به نام خدا

جزوه مبحث

(مشتق ۱)

شامل:

درس، نکته، تست

ویژه دانش آموزان سال دوازدهم

«ریاضی و تجربی»

تهیه و تنظیم: مهندس رضا نیازی

کانال تلگرام: @Reza_niazi.math

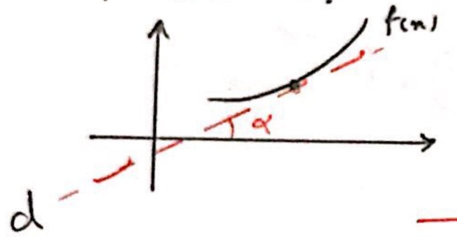
آدرس اینستاگرام: @Reza_niazi.math

تعریف مشتق: تابع f در x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجود و معین باشد.

به عبارتی مشتق یعنی تغییرات تابع به تغییرات متغیر وقتی تغییرات متغیر به سمت صفر میل می‌کند

$$\text{مشتق } f \text{ در } x_0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

عدد مشتق f در x_0 در صورت وجود بیانگر شیب خط مماس بر f در x_0 می‌باشد



$$f'(x_0) = m_d = \tan\alpha$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط:

آهنگ تغییر لحظه‌ای f در x_0 همان مشتق f در x_0 است و با نماد $f'(x_0)$ نمایش می‌دهیم که شیب خط مماس بر f در x_0 است.

آهنگ تغییر متوسط f از A تا B برابر $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ یا همان شیب وتر بین دو نقطه A و B است.

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای } f \text{ در } x_0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط } f \text{ در } x_0 \text{ به ازای نمو متغیر } \Delta x = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

نکته: در توابع خطی، آهنگ تغییر متوسط f بین هر دو نقطه با آهنگ تغییر لحظه‌ای در تمام نقاط برابر است.

نکته: در توابع درجه دوم آهنگ تغییر متوسط f از a تا b دقیقاً برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای در $\dfrac{a+b}{2}$ است.

فرمول‌های مقدماتی مشتق:

$y=a \Rightarrow y'=0$

$y=ax+b \Rightarrow y'=a$

$y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

$y=\sqrt[n]{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$y=\sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y'=\dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

مخصوص رشته ریاضی

$y=\sin x \quad y'=-\cos x$

$y=\cos x \quad y'=-\sin x$

$y=\tan x \quad y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$y=\cot x \quad y'=-(1+\cot^2 x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

قضایای مشتق: اگر f و g در x_0 مشتق‌پذیر باشند آنگاه داریم:

$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$

$(f.g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+g'(x_0).f(x_0)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)\overset{g(x_0)\neq 0}{=}\dfrac{f'(x_0).g(x_0)-g'(x_0).f(x_0)}{g^2(x_0)}$

تعمیم فرمول‌های مشتق ضرب و تقسیم:

$(f\pm g\pm h\pm \dots)'=f'\pm g'\pm h'\pm \dots$

$(f.g.h\dots)'=f'.g.h\dots+g'.f.h\dots+h'.f.g\dots+\dots$

$\left(\dfrac{f.g\dots}{u.v\dots}\right)'=\dfrac{(f'.g.u.v\dots+g'.f.u.v\dots+\dots)-(u'.v.f.g\dots+v'.u.f.g\dots+\dots)}{(u.v\dots)^2}$

مشتق تابع هموگرافیک:

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

تست ۱) در تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ آهنگ تغییر متوسط تابع از $x_1=1$ تا $x_2=9$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x_0=4$ است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

حل: $\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9)-f(1)}{9-1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{8} = -\frac{1}{12}$

$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } 4 = f'(4) \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$\Rightarrow f'(4)=-\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{16}}=\boxed{\frac{4}{3}}$

