

معادله مکان زمان و نمودار مکان زمان در حرکت شتابدار

تهیه و تنظیم: ژیلارضایی - شهرستان رودبار زیتون

۱- اگر جسمی که با شتاب ثابت a و در امتداد محور x حرکت می کند، در $t=0$ در مکان x_0 و دارای سرعت v_0 باشد در این حالت مکان متحرک در هر لحظه را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \text{معادله مکان - زمان}$$

۲- در این رابطه **دو برابر ضریب t^2 برابر با شتاب حرکت**، ضریب t همان **سرعت اولیه متحرک** می باشد.

۳- می توان با توجه به رابطه بالا جابجایی متحرک را بصورت مقابل بدست آورد.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

۴- در حرکت شتاب دار، مکان متحرک **تابع درجه دوم** از زمان است.

۵- نمودار مکان زمان حرکت شتاب دار به علت تابع درجه بودن مکان نسبت به زمان، **یک سهمی** می باشد.

۶- اگر **سهمی رو به بالا باشد**، شتاب حرکت **مثبت** و اگر رو به پایین باشد شتاب حرکت منفی است.

۷- شیب اولیه حرکت برابر با **سرعت اولیه متحرک** است.

۸- محل برخورد سهمی با محور افق، نمایش لحظه هایی است که متحرک در **مبدأ مکان** حضور دارد.

۹- نقاط عطف لحظه هایی را نشان می دهد که **جهت شتاب متحرک عوض** می شود.

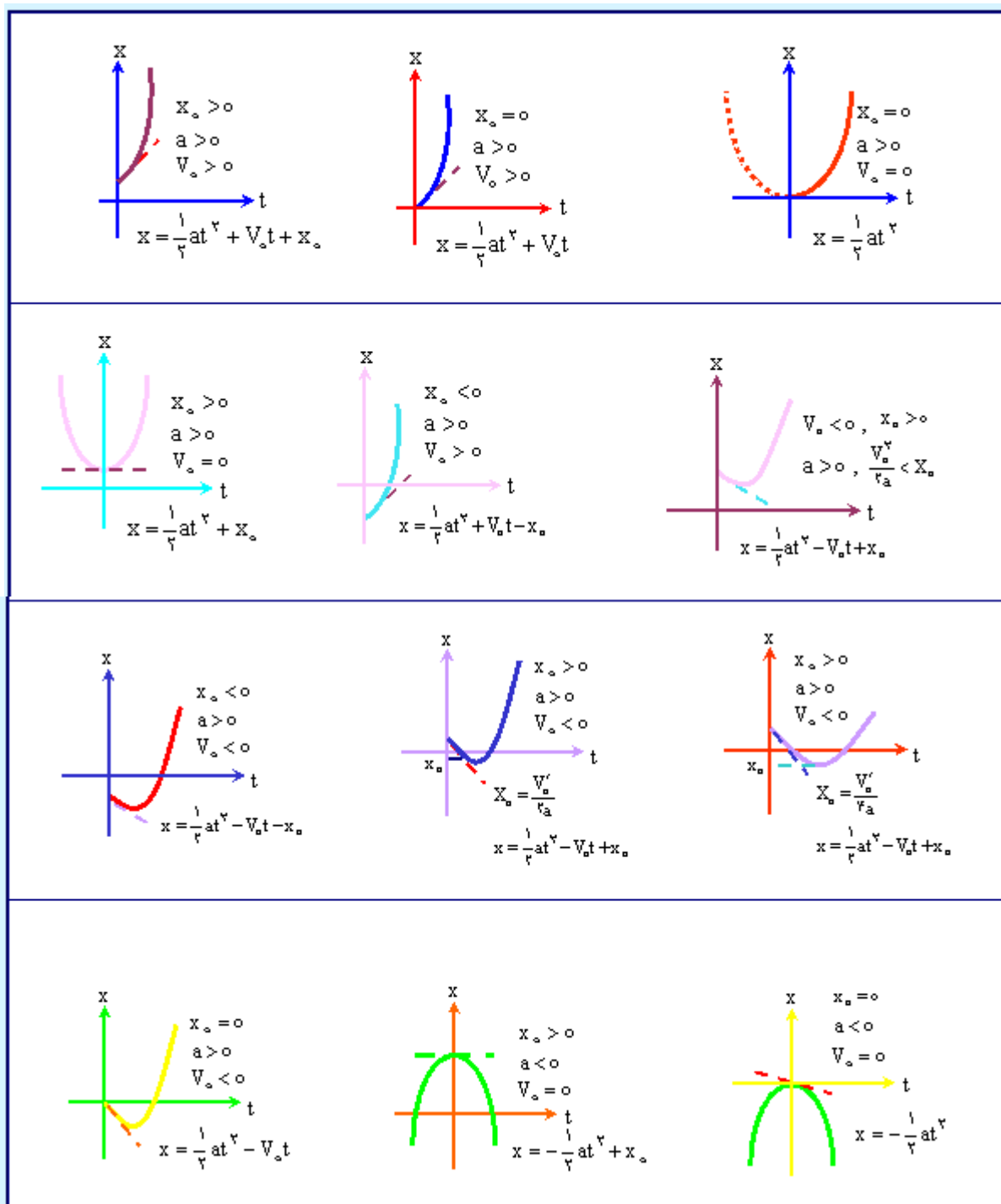
۱۰- قسمتهای صعودی تابع، **سرعت مثبت** است و متحرک در **جهت مثبت** حرکت میکند و قسمتهای نزولی

