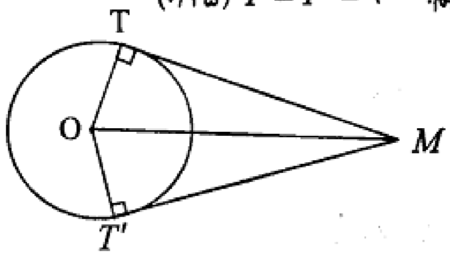
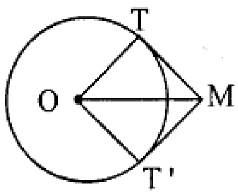
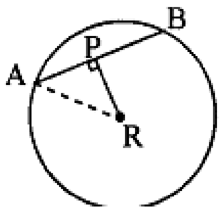
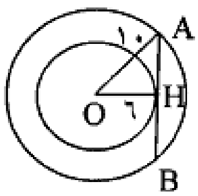
جواب سوالات موضوعی نهایی فصل دوم هندسه ۲ پایه سوم ریاضی فیزیک

فصل دوم هندسه ۲

زاویه مرکزی ،وتر ومماس

۱	چون شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می گیریم: $\hat{T}=\hat{T}'=90^\circ$ (۰/۲۵)  $\begin{cases}\hat{T}=\hat{T}'=90^\circ\\ OT=OT' \quad (0/5)\\ OM=OM\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OMT}\cong\overset{\Delta}{OMT'}$ $\Rightarrow MT=MT'$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۳
۲	الف) $\overset{\Delta}{OTM}: \quad OT\perp MT \Rightarrow O\hat{T}M=90^\circ$ (۰/۲۵) $\Rightarrow MT=\sqrt{OM^2-OT^2}=\sqrt{50-25}=5$ (۰/۲۵) ب) $\Rightarrow MT=MT'=5$ (۰/۲۵) $\left.\begin{array}{l}MT=MT'=OT=OT'=5\\ T=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow OTMT'$ مربع است (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۳	$\overset{\Delta}{APR}: \hat{P}=90^\circ \Rightarrow AR^2=AP^2+PR^2 \quad \Rightarrow 100=36+AP^2$ $\Rightarrow AP=8$ (۰/۵) چون شعاع عمود بروتر، وتر را نصف می کند (۰/۲۵) پس AB= ۱۶ (۰/۲۵)  	دی ۹۳
۴	AB وتری از دایره ی بزرگتر بر دایره ی کوچکترمماس است . بنابراین شعاع OH بر AB عمود است. بنابراین AH=HB(۰/۲۵) پس $AH^2=OA^2-OH^2 \to AH^2=10^2-6^2$ (۰/۲۵) $\to AH^2=64 \to AH=8 \xrightarrow{(0/25)} AB=16$ (۰/۲۵)  	شهریور ۹۱

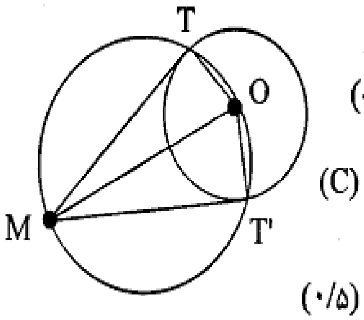
۵

نقطهٔ M را به O مرکز دایرهٔ (C) وصل کرده ، دایرهٔ به قطر OM را رسم می کنیم.

تادایرهٔ(C) را درنقاط T و T' قطع کند . زاویه های $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = 90^\circ$ (۰/۲۵)

زیرا زاویه های محاطی و روبه رو به قطر هستند(۰/۲۵) پس در نتیجه

MT در نقطهٔ T و MT' در نقطهٔ T' بر دایرهٔ (C) مماسند . (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۵)

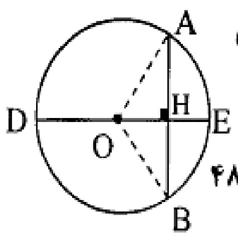
خرداد ۹۲

۶

برهان: از مرکز دایره به نقاط A و B وصل می کنیم . (۰/۲۵)در مثلث متساوی الساقین $\overset{\triangle}{OAB}$

می دانیم ارتفاع OH نیمساز رأس $\hat{O}$ (۰/۲۵)و میانه ضلعAB نیز است. (۰/۲۵) بنابراین :

$AH = HB$ و $A\hat{O}E = B\hat{O}E$ بنابراین : $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$ (۰/۲۵) .



