

مشتق تابع در یک نقطه

نوبت برگزاری	متن سوال	
شهریور ۹۰	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} =$ $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3 - (x+1)}{3(x+1)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 2}{3(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3(x+1)} = \frac{-1}{9} \quad (0/25)$	۱
شهریور ۹۱	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (0/25) \rightarrow$ $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{6 - 2x}{3x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{3x} \quad (0/25) = -\frac{2}{9} \quad (0/25)$	۲
دی ۹۱	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (0/5)$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \quad (0/25)$ $= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad (0/5)$	۳
شهریور ۹۲	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \quad (0/5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \quad (0/25) =$ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} \quad (0/25) = 10 \quad (0/25)$	۴

شهریور ۹۲	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1}) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	۵
خرداد ۹۴	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^r + 1 - (a^r + 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = ra \quad (./\Delta)$	۶
مشتق های یک طرفه و مشتق پذیری		
دی ۸۹	$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^r + 1 - 0}{x + 1} = r$ $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^r - 1 - 0}{x + 1} = -r$ <p style="text-align: center;">چون $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ پس تابع f در $x = -1$ مشتق پذیر نیست. (./\Delta)</p>	۱
خرداد ۹۱	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} \quad (./\Delta) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \text{وجود ندارد} \quad (./\Delta) \quad \text{خیر} \quad (./\Delta)$	۲
خرداد ۹۲	<p style="text-align: center;">مشتق چپ : $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x-2 - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \quad (./\Delta)$</p> <p style="text-align: center;">مشتق راست : $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x-2 - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = 1 \quad (./\Delta)$</p>	۳

دی ۹۲	<p>مشتق پذیر نیست (۰/۲۵) زیرا</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \quad (۰/۲۵) , \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \quad (۰/۲۵)$	۴
دی ۹۳	<p>مشتق پذیر نیست (۰/۲۵) زیرا:</p> $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ x-2 - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 \quad (۰/۲۵) , \quad f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \quad (۰/۲۵)$	۵
شهریور ۹۴	<p>تابع مشتق پذیر نیست (۰/۲۵)</p> $f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x x-2 - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \quad (۰/۲۵)$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2 \quad (۰/۲۵)$ <p>مفهوم مشتق راست و چپ صفحات ۱۶۵ و ۱۶۶</p>	۶
قضایای مشتق		
خرداد ۹۰	$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a) - f(a+h)}{f(a+h)f(a)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(a+h) - f(a))}{h f(a+h)f(a)} = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$	۱
دی ۹۰	$(cf)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} \quad (۰/۲۵) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x-a} \quad (۰/۲۵)$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{c(f(x) - f(a))}{x-a} = c \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = cf'(a) \quad (۰/۲۵)$	۲

دی ۹۴	$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \quad (./\delta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + b - (f(a) + b)}{h} \quad (./\delta)$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (./\delta)$	۳
	<p>فرمول های مشتق گیری</p>	
دی ۸۹	<p>الف) $f'(x) = \frac{(x+1)' \sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1})'(x+1)}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)}{x+1} \quad (./\delta)$</p> <p>ب) $g'(x) = (1 + \sin x)' \tan^{-1} x + (\tan^{-1} x)' (1 + \sin x) \quad (./\delta)$</p> <p>ج) $g'(x) = (\cos x) \tan^{-1} x + \left(\frac{1}{1+x^2} \right) (1 + \sin x) \quad (./\delta)$</p>	۱
خرداد ۹۰	<p>الف) $f'(x) = \frac{2(6x)(3x^2 - 1)^2(x+1) - 1 \times (3x^2 - 1)^2}{(x+1)^2} \quad (./\delta)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{6 \sin 3x}{2\sqrt{1-2\cos 3x}} \quad (./\delta)$</p> <p>ج) $k'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{x^2} \quad (./\delta)$</p>	۲
شهریور ۹۰	<p>الف) $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} \cos \sqrt{2x+5} \quad (./\delta)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^2 - 2(2)(2x+1)^2 \sqrt{x}}{(2x+1)^2} \quad (./\delta)$</p> <p>ج) $k'(x) = (1 + \tan^2 x) \cos^{-1} x + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} (1 + \tan x) \quad (./\delta)$</p>	۳

