



الگو و دنباله

دنباله: تعدادی عدد که پشت سر هم قرار گرفته اند را دنباله می نامیم و به این اعداد، جملات دنباله می گوئیم

الگو: تعدادی شکل و یا عدد که با قانون مشخصی پشت سر هم قرار گرفته اند را الگو می نامیم

به این قانون، جمله ی عمومی (ضابطه) الگو می گوئیم و معمولاً آن را با a_n (شاید هم b_n یا t_n) نمایش می دهیم. به عنوان مثال جمله ی

پانزدهم یک الگو را با a_{15} نشان می دهیم

هنگامی که الگویی از شکل ها داریم و می خواهیم جمله ی عمومی آن را بنویسیم، بهترین کار کشیدن یک جدول برای نشان دادن تغییرات

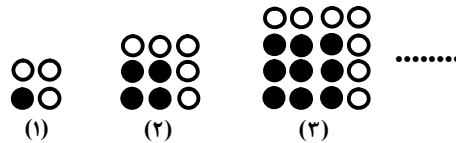
در هر مرحله است. در این جدول باید حواسمان به قسمت های مشترک در

همه ی شکل ها و میزان افزایش در مراحل بعد باشد

مثال ۱: در شکل زیر اگر a_n الگوی تعداد دایره های رنگی و

b_n الگوی دایره های غیر رنگی باشد، در مرحله ی دهم چند دایره ی

رنگی و چند دایره ی غیر رنگی داریم؟



پاسخ: من توابع اینجهر برای خردم من توضیح بدیم که دایره های رنگی مربع کامل

صحن و شماره n جمله به توان دوم (n^2) . تعداد دایره های رنگی رو تغییر می کند

و تعداد دایره های سفید اعدادی فرد هستند $(2n+1)$ مثل جدول زیر:

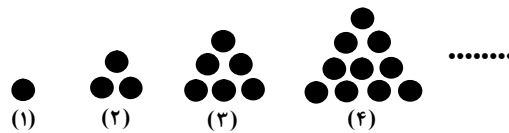
| شماره n | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-------------|----------------|----------------|----------------|-------|--------|
| شکل | | | | | |
| الگوی a_n | ۱ ^۲ | ۲ ^۲ | ۳ ^۲ | | n^2 |
| الگوی b_n | ۲(۱)+۱ | ۲(۲)+۱ | + | | ۲(n)+۱ |

پس در مرحله n دهم تعداد دایره های رنگی برابر $10^2 = 100$ خواهد بود و تعداد دایره

های سفید برابر $2(10)+1 = 21$

مثال ۲: برای شکل زیر، یک مدل در نظر بگیرید.

(الگوی آن را به خاطر بسپارید)



پاسخ: جمله دنباله از یک الگوی متشکل پیروی می کند

یادآوری: هر الگویی که هر جمله آن از مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا شماره n

همان جمله باشد را یک الگوی متشکل می نامیم و جمله n عمومی آن به صورت زیر است

$$a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

با نوشتن جمله تعداد دایره ها در یک جدول راحت تر تعداد دایره ها و الگویی که از اون پیروی

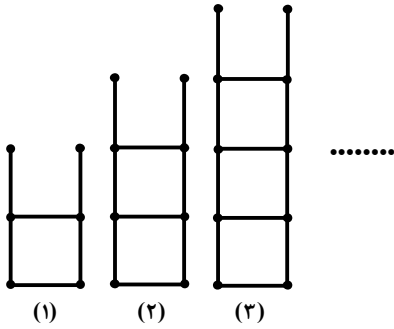
می کند رو متوجه می شد

| شماره n | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-----------|---|-----|-------|-------|-------------|
| شکل | | | | | |
| a_n | ۱ | ۱+۲ | ۱+۲+۳ | | ۱+۲+۳+...+n |

ایستگاه آخر ریاضی کنکور

مثال ۳: با توجه به شکل زیر تعداد پاره خط در کدام

مرحله ۳۳ تا است؟



پاسخ: به کمک جدول زیر، تعداد پاره خط های هر مرحله را می نویسیم

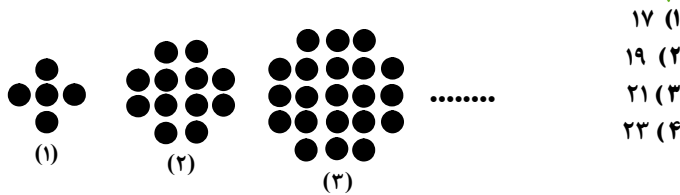
| شماره n | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-----------|-----|-----|-----|-------|-----------|
| شکل | | | | | |
| a_n | ۲×۳ | ۳×۳ | ۴×۳ | | $(n+1)×۳$ |

پس جمله n عمومی این دنباله $a_n = (n+1)×۳$ است. حالا دنباله مرحله n هستیم

که $a_n = ۳۳$ باشد به برابری می توان نوشت:

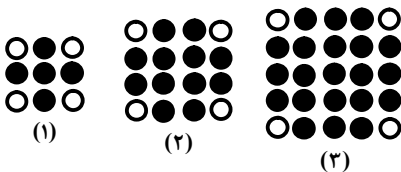
$$(n+1)×۳ = ۳۳ \Rightarrow n+1 = ۱۱ \Rightarrow n = ۱۰$$

مثال ۴: در الگوی مقابل، اختلاف شکل هشتم و نهم کدام است؟



پاسخ: برای راهنی کمر آنه تو ذهنیت به سری کوی سفید گوشه های شکل ها

بیا براینه من تونم الگو رو پیش بین کنی



حالا به کمک جدول من توابع جمله n عمومی دنباله را به صورت زیر بنویسیم

| شماره n | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------|---------------|
| شکل | | | | | |
| a_n | $(۳)^2 - ۴$ | $(۴)^2 - ۴$ | $(۵)^2 - ۴$ | | $(n+۲)^2 - ۴$ |