ص ۴۸

شهریور ۹۴

۷

فرض می کنیم مساله حل شده باشد و M یکی از نقطه هایی باشد که از آن ، دو مماس

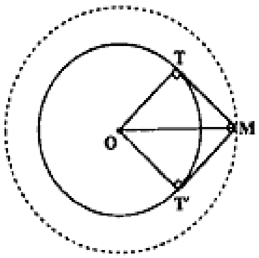
عمود برهم MT و MT' بر دایره ی $C(O,R)$ را ر سم شده است. از O به نقطه های

تماس T و T' و صل می کنیم. چهار ضلعی $OTMT'$ مر بع است.(۰/۲۵)

زیرا چها ر زاویه ی قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند .

$(OT = OT' = R)$ (۰/۲۵)دراین مربع $OM = R\sqrt{2}$ (۰/۲۵) مقدار ثابتی است.

مکان هندسی نقطه ی M دایره ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ است. (۰/۲۵)



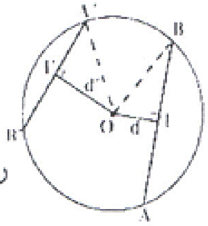
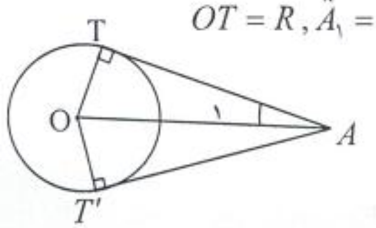
رسم شکل (۰/۲۵)

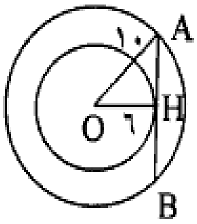
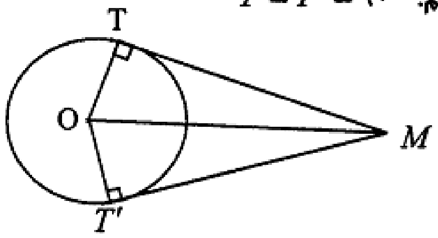
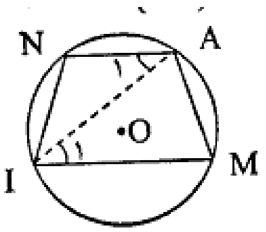
خرداد ۹۲

۸

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases} OQ = OR \\ GQ = GP \end{cases} \\ \begin{cases} YS = YP \\ LS = LR \end{cases}\end{array}\right\} (0/5) \Rightarrow \begin{array}{l} OQ + GQ + YS + LS = OR + GP + YP + LR\ (0/5) \\ \Rightarrow OG + YL = OL + GY\ (0/25) \end{array}$$

خرداد ۹۲

دی ۹۱	برهان: از مرکز دایره عمودهای OH و OH' را به وترهای $AB=l$ و $A'B'=l'$ وارد می کنیم . می دانیم شعاع عمود بریک وتر آن رانصف می کند ($OH=d$ و $OH'=d'$)  رسم شکل (۰/۲۵) $\overset{\Delta}{OHB}: OB^2=OH^2+HB^2 \Rightarrow R^2=d^2+\frac{l^2}{4}$ (۰/۲۵) $\overset{\Delta}{OH'A'}: OA'^2=OH'^2+H'A'^2 \Rightarrow R^2=d'^2+\frac{l'^2}{4}$ $l>l' \Leftrightarrow l^2>l'^2$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow R^2-\frac{l^2}{4}<R^2-\frac{l'^2}{4}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow d^2<d'^2 \Leftrightarrow d<d'$ (۰/۲۵) (درصورتی که اثبات یک طرفه نوشته شده باشد (۰/۲۵)کسرشود.)	۹
دی ۹۲	می دانیم که طول مماس های رسم شده از نقطه ای خارج یک دایره با هم برابر است . محیط مثلث $= AB+AC+BC = AB+AC+\underbrace{BD+DC}_{(0/25)} = AB+AC+BE+CF$ (۰/۵) بنابراین محیط مثلث ABC مستقل از نقطه ی D بوده و مقدار آن ثابت است . $= \underbrace{AE+AF}_{(0/25)} = 2AE$	۱۰
دی ۹۱	تکراری همانند سوال ۹	۱۱
دی ۹۱	$OT=R\,,\ \hat{A}_1=30$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OT=\frac{OA}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OA=2R \Rightarrow OA=10$ (۰/۲۵)  	۱۲
دی ۹۱	$2x=y$ $2(3x+10)+4x=360^\circ$ (۰/۵) $\Rightarrow 10x=340 \Rightarrow x=34^\circ$ (۰/۲۵) و $y=68^\circ$ (۰/۲۵)	۱۳

