فصل اول جبرواحتمال

درک شهودی

	متن سوال	نوبت برگزار
	متن سوال	نوبت برگزار
۱	الف)دانش غریزی (۰/۲۵)	خرداد ۹۲
	استدلال استقرایی	
۱	الف) استقرایی	شهریور ۸۹
۲	الف) استقرایی	دی ۹۱
	استدلال استنتاجی	
۱	$x=۲k \quad , \quad y=۲k+۲ \quad , z=۲k+۴ \quad (۰/۲۵)$ $x+y+z=۲k+\underset{(۰/۲۵)}{(۲k+۲)+(۲k+۴)}=\underset{(۰/۲۵)}{۶k+۶}=۶\underbrace{(k+۱)}_{k'}=۶k' \quad (۰/۲۵)$	خرداد ۸۵
۲	$x=۲K \quad y=۲K+۲ \quad z=۲K+۴ \quad K\in Z \quad (۰/۲۵)$ $x.y.z=(۲K)(۲K+۲)(۲K+۴)=۸(K)(K+۱)(K+۲) \quad (۰/۲۵)$ K و $K+۱$ و $K+۲$ سه عدد صحیح متوالی هستند پس یکی از این سه عدد مضرب ۳ است پس (۰/۲۵) $x.y.z=۸(۳q)=۲۴q \quad (۰/۲۵)$	شهریور ۸۵
۳	$\begin{cases} x=۲K+۱ & K\in Z \\ y=۲K'+۱ \quad (۰/۲۵) & K'\in Z \end{cases}$ $x.y=(۲K+۱)(۲K'+۱)$ $x.y=۴KK'+۲K+۲K'+۱ \quad (۰/۲۵)$ $x.y=۲(۲KK'+K+K')+۱ \quad x.y=۲q+۱ \quad (۰/۲۵)$	دی ۸۵

۴	$x=۲k$ $y=۲k+۲ \quad (۰/۲۵)$ $z=۲k+۴$ $x.y.z=۲k(۲k+۲)(۲k+۴) \quad (۰/۲۵)$ $=۲^۳k(k+۱)(k+۲) \quad (۰/۲۵)$ $=۸k' \quad (۰/۲۵)$	خرداد ۸۶
۵	$(۰/۲۵)\ x=۲k,\ y=۲k'+۱ \Rightarrow \underbrace{۳x+y=۶k+۲k'+۱}_{(۰/۲۵)}=۲\underbrace{(۳k+k')}_{k''}+۱=۲k''+۱ \quad (۰/۲۵) \quad (۰/۲۵)$	شهریور ۸۶
۶	$x=۲k+۱ \quad (۰/۲۵)$ $۳x+۳=\underbrace{۳(۲k+۱)+۳}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۶k+۶}_{(۰/۲۵)}=۶(k+۱)=۶t \ (۰/۲۵)$	دی ۸۶
۷	$x=۲k+۱$ $x^۳+۱=\underbrace{(۲k+۱)^۳+۱}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱+۱}_{(۰/۲۵)}=۲(۴k^۳+۶k^۲+۳k+۱)=\underbrace{۲t}_{(۰/۲۵)}$	خرداد ۸۷
۸	$x=۲k+۱$ $y=۲k+۳ \quad (۰/۲۵) \qquad x+y=\underbrace{۲K+۱+۲K+۳}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۴K+۴}_{(۰/۲۵)}=۴(K+۱)=\underbrace{۴t}_{(۰/۲۵)}$	شهریور ۸۷
۹	عدد فرد $x=۲k+۱ \rightarrow$ حکم: $۳(۲k+۱)^۲-۳=۱۲k' \quad (۰/۵)$ $۳(۴k^۲+۴k+۱)-۳=۱۲k^۲+۱۲k=۱۲(k^۲+k)=۱۲k' \quad (۰/۵)$	دی ۸۷

۱۰	فرض : $x=۲k \quad , \quad y=۲k+۲ \qquad (۰/۲۵)$ حکم : $xy=۸k' \qquad (۰/۲۵)$ $xy=۲k(۲k+۲)=۴k^۲+۴k=۴\underbrace{k(k+۱)}=۸k' \qquad (۰/۵)$ حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است.	شهریور ۸۸
۱۱	$۱)\ \underbrace{(۲k+۱)^۲-(۲k'+۱)^۲}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(۴k^۲+۴k+۱)-(۴k'^۲+۴k'+۱)}_{(۰/۲۵)}=$ $\underbrace{۲(۲k^۲+۲k-۲k'^۲-۲k')}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۲A}_{(۰/۲۵)}$	خرداد ۸۹
۱۲	ب) استنتاجی	شهریور ۸۹
۱۳	$\underbrace{(۲K)(۲K+۲)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(۴K^۲+۴K)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۴k(k+۱)}_{(۰/۲۵)}=۴(۲K')=۸K'(۰/۲۵)$	شهریور ۹۰
۱۴	$\underbrace{(۲K+۱)^۲-(۲K'+۱)^۲}_{(۰/۵)}=\underbrace{۴K^۲+۴K+۱-۴K'^۲-۴K'-۱}_{(۰/۲۵)}=۴(K^۲+K-K'^۲-K')=۴A(۰/۲۵)$	دی ۹۰
۱۵	فرض : $x=۳q$ حکم : $x(x+۳)=۱۸t$ $\underbrace{x(x+۳)=۳q(۳q+۳)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۹q(q+۱)}_{(۰/۵)}=۹(۲t)=۱۸t \quad (۰/۲۵)$ ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است	شهریور ۹۱
۱۶	ب)استنتاجی (۰/۲۵)	دی ۹۱

۱۷	$\left.\begin{array}{l} x=۲n+۱ \\ y=۲m+۱ \\ (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=(۲n+۱)^{۲}+(۲m+۱)^{۲}=$ (۰/۲۵) $۲(۲n^{۲}+۲n+۲m^{۲}+۲m+۱)=۲k$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۱۸	$k\epsilon N$ مضرب۳ است $k+(k+۱)+(k+۲)$(۰/۲۵)$=۳k+۳$ (۰/۲۵)$=۳(k+۱)$(۰/۲۵)	دی ۹۳
۱۹	عددی زوج است $= ۲k'$ (۰/۲۵) $۲k+۱ \xrightarrow{(۰/۲۵)} ۳(۲k+۱)+۱$ (۰/۲۵)$=۶k+۴=۲(۳k+۲)$:عددی فرد ص ۱۹ $k \in Z$	خرداد ۹۴
	قضیه های شرطی	
۱	الف)قضیه	شهریور ۸۹
	مثال نقض	
۱	خیر (۰/۲۵) مثال نقض $\Rightarrow a=\sqrt{۲}$, $b=۲\sqrt{۲}$, $C=\sqrt{۳}$ (۰/۲۵) $abc^{۲}=\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۳})^{۲}=۱۲$ (۰/۲۵)	خرداد ۸۵
۲	الف : نادرست (۰/۲۵) $x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۴}$ $x^{۲}<x$ (۰/۲۵) ب: نادرست (۰/۲۵) یک عدد گنگ است. $x=\sqrt{۳+\sqrt{۵}} \Rightarrow x^{۲}=۳+\sqrt{۵}$ (۰/۲۵)	شهریور ۸۵
۳	راه حل اول : با مثال نقض حل می کنیم : اگر $a=۱$ (۰/۵) , $b=۰ \rightarrow (a-۱)(b-۱)=(۱-۱)(۰-۱)=۰$ (۰/۲۵) راه حل دوم: $(a-۱)(b-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} a-۱=۰ \\ \text{یا} \\ b-۱=۰ \end{cases}$ (۰/۲۵) $\rightarrow a=۱$ یا $b=۱$ (۰/۵)	دی ۸۶

۴	خیر $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5\notin Q'$ (۰/۵)	شهریور ۸۷
۵	خیر - مثال نقض $a=\sqrt{2}\ ,\ b=1-\sqrt{2}\Rightarrow a+b=1\in Q$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	دی ۸۷
۶	خیر و یک مثال نقض نوشته شود. $x=\sqrt[3]{2}\ \rightarrow\ x^2=\sqrt[3]{4}\notin Q$ (۰/۵)	شهریور ۸۸
۷	د) نادرست	شهریور ۸۹
۸	خیر (۰/۲۵) ، $n=4\ \Rightarrow 4+3^4=85$ اول نیست . (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۹	الف)نادرست(۰/۲۵) مثال نقض(۰/۲۵) ب)درست(۰/۲۵) پ) نادرست(۰/۲۵) مثال نقض(۰/۲۵)	دی ۹۱
۱۰	هر مثال نقض(۰/۵) نمره	دی ۹۲
۱۱	ب)درست(۰/۲۵)	خرداد۹۳
۱۲	د) نادرست	شهریور ۹۰
۱۳	الف) عکس قضیه: اگر $a+b$ گویا باشد آنگاه a و b دو عدد گویا است . (۰/۲۵) ب) خیر (۰/۲۵)– مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۳	دی ۹۳