پس جمله n عمومی این دنباله $a_n = (n+۲)^2 - ۴$ است. حالا به جایگذاری

$n = ۸$ و $n = ۹$ در جمله n عمومی جمله هشتم و نهم رو داریم:

$$a_n = (n+۲)^2 - ۴$$

$$\begin{aligned} n=8 & \rightarrow a_8 = (8+۲)^2 - ۴ = 96 \\ n=9 & \rightarrow a_9 = (9+۲)^2 - ۴ = 117 \end{aligned}$$

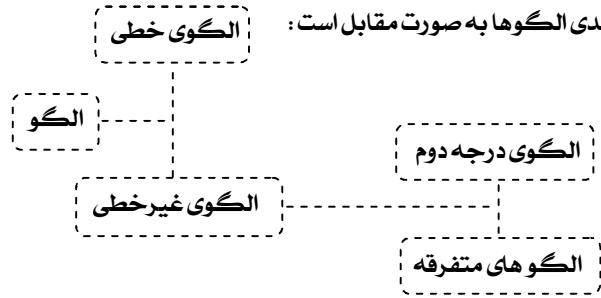
پس اختلاف تعداد دایره های شکل هشتم و نهم برابر است به $117 - 96 = 21$





انواع الگو

طبق درسنامه‌ی کتاب درسی سال دهم، دسته بندی الگوها به صورت مقابل است:



الگوی خطی: هر الگو که جمله‌ی عمومی آن به صورت

$$t_n = an + b \text{ (تغییر ثابت) باشد رايك الگوی خطی می نامیم.}$$

که در آن ضریب n یعنی a میزان تغییر ثابت در هر مرحله است

مثلاً در الگوی $1, 5, 9, 13, \dots$ میزان تغییر ثابت و برابر 4 واحد است. پس تا اینجا جمله‌ی عمومی آن $t_n = 4n + b$ باید باشد. از طرفی برای بدست آوردن مقدار b کفایت دقت کنید 1 است و می‌تونیم بنویسیم:

$$t_1 = 1 \Rightarrow 4(1) + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

و جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = 4n - 3$ خواهد بود

الگوی غیر خطی: به الگوهایی که میزان تغییرشان در هر

مرحله ثابت نیست، غیر خطی می‌گوییم. مثلاً الگوی مربعی

$1, 4, 9, 16, \dots$ غیر خطی است

زیرا میزان تغییر از یک جمله به جمله‌ی بعدی ثابت نیست. مهمترین

الگوی غیرخطی مورد توجه کتاب درسی، الگوی درجه‌ی دوم است

الگوی درجه‌ی دوم: جمله‌ی عمومی این الگو به

$$\text{صورت } t_n = an^2 + bn + c \text{ است.}$$

نکته‌ی مهم در دنباله‌ی درجه دوم آن است که اختلاف جملات متوالی

خود یک دنباله‌ی خطی ایجاد می‌کند که اختلاف آن جملات خطی،

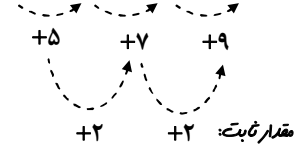
ثابت و برابر $2a$ (دو برابر ضریب n^2) است

مثال ۵: در الگوی درجه‌ی دوم، $3, 8, 15, 24, \dots$ جمله‌ی هشتم را

بیابید؟

پاسخ:

$3, 8, 15, 24, \dots$



مقدار ثابت برابر ۲ شد

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

پس ضریب n^2 در عبارت $t_n = an^2 + bn + c$ برابر یک است و 5 اینجاست ضریب n الگو

برابر است 6 : $t_n = n^2 + bn + c$. برای بدست آوردن b و c از جایگذاری دو جمله

استفاده کنیم

$$t_1 = 3 = (1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 2 = b + c$$

$$t_2 = 8 = (2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4 = 2b + c$$

۵۴ حل دستگاه:

$$\begin{cases} b + c = 2 \\ 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - c = -2 \\ 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 2, c = 0$$

پس ضریب n دنباله به صورت $t_n = n^2 + 2n$ است و $t_8 = (8)^2 + 2(8) = 80$

ایستگاه آخر ریاضی کنکور

الگوهای متفرقه:

در جدول زیر بعضی الگوهایی که کتاب درسی به آن اشاره کرده را آورده ایم

| نام دنباله | ویژگی جملات دنباله | جمله‌ی عمومی |
|------------------|--|--------------------------|
| دنباله‌ی ثابت | اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، صفر است | $a_n = c$ |
| دنباله‌ی مربعی | هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است (۱، ۴، ۹، ۱۶، ...) | $a_n = n^2$ |
| دنباله‌ی مکعبی | هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است (۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ...) | $a_n = n^3$ |
| دنباله‌ی نمایی | مثلاً جملات دنباله اعداد ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... است که بهتره حفظ باشی | $a_n = 2^n$ |
| دنباله‌ی نوسانی | دنباله‌هایی که جملات آن یکی در میان مثبت و منفی هستند (۱، -۱، ۱، -۱، ...) | $a_n = (-1)^n$ |
| دنباله‌ی مثلثی | هر جمله‌ی آن برابر مجموع اعداد طبیعی، از یک تا شماره‌ی همان جمله است (۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...) | $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ |
| دنباله‌ی بازگشتی | بین دو جمله‌ی متوالی یا دو یا چند جمله‌ی قبل از آن رابطه‌ی معینی برقرار باشد، دنباله را بازگشتی می‌نامیم | مطالعه آزاد |

مثال ۶: جمله‌ی عمومی هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید

الف) $1, 4, -9, 16, \dots$

پاسخ: همانطور که میبینید جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند. پس در

جمله‌ی n عمومی دنباله، عامل $(-1)^n$ رو داریم و از طرفی جملات (بدون در نظر گرفتن علامت)

$$\text{مربع کامل اند. پس جمله } n \text{ عمومی دنباله به صورت } a_n = (-1)^n \times n^2 \text{ است}$$

ب) $6, 11, 16, \dots$

پاسخ: این دنباله یک الگوی خطی دارد زیرا در هر مرحله 5 واحد افزایش می‌یابد.