۱۴	AB وتری از دایره ی بزرگتر بر دایره ی کوچکترمماس است . بنابراین شعاع OH بر AB عمود است. بنابراین AH=HB (۰/۲۵) پس  $AH^2=OA^2-OH^2 \to AH^2=10^2-6^2$ (۰/۲۵) $\to AH^2=64 \to AH=8 \xrightarrow{(0/25)} AB=16$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۱۵	چون شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می گیریم: $T=T'=90°$  $\begin{cases} \hat{T}=\hat{T}'=90° \\ OT=OT' \\ OM=OM \end{cases}$ (۰/۵) $\Rightarrow \overset{\Delta}{OMT} \cong \overset{\Delta}{OMT'}$ $\Rightarrow MT=MT'$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۱۶	از A به I وصل می کنیم (۰/۲۵) با توجه به رابطه ی $AM=NI$ نتیجه می گیریم $\widehat{NI}=\widehat{AM}$ (۰/۲۵)  داریم : زاویه محاطی(۰/۵) $\begin{cases} \hat{A}_1=\frac{\widehat{NI}}{2} \\ \hat{I}_1=\frac{\widehat{AM}}{2} \end{cases} \longrightarrow \hat{A}_1=\hat{I}_1$ (۰/۲۵) طبق عکس قضیه خطوط موازی و خط مورب $AM \parallel NI$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۱۷	تکراری همانند سوال۶	شهریور ۹۴
۱۸	الف) متداخل (۰/۲۵) ب) مماس برون(۰/۲۵)	دی ۹۰
۱۹	الف) $\frac{2x+1+3x+4}{2}=90°$ (۰/۲۵) $\to 5x+5=180 \Rightarrow x=35°$ (۰/۲۵) ب) $x^2=4\times 9$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=6$ (۰/۲۵)	دی ۹۰
۲۰	تکراری همانند سوال ۱	شهریور ۹۳

۲۱

تکراری همانند سوال ۱

شهریور ۹۳

۲۲

الف) $\begin{cases} ۲x+۳x+۴x=۳۶۰(۰/۲۵) \Longrightarrow x=۴۰(۰/۲۵) \\ y=\dfrac{۴x}{۲}(۰/۲۵) \Rightarrow y=۲x \Rightarrow y=۸۰(۰/۲۵) \end{cases}$

ب) $۴\times۱۲=z(z-۲) \quad (۰/۵)$

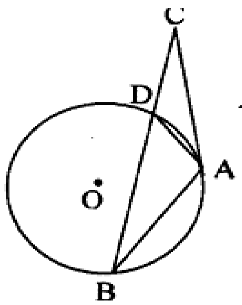
$z^{۲}-۲z-۴۸=۰ \Rightarrow (z-۸)(z+۶)=۰(۰/۲۵) \Rightarrow$

$z=۸ \quad ,z=-۶ \Rightarrow z=۸$ ق ق $(۰/۲۵)$

دی ۹۳

خط های قاطع ومماس نسبت به دایره

۱



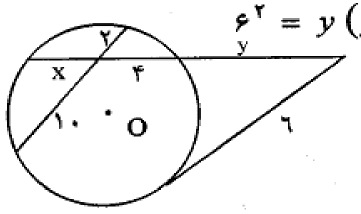
$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} AC=AB \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \quad (۰/۲۵) \\ \hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \quad \text{محاطی} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow D\hat{A}C=\hat{C} \Rightarrow DC=DA \quad (۰/۲۵) \\ D\hat{A}C=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \quad \text{ظلی} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$