تست 2) ارزش یک خودرو پس از گذشت t سال از تولید آن $f(t)=100(1-\frac{t}{20})^2$ می‌باشد (برحسب میلیون تومان). آهنگ تغییر متوسط قیمت خودرو در ۱۰ سال اول چند میلیون تومان کمتر از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در سال دهم است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۴

حل: $\text{متوسط ۱۰ سال اول} = \frac{f(10)-f(0)}{10-0} = \frac{25-100}{10} = -7/5$

$\text{لحظه‌ای در سال دهم} = f'(10) \quad f'(t)=200(1-\frac{t}{20})(-\frac{1}{20}) \Rightarrow f'(10)=-5$

$\Rightarrow -7/5-(-5)=-2/5$

تست 3) در تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{3h}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ۳

حل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{3h} = \frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h} = -\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1\underbrace{-2h}_{\Delta x})-f(1)}{\underbrace{-2h}_{\Delta x}} = -\frac{2}{3}f'(1)$$

از طرفی $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}f'(1)=-1$

نکته: اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+mh)-f(x_0)}{kh} = \frac{m}{k} f'(x_0)$$

حالت کلی‌تر

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'(x_0)$$

تست 4) در تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{(x+1)^2}$ حاصل $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ کدام است؟

1) 0 2) -2 3) -4 4) 4

پاسخ: گزینه ۳

حل: $\lim_{x\to \underset{x_0}{-2}} \frac{f(x)-f(\overset{x_0}{-2})}{x-(\underset{x_0}{-2})} = f'(-2)$

از طرفی $f'(x)=\frac{2x(x+1)^2-(2x+2)(x^2-4)}{(x+1)^4}$ $\quad f'(-2)=-4$

نکته: اگر تابعی تشکیل شده باشد از ضرب چند عامل و مشتق را در نقطه‌ای بخواهند که یکی از عوامل صفر شود (عامل صفرشونده). ما ابتدا مشتق آن عامل را گرفته سپس در بقیه عوامل ضرب می‌کنیم و نقطه را داخل آن قرار می‌دهیم. (مشتق عامل صفرشونده)

تست 5) در تابع $f(x)=\frac{(x^2-1)\cdot\cos\pi x}{1+\tan 2\pi x}$ حاصل $f'(1)$ کدام است؟

1) 0 2) 1 3) 2 4) -2

پاسخ: گزینه ۴

حل: $f(x)=\frac{\overbrace{(x^2-1)}^{\text{عامل صفرشونده}}\cdot\cos\pi x}{1+\tan 2\pi x} \Rightarrow f'(1)=(x^2-1)'\cdot \frac{\cos\pi x}{1+\tan 2\pi x}\Big|_{x=1}$

$\Rightarrow f'(1)=2x\cdot\frac{\cos\pi x}{1+\tan 2\pi x}\Big|_{x=1} = 2\left(\frac{-1}{1+0}\right)=-2$

تست ۶) اگر داشته باشیم $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x).g(1+\Delta x)-1}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

حل: $f(1)=2$ ، $g(1)=\frac{1}{2}$ و $(f.g)(1)=f(1).g(1)=1$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x).g(1+\Delta x)-f(1).g(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f.g)(1+\Delta x)-(f.g)(1)}{\Delta x}$$

$$=(f.g)'(1)$$

از طرفی $(f.g)(x)=f(x).g(x)=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow (f.g)'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow (f.g)'(1)=-\frac{2}{3}$$

نکته: در مشتق گیری ابتدا می‌توان تابع را تا حد امکان ساده کرد سپس اقدام به مشتق گیری نمود.

نکته: در مشتق‌گیری از توابع قدرمطلق و براکتی ابتدا در نزدیکی نقطه داخل براکت را تعیین علامت و قدرمطلق را تعیین علامت کرده و این دو عامل مزاحم را از روی تابع برداشته سپس اقدام به مشتق گیری می‌نمائیم.