۱۴	الف) عکس قضیه شرطی : اگر $\lvert x\rvert > 1$ آنگاه $x > 1$ است. (۰/۲۵) ب) خیر (۰/۲۵) ، ارائه مثال نقض (۰/۲۵)	خرداد ۹۴
	مشترک (استدلال استنتاجی ومثال نقض)	
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) $1^2 = 1^3$ (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) $x = 2k$ ، $y = 2k'$ ، $xy = 4kk' = 2(2kk') = 2k''$ (۰/۵)	شهریور ۸۶
۲	الف) درست $4 - x^2 < 3 \Rightarrow 1 < x^2 \Rightarrow x > 1$ یا $x < -1$ (۰/۵) ب) درست $x = 2k+1 \to \underbrace{(2k+1)^3 - 1}_{(0/25)} = \underbrace{8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 1}_{(0/25)} = \underbrace{2(4k^3 + 6k^2 + 3k) = 2k'}_{(0/25)}$	خرداد ۸۸
۳	الف) نادرست و مثال نقض $a = 1 \Rightarrow 1 < 1$ (۰/۵) ب) نادرست و مثال نقض $n = 3 \Rightarrow 2^3 + 1 = 9$ (۰/۵) ج) درست $\left.\begin{matrix} x = 6k + 5 \\ y = 6k' + 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow xy = (6k+5)(6k'+5) =$ (۰/۲۵) $36kk' + 30k + 30k' + 25 = \Rightarrow 6(6kk' + 5k + 5k' + 4) + 1 = 6k'' + 1$ (۰/۷۵)	دی ۸۸
۴	الف) نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود ، مثل $x = 1$ (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) و آن را اثبات می کنیم : فرض $x = \frac{a}{b} \in Q$, $y = \frac{c}{d} \in Q$ حکم $xy = \frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵) $xy = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{p}{q}$ (۰/۲۵) چون d,c,b,a همگی عدد صحیح هستند و اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته هستند پس q,p هم عدد صحیح بوده و همچنین $b \neq 0$ و $d \neq 0$ پس $bd = q \neq 0$ پس $\frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود ، مثل $y = 0$, $x = 4 \Rightarrow xy = 0$ (۰/۲۵)	دی ۸۹

۵	الف) نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض : ۲و۳ هر دو اول هستند و ۵=۳+۲ هم اول است .(۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی : $x = ۲k+۱ \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} (۲k+۱)(۲k+۳) \overset{(۰/۲۵)}{=} ۴k^۲+۸k+۳ = ۲(۲k^۲+۴k+۱)+۱ \overset{(۰/۲۵)}{=} ۲k'+۱$	خرداد ۹۰
۶	الف) درست است (۰/۲۵) $\left.\begin{array}{l} a=۵q \\ b=۵t \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=۵q+۵t=۵(q+t)=۵(۲k)=۱۰k$ q,t فرد هستند (۰/۲۵) جمع دو عدد فرد زوج است (۰/۲۵) الف) راه حل دوم : $\left.\begin{array}{l} a=۵(۲t+۱) \\ b=۵(۲t'+۱) \\ (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=۵(۲t+۱)+۵(۲t'+۱)=۱۰(t+t'+۱)=۱۰k \quad (۰/۲۵)$ ب) نادرست است. (۰/۲۵) $a=-۳<۰ \to a^۲=۹>۰ \quad (۰/۲۵)$ پ) نادرست است. (۰/۲۵) $\left.\begin{array}{l} a=۲ \\ b=۵ \\ c=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b\sqrt{ac}=۵\sqrt{۴}=۱۰ \quad (۰/۲۵)$ گنگ نیست	خرداد ۹۱
۷	الف) نادرست (۰/۲۵) – ارایه مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۷ ب) درست (۰/۲۵) ص ۱۹ $\left.\begin{array}{l} x=۲k \\ y=۲K+۲ \\ K\in Z \end{array}\right\} \Rightarrow xy=۲k(۲k+۲) \ (۰/۲۵)= ۴\underbrace{k(k+1)}_{۲k'} \ (۰/۲۵)=۸k'$	شهریور ۹۳
۸	الف) نادرست (۰/۲۵) - ارائه مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۸ ب) ص ۲۷ فرض : $\begin{cases} x=\frac{a}{b} \\ y=\frac{c}{d} \end{cases} \quad a,b,c,d \in Z, (b,d \neq ۰)$ $x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad (۰/۲۵) = \frac{ad+bc}{bd} \quad (۰/۲۵)$ صورت ومخرج کسرعددی صحیح است و $bd \neq ۰$ در نتیجه $x+y$ گویا است. (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
	برهان خلف	

۱	فرض می کنیم که n زوج باشد (۰/۲۵) پس $n=2k \Rightarrow n^2=4k^2 \Rightarrow n^2=2(\underbrace{2k^2}_{t}) \Rightarrow n^2=2t$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) و این خلاف فرض است پس n فرد می باشد. (۰/۲۵)	خرداد۸۵
۲	از برهان خلف استفاده کرده و می گوییم اگر $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ اصم نباشد پس گویا ست (۰/۲۵) $\begin{cases} a,b \in z \\ b \neq 0 \end{cases}$ $\sqrt{1+\sqrt{2}}=\frac{a}{b} \xrightarrow{\text{توان۲}}$ (۰/۲۵) $1+\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}-1$ (۰/۲۵) گویا = گنگ که این تناقض است پس حکم بر قرار است (۰/۲۵)	دی ۸۵
۳	**برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ گنگ نباشد پس گویاست.(۰/۲۵)** $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{a}{b} \Rightarrow 2+\sqrt{5}=\frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{a^3}{b^3}-2$ (۰/۵) گویا = گنگ **به تناقض رسیدیم پس $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ گنگ است. (۰/۲۵)**	خرداد۸۶
۴	فرض: $n^2=5K$ حکم: $n=5K'$ (۰/۲۵) فرض خلف $n \neq 5K' \Rightarrow n^2 \neq 25K'^2 \Rightarrow n^2 \neq 5(5K'^2) \Rightarrow$ (۰/۵) $n^2 \neq 5K$ (۰/۲۵) (تناقض) $\Rightarrow$ حکم بر قرار است	شهریور ۸۶
۵	اگر $\sqrt{3+\sqrt{7}} \notin Q'$ (۰/۲۵) $\rightarrow \sqrt{3+\sqrt{7}} \in Q \rightarrow \sqrt{3+\sqrt{7}}=\frac{a}{b}$ $(a,b)=1$ (۰/۲۵) $\underset{(0/25)}{3+\sqrt{7}}=\frac{a^2}{b^2} \rightarrow \sqrt{7}=\frac{a^2}{b^2}-3$ تناقض (۰/۲۵) گویا = گنگ	دی ۸۶
۶	$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \notin Q' \rightarrow \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \in \underset{(0/25)}{Q} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=a \rightarrow \sqrt{7}+\sqrt{3}=\frac{1}{a}$ (۰/۲۵) $\sqrt{7}=\frac{1}{a}-\sqrt{3} \rightarrow 7=\underset{(0/25)}{\frac{1}{a^2}}+3-\frac{2}{a}\sqrt{3} \rightarrow \frac{2}{a}\sqrt{3}=\frac{1}{a^2}-4$ گنگ گویا (۰/۲۵) به تناقض رسیدیم پس $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ عدد گنگ است	خرداد۸۷

