میلاد منصوری

مدرس جبر،آنالیز،معادلات دیفرانسیل،... کنکور دکترا و ارشد
طراح آزمون های قلمچی و مدرس ریاضی رشته ی تجربی
مدرس رتبه های دورقمی

M.Mansouri

درسنامه توابع نمایی و لگاریتمی :

* تابع $y=a^x$ را تابع نمایی می‌گویند. دراین تابع دامنه x، برابر $\mathbb{R}$ است. دراین تابع همواره $a>0$ است. *

* درتابع نمایی وهمچنین تابع $\log_a x$ درصورتی که $0<a<1$ تابع نزولی است. درحالتی که $a>1$ تابع صعودی است. *

* خواص اصلی نماها : $a^x . a^y = a^{x+y}$ و $a^x \div a^y = a^{x-y}$ و $(a^x)^y = a^{xy}$ است.

درمسائل مختلف با قراردادن مقدارهای رادیکالی برای a می‌توان مسائل دشوار مطرح کرد. دقت داشته باشید که برای جمع ومنها فقط می‌توانیم فاکتورگیری کنیم : $a^x \mp a^y = a^x(1 \mp a^{y-x})$ *

مثال ها

مثال ۱) حدود a را بنحوی تعیین کنید تا تابع $f(x) = (2-3a)^x$ نزولی باشد.

$$0<2-3a<1 \xrightarrow{-2} -2<-3a<-1 \xrightarrow{\div(-3)} \frac{2}{3}>a>\frac{1}{3}$$

تقسیم برعدد منفی جهت نامساوی تغییر می‌کند

مهم * درحالت کلی تر تابع $f(x)=a^{mx+b}$ اگر $m>0$ باشد، ازلحاظ صعودی و نزولی بودن مانند a^x است. اگر $m<0$ باشد، دقیقاً برعکس است. * مهم

مثال ۲) حدود a را بنحوی تعیین کنید تا $f(x) = (1-2a)^{3-x}$ تابعی صعودی باشد.

چون شیب $3-x$ منفی است بنابراین قاعده برعکس می‌شود :

$$\text{صعودی } f(x) \longrightarrow 0<(1-2a)<1 \longrightarrow \frac{1}{2}>a>0$$

MATHEMATICS

میلاد منصوری

مدرس جبر،آنالیز،معادلات دیفرانسیل،... کنکور دکترا و ارشد
طراح آزمون های قلمچی و مدرس ریاضی رشته ی تجربی
مدرس رتبه های دورقمی

M.Mansouri

مثال ۳) حاصل $\sqrt[3]{16}\left(\frac{1}{32\sqrt{2}}\right)^{5} 8^{-3}$ را بدست آورید.

همه‌ی پایه‌ها را به ۲ تبدیل می‌کنیم:

$$(2^3)^{-3}\left(\frac{1}{2^{5/5}}\right)^{5}\left(2^{\frac{4}{3}}\right)=2^{-9}\left(\frac{1}{2^{27/5}}\right)\times 2^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2^{36/5}}\times 2^{\frac{4}{3}}=$$

$$2^{\frac{4}{3}-36/5}=2^{-\frac{211}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2^{211}}}$$

این مثال بیشتر به حوصله و دقت نیاز دارد.

* اعداد $\sqrt{3}-2$ و $2+\sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند. همچنین اعداد $1+\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}-1$ نیز معکوس هستند *

* اگر x و y دو عدد معکوس باشند، داریم: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=1$ *

* در اعدادی مانند $5+2\sqrt{6}$ یا $7+4\sqrt{3}$ باید از اتحاد اول کمک بگیریم:

$$7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \quad , \quad 5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

مثال ۴) حاصل $(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ است. مقدار A را بیابید (ریاضی خارج - ۹۳)

دقت کنید که $(2-\sqrt{3})$ و $(2+\sqrt{3})$ معکوس هستند. یعنی:

$$(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\sqrt[6]{2}=(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}(2+\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt[6]{2}$$

$$=(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}}\sqrt[6]{2}=(2+\sqrt{3})^{-\frac{1}{6}}\sqrt[6]{2}=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}\sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})2}=\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{\underbrace{(\sqrt{3}-1)^2}_{\text{اتحاد اول}}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$$

بنابراین: $A=\sqrt{3}-1$

میلاد منصوری

مدرس جبر،آنالیز،معادلات دیفرانسیل،... کنکور دکترا و ارشد
طراح آزمون های قلمچی و مدرس ریاضی رشته ی تجربی
مدرس رتبه های دورقمی

M.Mansouri

مثال ۵) حاصل $\frac{\cos x}{1+\log_x 5} + \frac{\cos x}{\log_5 x}$ را بدست آورید.