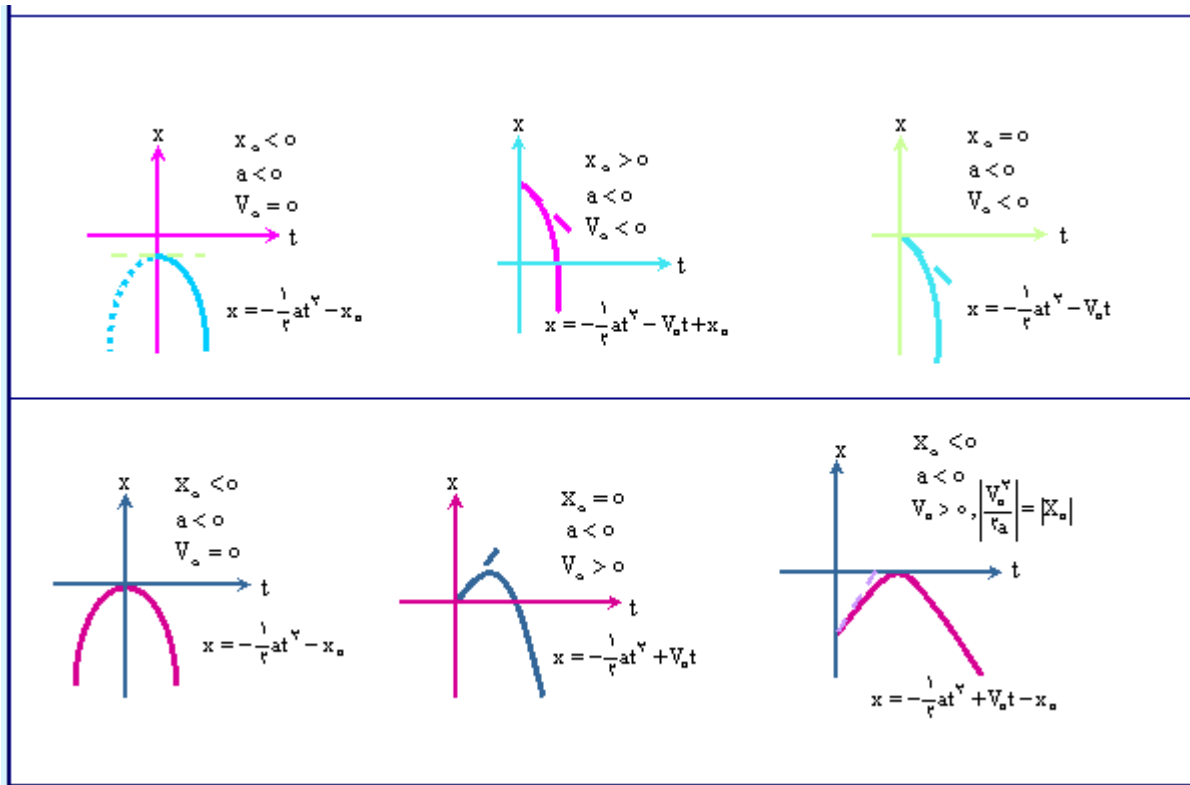
تابع، **سرعت منفی** است و متحرک در **جهت منفی** حرکت می کند.

۱۱- محل برخورد منحنی با محور قائم، **مکان اولیه حرکت** را نشان می دهد.