۷	فرض خلف : $n=5k+r \quad , \quad r\in\{1,2,3,4\} \quad (0/25)$ $\to n^3=125k^3+75k^2r+15kr^2+r^3 \quad , \quad r^3\in\{1,8,27,64\} \quad (0/25)$ $\to n^3=5(\underbrace{25k^3+15k^2r+3kr^2}_{k'})+r^3=5k'+r^3 \quad , \quad r^3\neq 5q \quad (0/25)$ پس n^3 مضربی از ۵ نیست. (۰/۲۵)	شهریور ۸۷
۸	فرض خلف : $2\sqrt{5}+3\sqrt{7}\notin Q' \Rightarrow 2\sqrt{5}+3\sqrt{7}=\frac{a}{b}\in Q \Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3\sqrt{7}\Rightarrow$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) $20=\frac{a^2}{b^2}+63-6\sqrt{7}\frac{a}{b}\Rightarrow 6\sqrt{7}\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}+43 \quad (0/25)$ طرف راست رابطه مجموع دو عدد گویا عددی گویا است و طرف چپ رابطه عددی گنگ‌است. پس به تناقض رسیده و همان حکم اولیه درست است . (۰/۲۵)	دی ۸۷
۹	فرض خلف: $\sqrt{\sqrt{3}+2}\notin Q' \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3}+2}=\frac{a}{b}\Rightarrow \sqrt{3}+2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}-2\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a^2-2b^2}{b^2}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) به تناقض رسیده ایم و همان حکم اولیه برقرار است . (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۱۰	فرض خلف : فرض کنیم که $y=2$ ، در این صورت داریم : (۰/۲۵) $\frac{8}{2x}=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (0/5)$ تناقض با فرض قضیه را دارد پس حکم اولیه برقرار است. (۰/۲۵)	خرداد۸۸
۱۱	فرض خلف : فرض می کنیم $2\sqrt{3}$ گنگ نباشد. (۰/۲۵) $(a,b)=1$ ، b,a نسبت به هم اولند. $2\sqrt{3}=\frac{a}{b} \quad (0/25) \Rightarrow \quad 12=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=12b^2\Rightarrow a=12k \quad (1) \quad (0/25)$ $144k^2=12b^2\Rightarrow b^2=12k^2 \Rightarrow b=12k' \quad (2)$ از (۱) و (۲) نتیجه می شود که b,a نسبت به یکدیگر اول نیستند و تناقض با تعریف اعداد گویا را دارد چون باید $(a,b)=1$. (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۱۲	فرض خلف $\sqrt{5}-b=\frac{p}{q}$ گویا $\Rightarrow \sqrt{5}=\underbrace{\frac{p}{q}+b}$ $(0/5)$ $\Rightarrow$ گنگ = گویا (۰/۲۵) جمع دو عدد گویا ، عددی گویا است. به تناقض رسیده ایم ، پس همان حکم اولیه برقرار است. (۰/۲۵)	خرداد ۹۲

۱۳	برهان خلف: $\sqrt{3} \in Q \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (۰/۲۵) , $(a,b)=1 \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow (a=3k)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (3k)^2 = 3b^2 \Rightarrow 9k^2 = 3b^2 \Rightarrow (b=3k')$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (a,b)=3$ پس b , a هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند ، پس به تناقض رسیده وحکم اصلی درست است. (۰/۲۵)	شهریور ۸۹
۱۴	فرض $\sqrt{7} \in Q'$, $x \in Q$ حکم $x+\sqrt{7} \in Q'$ (۰/۲۵) خلاف حکم $x+\sqrt{7} = \frac{a}{b} \in Q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b} - x \Rightarrow$ تفریق دو گویا ، گویا است و مساوی گنگ نمی شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. (۰/۲۵)	دی ۸۹
۱۵	خلاف حکم $n=2k$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 3(2k)+2 = 6k+2$ (۰/۲۵) $= 2(3k+1) = 2A$ (۰/۲۵) به خلاف فرض رسیده ایم ، پس همان حکم داده شده صحیح است. (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۱۶	فرض خلف $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (۰/۲۵) (گنگ نیست) $\Rightarrow 3\sqrt{2}+\sqrt{5} = a$ (گویا a) (۰/۲۵) $\Rightarrow \sqrt{5} = a - 3\sqrt{2} \Rightarrow$ $5 = a^2 + 18 - 6a\sqrt{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 6a\sqrt{2} = a^2+13 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2+13}{6a} \Rightarrow$ گنگ ≠ گویا به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است . (۰/۲۵)	دی ۹۰
۱۷	فرض خلف: $n \neq 2k+1 \Rightarrow n = 2k$ (۰/۲۵) $5n+3 = 5(2k)+3$ (۰/۲۵) $= 10k+3 = 2(5k+1)+1 = 2q+1$ (۰/۲۵) این تناقض نشان می دهد که فرض خلف نادرست است.	خرداد ۹۱

۱۸	فرض: $\sqrt{2}$ گنگ حکم: $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ گنگ فرض خلف: $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} = a$ گویا (۰/۲۵) $\Rightarrow 1+\sqrt{2} = a^3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} = \underbrace{a^3 - 1}_{\text{گویا}}$ (تناقض) (۰/۲۵) تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می دهد که خلاف حکم برقرار نمی باشد) (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۱۹	فرض خلف $\underset{(0/25)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (گنگ نیست) $\Rightarrow \underset{(0/25)}{\sqrt{2}+\sqrt{3} = a}$ (گویا a) $\Rightarrow \sqrt{3} = a - \sqrt{2} \Rightarrow$ $\underset{(0/25)}{3 = a^2 + 2 - 2a\sqrt{2}} \Rightarrow 2a\sqrt{2} = a^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2-1}{2a} \Rightarrow$ گنگ $\neq$ گویا به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است . (۰/۲۵)	دی ۹۱
۲۰	اگر $\sqrt{2}$ گنگ نباشد پس گویاست بنابراین $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ که در آن p و $q \neq 0$ اعداد صحیحی می باشند که نسبت به هم اول هستند. (۰/۲۵) $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ زوج است $\Rightarrow p$ زوج است $\Rightarrow p = 2k (0/5) \Rightarrow p^2 = 4k^2$ $\Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ زوج است (۰/۲۵) $\Rightarrow q$ زوج است با فرض اول بودن p و q به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است . (۰/۲۵)	خرداد ۹۲
۲۱	فرض می کنیم n فرد نباشد پس زوج است (فرض خلف) (۰/۵) $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2) = 2k'$ (۰/۵) به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است . (۰/۵)	شهریور ۹۲
۲۲	فرض خلف $\underset{(0/25)}{2+\sqrt{3}}$ (گنگ نیست) $\Rightarrow \underset{(0/25)}{2+\sqrt{3} = a}$ (گویا a) $\Rightarrow \underset{(0/25)}{\sqrt{3} = a - 2}$ یک عبارت گویا با عبارت گنگ برابر نیست بنابراین به تناقض رسیده ایم ، حکم اولیه درست است . (۰/۲۵)	دی ۹۲
۲۳	خلاف فرض مسأله است (۰/۲۵) $x = 3 \Leftarrow x + 4(-1)^2 = 7 \Leftarrow$ (۰/۲۵) $y = -1$: (فرض خلف) پس فرض خلف باطل و حکم $y \neq -1$ برقرار است . (۰/۲۵) ص ۳۰	شهریور ۹۳

۲۴	فرض خلف : n فرد نباشد $\Rightarrow n$ زوج $n = 2k$ (۰/۲۵) $k \in \mathbb{Z}$ $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \xrightarrow{(0/25)} n^2$ زوج (خلاف فرض مسأله) در نتیجه به تناقض رسیده ایم . پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵) ص ۳۰	دی ۹۳
۲۵	فرض خلف: فرض می کنیم(x+y) گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. $x + y = a$ گویا $\underset{(0/25)}{\Longrightarrow} y = a - x$ (۰/۲۵) یا ($y = a + (-x)$) می دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویاست. (۰/۲۵) که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵) ص۳۰	خرداد ۹۴
۲۶	فرض کنیم n فرد باشد: $n = 2k + 1$ (۰/۲۵) ص ۲۸ $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ (۰/۲۵) $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ n^2 فرد می شود که خلاف فرض است. (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.	شهریور ۹۴
	اثبات بازگشتی	
۱	$xy \le \left(\frac{(x+y)}{2}\right)^2 \Rightarrow xy \le \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 4xy \le x^2 + y^2 + 2xy$ (۰/۲۵) $x^2 + y^2 - 2xy \ge 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (۰/۲۵) بدیهی است	شهریور ۸۵
۲	$(a-1)^2 \ge 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$ $a^2 + 1 \ge 2a$ (۰/۲۵) طرفین این نامعادله را بر a تقسیم می کنیم $\Leftrightarrow \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a} \ge \frac{2a}{a}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \ge 2$ (۰/۲۵)	دی ۸۵
۳	$2x^2 + 2y^2 + 2 \ge 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$ (۰/۲۵) $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \ge 0 \Leftrightarrow$ (۰/۲۵) $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 0$ بدیهی است (۰/۵)	خرداد ۸۶