ابتدا دقت کنید که:

$$\log_x 5 \times \log_5 x = 1 \longrightarrow$$ $\log_x 5$ و $\log_5 x$ معکوس هستند

$$\frac{\cos x}{1+\log_x 5} + \frac{\cos x}{1+\log_5 x} = \cos x\left(\frac{1}{1+\log_x 5}+\frac{1}{1+\log_5 x}\right) = \cos x \times 1 = \cos x$$

مثال ۶) اگر $f(x) = ab^x - 1$ باشد. چنانچه نمودار $f(x)$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $B(1,11)$ بگذرد، $f(-1)$ را بیابید (تجربی داخل ـ ۹۳)

1) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \longrightarrow ab^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2}$

2) $f(1) = 11 \longrightarrow ab^1 - 1 = 11 \longrightarrow ab = 12$

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \\ ab = 12 \end{cases} \longrightarrow b=4,\ a=3 \longrightarrow f(x) = 3(4)^x - 1 \longrightarrow f(-1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

مثال ۷) از معادله‌ی $4^x + 2^{x+2} - 12 = 0$ مقدار x^2+1 را بیابید.

در حل معادلات این فصل معمولاً تغییر متغیر داریم:

$$4^x + 2^x \times 2^2 - 12 = 0 \xrightarrow[2^x = T > 0]{} T^2 + 4T - 12 = 0 \longrightarrow$$

$$(T+6)(T-2) = 0 \longrightarrow T = 2 \longrightarrow 2^x = 2 \longrightarrow x = 1$$

$$\longrightarrow x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

مثال ۸) اگر $2^x=3$ و $3^y=5$ و $5^z=16$ آن‌گاه xyz را بیابید.

در این مسائل بهتر است از پایه ای که به نحوی بیشتر در مسئله مطرح شده است کمک بگیریم. در این مثال ۲ و ۱۶ داریم. $2^4=16$ توانی از ۲ است. بنابراین به جای xyz ابتدا 2^{xyz} را حساب کنیم:

$$2^{xyz}=(2^x)^{yz}=(3^y)^z=5^z=16=2^4 \longrightarrow 2^{xyz}=2^4 \longrightarrow xyz=4$$

مثال ۹) اگر $2^{x+1}=18$ و $3^{-y}=2$ باشد آن‌گاه xy چند است؟ (المپیاد مقدماتی ۹۳)

$$2^{x+1}=18 \longrightarrow 2^x\times 2=18 \longrightarrow 2^x=9$$

$$3^{-y}=2 \longrightarrow 3^y=\frac{1}{2}$$

مانند مسئله قبل:

$$2^{xy}=(2^x)^y=9^y=3^{2y}=(3^y)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=2^{-2} \longrightarrow xy=-2$$

* برای حل معادله های توانی کافی است پایه ها را برابر کنیم. *

* برای حل نامعادله های توانی بعد از برابر کردن پایه ها باید چک کنید که پایه بین صفر و یک است (جهت نامساوی عوض شود) یا بزرگتر از یک است (جهت نامساوی ثابت بماند).

مثال ۱۰) نامعادله ی $(7+4\sqrt{3})^{3x} > (2-\sqrt{3})^{6-2x}$ را حل کنید.

همین اول کار داریم:

$$(7+4\sqrt{3})^{3x}=((2+\sqrt{3})^2)^{3x}=(2-\sqrt{3})^{-6x}$$

اتحاد اول

معکوس کردن پایه و قرینه شدن نما

میلاد منصوری

مدرس جبر،آنالیز،معادلات دیفرانسیل،... کنکور دکترا و ارشد

طراح آزمون های قلمچی و مدرس ریاضی رشته ی تجربی

مدرس رتبه های دورقمی

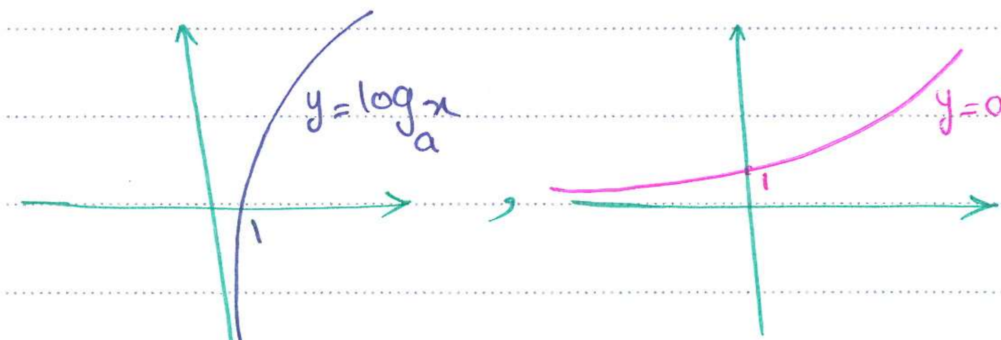
M.Mansouri

$$(2-\sqrt{3})^{6-2x} < (2-\sqrt{3})^{-6x} \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{0<\text{پایه}<1} 6-2x > -6x \longrightarrow 4x > -6$$

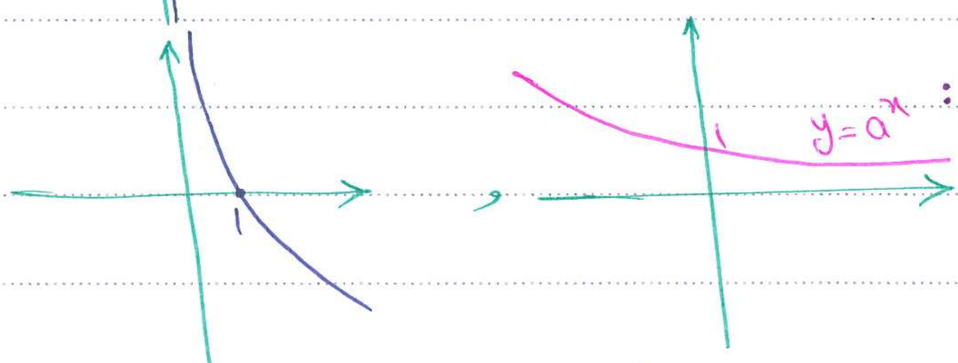
$$\longrightarrow x > -\frac{3}{2}$$

نمودارها :

* اگر $a>1$: صعودی

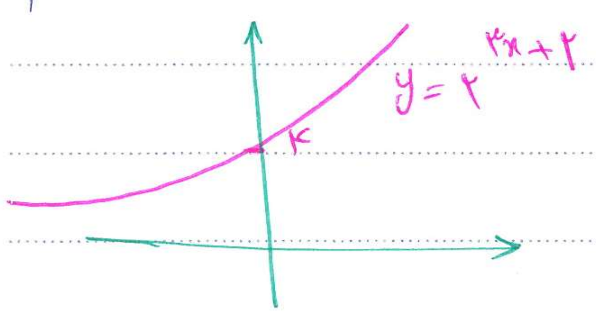


* اگر $0<a<1$: نزولی



مثال ۱۱) نمودار $y=2^{3x+2}$ را رسم کنید.

تابع صعودی است. درضمن $f(0)=4$. با همین دو اطلاعات نمودار قابل رسم است:



بنابراین برای رسم نمودارهای این فصل به $f(0)$ نیاز داریم و اینکه تابع صعودی است یا نزولی

میلاد منصوری

مدرس جبر، آنالیز، معادلات دیفرانسیل،... کنکور دکترا و ارشد
طراح آزمون های قلمچی و مدرس ریاضی رشته ی تجربی
مدرس رتبه های دورقمی

M.Mansouri

تابع $\log_a x$

* دامنه‌ی تابع $\log_a x$ سه شرط دارد: $a>0$ و $x>0$ و $a \neq 1$

* تابع $\log_a x$ از لحاظ صعودی - نزولی مانند a^x است. در واقع $\log_a x$ تابع وارون a^x است.

* حل معادله‌های $\log_a x$ با توجه به ویژگی زیر است:

$$\log_a b = c \longleftrightarrow a^c = b$$

* تابع $\log_a x$ دارای ویژگی‌های مهم زیر است:

۱) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$

۲) $\log_a a = 1$ ؛ $\log_a 1 = 0$

۳) if $ab = 1$ Then $\log_a b = -1$

۴) $\log_a x^m y^n = m\log_a x + n\log_a y$ (دوطرفه)

۵) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

۶) $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$ دو قرارداد مهم

۷) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

۸) $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

مثال ۱۲) حاصل $\log_{\sqrt{4}} 1$ و $\log \frac{x^3 y^4}{z^5}$ و $\log_{x^7} x^3\sqrt{x}$ را بدست آورید.