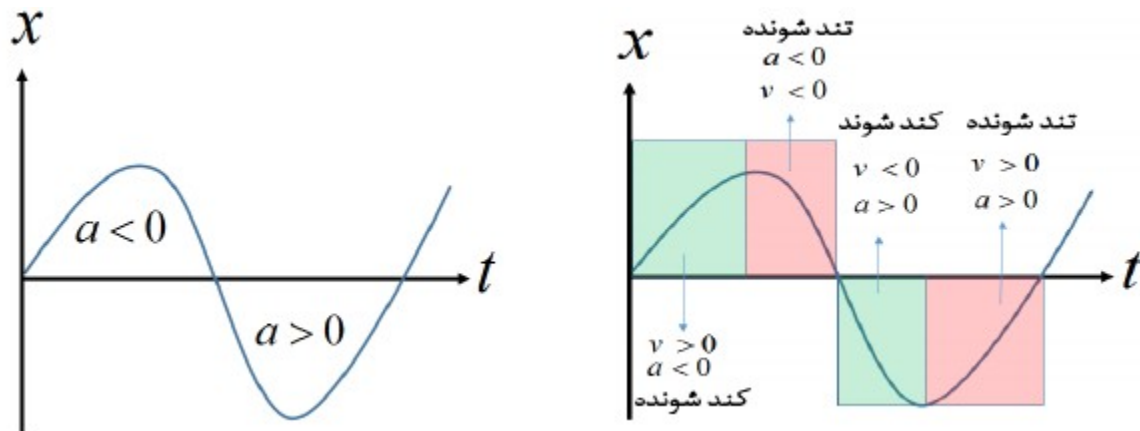
۱۲- نمودار مکان زمان در حرکت با شتاب ثابت با توجه به علامت های شتاب مکان اولیه و سرعت اولیه

می تواند به صورت یکی از نمودارهای زیر باشد.





۱۳- در شکل زیر جمع بندی نمودارهای بالا آورده شده است.



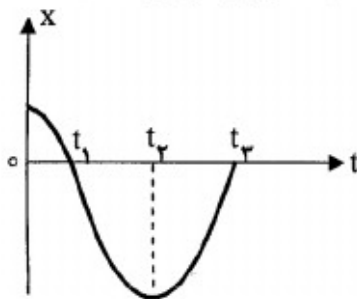
۱۴- در لحظه‌هایی که نمودارهای مکان زمان دو متحرک یکدیگر را قطع میکنند، دو متحرک به یکدیگر

رسیده‌اند و در یک مکان قرار دارند.

۱۵- در نمودار مکان زمان مربوط به یک متحرک به ازای هر t باید یک مقدار برای x وجود داشته باشد.

سؤال امتحان نهایی:

با توجه به نمودار مکان - زمان زیر که مربوط به حرکت یک جسم روی خط راست است، به سئوالات زیر پاسخ کوتاه دهید:



الف) در کدام لحظه جسم تغییر جهت می دهد؟ (۹۰/۴/۲)

ب) یک لحظه را مشخص کنید که جسم از مبدأ مکان می گذرد؟

پ) در کدام لحظه جسم بیشترین فاصله را از مبدأ دارد؟

ت) یک بازه ی زمانی را تعیین کنید که جسم در جهت محور x ها حرکت کند؟

ث) در کدام بازه ی زمانی شتاب منفی است؟

ج) در کدام بازه ی زمانی حرکت کند شونده است؟

پاسخ:

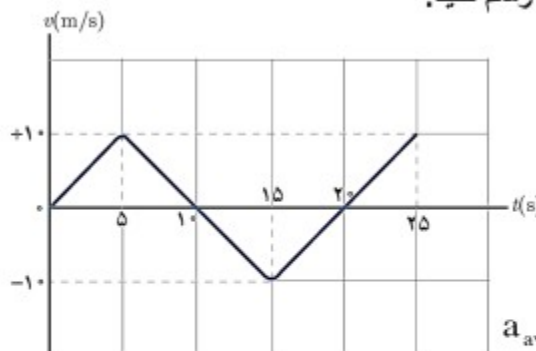
الف) t_2 ب) t_1 یا t_3 پ) t_2 ت) $(t_3 - t_2)$ ث) $(t_1 - 0)$ ج) $(t_2 - t_1)$

سؤال ۵ تمرینهای فصل کتاب

۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است.

الف) نمودار شتاب - زمان این متحرک را رسم کنید.

ب) اگر $x_0 = -10\text{ m}$ باشد نمودار مکان - زمان متحرک را رسم کنید.