۴	$\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \ge \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲} \ge ۴\sqrt{ab} \Rightarrow a+b+۲\sqrt{ab} \ge ۴\sqrt{ab} \Rightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \ge ۰ \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \ge ۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) بدیهی - پس با استفاده از استدلال بازگشتی مطلب برقرار است	خرداد ۸۷
۵	$a^{۲}+b^{۲}+۴(a+b+۲) \ge ۰ \Leftrightarrow (a^{۲}+۴a+۴)+(b^{۲}+۴b+۴) \ge ۰ \Leftrightarrow (a+۲)^{۲}+(b+۲)^{۲} \ge ۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) **گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی برقرار است .**	خرداد ۸۸
۶	$a+\frac{۱}{a} < ۲ \overset{a<۰}{\Leftrightarrow} a(a+\frac{۱}{a}) > ۲a \Leftrightarrow a^{۲}+۱-۲a > ۰ \Leftrightarrow$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) **$(a-۱)^{۲} > ۰$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow$ گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی حکم برقرار است (۰/۲۵)**	خرداد ۸۹
۷	$\frac{a}{b^{۲}}+\frac{b}{a^{۲}} \ge \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \Leftrightarrow \frac{a^{۳}+b^{۳}}{a^{۲}b^{۲}} \underset{(۰/۲۵)}{\ge} \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})}{ab} \ge a+b$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^{۲}-ab+b^{۲} \ge ab \Leftrightarrow a^{۲}-۲ab+b^{۲} \ge ۰ \Leftrightarrow (a-b)^{۲} \ge ۰$ (۰/۲۵) **گزاره همواره درست وبرطبق استدلال برگشتی و بر گشت پذیر بودن روابط حکم درست است. (۰/۲۵)**	شهریور ۸۹
۸	تکراری همانند سوال اول	دی ۸۹
۹	$\frac{a^{۳}+b^{۳}}{a+b} \ge ab \Leftrightarrow a^{۳}+b^{۳} \overset{(۰/۲۵)}{\ge} (a+b)\,ab \Leftrightarrow (a+b)\,(a^{۲}-ab+b^{۲}) \overset{(۰/۵)}{\ge} (a+b)\,ab \Leftrightarrow$ (۰/۲۵) $a^{۲}-ab+b^{۲} \ge ab \Leftrightarrow (a-b)^{۲} \ge ۰$ (۰/۲۵) **بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده ایم پس حکم بر قرار است . (۰/۲۵)**	خرداد ۹۰

۱۰	$x^4+y^4-x^3y-xy^3\ge 0 \Leftrightarrow \underset{(0/25)}{x^3(x-y)-y^3(x-y)\ge 0} \Leftrightarrow \underset{(0/25)}{(x-y)(x^3-y^3)\ge 0}$ $\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2+y^2+xy)\ge 0$ چون x ، y مثبت هستند، به عبارت همواره درست رسیده و بر طبق استدلال برگشتی حکم درست است. (۰/۲۵)	دی ۹۰
۱۱	$a^2+b^2+c^2+3\ge 2a+2b+2c \quad \Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2+1+1+1-2a-2b-2c\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0/25)$ $(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0/25)$ $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ عبارت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می باشد. (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۱۲	$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le -2 \underset{(0/25)}{\Leftrightarrow} \frac{a^2+b^2}{ab}\le -2 \underset{(0/25)}{\overset{ab<0}{\Leftrightarrow}} a^2+b^2\ge -2ab \Leftrightarrow \underset{(0/25)}{(a+b)^2\ge 0}$ عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می باشند. (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۱۳	$2a^2+b^2+1\ge 2(a-ba) \Rightarrow \underset{(0/25)}{2a^2+b^2+1+2ab-2a\ge 0} \Rightarrow \underset{(0/25)}{(a-1)^2+(a+b)^2\ge 0}$ درستی عبارت بدیهی است .بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۵)	دی ۹۱
۱۴	تکراری همانند سوال ۳	خرداد ۹۲
۱۵	تکراری همانند سوال ۲	شهریور ۹۲
۱۶	$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b} \Rightarrow \underset{(0/25)}{a+b+2\sqrt{ab}\ge a+b} \Rightarrow \underset{(0/25)}{2\sqrt{ab}\ge 0}$ درستی عبارت بدیهی است .بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۵)	دی ۹۲

خرداد ۹۳	تکراری همانند سوال ۱	۱۷
شهریور ۹۳	$a^2+b^2 \geq 2(b-1) \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2b-2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2b+2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+1+1 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2+1+(b-1)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می باشند. (۰/۲۵) ص۲۴	۱۸
دی ۹۳	$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq (2\sqrt{xy})^2$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy \geq 4xy \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ بدیهی (۰/۲۵) تمام روابط بالا برگشت پذیر است . ص۲۴	۱۹
خرداد ۹۴	$a^2+1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2+1 \geq 2b-b^2 \Leftrightarrow a^2+1-2b+b^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2+(1-b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت پذیر می باشند در نتیجه حکم برقراراست.(۰/۲۵) ص۲۳	۲۰
شهریور ۹۴	$a.b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$ (۰/۲۵) ص ۲۸ $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) به یک رابطه بدیهی رسیدیم و چون همه ی روابط برگشت پذیر است در نتیجه حکم برقرار است. (۰/۲۵)	۲۱
	اصل استقرای ریاضی معمولی	
خرداد ۸۵	$P(1): \frac{2}{3} = 1-\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ (۰/۲۵) $P(K): \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots\dots+\frac{2}{3^K} = 1-\frac{1}{3^K}$ (۰/۲۵) حکم استقرا $P(K+1): \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\dots+\frac{2}{3^K}+\frac{2}{3^{K+1}} = 1-\frac{1}{3^{K+1}}$ (۰/۲۵) طرف چپ حکم $= 1-\frac{1}{3^K}+\frac{2}{3^{K+1}} = 1+\frac{-3+2}{3^{K+1}} = 1-\frac{1}{3^{K+1}}$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)	۱

۲

$$\begin{cases} P(۱): (۱+\sqrt{۲})^{۱} \geq ۱+\sqrt{۲}(۱) & ۱+\sqrt{۲} \geq ۱+\sqrt{۲} \quad (۰/۲۵) \\ P(K): (۱+\sqrt{۲})^{K} \geq ۱+\sqrt{۲}\,K & (۰/۲۵) \end{cases}$$

حکم استقرا $P(K+۱): (۱+\sqrt{۲})^{K+۱} \geq ۱+\sqrt{۲}(K+۱) \quad (۰/۲۵)$

طرفین فرض استقرا را در عبارت $(۱+\sqrt{۲})$ ضرب می کنیم $(۰/۲۵)$

$$(۱+\sqrt{۲})\left((۱+\sqrt{۲})^{K} \geq ۱+\sqrt{۲}\,K\right) \Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^{K+۱} \geq (۱+\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲}\,K) \geq ۱+\sqrt{۲}(k+۱) \quad (۰/۲۵)$$

$$(۱+\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲}\,K) \geq ۱+\sqrt{۲}(K+۱) \Rightarrow ۱+\sqrt{۲}\,K+\sqrt{۲}+۲K \geq ۱+\sqrt{۲}\,K+\sqrt{۲} \Rightarrow ۲K \geq ۰ \quad (۰/۲۵)$$

این نامعادله همواره برقرار است پس حکم برقرار است.

شهریور ۸۵

۳

$$\begin{cases} P(۱): \dfrac{۱}{۱\times۳} = \dfrac{۱}{۲+۱} & \dfrac{۱}{۳} = \dfrac{۱}{۳} \quad (۰/۲۵) \\ P(K): \dfrac{۱}{۱\times۳} + \dfrac{۱}{۳\times۵} + \ldots\ldots + \dfrac{۱}{(۲K-۱)(۲K+۱)} = \dfrac{K}{۲K+۱} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

حکم استقرا $P(K+۱): \dfrac{۱}{۱\times۳} + \dfrac{۱}{۳\times۵} + \ldots\ldots + \dfrac{۱}{(۲K-۱)(۲K+۱)} + \dfrac{۱}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \dfrac{K+۱}{۲K+۳} \quad (۰/۲۵)$

طرف چپ حکم $\dfrac{K}{(۲K+۱)} + \dfrac{۱}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \dfrac{K(۲K+۳)+۱}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \dfrac{۲K^{۲}+۳K+۱}{(۲K+۱)(۲K+۳)} \quad (۰/۵)$

$$= \frac{(۲K^{۲}+۲K+K+۱)}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \frac{۲K(K+۱)+(K+۱)}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \frac{(K+۱)(۲K+۱)}{(۲K+۱)(۲K+۳)} = \frac{K+۱}{۲K+۳} \quad (۰/۲۵)$$

دی ۸۵

۴

$P(۱): ۵^{۱} - ۴ - ۱ = ۰ = ۰\times۱۶ \; (۰/۲۵)$

$P(k): ۵^{K} - ۴k - ۱ = ۱۶m \; (۰/۲۵)$

$P(k+۱): ۵^{k+۱} - ۴k - ۵ = ۱۶m' \; (۰/۲۵)$

ضرب طرفین فرض در ۵ $\; ۵^{k+۱} - ۲۰K - ۵ = ۱۶m\times۵ \Rightarrow ۵^{k+۱} - ۴K - ۱۶k - ۵ = ۱۶m\times۵ \; (۰/۵)$

$۵^{k+۱} - ۴k - ۵ = ۱۶m\times۵ + ۱۶k = ۱۶(۵m+k) \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow ۵^{k+۱} - ۴k - ۵ = ۱۶m'$