تست ۷) در تابع $f(x)=\left|\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$ حاصل $f'(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۱

حل:

همسایگی عدد $\frac{1}{4}$: $f=\left|\dfrac{\overbrace{x-\sqrt{x}}^{\text{منفی}}}{1-\sqrt{x}}\right|=\dfrac{\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad f'(\tfrac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$$

مشتقات یک طرفه: (چپ و راست)

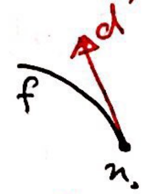
اگر f در x_0 از راست پیوسته باشد آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ در صورت وجود بیانگر مشتق راست f در x_0 است که همان شیب نیم مماس راست f در x_0 می‌باشد. و به شرطی گوییم f در x_0 از راست مشتق‌پذیر است که حد بالا موجود و متناهی باشد.

مشتق راست f در x_0 $= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)=m_d$ شیب نیم مماس راست f در x_0

تذکر: پیوستگی راست f در x_0 شرط لازم برای داشتن مشتق راست است و کافی نیست.

اگر f در x_0 از چپ پیوسته باشد آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ در صورت وجود بیانگر مشتق چپ f در x_0 است که همان شیب نیم مماس چپ f در x_0 می‌باشد. و به شرطی گوییم f در x_0 از چپ مشتق‌پذیر است که حد بالا موجود و متناهی باشد.

مشتق چپ f در x_0 $= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)=m_{d'}$ شیب نیم مماس چپ f در x_0



تذکر: پیوستگی چپ f در x_0 شرط لازم برای داشتن مشتق چپ است و کافی نیست.

f در x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه دارای مشتق چپ و راست موجود، برابر و متناهی باشند.

حالات مشتق ناپذیری f در x_0:

1) اگر به هر دلیلی مشتق چپ یا راست f در x_0 موجود نباشد (مثلاً ناپیوستگی چپ یا راست)

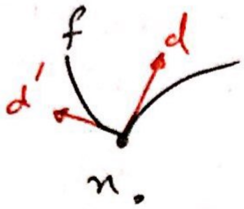
f در x_0 مشتق چپ و راست ندارد

f در x_0 فقط از چپ مشتق‌پذیر است

f در x_0 فقط از راست مشتق‌پذیر است

۲) اگر f در x_0 دارای مشتق چپ و راست باشد ولی نابرابر که در اینصورت دارای دو نیم مماس چپ و راست متمایز است و x_0 را نقطه گوشه یا زاویه دار تابع گوییم

مثال



f در x_0 مشتق ناپذیر ⇐ $f'_-(x_0)=m_{d'}$ $f'_+(x_0)=m_d$

۳) f در x_0 دارای مشتق چپ و راست موجود و برابر است ولی نامتناهی یعنی مقدار مشتق چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ باشند که در اینصورت گوییم f در x_0 مشتق ناپذیر است و دارای مماس موازی محور yها است و x_0 را نقطه مماس قائم تابع گوییم. و تابع اطراف x_0 به صورت زیر است.

$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=+\infty$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=-\infty$

نکته: نقاط گوشه بیشتر در نقاط مرزی توابع چند ضابطه‌ای و یا در ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق رخ می‌دهد.

نکته: ریشه‌های ساده زیر رادیکال با فرجه فرد نقاط مماس قائم تابع می‌باشند.

تست 8) تابع $f(x)=|x^3-x^2|$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

جواب: گزینه ۳

$x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x=0 ,\ x=1$

x		0		1	
x^2	+	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
x^3-x^2	−	0	−	0	+

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 ; & x\geq 1 \\ x^2-x^3 ; & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x ; & x>1 \\ 2x-3x^2 ; & x<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'_+(1)=1$ و $f'_-(1)=-1 \Rightarrow 1\notin D_{f'}$ و $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

توضیح: دام تست در گزینه ۳ می‌باشد. ممکن است تصور شود ۰ نیز ریشه داخل قدر مطلق است و به دلیل مضاعف بودن آن گوشه نمی‌باشد.

