود. به این مقدار شیب نیم مماس راست می گویند.

**مشتق چپ:** اگر تابع  $f$  در  $(c, a]$  تعریف شده باشد آنگاه حاصل حد زیر در؛ صورت وجود؛ مشتق چپ تابع در  $x=a$  می باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

و  $f'(a)$  با نماد نمایش داده می شود. به این مقدار شیب نیم مماس چپ می گویند.

مثال: مقدار مشتق تابع زیر را در نقطه  $x=3$  بیابید:

$$\begin{cases} 2x + 1 & x \neq 3 \\ 8 & x = 3 \end{cases}$$

حل: باتوجه به تعریف مشتق تابع، داریم:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 1) - 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 7}{x - 3}$$

حد صورت کسر برابر ۱- است و حد مخرج کسر برابر صفر. پس برای پیدا کردن حاصل حد باید از حدود یکطرفه استفاده گردد:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-7}{x-3} = -\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-7}{x-3} = +\infty$$

بنابراین مقدار  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$  موجود (ومتناهی) نیست. پس  $f'(3)$  وجود ندارد. ■

**مشتق پذیری:** تابع  $f$  در  $x=a$  مشتق پذیر است هرگاه در این نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست تابع با هم برابر و مساوی یک عدد حقیقی معین باشد.

**تعبیر هندسی مشتق پذیری:** تابع  $f$  در  $x=a$  مشتق پذیر است هرگاه بتوان در این نقطه یک خط کامل (نه نیم مماس)

مماس و غیرموازی با محور  $y$  ها بر منحنی رسم کرد. اگر تابع  $f$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته نیز هست ولی عکس این مطلب صحیح نمی باشد؛ یعنی ممکن است تابع پیوسته باشد اما مشتق پذیر نباشد؛ به عبارت بهتر، پیوستگی تابع در  $x=a$  شرط لازم برای مشتق پذیری تابع است، نه شرط کافی. پس اگر تابع  $f$  در  $x=a$  ناپیوسته باشد آنگاه مشتق پذیر نیست.

**توجه:** اگر تابع  $f$  در  $x=a$  پیوسته باشد و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$  یا  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$  باشد آنگاه خط  $x=a$  را "مماس قائم" بر منحنی  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$  می نامیم. بدیهی است که  $f'$  در این نقطه وجود ندارد.

**موارد مشتق ناپذیری:** مواردی که تابع در نقطه مفروض مشتق پذیر نیست: (اسم این نقاط نیز نوشته شده)

۱. **نقاط ناپیوسته:** تابع در نقاط ناپیوسته (نقاط بریدگی های شکل تابع) مشتق پذیر نمی باشد. از دید هندسی نمی توان در این نقاط مماس بر منحنی رسم کرد.

۲. **نقاط زاویه دار:** تابع در نقاط پیوسته ای که مشتق چپ و راست در آن ها دو عدد حقیقی نابرابر، یا یکی عدد دیگری بی نهایت باشد، مشتق پذیر نیست. از دید هندسی، در این نقاط دو نیم مماس بر منحنی رسم می شود که با هم زاویه می سازند. (علت نامگذاری آنها هم همین زاویه ساختن نیم مماسهایشان است.)

۳. **نقاط عطف قائم:** تابع در نقاط پیوسته ای که مشتق چپ و راست در آن ها بی نهایت های هم علامت باشد، مشتق ناپذیر است. از دید هندسی، در این نقاط می توان یک خط کامل مماس به موازات محور yها رسم کرد.

**نکته:** نقطه عطف قائم تنها نقطه ای است که تابع در آن مشتق پذیر نیست ولی مماس کامل دارد.

۴. **نقاط بازگشت:** تابع در نقاط پیوسته ای که مقادیر مشتق چپ و راست در آنها بی نهایت های غیر هم علامت باشد مشتق ناپذیر است. از دید هندسی، در این نقاط می توان یک نیم مماس، به موازات محور yها رسم کرد.

۵. تابع در نقاطی که پیوسته اند ولی مشتق در آنها به سمت عدد مشخصی میل نمی کند نیز مشتق ناپذیر است. از دید هندسی، در این نقاط می توان مماس مشخصی بر منحنی رسم کرد.