خرداد ۸۶

۵ — شهریور ۸۶

$$P(1): 3\times 1=\frac{3(1^2+1)}{2}\Rightarrow 3=3\ (0/25)$$

$$P(k): 3+6+9+\dots\dots+3k=\frac{3(k^2+k)}{2}\ (0/25)$$

$$P(k+1): 3+6+9+\dots\dots+3k+3(k+1)=\frac{3((k+1)^2+k+1)}{2}=\frac{3(k+1)(k+2)}{2}\quad (0/25)$$

به طرفین فرض $3(k+1)$ می افزاییم :

$$3+6+9+\dots\dots+3k+3(k+1)=\frac{3(k^2+k)}{2}+3(k+1)\ (0/25)$$

طرف دوم حکم

$$=\frac{3k(k+1)+6(k+1)}{2}=\frac{3(k+1)\ (k+2)}{2}=(0/5)$$

۶ — دی ۸۶

$$P(1): \frac{1}{1\times 4}=\frac{1}{3(1)+1}\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}\qquad (0/25)$$

$$P(k): \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3K+1}\qquad (0/25)$$

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\dots+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3K+4}\qquad (0/25)$$

به طرفین فرض جمله ی $(K+1)$ ام را اضافه می کنیم $(0/25)$

$$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\dots+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k}{3K+1}+\underset{(0/25)}{\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}}=$$

$$\frac{3k^2+7k+1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}\quad (0/5)$$

۷ — خرداد ۸۷

$$P(1): P_1=11^1-1=10=10(1)\qquad (0/25)$$

$P(k): P_K=11^K-1=10t$ فرض $(0/25)$

$P(k+1): P_{k+1}=11^{k+1}-1=10t'$ حکم $(0/25)$

طرفین فرض را در عدد ۱۱ ضرب می کنیم $(0/25)$

$$11^{k+1}-11=10(11t)$$

$$11^{k+1}-1-10=10(11t)\qquad (0/5)$$

$11^{k+1}-1=10\underbrace{(11t+1)}$ حکم ثابت شد .

شهریور ۸۷	P(1): $(1+\sqrt{7})^1 \ge 1+\sqrt{7}(1) \to 1+\sqrt{7} \ge 1+\sqrt{7}$ (۰/۲۵) P(K): $(1+\sqrt{7})^K \ge 1+\sqrt{7}K$ فرض (۰/۲۵) P(K+1): $(1+\sqrt{7})^{K+1} \ge 1+\sqrt{7}(K+1)$ حکم (۰/۲۵) طرفین فرض را در $1+\sqrt{7}$ ضرب می کنیم . (۰/۲۵) $(1+\sqrt{7})^{K+1} \ge (1+\sqrt{7}K)(1+\sqrt{7}) \overset{?}{\ge} 1+\sqrt{7}(K+1)$ (۰/۲۵) $1+\sqrt{7}+\sqrt{7}K+7k \ge 1+\sqrt{7}K+\sqrt{7}$ بدیهی (۰/۵) $7K \ge 0$ پس P(K+1) برقرار است	۸
دی ۸۷	$p(1): 1-\frac{1}{4}=\frac{1+2}{2+2} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ (۰/۲۵) $p(k): \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}$ فرض استقراء (۰/۲۵) $p(k+1): \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2k+4}$ حکم استقراء (۰/۲۵) $p(k+1): \left(\frac{k+2}{2k+2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\left(\frac{k+2}{2k+2}\right)\left(\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k^2+4k+3}{(2k+2)(k+2)}=$ $\frac{(k+3)(k+1)}{2(k+1)(k+2)}=\frac{k+3}{2k+4}$ (۱ نمره)	۹
خرداد ۸۸	$P(1)=0=1-1 \Rightarrow 0=0$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(k)=\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{k!}$ (۰/۲۵) حکم استقراء $p(k+1)=\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{k-1}{k!}+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$ (۰/۲۵) $p(k+1)=1-\frac{1}{k!}+\underbrace{\frac{k}{(k+1)!}}_{(0/25)}=\underbrace{\frac{(k+1)!-(k+1)+k}{(k+1)!}}_{(0/25)}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}=1-\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}}_{(0/25)}$	۱۰
شهریور ۸۸	$p(1): 2=2$ (۰/۲۵) شروع استقراء $p(k): 1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\dots+k\times2^k=(k-1)\times2^{k+1}+2$ (۰/۲۵) فرض استقراء $p(k+1): 1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\dots+k\times2^k+(k+1)\times2^{k+1}=k\times2^{k+2}+2$ (۰/۵) حکم استقراء طرف اول حکم : $(k-1)\times2^{k+1}+2+(k+1)\times2^{k+1}=2k(2^{k+1})+2=k\times2^{k+2}+2$ (۰/۵)	۱۱

۱۲ — دی ۸۸

$$p(۱)=۱+\sqrt{۳} \geq ۱+\sqrt{۳} \qquad (۰/۲۵)$$

فرض $p(k)=(۱+\sqrt{۳})^{k} \geq ۱+k\sqrt{۳} \qquad (۰/۲۵)$

حکم $p(k+۱)=(۱+\sqrt{۳})^{k+۱} \geq ۱+(k+۱)\sqrt{۳} \qquad (۰/۲۵)$

(۰/۲۵) طرفین فرض را در $۱+\sqrt{۳}$ ضرب می کنیم.

$$(۱+\sqrt{۳})^{k+۱} \geq (۱+k\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳}) \overset{?}{\geq} ۱+(k+۱)\sqrt{۳} \qquad (۰/۲۵)$$

$$// \geq ۱+\sqrt{۳}+۳k+k\sqrt{۳} \geq ۱+k\sqrt{۳}+\sqrt{۳}$$

$$// \geq ۳k \geq ۰ \qquad (۰/۲۵)$$

گزاره همواره درست است پس حکم هم درست خواهد بود.

۱۳ — خرداد ۸۹

$$p(۱): ۳=\frac{۴+۹+۵}{۶} \Rightarrow ۳=۳ \qquad (۰/۲۵)$$

فرض استقراء $p(k):(۱\times۳)+(۲\times۵)+\cdots+k(۲k+۱)=\frac{۴k^{۳}+۹k^{۲}+۵k}{۶} \qquad (۰/۲۵)$

حکم استقراء $p(k+۱):(۱\times۳)+(۲\times۵)+\cdots+k(۲k+۱)+(k+۱)(۲k+۳)=$

$$\frac{۴(k+۱)^{۳}+۹(k+۱)^{۲}+۵(k+۱)}{۶}=\frac{۴k^{۳}+۲۱k^{۲}+۳۵k+۱۸}{۶} \qquad (۰/۵)$$

$$p(k+۱): \frac{۴k^{۳}+۹k^{۲}+۵k}{۶}+(k+۱)(۲k+۳)=\frac{۴k^{۳}+۲۱k^{۲}+۳۵k+۱۸}{۶} \qquad (۰/۵)$$

۱۴ — دی ۸۹

تکراری همانند سوال ۱

۱۵ — خرداد ۹۰

$$p(۱): \frac{۱}{۲}=۲-\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \qquad (۰/۲۵)$$

فرض استقراء $P(K): \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۳}{۲^{۳}}+\ldots+\frac{k}{۲^{k}}=۲-\frac{k+۲}{۲^{k}} \qquad (۰/۲۵)$

حکم استقراء $P(K+۱): \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۳}{۲^{۳}}+\ldots+\frac{k}{۲^{k}}+\frac{k+۱}{۲^{k+۱}}=۲-\frac{k+۳}{۲^{k+۱}} \qquad (۰/۵)$

$$p(k+۱): \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۳}{۲^{۳}}+\ldots+\frac{k}{۲^{k}}+\frac{k+۱}{۲^{k+۱}}=۲-\frac{k+۲}{۲^{k}}+\frac{k+۱}{۲^{k+۱}}=۲+\frac{-۲k-۴+k+۱}{۲^{k+۱}}=۲-\frac{k+۳}{۲^{k+۱}}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۶ — شهریور ۹۰

$$P(1): 1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = 1 \qquad (0/25)$$

$$P(K): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + K^3 = \left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^2$$ فرض استقراء $(0/25)$

$$P(K+1): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + K^3 + (K+1)^3 = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^2$$ حکم استقراء $(0/25)$

$$P(K+1): \underbrace{\left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^2}_{(0/25)} + (K+1)^3 = \underbrace{(K+1)^2\left(\frac{K^2}{4} + K + 1\right)}_{(0/25)} =$$

$$(K+1)^2\left(\frac{K^2+4K+4}{4}\right) = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^2 \qquad (0/25)$$

۱۷ — دی ۹۰

$$P(1): \frac{1}{9\times 11} = \frac{1}{9\times 11} \qquad (0/25)$$

فرض استقراء $P(K): \frac{1}{9\times 11} + \frac{1}{11\times 13} + \frac{1}{13\times 15} + \dots + \frac{1}{(2K+7)(2K+9)} = \frac{K}{9(2K+9)}$ $(0/25)$