خرداد ۹۱

۲

$۴\times x=۲\times۱۰(۰/۲۵) \Rightarrow x=۵ \quad (۰/۲۵)$

$۶^{۲}=y(y+۹)(۰/۲۵) \Rightarrow y^{۲}+۹y-۳۶=۰ \Rightarrow y=۳(۰/۲۵)$

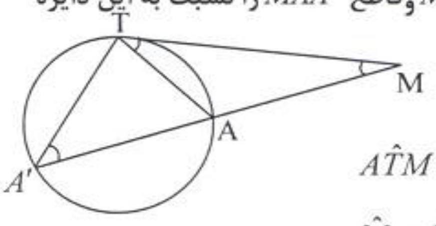


شهریور ۹۳

۳

برهان: دایره ی C و نقطه ی M را خارج آن درنظر می گیریم .مماس MT وقاطع MAA' را نسبت به این دایره رسم می کنیم،از T به A و A' وصل می کنیم.

دو مثلث $\overset{\Delta}{MAT}$ و $\overset{\Delta}{MA'T}$ متشابهند زیرا :



رسم شکل (۰/۲۵)

$\left.\begin{array}{l} A\hat{T}M=A\hat{A'}T=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \hat{M}=\hat{M} \end{array}\right\} (۰/۲۵) \Rightarrow \dfrac{MT}{MA}=\dfrac{MA'}{MT} \quad (۰/۲۵)$

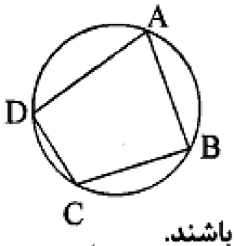
$\Rightarrow MT^{۲}=MA.MA' \quad (۰/۲۵)$

دی ۹۱

وضع دو دایره نسبت به هم

زاویه محاطی

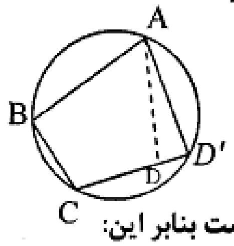
۱ — شهریور ۹۱



باتوجه به قضیه ی زاویه ی محاطی داریم:

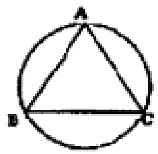
$$\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}\xrightarrow{(۰/۲۵)}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

به روش مشابه ثابت می شود $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)



عکس قضیه:فرض کنیم در چهار ضلعی ABCD، هردو زاویه ی روبه رو مکمل یکدیگر باشند.
یعنی (۱) $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و (۲) $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ بر سه نقطه ی BوA وCیک دایره می گذرد ، (۰/۲۵)ثابت می کنیم که این دایره از نقطه ی D نیز می گذرد.
اثبات(برهان خلف):اگر این دایره از راس D نگذرد،نقطه ی برخورد خط CD با دایره را D' می نامیم (۰/۲۵)واز D' به A وصل می کنیم.چون چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است بنابر این:
(۳) $\hat{B}+\hat{D}'=۱۸۰^\circ$ از رابطه (۲)و(۳)نتیجه می شود که(۴) $\hat{D}=\hat{D}'$ (۰/۲۵)چون زاویه ی D زاویه خارجی مثلث ADD'است،بنابراین:(۵) $\hat{D}>\hat{D}'$ که رابطه ی (۵) با رابطه ی(۴) در تناقض است. (۰/۲۵)در نتیجه فرض ما که دایره از راس D نمی گذردنادرست ،وحکم قضیه برقرار است.

۲ — دی ۹۰



$\hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$ و $\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$ و $\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$ (۰/۲۵)

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}) \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ)=۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

زاویه ظلی

۱ — خرداد ۹۰

زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم قطر AD از این دایره را رسم می کنیم و از D به نقطه B وصل می نمائیم (۰/۲۵)زاویه ی $A\hat{B}D$ محاطی روبرو به قطر مساوی ۹۰° است پس

(۱) $A\hat{D}B+D\hat{A}B=۹۰$ (۰/۲۵) از طرفی (۲) $D\hat{A}B+B\hat{A}T=۹۰^\circ$ (۰/۲۵)