**دامنه تابع مشتق:** منظور از دامنه تابع مشتق، مجموعه نقاطی است که تابع در آنها مشتق پذیر می باشد یعنی برای تابع (مثلا) داریم:

$D_{f'} = D_f - \{ \text{مجموعه نقاطی که } f' \text{ در آنها تعریف نشده است} \}$

**قواعد مشتق گیری:** فرض کنید  $c$  و  $m$  و  $p$  اعداد ثابت و  $u$  و  $v$  و  $t$  توابع دلخواهی باشند. در این صورت:

$(c)' = 0$	$(cu)' = cu'$
$((u^m)') = mu^{m-1}u'$	$(u + v)' = u' + v'$
$(u \times v \times t)' = u' \times v \times t + u \times v' \times t + u \times v \times t'$	$( u )' = \frac{u'}{ u } \times u$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$(\sqrt[m]{u})' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$(\sqrt[m]{u^p})' = \frac{p \times u'}{m \times \sqrt[m]{u^{m-p}}}$

### مشتق تابع نسبت به تابع:

هرگاه بخواهیم مشتق یک تابع مانند  $f$  را نسبت به تابع دیگری مانند  $g$  به دست آوریم کافی است مشتق این توابع را نسبت به متغیرشان محاسبه نموده و سپس برهم تقسیم کنیم به عبارت بهتر:

$$f' = \frac{df}{dg} = \frac{df/dx}{/dx}$$

مثال: هرگاه  $f(t) = t^3 + 2t$  و  $g(t) = 5t^2 + 1$  باشد. در این صورت  $(f_g)'$  را بنویسید.

حل: با فرمولهای مشتق نوشته شده در جدول مشتق توابع، داریم:

$$f_g' = \frac{df}{dg} = \frac{df/dt}{/dt} = \frac{3t^2+2}{10t} \blacksquare$$

**مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری):** اگر تابع  $g$  در نقطه  $a$  و تابع  $f$  در  $g(a)$  مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع  $f \circ g$  نیز در  $a$  مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(a) = (f(g(a)))' = g'(a)f'(g(a))$$

به بیان بهتر، هرگاه  $y$  تابعی از  $u$  و  $u$  تابعی از  $x$  باشد، برای به دست آوردن مشتق  $y$  نسبت به  $x$ ، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

به شکل دیگر؛ برای توابع  $y, f, u$  که به صورت  $y=f(u)$  تعریف شده باشند، داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

مثال: مشتق تابع  $y = \sin(x^4 + 5x)$  را بنویسید.

حل:

$$y = (x^4 + 5x)' \cos(x^4 + 5x) = (4x^3 + 5) \cos(x^4 + 5x) \blacksquare$$

**مشتق ضمنی:** درمقابل رابطه صریح تابع به شکل کلی  $y=f(x)$  رابطه ضمنی آن به صورت  $f(x,y)=0$  قرار می گیرد. برای محاسبه مشتق توابع ضمنی دو روش کلی وجود دارد:

-**استفاده از قاعده زنجیری:** در این روش از طرفین رابطه نسبت به  $x$  مشتق می گیریم و بعد با استفاده از فاکتورگیری،  $y'$  را می یابیم. (اگر بخواهیم مشتق را نسبت به  $x$  حساب کنیم؛ قرار می دهیم:

$$(y' = 0, x' = 1)$$

-استفاده از فرمول مشتق جزئی: مشتق جزئی، پاره ای یا نسبی، به مشتق تابع چند متغیره  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  نسبت به یکی از متغیرها، با ثابت در نظر گرفتن سایر متغیرها گفته می شود. مشتق جزئی را به جای  $d$  با  $\partial$  نمایش می دهند که "دِل" ( "دِر" یا "پارشال" ) خوانده می شود. برای مثال، مشتق جزئی تابع  $Z=f(x,y)$  نسبت به  $x$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

به طور کلی حاصل حد زیر، در صورت وجود برابر مشتق جزئی تابع چند متغیره  $f$  نسبت به  $x_i$  در  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  است:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

برای مشتق گیری رابطه ی  $f(x,y)=0$  از فرمول زیر استفاده می شود:

$$y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{\partial_x f(x, y)}{\partial_y f(x, y)}$$

مثال: مقدار  $y'_x$  را برای رابطه ی  $2x^2y^4t^3 + 5x^3y^2t^7 + \sqrt{xy}^6t = 0$  بیابید.