حکم استقراء $P(K+1): \frac{1}{9\times 11} + \frac{1}{11\times 13} + \frac{1}{13\times 15} + \dots + \frac{1}{(2K+7)(2K+9)} + \frac{1}{(2K+9)(2K+11)} = \frac{K+1}{9(2K+11)}$ $(0/25)$

$$P(K+1): \frac{K}{9(2K+9)} + \underbrace{\frac{1}{(2K+9)(2K+11)}}_{(0/25)} = \underbrace{\frac{K(2K+11)+9}{9(2K+9)(2K+11)}}_{(0/25)} =$$

$$\frac{2K^2+11K+9}{9(2K+9)(2K+11)} = \frac{(K+1)(2K+9)}{9(2K+9)(2K+11)} = \frac{K+1}{9(2K+11)} \qquad (0/25)$$

۱۸ — خرداد ۹۱

$p(1): 1+\sqrt{3} \geq 1+\sqrt{3}$ $(0/25)$ $\qquad p(2): (1+\sqrt{3})^2 \geq 1+2\sqrt{3}$

$p(k): (1+\sqrt{3})^k \geq 1+k\sqrt{3}$

$p(k+1): (1+\sqrt{3})^{k+1} \geq 1+(k+1)\sqrt{3}$ $(0/25)$

دو طرف فرض را در $1+\sqrt{3}$ ضرب می کنیم.

$(1+\sqrt{3})^k(1+\sqrt{3}) \geq (1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$ $(0/25)$

$(1+\sqrt{3})^{k+1} \geq (1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$

باید ثابت کنیم : $(1+k\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \geq 1+(k+1)\sqrt{3}$ $(0/25)$

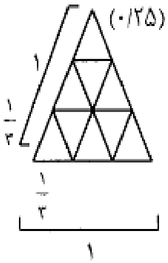
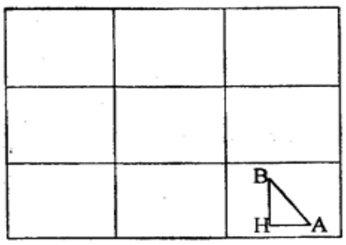
بدیهی است $\Rightarrow 1+\sqrt{3}+k\sqrt{3}+3k \geq 1+k\sqrt{3}+\sqrt{3} \Rightarrow 3k \geq 0$ $(0/25)$

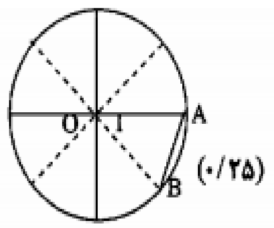
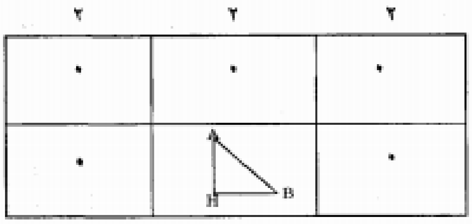
۱۹	$p(۱):۱\times ۲=۱^{۲}(۱+۱)$ (۰/۲۵) $p(k):۱\times ۲+۲\times ۵+...+k(۳k-۱)=k^{۲}(k+۱)$ (۰/۲۵) فرض استقراء $p(k+۱):۱\times ۲+۲\times ۵+...+k(۳k-۱)+(k+۱)(۳k+۲)=(k+۱)^{۲}(k+۲)$ (۰/۲۵) حکم استقراء طرف چپ حکم $=k^{۲}(k+۱)+\underset{(۰/۲۵)}{(k+۱)(۳k+۲)}=(k+۱)(k^{۲}+۳k+۲)=(k+۱)\underset{(۰/۵)}{(k+۱)(k+۲)}=$ $(k+۱)^{۲}(k+۲)$	شهریور ۹۱
۲۰	$P(۱):۲=۲(۱)^{۲}$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(K):۲+۴+۶+......+(۴k-۲)=۲k^{۲}$ (۰/۲۵) حکم استقراء $P(K+۱):۲+۴+۶+......+(۴k-۲)+(۴k+۲)=۲(k+۱)^{۲}$ (۰/۲۵) $P(K+۱):۲+۴+۶+......+(۴k-۲)+(۴k+۲)=۲k^{۲}+(۴k+۲)$ (۰/۲۵) $=۲(k^{۲}+۲k+۱)=۲(k+۱)^{۲}$ (۰/۲۵)	دی ۹۱
۲۱	$P(۱):۱^{۲}=\frac{۱(۱+۱)(۲+۱)}{۶}\Rightarrow ۱=۱$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(K):۱+۲^{۲}+۳^{۲}+......+k^{۲}=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$ (۰/۲۵) حکم استقراء $P(K+۱):۱+۲^{۲}+۳^{۲}+......+k^{۲}+(k+۱)^{۲}=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$ (۰/۲۵) $P(K+۱):۱+۲^{۲}+۳^{۲}+......+k^{۲}+(k+۱)^{۲}=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}+(k+۱)^{۲}=$ (۰/۲۵) $=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)+۶(k+۱)^{۲}}{۶}=\frac{(k+۱)(k(۲k+۱)+۶(k+۱))}{۶}=\frac{(k+۱)(k+۲)(۲k+۳)}{۶}$ (۰/۵)	خرداد ۹۲
۲۲	$P(۱):۱=\frac{۱(۱+۱)}{۲}\Rightarrow ۱=۱$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(K):۱+۲+۳+......+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$ (۰/۲۵) حکم استقراء $P(K+۱):۱+۲+۳+......+k+(k+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$ (۰/۲۵) $P(K+۱):۱+۲+۳+......+k+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)=$ (۰/۲۵) $=\frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$ (۰/۵)	شهریور ۹۲

۲۳	$P(۱): ۱ = (۱)^۲ \quad (۰/۲۵)$ فرض استقراء $P(K): ۱+۳+۵+......+(۲k-۱) = k^۲ \quad (۰/۲۵)$ حکم استقراء $P(K+۱): ۱+۳+۵+......+(۲k-۱)+(۲k+۱) = (k+۱)^۲ \quad (۰/۲۵)$ $P(K+۱): ۱+۳+۵+......+(۲k-۱)+(۲k+۱) = k^۲+(۲k+۱) \quad (۰/۵)$ $= (k^۲+۲k+۱) = (k+۱)^۲ (۰/۲۵)$	دی ۹۲
۲۴	ص۱۵ آزمون استقراء : $P(1): \frac{۱}{۱\times۲} = \frac{۱}{۱+۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵)$ درست است فرض استقراء : $P(k): \frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+.........+\frac{۱}{k(k+۱)} = \frac{K}{(K+۱)} \quad (۰/۲۵) \quad K \in N$ حکم استقراء : $p(k+۱): \frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+...+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{k+۱}{k+۲} \quad (۰/۲۵)$ به طرفین فرض $\frac{۱}{(K+۱)(K+۲)}$ را اضافه می‌کنیم : $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+...+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{K}{K+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(K+۲)} (۰/۲۵) =$ $\frac{k^۲+۲k+۱}{(k+۱)(K+۲)} (۰/۲۵) = \frac{(k+۱)^۲}{(K+۱)(k+۲)} = \frac{k+۱}{k+۲} \quad (۰/۲۵)$ پس حکم برقرار است.	شهریور ۹۳
۲۵	آزمون استقراء : $P(۱): ۲ = ۲\times۱^۲ \rightarrow ۲ = ۲ \quad (۰/۲۵)$ درست است فرض استقراء : $P(k): ۲+۶+۱۰+............+(۴k-۲) = ۲k^۲ \quad , \quad K \in N (۰/۲۵)$ حکم استقراء : $p(k+۱): ۲+۶+۱۰+.......+(۴k-۲)+(۴(k+۱)-۲) = ۲(k+۱)^۲ \quad (۰/۲۵)$ اثبات : طرف چپ حکم با توجه به فرض استقراء $= ۲k^۲ \ (۰/۲۵) + (۴k+۲) = ۲(k^۲+۲k+۱) \quad (۰/۲۵)$ $= ۲(k+۱)^۲ \quad (۰/۲۵)$ پس حکم برقرار است ص۱۴	دی ۹۳
۲۶	آزمون استقراء : $P(۱): ۷-۱ = ۶ = ۶\times۱$ که بر ۶ بخش پذیر است پس درست است. (۰/۲۵) فرض استقراء : $P(K): ۷^k - ۱ = ۶a \quad , k \in N \quad (۰/۲۵)$ ص ۱۵ حکم استقراء : $P(K+۱): ۷^{k+۱} - ۱ = ۶a' \quad (۰/۲۵)$ اثبات : طرفین فرض استقراءرا در۷ ضرب می کنیم $\Rightarrow ۷(۷^k - ۱) = ۷\times۶a \quad (۰/۲۵)$ $۷^{k+۱} - ۷ = ۷\times۶a \rightarrow ۷^{k+۱} - ۱ - ۶ = ۷\times۶a \quad (۰/۲۵)$ $\rightarrow ۷^{k+۱} - ۱ = ۶(۷a+۱) \quad (۰/۲۵) \quad = ۶a'$ بنابراین حکم برقرار است.	شهریور ۹۴