پس جمله n عمومی آن به صورت $a_n = 5n + b$ است و از طرفی با جایگذاری 6

مقدار b هم معلوم میشه

$$a_n = 5n + b \Rightarrow a_1 = 5(1) + b \Rightarrow 6 = 5 + b \Rightarrow b = 1$$

پس جمله n عمومی دنباله به صورت $a_n = 5n + 1$ است

پ) $0/3, -0/03, -0/003, \dots$

پاسخ: در این دنباله رقم اعشار در هر مرحله یک واحد اضافه می‌شود. یعنی جمله n

عمومی دارای عامل $(0/1)^n$ است و با توجه به جملات که سه رو تو خودشون دارن، جمله n

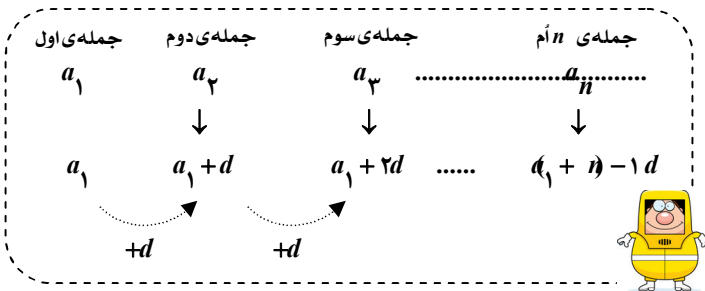
$$\text{عمومی دنباله به صورت } a_n = -3 \times (0/1)^n$$



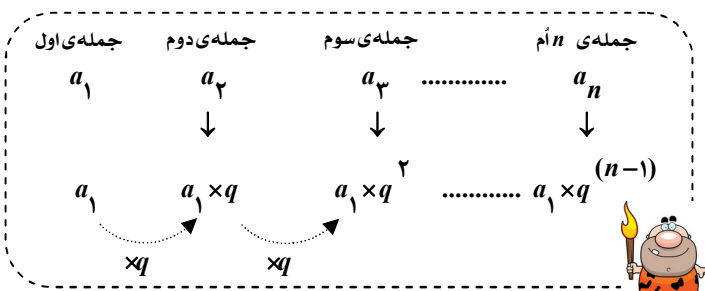


دنباله‌ی حسابی و هندسی

دنباله‌ی حسابی : دنباله‌ای که با جمع کردن بدست می‌آید ، هر جمله با اضافه کردن مقدار ثابت d (قدر نسبت) به جمله‌ی قبلی بدست می‌آید



دنباله‌ی هندسی : دنباله‌ای که با ضرب کردن بدست می‌آید ، هر جمله با ضرب کردن مقدار ثابت q در جمله‌ی قبلی بدست می‌آید .



به عنوان مثال اگر بگه در دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم (a_5) ،

باید بگی : $a_5 = a_1 + 4d$

ولی اگه بگه در دنباله‌ی هندسی جمله‌ی پنجم (a_5) ،

باید بگی : $a_5 = a_1 \times q^4$

مثال ۹: دریک دنباله‌ی حسابی ۴ و $a_{n+1} = a_n + 3$ است .

جمله‌ی n ام را بدست آورید

پاسخ : می‌دانیم اختلاف در جمله‌ی متوالی در دنباله‌ی حسابی برابر قدرنسبت است

$$a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \Rightarrow d = 3$$

با داشتن قدرنسبت $d = 3$ و جمله‌ی اول $a_1 = 4$ و چنانچه a_n در جمله‌ی عمومی

دنباله‌ی حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی را می‌نویسیم

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 4 + (n-1)(3) = 3n + 1$$

مثال ۱۰: دریک دنباله‌ی هندسی $a_6 = 8$ و $a_9 = 512$ است .

جمله‌ی n ام را بدست آورید

پاسخ : می‌دانیم در دنباله‌ی هندسی تقسیم جملات قدرنسبت را می‌دهد

$$\frac{a_9}{a_6} = \frac{a_1 \times q^8}{a_1 \times q^5} = q^3 \Rightarrow \frac{512}{8} = q^3 \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$$

با چنانچه $a_6 = 8$ در یکی از جملات مثل $a_6 = 8$ ، جمله‌ی اول بدست می‌آید

$$a_6 = 8 \Rightarrow a_1 \times q^5 = 8 \Rightarrow a_1 \times 4^5 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{4^5} = \frac{2^3}{2^{10}} = 2^{-7}$$

پس جمله‌ی عمومی به صورت زیر است

$$a_n = a_1 \times q^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 2^{-7} \times 4^{(n-1)} = 2^{-7} \times 2^{2(n-1)} = 2^{2n-9}$$

VERY IMPORTANT

الگو سازی های مهم کنکوری

اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته ، مجذور کامل باشد :

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), \dots$$

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته ، برابر شماره‌ی آن دسته باشد

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد :

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

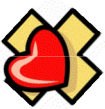
$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$$

تست ۴: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد : $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$

آخرین عدد در دسته‌ی بیست ام کدام است؟

○ (۱) ○ (۲) ○ (۳) ○ (۴) ○ (۵) ○ (۶) ○ (۷) ○ (۸) ○ (۹) ○ (۱۰)

پاسخ :





جمع بندی و مقایسه دو دنباله ی هندسی و حسابی :

| توضیح یا کاربرد | دنباله ی عددی | دنباله ی هندسی |
|---|--|--|
| جمله ی عمومی | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ |
| بدست آوردن قدر نسبت وقتی جملات متوالی میدان | تفاضل دو تا جمله ی متوالی $a_n - a_{n-1} = d$ | تقسیم دو تا جمله ی متوالی $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ |
| بدست آوردت قدرنسبت وقتی جملات متوالی نمیدن و مثلاً جمله ی a_m و a_n می دن | $a_m - a_n = (m-n)d$ | $\frac{a_m}{a_n} = q^{(m-n)}$ |
| اگر داشته باشیم $m+n=r+s$ | $a_m + a_n = a_r + a_s$ | $a_m \times a_n = a_r \times a_s$ |
| اگر a و b و c سه جمله ی متوالی دنباله باشن داشتیم | $a+c=2b$ | $a \times c = b^2$ |
| اگر بخواهیم بین a و b تعداد m تا واسطه درج کنیم داشتیم | $d = \frac{b-a}{m-1}$ | $q^{m+1} = \frac{b}{a}$ |
| سه جمله ی متوالی | $a-d, a, a+d$ | $\frac{a}{q}, a, aq$ |