حل: با روش قاعده ی زنجیری مشتق ها را حساب می کنیم. در این صورت:

$$+15x^2yx'_x y^2t^7 + 10x^3yy'_x t^7 + 35x^3y^2t^6t'_x + \frac{x'_x x}{2\sqrt{x}} y^6t + 6\sqrt{xy}^5 y'_x t + \sqrt{xy}^6 t'_x = 0$$

حا با جایگذاری  $(x'_x = 1, y'_x = 0, t'_x = 0)$  داریم:

$$2xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{x}{2\sqrt{x}} y^6t = 0$$

روش دوم استفاده از فرمول مشتق جزئی: برای مشتق گیری رابطه را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x, y, t) = 2x^2y^4t^3 + 5x^3y^2t^7 + \sqrt{xy}^6t$$

لذا رابطه به صورت  $f(x,y)=0$  تبدیل از فرمول زمی شود و می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

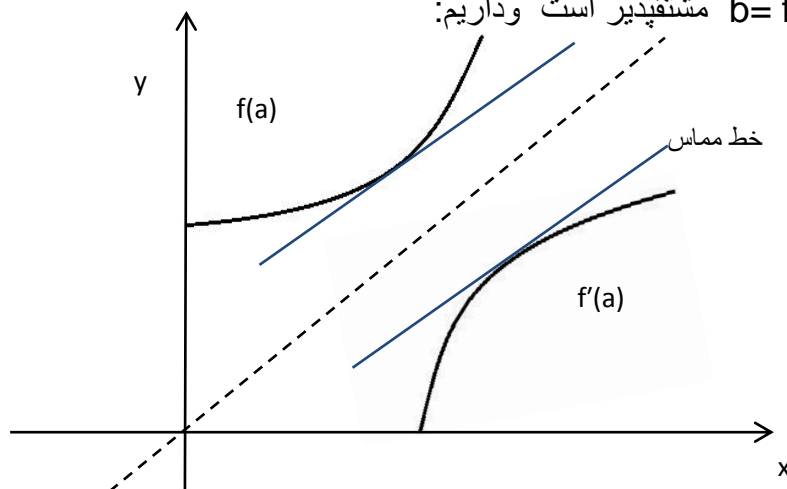
$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\partial_x f(x, y, t)}{\partial_y f(x, y, t)} = -\frac{4xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}y^6t}{8x^4y^3t^3 + 10x^3yt^7 + 6\sqrt{xy}^5t}$$

$$= 2xy^4t^3 + 15x^2y^2t^7 + \frac{x}{2\sqrt{x}}y^6t \blacksquare$$

مشتق تابع معکوس:

اگر تابع  $f$  در همسایگی نقطه  $a$  پیوسته و یک به یک بوده و  $f'(a)$  موجود و غیرصفر باشد، آنگاه تابع  $f^{-1}$  در نقطه  $b = f(a)$  مشتقپذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



خط مماس نمودار تابع  $f$  که شیب آن برابر مقدار مشتق تابع  $f$  در  $x$  است.

**تعبیر هندسی:** شیب خط مماس بر منحنی  $f^{-1}$  در نقطه  $M \left| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right.$  برابر است با عکس شیب خط مماس بر منحنی

در نقطه  $M \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$  (نقاط و متناظر هستند).

مشتق مراتب بالاتر:

اگر تابع  $f$  روی بازه  $I$  مشتقپذیر باشد، تابع  $f'$  خود ممکن است در نقطه ای مثل  $a$  مشتقپذیر باشد به عبارتی اگر (مقدار حد زیر)

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

موجود باشد، می‌گوییم مشتق مرتبه  $i$  دوم تابع  $f$  در  $a$  موجود است و آن را با  $f''(a)$  نمایش می‌دهیم. مشتق مراتب بالاتر یک تابع، از تعریف اصلی مشتق به دست می‌آید (به طوری که با مشتق گرفتن از مشتق اول تابع به مشتق دوم آن می‌رسیم و به همین ترتیب مشتق مراتب بالاتر نیز تعریف می‌شوند). به صورت کلی  $f^{(n)}(a)$  برابر است با:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

مشتق n ام چند تابع مهم:

مشتق n ام چند تابع مهم نسبت به x که a و b اعداد ثابت هستند:

تابع	مشتق n ام تابع
$y = \sin ax$	$y^{(n)} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$
$y = \cos ax$	$y^{(n)} = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax + b)^{n+1}}$
$y = (ax + b)^n$	$y^{(n)} = a^n n! \quad (y^{(n+1)} = 0)$

کاربرد مشتق:

- نوشتن معادله ی خط مماس و قائم: مشتق به ازای مختصات نقطه تماس، برابر است با ضریب زاویه خط مماس در آن نقطه. پس برای تعیین شیب خط مماس یا قائم منحنی و تعیین معادله ی آنها می توان از مشتق استفاده کرد.