نکته: در حالت کلی تابع $f(x)=|(x-\alpha).(x-\beta)^{2n}.(x-\gamma)^{2n+1}|$ ($n\in\mathbb{N}$) فقط در $x=\alpha$ (ریشه ساده مرتبه اول داخل قدر مطلق) مشتق ناپذیر و زاویه دار است و در $x=\beta$ (ریشه مضاعف) و $x=\gamma$ (ریشه تکراری مرتبه فرد) مشتق پذیر است و مشتق برابر صفر دارد.

تست ۹) تابع $f(x)=\sqrt[3]{1-|x|}$ چند نقطه‌ی مشتق ناپذیر دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰

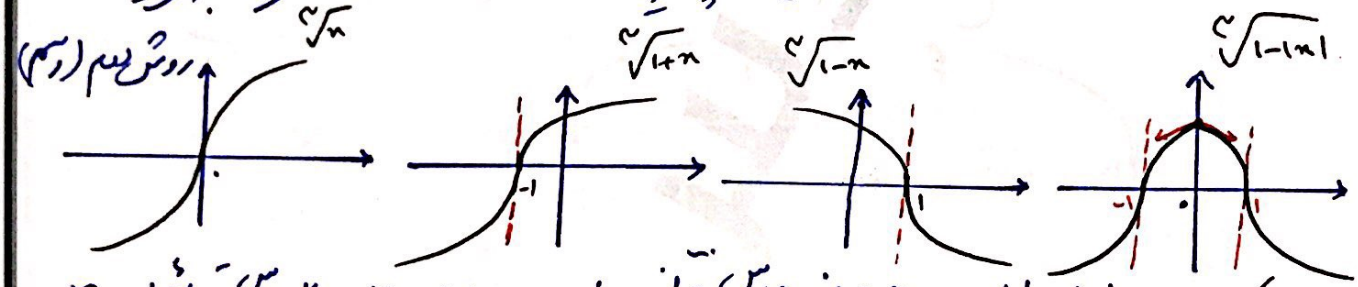
جواب: گزینه ۳

راه حل اول:

نقطه گوشه و مشتق ناپذیر ⇐ $x=0$ ریشه ساده داخل قدر مطلق

نقطه‌ها مماس قائم و مشتق ناپذیر ⇐ $x=\pm1$ ریشه‌های ساده زیر رادیکال فرجه فرد ⇐ $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$

روش دوم (رسم)



در شکل بالا در نقطه به طول $x_0=0$ دو نیم مماس مختلف دارد و در ±1 دارای ۲ مماس قائم است.

نکته: در حالت کلی f در x_0 مشتق پذیر است هرگاه، دارای یک مماس واحد آن هم غیر موازی محور yها باشد.

قضیه: اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد ⇐ f در x_0 پیوسته است.
عکس قضیه بالا برقرار نیست یعنی ممکن است f در x_0 پیوسته و مشتق ناپذیر باشد ⇐ پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است و کافی نیست.

نکته: اگر f در x_0 ناپیوسته باشد آنگاه حتماً در x_0 مشتق ناپذیر است.

نتیجه: برای تعیین نقاط مشتق ناپذیر f، ابتدا نقاط ناپیوسته را تعیین می‌کنیم سپس سراغ تعیین نقاط پیوسته و مشتق ناپذیر (گوشه، مماس قائم و ....) می‌رویم

تست ۱۰) کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x.[\sin x]$ در مبدأ مختصات صحیح است؟

۱) ناپیوسته و مشتق ناپذیر   ۲) پیوسته و مشتق چپ و راست ندارد

۳) مشتق چپ و راست نابرابر دارد   ۴) مشتق پذیر است

پاسخ: گزینه ۳

حل: $f(0)=0 \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x = 0 \Rightarrow$ f در صفر پیوسته و شرط لازم را دارد