وضعیت یکنوایی دنباله های حسابی و هندسی :

صعودی و نزولی بودن جملات دنباله ی هندسی به قدرنسبت و جمله ی اول وابسته است ولی برای دنباله ی حسابی فقط به قدرنسبت وابسته است

$$\text{دنباله ی حسابی: } \begin{cases} d > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ d = 0 \Rightarrow \text{ثابت} \\ d < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \end{cases}$$

$$\text{دنباله ی هندسی: } \begin{cases} q > 1: \begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ a_1 < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \end{cases} \\ 0 < q < 1: \begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow \text{نزولی} \\ a_1 < 0 \Rightarrow \text{صعودی} \end{cases} \\ q < 0 \Rightarrow \text{غیریکنوا (نه صعودی و نه نزولی)} \end{cases}$$

دنباله ی ثابت تنها دنباله ای است که هم صعودی است و هم نزولی
در دنباله ی حسابی در حالت 0 دنباله ثابت است و در دنباله ی هندسی در حالت 1 دنباله ثابت است

ایستگاه آخر ریاضی کنکور

مثال ۱۱: تفاضل جمله ی دهم از جمله ی دوازدهم یک دنباله ی عددی 5 ، و مجموع دو جمله ی دهم و دوازدهم 25 ، است. جمله ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۲۵ (۱) ۲۶ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴)

پاسخ:

$$a_n = a_m + (n-m)d \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow$$

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{\text{تفاضل شماره } n \text{ جمله ها}}{\text{تفاضل شماره } m \text{ جمله ها}}$$

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرح رتبه}} a_{12} = 15, a_{10} = 10$$

حالا با داشتن دو جمله، قدرنسبت رو سریع بدست می آوریم:

$$\begin{cases} a_{12} = 15 \\ a_{10} = 10 \end{cases} \rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{15 - 10}{2} = 2.5$$

حالا با داشتن یکی از جملات، جمله ی بیست و یکم را بدست می آوریم، مثلاً از جمله ی دهم میرویم و جمله ی بیست و یکم رو بدست می آوریم

$$a_{21} = a_{10} + (21-10)d \Rightarrow a_{21} = a_{10} + (11)d$$

$$a_{21} = 10 + (11) \times 2.5 \Rightarrow a_{21} = 37.5$$

مثال ۱۲: اعداد $1, 5p-1, 3p+4, 2p+3$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ: اگر a, b, c سه جمله ی متوالی دنباله ی حسابی باشن داریم $a+c=2b$

$$2(3p+4) = (5p-1) + (2p+3) \Rightarrow 6p+8 = 7p+2 \Rightarrow p=6$$

به بدست آوردن 6 جملات دنباله به صورت $1, 29, 22, 15$ خواصد بزرگتر نسبت $d=7$ است

مثال ۱۳: اعداد $1, x, 2x+4, 2x+3$ به ترتیب جملات سوم، هفتم و یازدهم یک دنباله ی حسابی باشند، جمله ی اول دنباله کدام است؟

۱ (۱) $-\frac{13}{2}$ (۲) $\frac{13}{2}$ (۳) ۱ (۴)

پاسخ: طبق قاعده کاندولین ها اگر a, b, c جمله متساوی الفاصله بزرگتر همون رابطه ی قبل رو داریم. یعنی:

$$2a_7 = a_3 + a_{11} \Rightarrow 2(2x+4) = (x-1) + (2x+3) \Rightarrow$$

$$4x+8 = 3x+2 \Rightarrow x = -6$$

به بدست آوردن 6 جملات دنباله به صورت $-7, -8, -9$ می باشد و داریم

$$a_7 - a_3 = 4d \Rightarrow -8 - (-7) = 4d \Rightarrow d = -\frac{1}{4}$$

و $a_3 = -7$ را به جایگذاری $\frac{1}{4}$

$$a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow -7 = a_1 + 2(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_1 = -\frac{13}{2}$$





مثال ۱۴: ۵۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم می کنیم که سهم های دریافت شده، دنباله ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، برابر مجموع دو سهم کوچکتر است. بیشترین تعداد قرص نان دریافتی کدام است؟

پاسخ: ۵ جمله ی شوالی دنباله ی حسابی:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

طبق صورت تست داریم:

$$(a - 2d) + (a - d) + (a) + (a + d) + (a + 2d) = 200$$

$$\Rightarrow 5a = 200 \Rightarrow a = 40$$

پس جملات دنباله به صورت زیر است:

$$40 - 2d, 40 - d, 40, 40 + d, 40 + 2d$$

خوردت گفته "یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، برابر مجموع دو سهم کوچکتر است"

$$\frac{1}{3}((40) + (40 + d) + (40 + 2d)) = (40 - 2d) + (40 - d)$$

$$\frac{1}{3}(120 + 3d) = 80 - 3d \Rightarrow 40 + d = 80 - 3d$$

$$\Rightarrow 4d = 40 \Rightarrow d = 10$$

پس بیشترین قرص نان دریافتی که $a + 2d$ برابری ۶۰ است $40 + 2(10) = 60$

مثال ۱۵: بین اعداد $-12, 52$ سه واسطه ی حسابی درج کرده ایم. مجموع این سه واسطه حسابی چقدر است؟

پاسخ:

$$-12, 4, 20, 36, 52$$

جمله ی پنجم $m = 3$ واسطه ی حسابی 3 جمله ی اول

$$-12, \quad ? , \quad ? , \quad ? , \quad 52$$

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{52 - (-12)}{3 + 1} = \frac{64}{4} = 16 \rightarrow$$