- معادله خط مماس در نقطه  $(x_0, y_0)$  واقع بر منحنی  $f(x)$ :

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ m = f'(x_0) \end{cases}$$

- معادله خط قائم در نقطه  $(x_0, y_0)$  واقع بر منحنی  $f(x)$ :

$$\begin{cases} y - y_0 = m'(x - x_0) \\ m' = \frac{-1}{m} \end{cases}$$

مثال: معادله خط مماس در نقطه  $(2,11)$  واقع بر منحنی  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  را بنویسید.

حل: ابتدا شیب منحنی  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  در نقطه  $(2,11)$  را می یابیم بعد در فرمول داده شده برای مماس بر منحنی در نقطه ای روی منحنی جایگذاری می کنیم؛

$$m = f'(x) = 4x + 3$$

حال مقدار نقطه  $(2,11)$  را در معادله  $m$  جایگذاری می کنیم و مقدار عددی  $m$  را می یابیم که برابر است با:

$$m = 4 \times 2 + 3 = 11$$

حال مقدار نقطه  $(2,11)$  را در معادله ی خط مماس جایگذاری می کنیم . لذا داریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 11 = 11(x - 2)$$

$$y = 11(x - 1) \blacksquare$$

**-معادله خط مماس بر منحنی از نقطه ای خارج از منحنی:**

اگر بخواهیم از نقطه  $A|x_0$  (واقع در خارج از منحنی) مماسی بر منحنی رسم کنیم؛ نقطه تماس را  $M|f(a)$  در نظر می گیریم. چون نقطه  $M$  روی منحنی قرار گرفته از منحنی مشتق می گیریم و مختصات  $M$  را در تابع مشتق قرار می دهیم تا شیب معادله به دست آید. لذا داریم:

$$\begin{cases} m = f'(a) \\ y - f(a) = f'(a)(x - a) \end{cases}$$

در نهایت چون نقطه  $A|x_0$  روی خط مماس قرار دارد؛ در معادله ی مذکور جایگذاری می کنیم تا یک معادله ی یک مجهولی بر حسب  $a$  به دست آید.

**-آهنگ تغییر:** نسبت تغییرات دو کمیت را آهنگ تغییر یکی نسبت به دیگری می گویند.

**-آهنگ تغییر متوسط:** آهنگ متوسط تغییرات  $f$  در فاصله  $[a,b]$  عبارت است از:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنگ متوسط تغییرات  $f$  نسبت به متغیر  $x$  عبارت است از:

$$\frac{\Delta f}{x_2 - x_1}$$

-آهنگ تغییر لحظه ای: اگر تغییرات نسبت به تغییرات را آهنگ آنی (لحظه ای) تغییر نسبت به گویند.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

-محاسبه حد توابع با کمک تعریف مشتق: با استفاده از تعریف مشتق برخی حدها قابل محاسبه می باشند.

مثالی برای روشنتر شدن این روش؛ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 \sqrt{x} - 4x - 16}{x - 4}$$

حل مثال: با قرار دادن مقدار  $x=4$  در رابطه ی  $(x^2 \sqrt{x} - 4x)$  متوجه می شویم که حاصل برابر 16 می گردد؛ از طرفی با کمک تعریف مشتق توابع می دانیم که:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

پس تابع  $f(x)$  را به شکل  $f(x) = x^2 \sqrt{x} - 4x$  تعریف می کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 \sqrt{x} - 4x - 16}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= f'(4) \\ &= \frac{5}{2} 4^2 \sqrt{4} - 4 \times 4 \\ &= 16 \blacksquare \end{aligned}$$

محاسبه ی زاویه ی بین دو منحنی:

زاویه ی بین خط و منحنی: زاویه ی بین یک خط و منحنی عبارت است از زاویه ی بین مماس رسم شده بر منحنی در نقطه تقاطع با خط. برای تعیین اندازه ی این زاویه به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. خط را با منحنی قطع داده و مختصات نقطه تقاطع را بدست می آوریم.
۲. از منحنی مشتق گرفته و ضریب خط مماس بر منحنی در نقطه ی تقاطع را می یابیم.
۳. با کمک رابطه ی زیر مقدار عددی زاویه ی بین خط و منحنی (و همین طور جهت آنها) به دست می آید.