۱	$P(۲): ۱+\sqrt{۲} > ۲$ (۰/۲۵) فرض استقراء $P(k): ۱+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{k} > k$ (۰/۲۵) حکم استقراء $P(k+۱): ۱+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+۱} > k+۱$ (۰/۲۵) به طرفین فرض $\sqrt{k+۱}$ را اضافه می کنیم (۰/۲۵) $۱+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{k}+\sqrt{k+۱} > \underbrace{k+\sqrt{k+۱} \overset{?}{>} k+۱}_{\sqrt{k+۱} > ۱}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ این گزاره همواره درست چون $k \geq ۲$ است ، پس حکم برقرار می باشد. (۰/۲۵)	شهریور ۸۹
۲	$p(۷): ۷! > ۳^۷$ (۰/۲۵) $p(k): K! > ۳^k$ (۰/۲۵) $P(k+۱): (k+۱)! > ۳^{k+۱}$ (۰/۲۵) دو طرف فرض را در $K+۱$ ضرب می کنیم. $K!(k+۱) > ۳^k(k+۱)$ (۰/۲۵) $(k+۱)! > ۳^k(k+۱)$ (۰/۲۵) باید ثابت کنیم: $۳^k(k+۱) > ۳^{k+۱}$ (۰/۲۵) $۳^k(k+۱) > ۳^k \times ۳ \rightarrow (k+۱) > ۳$ (۰/۲۵) باتوجه به اینکه $k > ۶$ است درستی عبارت فوق بدیهی است. (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۳	ص ۱۱ آزمون استقراء: $n = ۱$: $\frac{۱}{۲} = ۱-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ درست است (۰/۲۵) فرض استقراء: $n = k$: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^K} = ۱-\frac{۱}{۲^K}$ (۰/۲۵) حکم استقراء: $n = k+۱$: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^K}+\frac{۱}{۲^{K+۱}} = ۱-\frac{۱}{۲^{K+۱}}$ (۰/۲۵) به طرفین فرض استقراء $\frac{۱}{۲^{K+۱}}$ را اضافه می نماییم. $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^K}+\frac{۱}{۲^{K+۱}} = ۱-\frac{۱}{۲^K}+\frac{۱}{۲^{K+۱}}$ (۰/۲۵) $= ۱-\frac{۲}{۲^{K+۱}}+\frac{۱}{۲^{K+۱}}$ (۰/۲۵) $= ۱-\frac{۱}{۲^{K+۱}}$ (۰/۲۵) بنابراین حکم استقراء برقرار است .	خرداد ۹۴

اصل لانه کبوتری

۱	r مجموعهٔ باقیمانده های هر عدد طبیعی بر ۱۵ است (با ۱۵ عضو) $r=\{۰,۱,۲,۳,....,۱۴\}$ (۰/۲۵) اگر اعضاء s را به منزلهٔ کبوتر و اعضا r را به منزلهٔ لانهٔ کبوتر در نظر بگیریم ۱۵)۱۰۰(طبق اصل لانهٔ کبوتر (۰/۲۵) $۱۰۰ \mid \underline{۱۵}$ ، ۶ (۰/۲۵) $۶+۱=۷$ (۰/۲۵) پس حداقل ۷ عدد از این ۱۰۰ عدد طبیعی دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۱۵ هستند .	خرداد۸۵
۲	دوازده ماه سال را لانه های کبوتر در نظر می گیریم برای اینکه در یکی از لانه ها ٦ کبوتر باشد باید در هر لانه حداقل ۵ کبوتر و در یکی از لانه ها ٦ کبوتر داشته باشیم (۰/۲۵) $۵\times۱۲=۶۰$ (۰/۲۵) $۶۰+۱=۶۱$ (۰/۲۵) پس حداقل این مدرسه باید ٦١ دانش آموز داشته باشد (۰/۲۵)	شهریور ۸۵
۳	 اضلاع مثلث رابه ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و مثلث اصلی را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۳}$ تقسیم می کنیم(۰/۲۵)در این صورت ۱۰ نقطه را به منزلهٔ کبوتر و ۹ مثلث ایجاد شده را به منزلهٔ لانهٔ کبوتر در نظر می گیریم که ۹<۱۰ (۰/۲۵) پس طبق اصل لانه کبوتر اگر هر نقطه داخل یک مثلث قرار گیرد باید نقطه دهم هم داخل یکی از مثلث ها قرار بگیرد پس حداقل فاصلهٔ ۲ نقطه از این ۱۰ نقطه کمتر از $\frac{۱}{۳}$ است (۰/۲۵)	دی ۸۵
۴	بنابر اصل لانه کبوتری ده نقطه را به منزله ده کبوتر و ۹ قسمت را به عنوان لانه در نظر می گیریم چون ۹ < ۱۰ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است. (۰/۲۵)  (۰/۲۵) $(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲$ $(AB)^۲<\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}$ (۰/۲۵) $(AB)^۲<\frac{۲}{۹}$ $AB<\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ (۰/۲۵)	خرداد۸۶
۵	اگر تعداد میهمان ها را کبوتر و تعداد روزهای هفته را لانه در نظر بگیریم (۰/۲۵) حداقل ۶ نفر هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است . (۰/۲۵) $۳۹=۵\times۷+۴$ $۵+۱=۶$ (۰/۲۵)	شهریور ۸۶

۶	طبق اصل لانه کبوتری ۴۰۰ نفر را تعداد کبوترها و ۷ روز هفته را تعداد لانه ها در نظر می گیریم (۰/۲۵) m = ۴۰۰ کبوتر n = ۷ لانه $۴۰۰ \div ۷ = ۵۷$ ، باقیمانده ۱ (۰/۲۵) $\rightarrow ۵۷ + ۱ = ۵۸$ نفر (۰/۵)	دی ۸۶
۷	m = ۵۰ کبوتر n = ۳ لانه (رشته ها) (۰/۲۵) $۵۰ = ۳ \times ۱۶ + ۲$ (۰/۲۵) $۱۶ + ۱ = ۱۷$ حد اقل هم رشته اند m = ۱۷ کبوتر n = ۴ لانه (شهرها) (۰/۲۵) $۱۷ = ۴ \times ۴ + ۱$ (۰/۲۵) $۴ + ۱ = ۵$ حداقل هم شهری اند طبق اصل لانه ی کبوتری حد اقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند (۰/۲۵) (روش دوم) m = ۵۰ کبوتر n = ۳ × ۴ = ۱۲ لانه (۰/۵) $۵۰ = ۴ \times ۱۲ + ۲$ $۴ + ۱ = ۵$ (۰/۵) شهر رشته طبق اصل لانه ی کبوتری حد اقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند (۰/۲۵)	خرداد ۸۷
۸	$O_۱ = ۴۵^\circ$ $\hat{A} = \frac{۱۸۰ - ۴۵}{۲} = ۶۷/۵ \Rightarrow \hat{A} > \hat{O}_۱ \rightarrow OB = OA > AB$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) n = ۸ لانه m = ۹ کبوتر $\rightarrow ۹ > ۸$ (۰/۲۵)  پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است که فاصله‌ی آنها از OA = ۱ کمتر می‌باشد. (۰/۲۵)	شهریور ۸۷
۹	٦ = تعداد لانه ها ۷= تعداد کبوترها (۰/۲۵) بر طبق اصل لانه کبوتری حد اقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار می گیرند (۰/۲۵)  شکل (۰/۲۵) $AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ < ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < ۲\sqrt{۲}$ (۰/۵)	دی ۸۷

۱۰

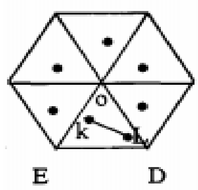
خرداد ۸۸

تعداد کبوترها = ۷ نقطه

تعداد لانه ها = ۶ مثلث (۰/۲۵)

بر طبق اصل لانه کبوتر (۰/۲۵) ، ($۶ > ۷$) یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد

که درون مثلثی قرار دارد . (۰/۲۵) $kL < OD \Rightarrow kL < ۱$



(۰/۲۵)

۱۱

شهریور ۸۸

نام خانوادگی و نام

$۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$: تعداد لانه ها (۰/۵)

آزمون شرکت کننده در ۱۰۲۵ : تعداد کبوترها (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $۱۰۲۵ > ۱۰۲۴$ $\Rightarrow$