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x.[\sin x]-0}{x-0}=[0^+]=0$$

f در صفر گوشه دارد
مشتق ناپذیر است

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x.[\sin x]-0}{x-0}=\lim [0^-]=-1$$

روش دوم: در همسایگی راست صفر $f=x[0^+]=0 \Rightarrow f'_+(0)=0$

در همسایگی چپ صفر $f=x[0^-]=-x \Rightarrow f'_-(0)=-1$

تست ۱۱) در تابع $f(x)=|x^2-1|.|x^2-4|.|x^2-9|$ حاصل $f'_-(1)$ کدام است؟

۱) ۴۲   ۲) -۴۲ ۳) -۴۸ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۳

حل: در همسایگی چپ عدد ۱ داخل هر سه قدر مطلق منفی است

$\Rightarrow$ در همسایگی چپ ۱ $f=\underbrace{(1-x^2)}_{\text{عامل صفرشونده}}(4-x^2)(9-x^2)$

$$\Rightarrow f'_-(1)=(1-x^2)'.(4-x^2)(9-x^2)\Big|_{x=1}$$

$$f'_-(1)=-2x(4-x^2)(9-x^2)\Big|_{x=1}=-2(3)(8)=\underline{-48}$$

تست 12) در تابع $f(x)=x.[\cos x]$ حاصل $f'_{+}(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

1) 0 2) -1 3) $-\infty$ 4) موجود نیست

پاسخ: گزینه 4

حل

شرط لازم برای مشتق راست، پیوستگی راست است

$f(\frac{\pi}{2})=0$: پیوستگی راست f در $\frac{\pi}{2}$ بررسی شود $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x[0^-]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} -x=-\frac{\pi}{2}$$

پس f در $\frac{\pi}{2}$ از راست ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

توضیح: دام های تست در گزینه های 2 و 3 موجود است.

اگر بدون بررسی پیوستگی راست، داخل براکت را تعیین مقدار کنیم در همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$ به $f(x)=-x$ می رسیم و مشتق آن را انتخاب می کنیم که غلط است

و اگر بدون بررسی پیوستگی راست از تعریف مشتق راست استفاده شود

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{x[\cos x]-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{x[0^-]}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{0^+}=-\infty$$

تست 13) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2[x-1]+2 & ; x<1 \\ x^3+bx & ; x\geq 1\end{cases}$ در دامنه‌ی خود مشتق پذیر باشد حاصل ab کدام است؟

1) 20 2) -20 3) -10 4) 10

پاسخ: گزینه 2

حل

اول: شرط پیوستگی

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)\Rightarrow 1+b=-a+2\Rightarrow \boxed{b=1-a}$$

دوم: برابری مشتق چپ و راست

$$f'_{-}(1)=f'_{+}(1)\Rightarrow -2ax\Big|_{x=1}=3x^2+b\Big|_{x=1}\Rightarrow -2a=b+3$$

$$\boxed{b=-2a-3}$$

$$\Rightarrow 1-a=-2a-3\Rightarrow a=-4 ,\ b=5\Rightarrow ab=\boxed{-20}$$

تست ۱۴) اگر داشته باشیم $f(x)=\begin{cases} x^2+x \ ; \ x\geq 1 \\ 2x^2-1 \ ; \ x<1 \end{cases}$ آنگاه حاصل $\lim_{n\to -\infty} n\left(f(1+\frac{1}{n})-f(1)\right)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) موجود نیست

پاسخ گزینه ۳

حل

$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ در $x=1$ پیوسته f ، $f'_+(1)=2x+1\Big|_{x=1}=3$

$f'_-(1)=4x\Big|_{x=1}=6$

$\lim_{n\to -\infty} n\left(f(1+\frac{1}{n})-f(1)\right)=\lim_{n\to -\infty}\dfrac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{\frac{1}{n}}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'_-(1)=6$

$\frac{1}{n}=\Delta x$

$n\to -\infty \quad \Delta x\to 0^-$

توضیح: دام تست در گزینه ۴ است. اگر به اشتباه تصور شود حد بالا بیانگر مشتق f در ۱ می‌باشد به دلیل اینکه $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ متفاوت است گزینه ۴ انتخاب می‌شود که غلط است.