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

**زاویه بین دو منحنی:** برای یافتن زاویه بین دو منحنی ابتدا آنها را با هم تلاقی داده و طول نقطه ی تلاقی را می یابیم. سپس از دو منحنی مشتق گرفته و ضریب زاویه های به دست آمده (یعنی  $m_1, m_2$ ) را در رابطه ی زیر قرار می دهیم تا زاویه ی بین دو منحنی به دست آید (زاویه ی بین دو منحنی اصطلاحاً زاویه ی بین دو مماس رسم شده بر منحنی ها در نقطه ی تقاطعشان است).

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

**نقاط بحرانی:** نقطه ی درونی  $c \in D_f$  را نقطه بحرانی تابع گویند هرگاه  $f'(c) = 0$  یا  $f'(c)$  موجود نباشد. ریشه های مشتق، نقاط بازگشتی، زاویه دار، ناپیوستگی و عطف قائم همگی جزو نقاط بحرانی تابع محسوب می شوند و نقاط ابتدا و انتهای بازه (به دلیل اینکه نقاط درونی بازه نیستند) جزو نقاط بحرانی محسوب نمی شوند.

در ضمن اگر تابع  $f$  روی  $[a, b]$  تعریف شده باشد و نقطه  $c \in (a, b)$  (درون این بازه) اکسترمم مطلق تابع در این بازه باشد، آنگاه نقطه بحرانی است. هر نقطه اکسترمم نسبی  $f$  نقطه بحرانی  $f$  نیز هست، در صورتیکه یک نقطه ی بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نسبی نباشد.

اگر تابع  $f$  روی  $(a, b)$  پیوسته باشد برای به دست آوردن مقادیر ماکسیم و مینیمم مطلق ابتدا نقاط بحرانی را در بازه مشخص کرده و در تابع اصلی قرار می دهیم بعد مقادیر  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  را نیز به دست آورده و بامقادیر اعداد به دست آمده مقایسه می کنیم و کمترین مقدار را می نیمم تابع و بیشترین مقدار را ماکسیمم تابع می نامیم.

توجه: اگر در بازه فوق نقطه  $c$  وجود داشته باشد که تابع در آن نقطه ناپیوسته باشد آنگاه مقادیر  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  را نیز یافته و مانند موارد بالا با مقایسه ی مقادیر یافته شده مقدار نهایی مینیمم و ماکسیمم تابع را مشخص می کنیم.

**تشخیص یکنوایی تابع:** در تابع پیوسته  $f$  برای هر  $x \in I$  اگر  $f'(x) > 0$  آنگاه  $f$  روی  $I$  صعودی اکید است و اگر  $f'(x) < 0$  آنگاه  $f$  روی  $I$  نزولی اکید است؛ ولی اگر  $f'(x) \geq 0$  باشد، تابع  $f$  ممکن است صعودی غیر اکید یا صعودی اکید باشد و اگر  $f'(x) \leq 0$  باشد، تابع  $f$  ممکن است نزولی غیر اکید یا نزولی اکید باشد. در این حالت برای تشخیص اکید یا غیر اکید بودن تابع  $f$

ریشه های مشتق را به دست می آوریم. اگر ریشه های مشتق تمام نقاط روی یک بازه باشند، تابع صعودی غیر اکید است و در غیر این صورت صعودی اکید است. اگر تابع  $f$  پیوسته نباشد، دامنه تابع را به فاصله هایی که

تابع در آن ها پیوسته است تقسیم می کنیم و به کمک مشتق وضعیت یکنوایی تابع را در هر بازه مشخص می کنیم. سپس نقاط انتهایی (یا حد انتهایی) هر بازه را با نقاط ابتدایی (یا حد ابتدایی) بازه بعد مقایسه می کنیم.