از رابطه (۱)و(۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T=A\hat{D}B$ (۰/۲۵) اما می دانیم $A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ پس $B\hat{A}T=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ (۰/۲۵)

۲ — شهریور ۹۰

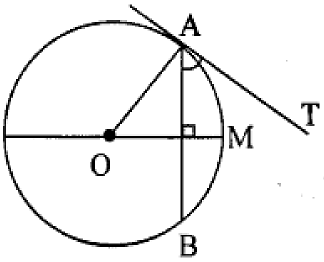
(توجه : به اصلاحیه پایان راهنمای تصحیح توجه شود.) الف) $\widehat{BC} + ۱۰۰° + ۷۰° = ۳۶۰° \xrightarrow{(۰/۲۵)} \widehat{BC} = ۱۹۰°$

(زاویه ظلی) $\hat{x} = \frac{\widehat{BC}}{۲} \xRightarrow{(۰/۲۵)} \frac{۱۹۰°}{۲} = ۹۵° \ (۰/۲۵)$

ب) $۴\left(۴ + x\right) = ۳\left(۳ + ۵\right) \xRightarrow{(۰/۲۵)} ۴ + x = ۶ \xRightarrow{(۰/۲۵)} x = ۲$

---

۳ — خرداد ۹۳



زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم شعاع OA از این دایره را رسم می کنیم .
می دانیم شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است . پس

$(۰/۲۵) \quad O\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰° \quad (۱)$

قطر عمود بر هر وتر ، آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف میکند .

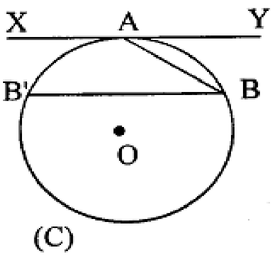
پس $\widehat{AM} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵)واندازه زاویه مرکزی $A\hat{O}M = \widehat{AM} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵) (۲)

از طرفی (۳) (۰/۲۵) $O\hat{A}B + A\hat{O}M = ۹۰°$

از رابطه (۱)و(۳) نتیجه می شود $B\hat{A}T = A\hat{O}M$ (۰/۲۵) با توجه به (۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵)

---

۴ — شهریور ۹۳



A را B وصل می کنیم زاویه ی BAY ظلی و زاویه ی ABB′ محاطی هستند بنا بر این

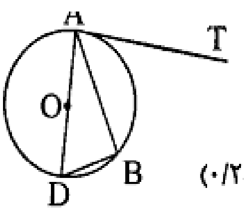
$A\hat{B}B' = \frac{\widehat{AB'}}{۲} (۰/۲۵), \quad B\hat{A}Y = \frac{\widehat{AB}}{۲} (۰/۲۵)$

باتوجه به فرض BB′ || XY و AB مورب، پس

$A\hat{B}B' = B\hat{A}Y (۰/۲۵) \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AB'} (۰/۲۵)$

---

۵ — دی ۹۳



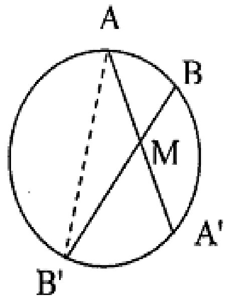
رسم شکل (۰/۲۵)

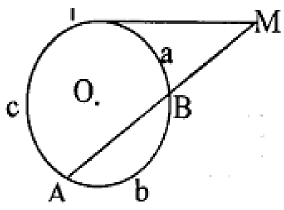
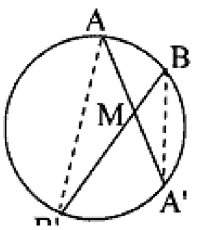
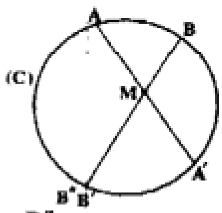
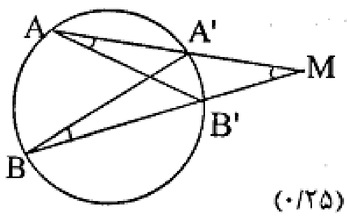
زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم
قطر AD از این دایره را رسم می کنیم و از D به نقطه B وصل می نمائیم. (۰/۲۵)
زاویه ی $A\hat{B}D$ محاطی روبرو به قطر مساوی °۹۰ است پس