مجموع واسطه ها $\rightarrow 4 + 20 + 36 = 60$

محرمانه: یادت باشه در دنباله ی حسابی فرمول a_n بر حسب n همیشه باید درجه یک باشه و ضریب n قدر نسبت است

مثال ۱۶: اگر $a_n = (p - 1)n^3 + (2p - q)n^2 + 2pn + 3q$ جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی باشد، قدر نسبت کدام است؟

پاسخ:

$$4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1$$

اگر جمله ی عمومی داده شده بخواد جمله ی عمومی دنباله ی حسابی باشد باید ضریب n^3 و n^2 صفر باشه حرف شوند و عبارت درجه یک شود یعنی:

$$\begin{cases} p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \\ 2p - q = 0 \Rightarrow 2(1) - q = 0 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری ۱ و $q = 2$ در دنباله ی صورت تست جمله ی عمومی به صورت $a_n = 2n + 6$ است که قدر نسبت آن ضریب n برابر عدد ۲ است

مثال ۱۷: در یک دنباله ی حسابی مجموع سه جمله ی اول ۱۲ و مجموع جملات پنجم و ششم و هفتم ۱۳۲ است. جمله ی اول کدام است؟

پاسخ:

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_5 + a_6 + a_7 = 132 \end{cases}$$

$$(a_5 + a_6 + a_7) - (a_1 + a_2 + a_3) = 132 - 12$$

$$(a_5 - a_1) + (a_6 - a_2) + (a_7 - a_3) = 120 \Rightarrow 4d = 120 \Rightarrow d = 30$$

با بدست آمدن قدر نسبت d و جایگذاری آن در $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3(30) = 12 \Rightarrow 3a_1 = -18 \Rightarrow a_1 = -6$$

مثال ۱۸: در یک دنباله ی حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_2 = 5 + \sqrt{2}$ است

مجموع چهار جمله ی چهارم چه قدر از مجموع چهار جمله ی دوم بیشتر است؟

پاسخ: اوله قدر نسبت برابر است به:

$$d = a_2 - a_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2$$

دوماً مجموع چهار جمله ی چهارم $(a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16})$ و مجموع چهار جمله ی دوم $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ است. پس مثل تست قبل داریم

$$(a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$(a_{13} - a_1) + (a_{14} - a_2) + (a_{15} - a_3) + (a_{16} - a_4) = 4(12d) = 32d$$

مقدار قدر نسبت هم که برابر $d = 2$ بود پس پاسخ برابر است به: $32d = 64$

مثال ۱۹: در دنباله های حسابی "۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ..." و "۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ..."

چند عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۱۰۰ موجود است؟ (سراسری ریاضی ناز ۹۵) **(آماده باش کنکور ۱۴۰۰)**

پاسخ: قدر نسبت دنباله ی "۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ..." برابر ۷ است و قدر نسبت دنباله ی "۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ..." برابر ۵ است. پس قدر نسبت دنباله ی مشترک برابر ۳۵ است. فقط میمونه اولین جمله ی مشترک که با ادامه دادن جملات اونو می توینیم بینیم

"۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ۳۰، ۳۷، ۴۴، ..."

"۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ۳۲، ۳۷، ۴۲، ..."

اولین جمله ی دنباله ی مشترک برابر ۳۷ است

حالا که رقم قدر نسبت جملات جدید و جمله ی اول دنباله ی جملات جدید رو بدیم می توینیم جمله ی عمومی دنباله ی مشترک رو بنویسیم و هر چو که تست خواست رو بدست بیاریم

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d \Rightarrow a_n = 37 + (n - 1) \times 35 = 37 + 35n - 35$$

$$\Rightarrow a_n = 35n + 2$$

حالا باید بینیم این دنباله چندتا عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۱۰۰ داره

$$100 \leq 35n + 2 < 300 \Rightarrow 98 \leq 35n < 298$$

$$\div 35 \Rightarrow 2/8 \leq n < 8/51 \Rightarrow n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$





[?] مثال ۲۰: از قیمت یک اتومبیل هر سال ۰ درصد کم می شود. پس

از ۳ سال قیمت اتومبیل چند برابر قیمت اولیه ی آن است؟

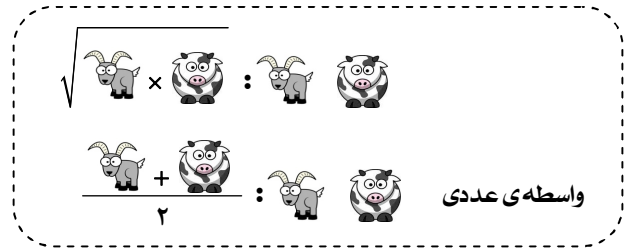
- (۱) ۰/۱۲۸ (۲) ۰/۲۵۶ (۳) ۰/۵۱۲ (۴) ۰/۲۴۳

پاسخ: با توجه به این که قیمت اتومبیل هر سال ۰ درصد کم می شود. قیمت

اتومبیل ۰ درصد قیمت سال قبل است. پس یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت $q = 0/8$ داریم و با فرض آن که قیمت اولیه a_1 باشد داریم:

$$\frac{a_1 \times q^3}{a_1} = \frac{a_1 \times (0/8)^3}{a_1} = (0/8)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0/001$$

واسطه ی حسابی و هندسی نوشتن بین دو چیز:



[?] مثال ۲۱: اعداد 3^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله ی متوالی یک دنباله ی

هندسی اند. واسطه ی حسابی بین a و b کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۲ (۳) ۱/۵ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: اگر x ، y و z سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند آن گاه

$$z^2 = x \times y$$

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow$$

$$2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5$$

حالا واسطه ی حسابی بین a و b :

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$$

[?] مثال ۲۲: در یک دنباله ی هندسی حاصلضرب جملات چهارم و هفتم،

برابر جمله ی پنجم است. اگر جمله ی نهم ۰۰۰۰ باشد، قدرنسبت کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) - (۳) ۰۰ (۴) ۵

پاسخ:

$$a_4 \times a_7 = 10 \times a_5 \Rightarrow a_1 \times q^3 \times a_1 \times q^6 = 10 \times a_1 \times q^4$$

$$a_1 \times q^5 = 10 \Rightarrow a_6 = 10$$

حالا با تقسیم جمله ی نهم و ششم برهم می تویم قدرنسبت رو بدست بیاریم

$$\frac{a_9}{a_6} = \frac{a_1 \times q^8}{a_1 \times q^5} = q^3 \Rightarrow \frac{10000}{10} = q^3 \Rightarrow q^3 = 1000 \Rightarrow q = 10$$

[?] مثال ۲۳: چهار عدد مثبت، جملات متوالی یک دنباله ی هندسی اند.

مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۰ و مجموع دو عدد بزرگتر

برابر ۴۵ است. بزرگترین این اعداد کدام است؟ (سراسری (انسانی فارغ ۸۷)

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۴

پاسخ: جملات متوالی رو به صورت $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$ در نظر بگیریم داریم

$$a_1 + a_1q = 20 \Rightarrow a_1(1+q) = 20$$

$$a_1q^2 + a_1q^3 = 45 \Rightarrow a_1q^2(1+q) = 45$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q^2(1+q)}{a_1(1+q)} = \frac{45}{20} \Rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

در نت آمده جملات مثبت هندس پس قدرنسبت $q = \frac{3}{2}$ باید مثبت باشد

با جایگذاری q در یکی از دو رابطه بالا مقدار جمله ی اول رو هم می تویم بدست بیاریم

$$a_1(1+q) = 20 \xrightarrow{q = \frac{3}{2}} a_1(1+\frac{3}{2}) = 20$$

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{5}} \Rightarrow a_1(\frac{5}{2}) = 20 \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} a_1 = \frac{2}{5} \times 20 = 8$$

چون $q = \frac{3}{2}$ شد و بزرگتر از عدد "۱" است پس دنباله ی هندسی است

(در حال افزایش) و بزرگترین جمله جمله ی آخر یا جمله ی چهارم است

$$a_4 = a_1q^3 = 8 \times (\frac{3}{2})^3 = 8 \times \frac{27}{8} = 27$$

[?] مثال ۲۴: در یک دنباله ی هندسی حاصلضرب پنج جمله ی اول -۳۲-

و حاصل جمع جملات دوم و چهارم -۵- است قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: برای راحتی حساب جملات رو به صورت زیر در نظر بگیریم

$$a_1q^2 : \text{جمله پنجم و } a_1q : \text{جمله چهارم و } a : \text{جمله سوم و } \frac{a}{q} : \text{جمله دوم و } \frac{a}{q^2} : \text{جمله اول}$$

حاصلضرب پنج جمله ی اول -۳۲- است پس:

$$\frac{a}{q^2} \times \frac{a}{q} \times a \times aq \times aq^2 = -32 \Rightarrow a^5 = -32 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی جمع جملات دوم و چهارم -۵- است. پس داریم:

$$\frac{a}{q} + aq = -5 \xrightarrow{\times q} a + aq^2 = -5q \xrightarrow{a = -2} -2q^2 - 2 = -5q$$

مرتبش کن:

$$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q^2 - 5q + 4 = 0 \Rightarrow (q-1)(q-4) = 0$$

$$q = 1, q = 4 \xrightarrow{\div 2} \Rightarrow q = 2, q = \frac{1}{2}$$

در بین گزینه ها فقط $q = 2$ رو داریم و پاسخ گزینه ی دوم است

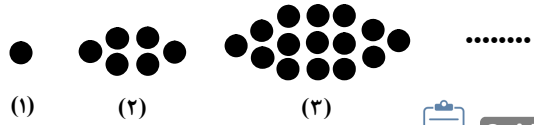




تست درمائی:

تست ۱: در الگوی مقابل، شکل هفتم از چند نقطه تشکیل شده است؟ (مشابه سرآزمی تیربی فارغ ۹۸)

- ۵۴ (۴) ۹۱ (۳) ۶۶ (۲) ۰ (۱)



مجموع اعداد طبیعی، شروع از ۱ تا n برابر بود: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

درست: مثلاً مجموع بالا ۵ (۵-۱) برابر است: $1+2+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)(n)}{2}$

یا مثلاً ۵ (۵-۲) برابر است: $1+2+\dots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

و به طور کلی مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است:

$$1+2+\dots+n = \frac{(n+1)(n)}{2}$$

تست ۲: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد: $(1), (3,5), (7,9,11), \dots$

مجموع دو جمله‌ی اول و آخر دسته‌ی سی‌ام کدام است؟

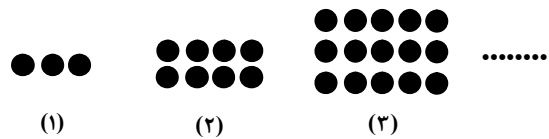
(سرآزمی تیربی دلف ۹۴ و ۹۹)

- ۱۸۵۰ ۰۰ (۳) ۰ (۲) ۰۰ (۱)



اگر مجموع جملات اول و آخر هر دسته را در نظر بگیریم یک آنگ بدست می آید که بزرگ میشه به جدول ارزشیاش کرد

تست ۳: در الگوی زیر تعداد دایره‌ها در شکل هشتم کدام است؟



- ۸۵ (۴) ۷۵ (۳) ۰ (۲) ۰ (۱)



ابتدا جدول بزرگ بتونی جمله‌ی عمومی دنباله رو حدس بزنی

تست ۴: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر یا شماره‌ی آن دسته باشد: $(1), (2,3), (4,5,6), \dots$

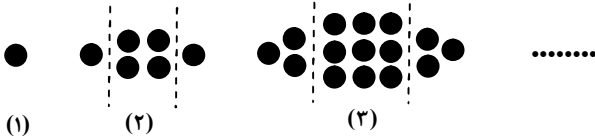
آخرین عدد در دسته‌ی سی‌ام کدام است؟ (مشابه سرآزمی ریاضی دلف ۹۹)

- ۴۷۵ (۴) ۴۲۵ (۳) ۴۶۵ (۲) ۴۳۵ (۱)



با توجه به دسته بندی بالا، آخرین عدد هر دسته، جملات دنباله‌ی مشتق است.