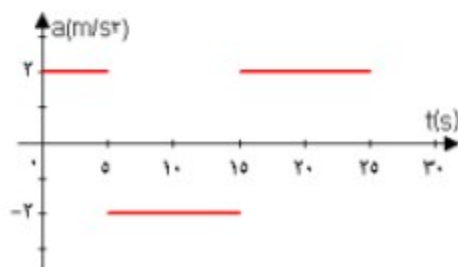
جواب:

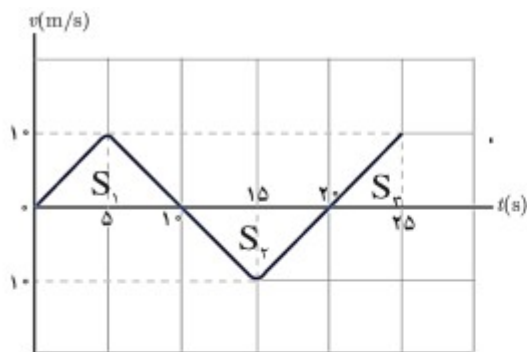
الف) ابتدا باید شتاب را در هر بازه زمانی بدست آوریم:

$$a_{\text{avg}(0-5\text{s})} = \frac{10-0}{5-0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\text{avg}(5-15\text{s})} = \frac{-10-10}{15-5} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\text{avg}(15-25\text{s})} = \frac{10-(-10)}{25-15} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$





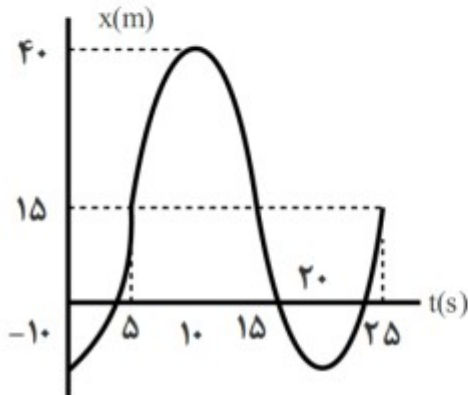
جواب:

(ب)

$$S_1 = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}$$

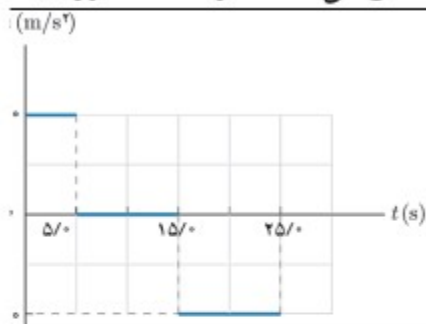
$$S_2 = \frac{10 \times 10}{2} = 50 \text{ m}$$

$$S_3 = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ m}$$



تمرین ۱-۱۱ صفحه ۲۱ کتاب درسی قسمت الف

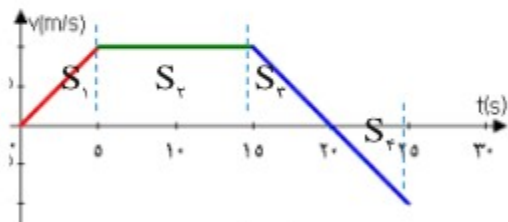
تمرین ۱-۱۱: شکل مقابل نمودار شتاب - زمان یک ماشین اسباب بازی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x



حرکت می‌کند. با فرض $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$ در بازه زمانی صفر تا 25 s ،
الف) نمودارهای سرعت - زمان و مکان - زمان این ماشین را رسم کنید.

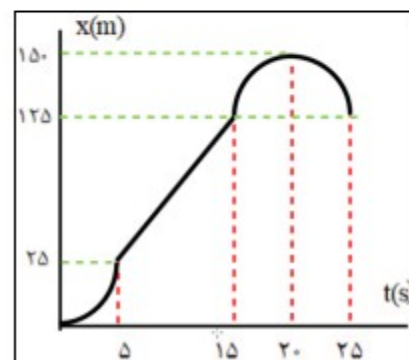
جواب:

الف) با توجه به مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، مکان جسم را در نقاط مختلف بدست می‌آوریم:



$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \text{ m}$$

$$S_4 = 10 \times 10 = 100 \text{ m}$$



سؤال امتحان نهایی رشته تجربی دیماه ۹۷

معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = -2t + 1$ است. جابجایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 3s$ چند متر است؟

پاسخ:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \Delta x = \frac{1}{2}(-2)t^2 + t = -t^2 + t \quad \Delta x = -9 + 3 - 0 = -6m$$

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

ص. ۱۷ (۰/۲۵)

سؤال امتحان نهایی رشته تجربی خرداد ۹۸

سرعت متوسط خودرویی که از حال سکون با شتاب $1/5 \text{ m/s}^2$ در امتداد محور X به حرکت در می آید در ۴s اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \Delta x = \frac{1}{2} \times (1/5) \times (4)^2 + 0 \quad \Delta x = 12m$$