$۱۰۲۵ = ۱ \times ۱۰۲۴ + ۱$ (۰/۲۵)

بر طبق اصل لانه کبوتر (۰/۲۵) حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف اول نام و نام خانوادگی آن ها یکسان باشد. (۰/۲۵)

۱۲

دی ۸۸

عدد طبیعی ۲۲ = تعداد کبوترها

تعداد لانه ها = باقیمانده بر ۶ = $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ (۰/۲۵)

$۲۲ = ۳ \times ۶ + ۴ \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} ۲۲ & ۶ \\ \hline ۱۸ & ۳+۱=۴ \\ \hline ۴ & \end{array}$$

(۰/۲۵)

بر طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۴ عدد باقیمانده یکسانی را دارند. (۰/۵)

۱۳

خرداد ۸۹

لانه = ۷ روز هفته و کبوتر = ۳۹ نفر (۰/۲۵)

محاسبه (۰/۵) $۳۹ = ۵ \times ۷ + ۴ \Rightarrow ۵ + ۱ = ۶$

بر طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۶ نفر روز تولدشان در یک روز هفته یکسان است. (۰/۲۵)

۱۴

شهریور ۸۹

۲۷ عضو مجموعه A = تعداد کبوترها ، $\{۰ , ۱ , \cdots , ۲۵\}$ = باقیمانده های تقسیم بر ۲۶ = تعداد لانه ها

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$۲۷ > ۲۶$ بر طبق اصل لانه کبوتر حتماً حداقل دو عدد باقیمانده یکسانی بر ۲۶ را دارند. (۰/۲۵)

۱۵

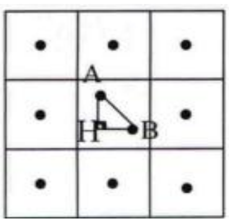
دی ۸۹

بر طبق اصل لانه کبوتر ، ۱۰ نقطه = تعداد کبوترها و ۹ مربع = تعداد لانه ها

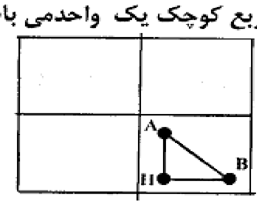
$۱۰ > ۹$ پس حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار دارند. (۰/۲۵)

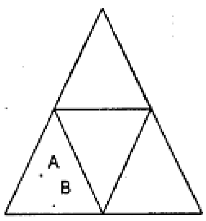
$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ < \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۲}{۹} \rightarrow AB < \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

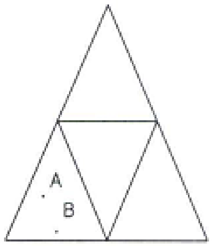
(۰/۲۵) (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

۱۶	مجموعه ۶۵ عضوی =S = تعداد کبوتر ها (۰/۲۵) ، باقیمانده های تقسیم بر ۱۶= {۰،۱،۲، ....، ۱۵} = تعداد لانه ها(۰/۲۵) برطبق اصل لانه‌کبوتر(۰/۲۵) ، $۶۵ = ۴ \times ۱۶ + ۱ \Rightarrow ۴ + ۱ = ۵$ (۰/۲۵) پس حداقل ۵ عضو باقیمانده ی یکسانی بر ۱۶ دارند.	خرداد ۹۰
۱۷	هر مجموعه A که ۶ عضوی انتخاب شود ، ۶ عضو = تعداد کبوترها (۰/۲۵) تعداد حالاتی که ۱۰ ایجاد می شود با استفاده از اعداد تکراری یا اعداد بی تکرار (۵ حالت) یا (۴ حالت) = تعداد لانه ها (۰/۵) { (۱ ,۹) , (۲ ,۸), (۳ ,۷) , (۴,۶)(۵,۵) } یا { (۱ ,۹) , (۲ ,۸), (۳ ,۷) , (۴,۶) } بر طبق اصل لانه کبوتر ۶>۵ یا ۶>۴ پس حداقل دو عضو با مجموع ۱۰ وجود دارد. (۰/۵)	شهریور ۹۰
۱۸	۳۱ نفر = کبوترهای مسئله(۰/۲۵)و۳ گروه خونی A یا B یا O = لانه های مسئله (۰/۲۵)، $۳۱ = ۳ \times ۱۰ + ۱$ (۰/۲۵) بر طبق اصل لانه کبوتر حد اقل $۱۱ = ۱ + ۱۰$ نفر گروه خونی یکسانی را خواهند داشت . (۰/۲۵)	دی ۹۰
۱۹	هر عدد یک کبوتر (۰/۲۵) $m = ۵۰$ هر باقیمانده بر ۲۴ یک لانه (۰/۲۵) $n = ۲۴$ طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) $۵۰ = ۲ \times ۲۴ + ۲$ پس حداقل در یکی از لانه ها (۰/۲۵) $۲ + ۱ = ۳$ کبوتر خواهد بود. یعنی حداقل ۳ عدد باقیمانده یکسان بر ۲۴ دارند.	خرداد ۹۱
۲۰	m= تعداد کبوتر = ۶۰۱ (۰/۲۵) $۶۰۱ = ۵۰ \times ۱۲ + ۱$ (۰/۲۵) n= تعداد لانه = ۱۲ طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها ۵۱=۱+۵۰ کبوتر خواهد بود(۰/۲۵) ، یعنی حداقل ۵۱ دانش آموز ماه تولد یکسان را دارند. (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۲۱	سطح مربع را به ٤ مربع مساوی تقسیم می کنیم. ٤ مربع را ٤لانه و ٥ نقطه را ٥کبوتر در نظر می گیریم(۰/۲۵) ~~بنابر اصل لانه~~ کبوتری حداقل دو ~~تا~~ از نقطه ها به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵) طول هر ضلع مربع کوچک یک واحدمی باشد .با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید: $(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲$ (۰/۲۵) $(AB)^۲ < ۱^۲ + ۱^۲ \Rightarrow (AB)^۲ < ۲ \Rightarrow AB < \sqrt{۲}$ (۰/۲۵) 	دی ۹۱

۲۲	تکراری همانند سوال ۲۱	خرداد ۹۲
۲۳	اگر ۳۰ نفر دانش آموز به منزله کبوتران و روزهای هفته به منزله لانه ها باشند (۰/۲۵) $\begin{array}{r\|l} ۳۰ & ۷ \\ \underline{۲۸} & ۴ \\ ۲ & \end{array} \Rightarrow$ ۴+۱= ۵ (۰/۵) بنا به اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر از دانش آموزان در یک روز هفته متولد شده اند. (۰/۵)	شهریور ۹۲
۲۴	سطح مثلث را به ۴ مثلث مساوی تقسیم می کنیم. ۴ مثلث را ۴لانه و ۵ نقطه را ۵کبوتر در نظر می گیریم(۰/۲۵) بنابر اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مثلث های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵) طول هر ضلع مثلث کوچک $\frac{۱}{۲}$ می باشد .بنابر این حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\frac{۱}{۲}$است. (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	دی ۹۲
۲۵	تعداد کبوتر =m n= تعداد لانه = ۱۲ طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها ۱۳=۱+۱۲ کبوتر است.(۰/۲۵) و هچنین $m=(۱۲\times۱۲)+۱=۱۴۵$ (۰/۲۵) بنابراین در این مدرسه حداقل ۱٤٥ دانش آموزوجود دارد (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۲۶	می‌دانیم مجموعه باقیمانده های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به صورت $\{۰,۱,۲,.....,۳۸\}$ است. (۰/۲۵) اگر اعضای S (۴۰نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم $(۴۰ > ۳۹)$ (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۹ است . (۰/۲۵) ص۳۱	شهریور ۹۳

۲۷	تکراری همانند سوال ۲۱	دی ۹۳
۲۸	۳۰ دانش آموز: ۳۰ کبوتر ۴ فصل سال : ۴ لانه (۰/۲۵) طبق اصل لانه کبوتری(۰/۲۵) ، $\begin{array}{r\|l} ۳۰ & ۴ \\ \underline{۲۸} & ۷ \\ ۲ & \end{array}$ حداقل ۸=۱+۷ دانش‌آموز در یک فصل از سال متولد شده اند. (۰/۲۵) ص ۳۳	خرداد ۹۴
۲۹	سطح مثلث را به ۴ مثلث مساوی تقسیم می کنیم. ۴ مثلث را ۴لانه و ۵ نقطه را ۵کبوتر در نظر می گیریم(۰/۲۵) بنابر اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مثلث های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵) طول هر ضلع مثلث کوچک ۱ می باشد .بنابر این حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از ۱ است. (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵) ص ۳۳	شهریور ۹۴

تهیه کننده :احمد عچرش کلاس سوم ریاضی دبیرستان امام حسین (ع) باوی