نکته: از مماس شدن خط d بر منحنی f در نقطه x_0 می‌توان نتیجه گرفت که مقدار $f(x_0)$ با مقدار خط d در x_0 برابر است و مشتق f در x_0 نیز با شیب خط d برابر است.

تست ۱۵) اگر خط $d: y=2x+1$ در نقطه به طول $x_0=1$ بر منحنی $f(x)=a\sqrt{x}+\frac{b}{x}$ مماس باشد. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ گزینه ۲

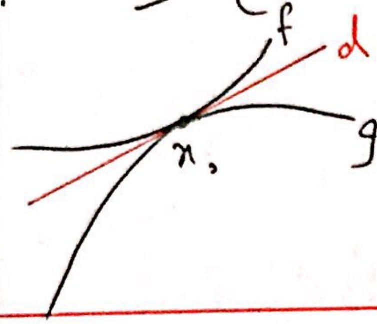
حل: $d: y=2x+1 \xRightarrow{x=1} y=3 \Rightarrow \begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix} \in d, f \Rightarrow f(1)=3 \Rightarrow a+b=3$ (۱)

$m_d=2 \Rightarrow f'(1)=2 \Rightarrow \dfrac{a}{2\sqrt{x}}-\dfrac{b}{x^2}\Big|_{x=1}=2 \Rightarrow \frac{a}{2}-b=2 \Rightarrow a=4+2b$ (۲)

(۱), (۲) $\Rightarrow 4+2b=3-b \Rightarrow 3b=-1 \Rightarrow b=-\frac{1}{3}$

نکته: اگر دو منحنی f و g در x_0 بر هم مماس باشند ۲ استفاده می‌کنیم

۱) مقدار دو تابع در x_0 برابر است   ۲) مشتق دو تابع نیز در x_0 برابر است



f و g در x_0 بر هم مماس $\Rightarrow$ (۱) $f(x_0)=g(x_0)$

(۲) $f'(x_0)=g'(x_0)=m_d$

مشتق تابع $y=f(u)$

اگر u تابعی برحسب x باشد، آنگاه مشتق تابع $f(u)$ برحسب x برابر است با:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=\frac{df(u)}{dx}=(f(u))'=u'\cdot f'(u)$$

نتیجه: در فرمول‌های مشتق اگر در تابع $f(x)$ به جای x، عبارتی برحسب x مثلاً u باشد آنگاه مشتق در u' ضرب می‌شود.

$$y=u^n \Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$$

u تابعی برحسب x $\Rightarrow$

$$y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y=\sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

مخصوص رشته ریاضی

$$\begin{cases} y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u \\ y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u \\ y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u) \\ y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u) \end{cases}$$

نکته:

$$y=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\cdot u'$$

مثال:

$$y=\frac{\overset{a}{3}\overset{u}{x^5}-\overset{b}{2}}{\underset{c}{4}\underset{u}{x^5}+\underset{d}{1}} \Rightarrow y'=\frac{3(1)-4(-2)}{(4x^5+1)^2}\cdot(x^5)'=\frac{55x^4}{(4x^5+1)^2}$$

تست ۱۶) اگر داشته باشیم $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(2-\Delta x)-f(2+\Delta x)}{4\Delta x} = \frac{1}{2}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ در $x_0=4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۴

حل:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(2\overset{m=-1}{-\Delta x})-f(2\overset{n=1}{+\Delta x})}{\underset{K=4}{4\Delta x}} = \frac{-1-1}{4} f'(2) = -\frac{1}{2} f'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(2) = -1$$

$$(f(\underbrace{\sqrt{x}}_{u}))' = (\sqrt{x})' \cdot f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) \Big|_{x=4} = \frac{1}{4} f'(2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