(۱) (۰/۲۵) $A\hat{D}B + D\hat{A}B = ۹۰$ از طرفی (۲) (۰/۲۵) $D\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰°$

از رابطه (۱)و(۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T = A\hat{D}B$ (۰/۲۵) اما می دانیم $A\hat{D}B = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵) پس $B\hat{A}T = \frac{\widehat{AB}}{۲}$

۶	چون اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی مساوی نصف اندازهٔ کمان رو به روی آن است.:(۰/۲۵) پس داریم: $A\hat{T}X = \frac{AT}{۲} \to ۲\alpha - ۶ = \frac{۳\alpha + ۳۳}{۲}$ (۰/۲۵) $\to \alpha = ۴۵^\circ$ (۰/۲۵) [redacted] ص۶۱ $\Rightarrow A\hat{T}X = ۸۴^\circ$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
	کمان درخور یک زاویه	
۱	الف) به قطر AB (۰/۲۵)	خرداد ۹۴
۲	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} R = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵} = ۱$ (۰/۲۵) $OH = R\lvert\cos\alpha\rvert \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} OH = ۱\lvert\cos ۴۵\rvert = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
۳	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \xRightarrow{(۰/۲۵)} R = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = ۳$ (۰/۲۵) $OH = R\lvert\cos\alpha\rvert \xRightarrow{(۰/۲۵)} OH = ۳\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (./۲۵)	شهریور ۹۰
۴	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow R = \frac{۴}{۲\sin ۳۰} = ۴$ (۰/۲۵) $OH = R\lvert\cos\alpha\rvert$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OH = ۴\lvert\cos ۳۰\rvert = ۲\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۵	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} R = \frac{۶}{۲\sin ۳۰} = ۶$ (۰/۲۵) $OH = R\lvert\cos\alpha\rvert \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} OH = ۶\lvert\cos ۳۰\rvert = ۳\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۳
	زاویه بین دو وتر	

۱	الف) $\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۸۴\\ \frac{x-y}{۲}=۲۲\end{cases}\xrightarrow{(۰/۵)}\begin{matrix}x=۱۰۶\\ y=۶۲\end{matrix}$ (۰/۵) ب) $z^۲=۴\times ۹\,(۰/۲۵)\rightarrow z=۶(۰/۲۵)$	دی ۹۲
۲	$۵۰^\circ=\frac{z-t}{۲}(۰/۲۵)\Rightarrow z-t=۱۰۰^\circ$ و $۷۰^\circ=\frac{z+t}{۲}(۰/۲۵)\Rightarrow z+t=۱۴۰^\circ$ $\Rightarrow t=۲۰^\circ(۰/۲۵)$ و $z=۱۲۰^\circ(۰/۲۵)$	خرداد ۹۰
۳	(الف) $\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۸۰\\ \frac{x-y}{۲}=۲۰\end{cases}\xrightarrow{(۰/۵)}\begin{matrix}x+y=۱۶۰\\ x-y=۴۰\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}x=۱۰۰\\ y=۶۰\end{matrix}$ (۰/۵) (ب) $x(x+۳۲)=۱۰\times ۳۲\xrightarrow{(۰/۲۵)}x^۲+۳۲x-۳۲۰=۰\rightarrow\begin{cases}x=۸ & (\text{ق ق})(۰/۲۵)\\ x=-۴۰ & (\text{غ ق ق})\,(۰/۲۵)\end{cases}$	شهریور ۹۱
۴	ب) $۴\left(۴+x\right)=۳\left(۳+۵\right)\xRightarrow{(۰/۲۵)}۴+x=۶\xRightarrow{(۰/۲۵)}x=۲$	شهریور ۹۰
۵	برهان :پاره خط 'AB رارسم می کنیم . زاویه ی AMB زاویه ی خارجی مثلث 'AMBاست. (۰/۲۵)  پس: (۰/۲۵) $\hat{AMB}=A\hat{B'}M+B'\hat{A}M$ $\hat{AMB}=A\hat{B'}B+A'\hat{A}B'$ وچون: (۰/۲۵) $A\hat{B'}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ و $A'\hat{A}B'=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$ بنابراین حکم ثابت شد.	شهریور ۹۰
۶	$\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۷۰\\ \frac{x-y}{۲}=۳۰\end{cases}\xrightarrow{(۰/۵)}\begin{matrix}x+y=۱۴۰\\ x-y=۶۰\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}x=۱۰۰\\ y=۴۰\end{matrix}$ (۰/۵)	خرداد ۹۰