پاسخ: برای راهنمایی شکل را به صورت زیر در ذهن خود دسته بندی کن:



| شماره مرحله | a_n |
|-------------|------------------------------|
| ۱ | $(1)^2$ |
| ۲ | $(2)^2 + 2(1)$ |
| ۳ | $(3)^2 + 2(1+2)$ |
| | |
| n | $(n)^2 + 2(1+2+\dots+(n-1))$ |

پس جمله‌ی عمومی به صورت زیر است

$$a_n = (n)^2 + 2(1+2+\dots+n-1) = n^2 + 2 \frac{(n-1)(n)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n$$

پس شکل هشتم دارای $91 = 2(7)^2 - (7)$ دایره است

پاسخ:

| شماره مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-------------|---------|---------|-----------|-------|----------------|
| a_n | $1+1=2$ | $3+5=8$ | $7+11=18$ | ... | $2 \times n^2$ |

پس جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مجموع دو جمله‌ی اول و آخر هر دسته به

$$\text{صورت } a_n = 2 \times n^2 \text{ است و } 1800 = 2 \times (30)^2 = 2 \times a_{30} \text{ است}$$

پاسخ:

| شماره مرحله | ۱ | ۲ | ۳ | | n |
|-------------|--------------|--------------|--------------|-------|------------------|
| a_n | 1×3 | 2×4 | 3×5 | ... | $n \times (n+2)$ |

پس جمله‌ی عمومی دنباله $a_n = n \times (n+2) = n^2 + 2n$ است و در نتیجه

$$\text{است } a_8 = 8^2 + 2(8) = 64 + 16 = 80$$

پاسخ:

$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 0) \dots$

جملات دنباله‌ی مثلثی یا جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ برابر بود با،

پس در دسته‌ی ۰، ۱، آخرین عدد سی‌مین عدد در دنباله‌ی مثلثی است

$$a_{30} = \frac{30 \times (31)}{2} = 465$$





پاسخ:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

پس جملات به صورت ۴، m و ۲ است
و رابطه‌ی بین این سه می‌باشد: $4 + 2 = 2m \Rightarrow m = 3$

تست ۵: اگر x_1, x_2 و $x_1^2 - mx + 2 = 0$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + 2 = 0$ و اعداد ۴ و $x_1 + x_2$ و $x_1 \cdot x_2$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند. آن گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۳ ۴) ۹



در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 بودند آن گاه مجموع دو ریشه و حاصل ضرب دو ریشه از روی ضرایب برابر بود:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پاسخ:

اولین عدد بزرگتر از ۵۰ و مضرب (بخش پذیر) بر ۶ عدد ۱۰۲ و قبل از ۵۰ عدد ۱۹۸ است

جدول n ام a_n جمله‌ی اول
۱۹۸, , ۱۱۴, ۱۰۸, ۱۰۲

از طرفی رابطه‌ی بین جمله‌ی اول و آخر دنباله‌ی حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بود

$$198 = 102 + (n-1) \times 6 \rightarrow 198 - 102 = 6n - 6 \rightarrow$$

$$96 = 6n - 6 \rightarrow 96 + 6 = 6n \rightarrow 102 = 6n \Rightarrow n = \frac{102}{6} = 17$$

تست ۶: تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۵۰ و ۱۶ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۱۶



عدد n بخش پذیر (مضرب) ۱۶ است که بر ۲ بخش پذیر (زوج باشد) باشد و بر ۳ هم بخش پذیر باشد

پاسخ:

$$\left(\frac{a}{q}\right) \times (a) \times (aq) = 216 \rightarrow a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19$$

$$\Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q^2 = 13q$$

$$6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q^2 - 13q + 36 = 0 \Rightarrow (q-9)(q-4) = 0$$

$$q = 9, q = 4 \rightarrow q = \frac{2}{3}, q = \frac{3}{2}$$

$$\text{if: } \frac{a=6}{q_1=\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{6}{\frac{2}{3}}, 6, 6\left(\frac{3}{2}\right) = 9, 6, 9$$

$$\text{if: } \frac{a=6}{q_1=\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4, 6, 4$$

پس تفاضل بیشترین و کمترین مقدار ۵ است

تست ۷: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع سه جمله‌ی متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷



سه عدد متوالی در دنباله‌ی عددی: $a-d, a, a+d$

سه عدد متوالی در دنباله‌ی هندسی: $\frac{a}{q}, a, aq$

این دو تا تست همه اون مناسبه ای که طراح برای پریش تست انتخاب داره رو دافع فودشون دارن
مثلا تشخیص جملات توان رسانی حل معادله و تشخیص تفاضل و چون میبده برای کنکور

پاسخ:

جدول n ام a_n جمله‌ی هفتم a_7 جمله‌ی سوم a_3
 $a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \Rightarrow$$

$$(a_1^2 + 12a_1d + 36d^2) = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$2a_1d + 20d^2 = 0 \rightarrow 2d(a_1 + 10d) = 0 \rightarrow a_1 + 10d = 0$$

جمله‌ی یازدهم

تست ۸: در یک دنباله‌ی عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این دنباله، صفر است؟

۱) ۹ ۲) ۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲



می‌دانیم برای سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی، توان دوم جمله‌ی وسطی برابر حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری است





تست ۹: در یک دنباله هندسی، جمله ی دوم و دو برابر جمله ی پنجم و جمله ی هشتم می توانند سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند. بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچک ترین آنهاست؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
- (۲) $5 + 2\sqrt{3}$
- (۳) $5 + 4\sqrt{3}$
- (۴) $7 + 4\sqrt{3}$

طراح این تست یک نابغه بوده!
 ببین چند تا موضوع رو باهم پرسیده پنج تا موضوع رو آورده در حل یک تست
 فدایی این تست رو حل کنی و به ذهنت بسپاری برد کردی!