تست ۱۷) خط به معادله‌ی $y=2x+a$ بر منحنی تابع $f(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$d: y = 2x+a \Rightarrow m_d = 2 \Rightarrow f'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{0-4(4)(2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{-16}{(2x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{-16}{(2x+1)^3} = 2 \Rightarrow (2x+1)^3 = -8 \Rightarrow 2x+1 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$$ طول نقطه تماس

$$f(-\tfrac{3}{2}) = 1 \Rightarrow \left|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ 1\end{matrix}\right. \in f, d \Rightarrow 1 = 2(-\tfrac{3}{2}) + a \Rightarrow \boxed{a=4}$$

توضیح: در ابتدا چون شیب خط مماس ۲ می‌باشد، مشتق تابع را اگر مساوی برابر ۲ قرار می‌دهیم. نقطه در نقطه‌ای به طول $-\frac{3}{2}$ مشتق تابع f برابر است با ۲ در نتیجه خط d بر f در نقطه‌ای به طول $-\frac{3}{2}$ مماس می‌شود. از طرفی طول نقطه عبوری از f و خط d یک مقدار بوده که در نتیجه a به دست می‌آید.

تست 18) اگر داشته باشیم $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$ حاصل $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}$ کدام است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

1) 0 2) 1 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $-\pi$

حل: $f(1)=\sin\pi=0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$: پاسخ گزینه ۳

$f'(x)=(\underbrace{\sin}_{f}(\underbrace{\pi\sqrt{x}}_{u}))'=(\pi\sqrt{x})'\cos(\pi\sqrt{x})=\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cos(\pi\sqrt{x})\Rightarrow f'(1)=-\frac{\pi}{2}$

مشتق تابع مرکب: برای مشتق گیری تابع مرکب $(f\circ g)(x)$ مانند مشتق تابع $f(u)$ عمل می‌کنیم. یعنی $g(x)$ را u فرض کرده و مشتق u را در f' ضرب می‌کنیم.

$$(f\circ g)'(x)=(f(\underbrace{g(x)}_{u}))'=g'(x).f'(g(x))$$

$$(g\circ f)'(x)=(g(\underbrace{f(x)}_{u}))'=f'(x).g'(f(x))$$

تست 19) اگر داشته باشیم $f(x)=(x^2-x+1)^3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$، آنگاه مشتق تابع $f\circ g$ در نقطه به طول $x_0=0$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $-\frac{3}{2}$ 4) $-\frac{1}{2}$

حل: $(f\circ g)'(0)=g'(0).f'(g(0))=g'(0).f'(1)=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$ پاسخ گزینه ۲

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad f'(x)=3(x^2-x+1)^2.(2x-1)$

تست 20) خط $2y+x=0$ بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه به طول $x_0=1$ عمود شده است. درصورتیکه $g(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ حاصل مشتق تابع $(g\circ f)(x)$ در $x=1$ کدام است؟

1) $-\frac{1}{8}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{8}$

حل: $d: 2y+x=0 \xrightarrow{x=1} 2y=-1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\Rightarrow \left|\begin{matrix}1\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\in d, f\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{2}$ پاسخ گزینه ۴

$m_d=-\frac{1}{2}$ شیب عمود بر f $\Rightarrow$ شیب f $=2\Rightarrow f'(1)=2$

$(g\circ f)'(1)=f'(1).g'(f(1))=2g'(-\frac{1}{2})=2(\frac{1}{4})=\boxed{\frac{1}{2}}$

تست 21) در تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x+a}$ اگر داشته باشیم $(f\circ f)'(1)=4$ آنگاه a چه مقادیری می‌تواند باشد؟

1) ± 4 2) ± 2 3) $\pm\frac{1}{2}$ 4) $\pm\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه 3