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{12}{4} = 3m/s$$

$$v_{av} = 3m/s$$

ص. ۱۷

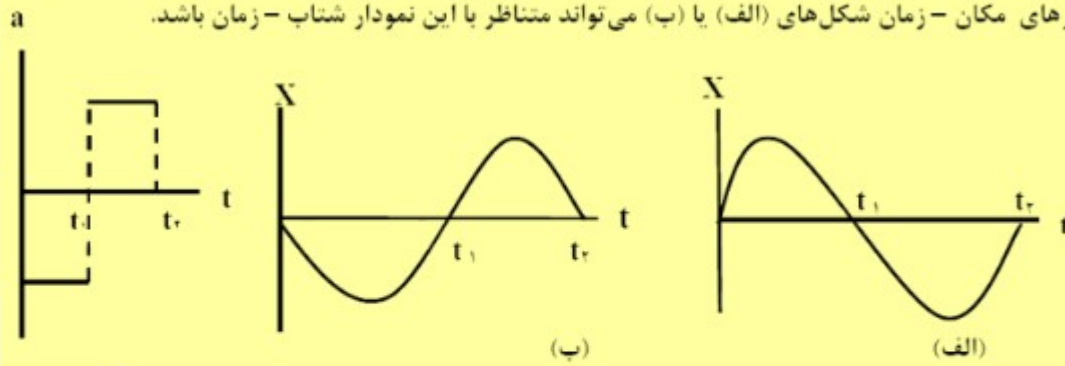
(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

سؤال امتحان نهایی رشته تجربی خرداد ۹۸

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در امتداد محور X حرکت می کند مطابق شکل زیر است. توضیح دهید کدام یک از نمودارهای مکان - زمان شکل های (الف) یا (ب) می تواند متناظر با این نمودار شتاب - زمان باشد.



پاسخ: در نمودار مکان - زمان، جهت تغير باید در بازه صفر تا t_1 رو به پایین و در بازه زمانی t_1 تا t_2 جهت تغير رو به بالا

ص. ۲۱

باشد (۰/۲۵). نمودار (الف) (۰/۲۵)

سؤال امتحان نهایی رشته ریاضی خرداد ۹۸

معادله حرکت جسمی که روی خط راست حرکت می کند، در SI به صورت $x = 6t^2 - 5t - 10$ است. الف) سرعت اولیه جسم را تعیین کنید. ب) سرعت متوسط جسم را بین دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 2$ حساب کنید.

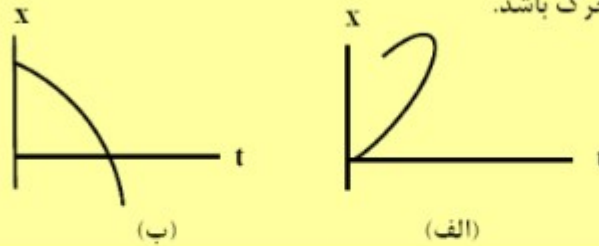
پاسخ: الف) $v_0 = -5 \text{ m/s}$ (۰/۲۵) ب) $x_2 = (6 \times 4) - (5 \times 2) - 10 = 4 \text{ m}$ (۰/۲۵)

$x_1 = -10 \text{ m}$ (۰/۲۵) $v_{av} = \frac{4 - (-10)}{2} = 7 \text{ m/s}$ (۰/۲۵)

$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (۰/۲۵)

سؤال امتحان نهایی رشته تجربی - شهریور ۹۸

با توجه به شکل روبه‌رو توضیح دهید کدامیک از نمودارهای مکان-زمان (الف) یا (ب) می‌تواند نشان دهنده نمودار مکان-زمان یک متحرک باشد.



پاسخ: نمودار (ب)، (۰/۲۵) در برخی نقاط شکل (الف)، متحرک در یک لحظه در دو مکان است که این ممکن نیست. (۰/۲۵) ص ۲۳

سؤال امتحان نهایی رشته ریاضی - شهریور ۹۸

معادله مکان زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^2 - 3t - 8$ است. الف) اندازه سرعت متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2$ چند متر بر ثانیه است؟ ب) شتاب حرکت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

پاسخ: الف) $x_2 = -6 \text{ m}$ (۰/۲۵) $x_1 = -8 \text{ m}$ (۰/۲۵)

$v_{av} = \frac{-6 - (-8)}{2 - 0} = 1 \text{ m/s}$ (۰/۲۵) $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (۰/۲۵)

$x = 2t^2 - 3t - 8$ $a = 4 \text{ m/s}^2$ (۰/۲۵) $\frac{1}{2}a = 2$ (۰/۲۵)

ص ۱۷ و ۵

معادله مکان-زمان متحرکی در حرکت بر روی خط راست در SI، بصورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. الف) جابجایی این متحرک در بازه زمانی صفر تا ۲ ثانیه، چند متر است؟ ب) معادله سرعت-زمان این متحرک را بنویسید.