### آزمون های مشتق:

آزمون مشتق اول: با فرض اینکه  $c$  نقطه ی بحرانی تابع  $f$  است و  $c \in (a, b)$  و  $f$  روی  $(a, b)$  پیوسته و به جز احتمالاً در  $c$  مشتق پذیر باشد:

- اگر  $f'$  روی  $(a, c)$  مثبت و روی  $(c, b)$  منفی باشد، آنگاه  $f$  در  $c$  ماکزیمم نسبی دارد.
- اگر  $f'$  روی  $(a, c)$  منفی و روی  $(c, b)$  مثبت باشد، آنگاه  $f$  در  $c$  مینیمم نسبی دارد.
- اگر  $f'$  روی  $(a, c)$  و  $(c, b)$  هم علامت باشد، آنگاه  $f$  در  $c$  اکسترمم ندارد.

آزمون مشتق دوم: فرض کنید نقطه بحرانی تابع  $f$  و  $f''$  موجود باشد:

- اگر  $f''(c) < 0$  باشد آنگاه  $f$  در  $c$  دارای مینیمم نسبی است.
- اگر  $f''(c) > 0$  باشد آنگاه  $f$  در  $c$  دارای ماکسیمم نسبی است.
- اگر  $f''(c) = 0$  باشد آنگاه آزمون مشتق دوم بی نتیجه است.

**جهت تقعر و نقطه عطف:** اگر نمودار تابعی به صورت باشد تقعر آن به سمت بالاست. در این حالت منحنی بالای هر خطی که بر آن مماس شود، قرار می گیرد. به عبارت دیگر اگر  $f'$  صعودی اکید باشد یا  $f''$  روی بازه  $I$  موجود و همواره مثبت باشد آنگاه جهت تقعر نمودار  $f$  روی این بازه رو به بالاست.

اگر نمودار تابعی به صورت باشد تقعر آن به سمت پایی است. در این حالت منحنی پایین هر خطی که بر آن مماس شود، قرار می گیرد. به عبارت دیگر اگر  $f'$  نزولی اکید باشد یا  $f''$  روی بازه  $I$  موجود و همواره منفی باشد آنگاه جهت تقعر نمودار  $f$  روی این بازه رو به پایین است.

اگر جهت تقعر نمودار  $f$  در نقطه  $c$  تغییر کند و مماس نیز داشته باشد آنگاه  $c$  را نقطه عطف گویند. در بررسی نقطه عطف تابع، سه شرط زیر باید برقرار باشد:

۱.  $f$  در  $c$  پیوسته باشد.
۲.  $f$  در  $c$  فقط یک مماس داشته باشد. (مایل، افقی یا قائم)
۳. جهت تقعر  $f$  در  $c$  تغییر کند.

پس برای یافتن نقاط عطف نمودار تابع کافی است، نقاطی که  $f''$  در آن ها وجود ندارد یا برابر صفر است را تعیین و علامت  $f''$  را قبل و بعد از این نقاط نیز وجود خط مماس را در این نقاط بررسی کنیم.

**قاعده هوییتال:** از قاعده هوییتال برای رفع ابهام  $\frac{0}{0}$  و  $\frac{\infty}{\infty}$  در حد استفاده می شود به طوری که اگر  $f$  و  $g$  در  $x=a$  مشتق پذیر باشند و  $f(a)=g(a)=0$  آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

اگر  $f$  و  $g$  در  $x=a$  از راست مشتق داشته باشد از قاعده هوییتال برای وقتی  $x \rightarrow a^+$  می توان استفاده کرد و به همین ترتیب، اگر مشتق چپ داشته باشد برای  $x \rightarrow a^-$ .

**بهینه سازی:** بسیاری از مسائلی که در علوم تجربی و ریاضیات مطرح می شوند، در جستجوی یافتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم هستند که یک تابع مشتق پذیر می تواند در دامنه ی خاصی اختیار کند و مشتق ابزار مناسبی برای یافتن این مقادیر است.

برای حل مسائل بهینه ساز لازم است که ابتدا کمیت هایی مانند حجم، مساحت، فاصله و... که بیشترین یا کمترین مقدار آن مورد نیاز است، به صورت تابعی از متغیرهای دیگر نوشته شود و چنانچه معادله حاصل بیش از یک متغیر داشت با استفاده از فرضیات مسئله و ارتباط متغیرها باهم، معادله را به معادله ای که با یک متغی مستقل تبدیل کرد و در انتها به کمک مشتق، نقاط بحرانی را یافت، تا بتوان ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را مشخص کرد.

**تمرینات و مثالهای بیشتر در جزوه ی حل تمرین نوشته شده.**