۷	 $\begin{cases} b=۴a \\ c=۵a \\ a+b+c=۳۶۰.(۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow ۱۰a=۳۶۰ \Rightarrow a=۳۶(۰/۲۵), c=۱۸۰(۰/۲۵)$ $M=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۴۴}{۲}=۷۲(۰/۲۵)$ ص ۷۳	خرداد ۹۴
	رابطه طولی در دایره	
۱	برهان: از A به 'B واز B به 'A وصل می کنیم،دو مثلث 'AMB و 'BMA متشابه اند. (۰/۲۵) زیرا: $\begin{cases} A\hat{M}B' = A'\hat{M}B \\ \hat{A}=\hat{B}=\frac{A'B'}{۲} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'} \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$  تکمیل شکل (۰/۲۵)	خرداد ۹۲
۲	 بر سه نقطه ی A ، B و A' یک دایره می گذرانیم(۰/۲۵) (دایره C) اگر این دایره از نقطه ی B' بگذرد،حکم ثابت است(۰/۲۵).اما اگر این دایره از B' نگذرد، خط MB را در نقطه ی دیگری مانند B'' قطع خواهد کرد.در این صورت خواهیم داشت: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB''$ (۰/۲۵) از مقایسه ی این رابطه با فرض قضیه ، نتیجه می شود $MB' = MB''$ (۰/۲۵) و این نشان میدهد که B'' بر B' منطبق است (۰/۲۵) یعنی دایره ای که بر سه نقطه ی A ، B و A' گذشته است،از نقطه ی B' نیز می گذرد. پس چهار نقطه ی A ، A' ، B و B' روی یک دایره واقع هستند.	دی ۹۰
۳	ابتدا A را به 'B و B رابه 'A وصل می کنیم . دو مثلث 'AMB و A'MB متشابه اند(۰/۲۵) زیرا :  $\begin{cases} \hat{A}=\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \text{ زاویهٔ محاطی} \\ \hat{M} \text{ مشترک} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}(۰/۲۵) \Rightarrow$ $MA \times MA' = MB \times MB'$ رسم شکل (۰/۲۵) ص ۷۶	خرداد ۹۴

	ترسیم های هندسی	
۱	$R=۹,\ R'=۴ \Rightarrow d=۱۳(۰/۲۵)$ $\qquad TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\quad (۰/۲۵)$ $۵x+۲=\sqrt{۱۳^۲-(۹-۴)^۲}$ $۵x+۲=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow x=۲\quad (۰/۲۵)$	خرداد ۹۳
۲	$R=۳\qquad TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\quad (۰/۲۵)$ $R'=۸\qquad ۵a-۳=\sqrt{۱۳^۲-(۸-۳)^۲}\quad (۰/۲۵)$ $d=۱۳\qquad ۵a-۳=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\ \Rightarrow a=۳\quad (۰/۲۵)$	شهریور ۹۴
۳	$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}(۰/۲۵)\Rightarrow TT'=\sqrt{۳۶-۱}(۰/۲۵)\Rightarrow TT'=\sqrt{۳۵}$	خرداد ۹۰
۴	$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\,(۰/۲۵)\Rightarrow ۳a-۱=\sqrt{۱۰۰-۳۶}(۰/۲۵)=۸\Rightarrow a=۳(۰/۲۵)$ این دو دایره یک مماس مشترک داخلی دارند . (۰/۲۵) زیرا مماس برون هستند.(d=R+ R')	شهریور ۹۰
۵	**یک مماس مشترک داخلی (۰/۲۵) و دو مماس مشترک خارجی (۰/۲۵) دارد.** $R=۴\qquad TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}\quad (۰/۲۵)$ $R'=۹\qquad TT'=\sqrt{(R+R')^۲-(R-R')^۲}\quad (۰/۲۵)$ $TT'=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\quad (۰/۲۵)$	خرداد ۹۱