الف) ۱۷. ص: $\Delta x = x_2 - x_1 = (4 - 8 + 3) - 3 = -4 \text{ m}$ (۰/۲۵)

ب) ۱۷. ص: $v = 2t - 4$ (۰/۲۵)

۱/۲ a = ۱ a = ۲ m/s² (۰/۲۵) v = at + v₀ (۰/۲۵) v = 2t - 4 (۰/۲۵)

تست:

معادله مکان-زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 4t^2 - 16t + 12$ است. سرعت متوسط ذره از $t_1 = 2 \text{ s}$ تا لحظه‌ای که متحرک برای دومین بار از مبدأ مکان می‌گذرد، چند متر بر ثانیه است؟

۴ (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

- پاسخ: گزینه ۳

$$x = 4t^2 - 16t + 12 \Rightarrow x = 4t(t - 4 + 3) = 0 \Rightarrow 4t(t - 3)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ s} \quad \times \\ t = 1 \text{ s} \\ t = 3 \text{ s} \end{cases}$$

برای دومین بار در لحظه $t = 3 \text{ s}$ ، ذره از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور می‌کند.

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 4(2)^2 - 16(2) + 12 = -8 \text{ m}$$

$$t_2 = 3 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - (-8)}{3 - 2} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

تست:

معادله مکان-زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 3t^2 - 30t + 12$ است. در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 10 \text{ s}$ ، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

صفر (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۷/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

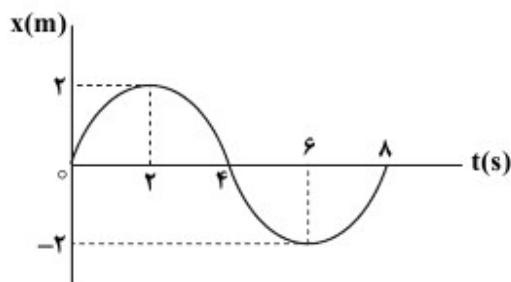
مسافت طی شده روی خط راست، برابر مجموع بزرگی جابجایی‌های متحرک قبل و بعد از تغییر جهت است.

$$x = 3t^2 - 30t + 12 \xrightarrow{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0} a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0 = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}}, x_0 = 12 \text{ m}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 6t - 30 \xrightarrow{v=0} t = 5 \text{ s}$$

تست:

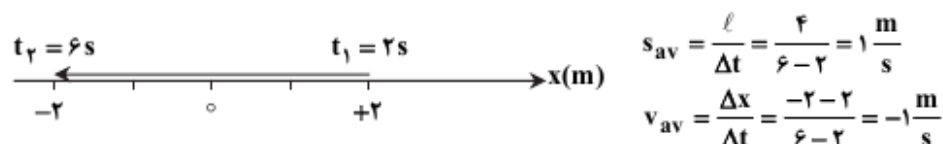
نمودار مکان- زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت سینوسی و مطابق شکل است. در بازه زمانی $2s \leq t \leq 6s$ تندی متوسط، سرعت متوسط و شتاب متوسط به ترتیب از راست به چپ بر حسب یکاهای SI کدام‌اند؟



- (۱) ۱، -۱، -۱
- (۲) صفر، -۱، ۱
- (۳) صفر، -۱، ۱
- (۴) صفر، ۱، -۱

پاسخ: گزینه ۳

در حرکت بر خط راست، تصویر نمودار مکان- زمان بر روی محور مکان، معرف مسیر حرکت است. با توجه به نمودار مکان- زمان، مسیر حرکت ذره در بازه $2s \leq t \leq 6s$ مطابق شکل است.



شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان معرف سرعت لحظه‌ای است. در لحظه‌های ۲s و ۶s، شیب خط مماس بر نمودار صفر است، بنابراین داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-0}{6-4} = 0$$

تست:

- معادله حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^3 - 4t^2 + 9$ است. سرعت متوسط متحرک در ثانیه سوم حرکت (بازه زمانی ۲s تا ۳s) چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) -۱
- (۲) -۲
- (۳) ۱
- (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3^3 - 4(3)^2 + 9) - (2^3 - 4(2)^2 + 9)}{3-2} = -1 \frac{m}{s}$$

تست:

نمودارهای زیر مربوط به حرکت بر خط راست است. در کدام نمودار اندازه سرعت متحرک در حال افزایش، شتاب آن منفی و در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است؟



پاسخ: گزینه ۳

دو لحظه t_1 و t_2 ($t_2 > t_1$) را انتخاب می‌کنیم:

* چون $x_2 < x_1$ است متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

* چون شیب نمودار در این دو لحظه (و ضمناً در تمام لحظات) به طرف پایین است، سرعت

لحظه‌ای متحرک منفی است. خط مماس در لحظه t_2 شیب بیشتری از خط مماس در لحظه

t_1 دارد؛ بنابراین اندازه سرعت متحرک رو به افزایش است. با توجه به شتاب متوسط

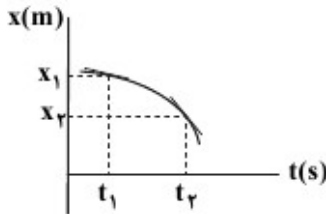
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

و $\Delta v < 0$ پس $|v_2| > |v_1|$ است؛

از این رو شتاب متوسط منفی است. حال اگر Δt را نیز بسیار کوچک انتخاب نماییم، با

همین استدلال، شتاب لحظه‌ای نیز منفی است.

نکته: در نمودار $(x-t)$ اگر تقعر نمودار به سمت پایین باشد، شتاب منفی و اگر تقعر به سمت بالا باشد، شتاب مثبت است.



تست:

معادله مکان- زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -5t^2 + 30t + 20$ است. مسافتی که این ذره در بازه زمانی ۱s تا ۴s طی می‌کند، چند متر است؟

۴۰ (۴)

۲۵ (۳)

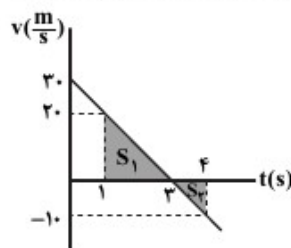
۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} x = -5t^2 + 30t + 20 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -5 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 30 \frac{m}{s} \\ x_0 = 20 m \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -10t + 30$$



نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم:

مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان با رعایت علامت، برابر جابه‌جایی و مجموع تمام مساحت‌ها با

علامت مثبت، برابر مسافت طی شده است.

$$\Delta x = S_1 - S_2 = \left(\frac{3 \times 30}{2}\right) + \left(\frac{-10 \times 1}{2}\right) = 15 m \Rightarrow \Delta x = 15 m$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{3 \times 30}{2} + \frac{10 \times 1}{2} = 25 m$$

تست:

نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت سهمی و مطابق شکل

است. از لحظه شروع حرکت ($t = 0$) تا زمانی که متحرک از مبدأ ($x = 0$) عبور کند، چند متر

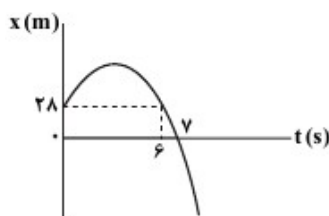
مسافت توسط متحرک طی می‌شود؟

۲۰۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

۷۲ (۴)

۱۴۴ (۳)



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{x(v_s)=0} 0 = \frac{49}{2}a + 7v_0 + 28 \Rightarrow 3/\Delta a + v_0 = -4$$

طبق تقارن سهمی، در $t = \frac{0+6}{2} = 3s$ (رأس سهمی)، سرعت صفر است.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 3a + v_0 \Rightarrow \begin{cases} 3a + v_0 = 0 \\ 3/\Delta a + v_0 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \frac{m}{s^2} \\ v_0 = +\frac{4}{3} \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$x(3s) = \frac{1}{2} \times (-\frac{4}{3}) \times 3^2 + 3 \times \frac{4}{3} + 28 = -36 + 12 + 28 = 4m$$

$$l = |\Delta x_{(0,3s)}| + |\Delta x_{(3s,vs)}| = (64 - 28) + |0 - 4| = 36 + 4 = 40m$$

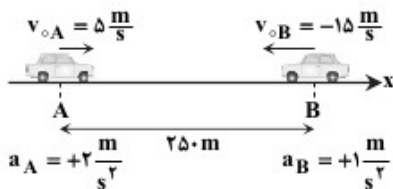
تست:

دو اتومبیل A و B به ترتیب با تندیهای $50 \frac{m}{s}$ و $15 \frac{m}{s}$ در سوی مخالف هم، بر روی خط راست به یکدیگر نزدیک می‌شوند. وقتی فاصله دو اتومبیل به ۲۵۰ متر می‌رسد، اتومبیل A با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ سرعت خود را افزایش و اتومبیل B با شتاب $1 \frac{m}{s^2}$ سرعت خود را کاهش می‌دهد. دو اتومبیل پس از چه مدتی از لحظه‌ای که فاصله آن‌ها ۲۵۰ متر بوده است، به یکدیگر می‌رسند؟

۱۵s (۴)
۱۲s (۳)
۱۰s (۲)
۵s (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل ابتدا علامت‌های سرعت اولیه و شتاب دو جسم را با توجه به محور انتخابی تعیین می‌کنیم. وقتی دو اتومبیل به هم می‌رسند، داریم:

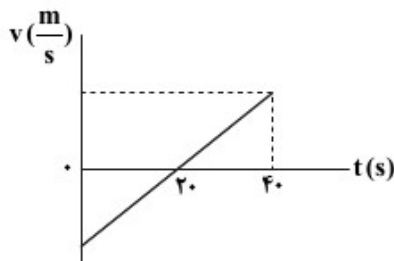


$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x_A &= x_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2t^2 + 50t = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 - 15t + 250$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2 + 20t - 250 = 0 \Rightarrow t^2 + 40t - 500 = 0 \Rightarrow (t + 50)(t - 10) = 0$$

$$\Rightarrow t = 10s$$

تست:



۱. نمودار سرعت-زمان متحرکی که از مکان $x = 0$ روی خط راست به حرکت درمی‌آید، مطابق شکل است. اگر متحرک در $t = 10s$ از نقطه $x = -300m$ عبور کند، در مدت $t = 40s$ ، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) چند متر است؟

- ۴۰۰ (۲)
۶۰۰ (۱)
۱۲۰۰ (۴)
۸۰۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

متحرک در مدت $t = 0$ تا $t = 40$ s یک حرکت با شتاب ثابت دارد. با توجه به تقارن نمودار سرعت- زمان در این ۴۰ ثانیه می توان گفت که در $t = 20$ s جهت حرکت (علامت سرعت) عوض می شود. پس بیشترین فاصله متحرک از نقطه شروع در $t = 20$ s است.

برای بازه $t = 0$ تا $t = 10$ s:

$$S_T = |\Delta x| = 300 \text{ m}$$

با توجه به تشابه مثلث ها، می توان نوشت:

$$\frac{S_1}{S_1 + S_T} = \left(\frac{10}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_1 + 300} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_1 = 100 \Rightarrow |\Delta x_{(0,20)}| = S_1 + S_T = 400 \Rightarrow |x(20) - x(0)| = 400 \text{ m}$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} v &= at + v_0 \text{ و } v(20) = 0 \Rightarrow 20a + v_0 = 0 \\ \Delta x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow -300 = 50a + 10v_0 \Rightarrow 5a + v_0 = -30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ و } v_0 = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(20) - x(0) = \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 + 20 \times (-40) = -400 \text{ m} \Rightarrow |x(20) - x(0)| = 400 \text{ m}$$

تست:

نمودار سرعت- زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می کند، مطابق شکل است. در کدام یک

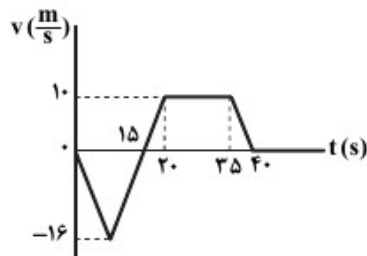
از زمان های زیر، فاصله متحرک از نقطه شروع حرکت ($x = x_0$) بیشتر است؟

(۱) $t = 7$ s

(۲) $t = 20$ s

(۳) $t = 15$ s

(۴) $t = 40$ s



پاسخ: گزینه ۳

در $t = 15$ s جهت حرکت متحرک عوض می شود و در $t = 40$ s متحرک متوقف می شود، پس جواب $t = 15$ s یا

$t = 40$ s است. (البته مکان متحرک در زمان های بعد از $t = 40$ s هم، مساوی $x_{t=40}$ است.)

جابه جایی برابر است با مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان.

$$x(15) - x(0) = -S_1 = \frac{-15 \times 16}{2} = -120 \text{ m}$$

$$x(40) - x(0) = -S_1 + S_T = \frac{-15 \times 16}{2} + \frac{25 + 15}{2} \times 10 = -120 + 200 = 80 \text{ m}$$