1) $\log_{x^7} x^3\sqrt{x} = \log_{x^7} x^{3.5} = \frac{3.5}{7}\log_x x = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

۲) $\log \dfrac{x^3 y^4}{z^5} = 3\log x + 4\log y - 5\log z$ ۳) $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

مثال ۱۳) از معادله‌ی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه‌ی ۸ را بیابید (تجربی داخل ۹۵)

$$\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = \log_3\left(\frac{2x^2+1}{x+2}\right) = 1 \longrightarrow$$

$$\frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1 \longrightarrow 2x^2+1 = 3x+6 \longrightarrow 2x^2-3x-5=0$$

$$\longrightarrow x=-1 \ , \ x=\frac{5}{2}$$

حال $\log_8(2x-1)$ را حساب می‌کنیم:

$x=-1 \longrightarrow \log_8(2x-1) = \log_8(-3)$ غ ق ق

$$x=\frac{5}{2} \longrightarrow \log_8(2x-1) = \log_8(4) = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\log_2 2 = \frac{2}{3}$$

مثال ۱۵) اگر $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2+y^2=46$ باشد، لگاریتم $x+y$ در پایه‌ی ۴ بیابید (تجربی داخل ـ ۸۹)

1) $\log_3 x + \log_3 y = 2 \longrightarrow \log_3 xy = 2 \longrightarrow xy = 3^2 = 9$

2) $x^2+y^2=46 \xrightarrow{+2xy} x^2+y^2+2xy = 46+18 = 64 \longrightarrow (x+y)^2 = 64$

$\longrightarrow (x+y) = 8$ یا -8

if $x+y=-8 \longrightarrow \log_4(x+y)=\log_4(-8)$ غ ق ق

if $x+y=8 \longrightarrow \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}$

مثال ۱۳) اگر $\log 8 = k$ آن‌گاه حاصل $\log\frac{25}{4} + 2\log 2$ را بیابید.

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = k \longrightarrow \log 2 = \frac{k}{3}$$

حال دقت کنید که:

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1-\frac{k}{3}$$

بنابراین:

$$\log\frac{25}{4}+2\log 2 = 2\log 5 - 2\log 2 + 2\log 2 = 2\log 5 = 2\left(1-\frac{k}{3}\right) = 2-\frac{2k}{3}$$

مثال ۱۴) معادله‌ی $\log_x 9 + \log_3\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ را حل کنید.

اول ساده کردن:

$$\log_x 9 = \log_x 3^2 = 2\log_x 3$$

$$\log_3\sqrt{x} = \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 x$$

حال داریم:

$$2\log_x 3 + \frac{1}{2}\log_3 x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\log_x 3 = T} 2T+\frac{1}{2T} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{4T^2+1}{2T}=\frac{3}{2}$$

$\frac{4T^2+1}{T}=3 \longrightarrow 4T^2+1=3T \longrightarrow 4T^2-3T+1=0 \longrightarrow \Delta<0$

معادله جواب ندارد.

* هرگاه $\log_a x$ و $\log_x a$ در یک معادله آمدند باید $\log_a x = T$ بگیریم. *

مثال ۱۵) دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{x}} \frac{x^2-1}{6x+1}$ را بیابید.

سه تا محدودیت داریم:

$1)\ \frac{1}{x}>0 \longrightarrow x>0 \qquad 2)\ \frac{1}{x}\neq 1 \longrightarrow x\neq 1$

بنابراین تا اینجا $1\neq x>0$. در ادامه داریم:

$3)\ \frac{x^2-1}{6x+1}>0 \xrightarrow[\text{پس } 6x+1>0]{x>0} x^2-1>0 \xrightarrow{x>0}$

	-1		1	
$+$		$-$		$+$

بنابراین دامنه‌ی این تابع $(1,\infty)$ است.

مثال ۱۶) نامعادله‌ی $\log_{\sqrt{2}-1}(3-2x) < \log_{\sqrt{2}-1}(4x+1)$ را حل کنید.

اولاً دامنه داریم (مهم است. فراموش نکنید)

$3-2x>0 \longrightarrow x<\frac{3}{2}$

$4x+1>0 \longrightarrow x>-\frac{1}{4}$

حال چون $1>\sqrt{2}-1>0$ پس جهت نامساوی عوض می‌شود:

$3-2x>4x+1 \longrightarrow 2>6x \longrightarrow x<\frac{1}{3}$

با توجه به دامنه داریم: $(-\frac{1}{4},\frac{1}{3})$

پایدار و سرافراز باشید