حل: $f'(x)=\dfrac{a+1}{(x+a)^2} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{a+1}$ ، $f(1)=0$ ، $f'(0)=\dfrac{a+1}{a^2}$

$$(f\circ f)'(1)=f'(1).f'(f(1))=\frac{1}{a+1}\times\frac{a+1}{a^2}=\frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}=4 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a=\pm\frac{1}{2}}$$

تست 22) اگر تابع f در مبدأ مختصات پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(x)=\sqrt{1+f(x)}-x-1$ ، آنگاه شیب خط مماس بر f در مبدأ مختصات کدام است؟

1) -2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 2

پاسخ: گزینه 1

حل: $f(x)=\sqrt{1+f(x)}-x-1 \xRightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} f'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{1+f(x)}}-1$

$x=0$ در دو طرف قرار می‌دهیم: $f'(0)=\dfrac{f'(0)}{2\sqrt{1+f(0)}}-1 \Rightarrow f'(0)=\dfrac{f'(0)}{2}-1 \Rightarrow \frac{1}{2}f'(0)=-1 \Rightarrow f'(0)=-2$

شیب مماس بر f در مبدأ

تست 23) شیب خط عمود بر منحنی تابع $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ در نقطه‌ای به طول $x_0=4$ روی منحنی کدام است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

1) $-\frac{4}{\pi}$ 2) $\frac{4}{\pi}$ 3) $\frac{16}{\pi}$ 4) $-\frac{16}{\pi}$

پاسخ: گزینه 4

$$f(x)=\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{x}}_{u}\Big)^2 \Rightarrow f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)'$$

$$f'(x)=2\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

$$f'(4)=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{16}\right)\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{16}$$ شیب مماس $\Rightarrow$ شیب عمود $=-\dfrac{16}{\pi}$

تست 24) در تابع $f(x)=\sin x.\sin 2x.\sin 3x.\sin 4x$ حاصل $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟ (مخصوص رشته ریاضی)

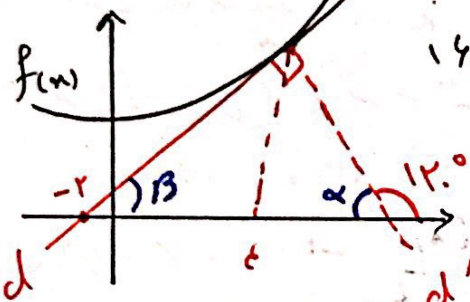
1) -2 2) $-\sqrt{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه 1

حل: $f(x)=\sin x.\sin 2x.\sin 3x.\underbrace{\sin 4x}_{\text{عامل صفرشونده}} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=(\sin 4x)'.\sin x.\sin 2x.\sin 3x|$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=4\cos 4x.\sin x.\sin 2x.\sin 3x\Big|_{\frac{\pi}{4}}=4\cos\pi\sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3\pi}{4}=4(-1)(\frac{\sqrt{2}}{2})(1)(\frac{\sqrt{2}}{2})=-2$$

تست 25) با توجه به شکل مقابل مشتق تابع $f^2(x^2)$ در نقطه‌ای به طول $x_0=2$ کدام است؟



1) 8 2) $8\sqrt{3}$ 3) $16\sqrt{3}$ 4) 16

پاسخ: گزینه 4

حل: $d'\perp d \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ , \beta=30^\circ$

$m_d=\tan\beta=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(4)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\begin{vmatrix}-2\\0\end{vmatrix}\in d , m_d=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d$ معادله: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \xRightarrow{x=4} y=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow f(4)=2\sqrt{3}$

$$(f^2(x^2))'=((\underbrace{f(x^2)}_{u})^2)'=2f(x^2).(f(\underbrace{x^2}_{u}))'=2f(x^2).(2x.f'(x^2))$$

$$x=2 \Rightarrow 8f(4).f'(4)=8(2\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{3})=16$$

«پایان»