پاسخ:

دو برابر
 جمله ۵م ، جمله ۳م ، جمله ۲م
 $a_2, 2a_5, a_8$
 مع دانیم برای سه جمله ۳، ۵، ۸ از یک دنباله حسابی می توانیم فرض کنیم که در آنجا
 وسط برابر مجموع دو جمله است

$$a_2 + a_8 = 2(2a_5) \Rightarrow a_1 q + a_1 q^7 = 4(a_1 q^4) \Rightarrow a_1 q(1 + q^6) = 4a_1 q^4 \Rightarrow q^6 + 1 = 4q^3$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

تجزیه معادله درجه دوم بدست آمده امکان پذیر نیست و از آنجا که این معادله درجه دوم است می کنیم

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 12 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow t_1, t_2 = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{q^3 = t} q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

حالا نسبت بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچک ترین آنها:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q} = q^6 = (q^3)^2 = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

تست ۱۰: بین دو عدد ۱۵ و ۴۰۵ چند واسطه ی هندسی با قدر نسبت $\sqrt[3]{3}$ می توان درج کرد؟

- ۹ (۴)
- ۸ (۳)
- ۷ (۲)
- ۶ (۱)



تقسیم آن برین دو عدد a و b بخواهیم تعداد m واسط هندسی درج کنیم
 رابطه $q^{m+1} = \frac{b}{a}$ استفاده می کنیم

پاسخ:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^{m+1} = \frac{405}{15} \Rightarrow (\sqrt[3]{3})^{m+1} = 27$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} m + \frac{1}{3} = 3 \xrightarrow{\times 3} m + 1 = 9 \Rightarrow m = 8$$

تست ۱۱: در یک دنباله ی عددی، جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی صعودی اند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ۷۳ دافله - ۸۱ دافله - ۸۲ فاج - ۸۸ دافله و ۹۱ و ۹۹)

- (۱) $\frac{6}{5}$
- (۲) $\frac{5}{4}$
- (۳) ۲
- (۴) $\frac{3}{2}$



محرمانه ی تستی طوری: اگر a_m و a_n و a_p سه جمله ی رفاضا از یک دنباله حسابی باشند ($m > n > p$) که اتفاقاً سه جمله ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

قدر نسبت دنباله هندسی از رابطه $q = \frac{m-n}{n-p}$ بدست می آید:

پاسخ:

جمله ۳م ، جمله ۱م ، جمله ۵م
 $a_1, a_1 + 4d, a_1 + 10d$
 رابطه q سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی رو بنویسیم

$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1)(a_1 + 10d) \Rightarrow (a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2) = a_1^2 + 10a_1 d$$

$$-2a_1 d + 16d^2 = 0 \Rightarrow -2d(a_1 - 8d) = 0 \xrightarrow{\div (-2d)} a_1 - 8d = 0 \Rightarrow a_1 = 8d$$

حالا در مرحله بعدی جملات رو بر حسب d مع نویسیم و قدر نسبت براهن بدست می آید

$$a_1 = 8d \Rightarrow a_1, a_1 + 4d, a_1 + 10d \rightarrow 8d, 12d, 18d$$

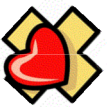
$$8d, 12d, 18d \Rightarrow q = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$$

تستی طوری:

$$q = \frac{m-n}{n-p} = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(احتمالی کنکور ۱۴۰۰)

تکرار این تست و تست ۹ در کنکور خیلی زیاد بوده حواستو جمع کن





پاسخ:

تست ۱۲: به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، $x^2 + 4$ ، به ترتیب

سه جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی هندسی نزولی اند. مجموع این سه جمله‌ی

دنباله، کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

$x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$

مع دانیم برای سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی، مربع جمله‌ی وسط برابر حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری آن است

$\Rightarrow (2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$

مرتبش کن:

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ t = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$

$x = 2 \xrightarrow{x^2+4, 2x, x^2-2} 8, 4, 2$ نزولی
 $x = -2 \xrightarrow{x^2+4, 2x, x^2-2} 8, -4, 2$ نه صعودی و نه نزولی
 پس $x = 2$ قابل قبول است و مجموع سه عدد بدست آمده $14 = 8 + 4 + 2$ است

پاسخ:

تست ۱۳: در دنباله‌ی اعداد $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$ جمله‌ی دهم

کدام است؟ (سرشماری انسانی خارج ۹۴ و سرشماری تقریبی دفاع ۹۵)

- ۹۷۹ (۱) ۹۸۷ (۲) ۱۰۱۵ (۳) ۱۰۲۳ (۴)

مطالعه آزاد

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دسّم می‌آوریم

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

- $n=1 \rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 \rightarrow a_2 = 2(1) + 1 = 3$
- $n=2 \rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 \rightarrow a_3 = 2(3) + 1 = 7$
- $n=3 \rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 \rightarrow a_4 = 2(7) + 1 = 15$
- $n=4 \rightarrow a_5 = 2a_4 + 1 \rightarrow a_5 = 2(15) + 1 = 31$

با دقت در جملات متوجه می‌شویم، جمله‌ی عمومی دنباله به صورت: $a_n = 2^n - 1$

پس جمله‌ی دهم به صورت: $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ است

پاسخ:

تست ۱۴: در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم:

$a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟ (سرشماری تقریبی خارج ۹۵)

- ۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴)

مطالعه آزاد

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دسّم می‌آوریم تا به جمله‌ی هشتم و نهم برسیم

$a_n = 2a_{n-1} - 2$

- $n=2 \rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 \rightarrow a_2 = 2(3) - 2 = 4$
- $n=3 \rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 \rightarrow a_3 = 2(4) - 2 = 6$
- $n=4 \rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 \rightarrow a_4 = 2(6) - 2 = 10$
- $n=5 \rightarrow a_5 = 2a_4 - 2 \rightarrow a_5 = 2(10) - 2 = 18$

دنباله‌ی به وجود آمده به صورت $3, 4, 6, 10, 18, \dots$ است که افزایش جملات به صورت زیر است

$3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130, \dots$
 $+2 \quad +4 \quad +8 \quad +16 \quad +32 \quad +64$

و داریم: $a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$