<p>دی ۹۰</p>	$\text{الف) } y' = \frac{6x(x^2 + 2) - 2x^2(2x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} \quad (0/5)$ $\text{ب) } y' = \frac{2 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)}{(0/5)} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0/5)$ $\text{ج) } y' = \frac{(\Delta x^2 + 2 \sin 2x)}{2 \sqrt{(x^2 - \cos 2x)^2}} \quad (0/5)$	<p>۴</p>
<p>خرداد ۹۱</p>	$\text{الف) } y' = 2x^2 - \frac{1}{x^2} \quad (0/5)$ $\text{ب) } y' = 2x^2 \times 2x^2 \times (2x-5)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \quad (0/5)$ $\text{ج) } y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \right) (1+x^2) - (2x) (\sin \sqrt{x})}{(1+x^2)^2} \quad (0/25)$	<p>۵</p>
<p>شهریور ۹۱</p>	$\text{الف) } y' = \Delta(2x+3)^2 (2)(\sin x) + (\cos x)(2x+3)^2 \quad (0/5)$ $\text{ب) } y' = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} \quad (0/5)$ $\text{ج) } y' = \frac{10x}{2 \sqrt{(\Delta x^2 - 1)^2}} \quad (0/25)$	<p>۶</p>
<p>دی ۹۱</p>	$\text{الف) } y' = \frac{2x(x-1) - 1(x^2 + 5)}{(x-1)^2} \quad (0/25)$ $\text{ب) } y' = \cos x(1 + \cos x) + (-\sin x)(\sin x) \quad (0/75)$ $\text{ج) } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$	<p>۷</p>

<p style="text-align: center;">خرداد ۹۲</p>	$\text{الف) } y' = \frac{1 \times (x^5 + 1) + (\Delta x^5) \times x}{(\cdot/25)}$ $\text{ب) } y' = 3 \times \cos x \times \sin^2 x \quad (\cdot/5)$ $\text{ج) } y' = \frac{1}{3 \sqrt{x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	۸
<p style="text-align: center;">شهریور ۹۲</p>	$\text{الف) } y' = \frac{(3x^2) \times (3x-1) - (3)(x^2)}{(3x-1)^2} \quad (1)$ $\text{ب) } y' = \frac{\Delta \times \cos \Delta x}{2 \sqrt{\sin \Delta x}} \quad (\cdot/75)$ $\text{ج) } y' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cdot/75)$	۹
<p style="text-align: center;">دی ۹۲</p>	$\text{الف) } f'(x) = \frac{(9x^2(\Delta x - 1) - \Delta(3x^2 + 5))}{(\Delta x - 1)^2} \quad (\cdot/5)$ $\text{ب) } g'(x) = \frac{10 \cos \Delta x}{(\cdot/25)} + \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cdot/25)$	۱۰
<p style="text-align: center;">دی ۹۲</p>	$f'(x) = \frac{2 (\cdot/25)}{2 \sqrt{2x+1} (\cdot/25)} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{3} \quad (\cdot/25)$	۱۱
<p style="text-align: center;">خرداد ۹۳</p>	$\text{الف) } y' = \frac{9x^2 (2x+1) - 2 (3x^2-1)}{(2x+1)^2} \quad (\cdot/25)$ $\text{ب) } y' = \frac{3 (x^2+1)^2}{(\cdot/25)} \frac{2x}{(\cdot/25)}$ $\text{ج) } y' = \frac{2}{1+x^2} \quad (\cdot/5)$	۱۲

شهریور ۹۳	$\text{الف) } y' = \underbrace{3}_{(./25)} \times \underbrace{(3x^2 - \sqrt{x} + 5)^2}_{(./25)} \times \underbrace{(6x - \frac{1}{2\sqrt{x}})}_{(./5)}$ $\text{ب) } y' = \underbrace{3 \times \cos(4x^2 + 1)}_{(./25)} = \underbrace{(12x^2)}_{(./25)} \times \underbrace{\sin(4x^2 + 1)}_{(./25)} \times \underbrace{(2x + 5)}_{(./5)}$	۱۳
دی ۹۳	$\text{الف) } f'(x) = \underbrace{(6x + 5)}_{(./5)} \times \underbrace{(4x^2 + \sin x)}_{(./25)} + \underbrace{(3x^2 + 5x)}_{(./25)} \times \underbrace{(4x + \cos x)}_{(./5)}$ $\text{ب) } g'(x) = \frac{-2x \cdot (./25)}{2\sqrt{4-x^2} \cdot (./25)} + \frac{2 \cdot (./25)}{\sqrt{1-x^2} \cdot (./5)}$	۱۴
خرداد ۹۴	$\text{الف) } y' = \underbrace{(2 \circ x^2)}_{(./5)} (\cos x) - \underbrace{(\sin x) (4x^5 + 2)}_{(./5)}$ $\text{ب) } y' = \frac{2x + \cos x \cdot (./5)}{2\sqrt{(x^2 + \sin x - 1)^2} \cdot (./5)}$ $\text{ج) } y' = 2 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (./5)$ <p style="text-align: right;">قواعد مشتق گیری صفحات ۱۷۱ تا ۱۷۷</p>	۱۵
شهریور ۹۴	$\text{الف) } f'(x) = \underbrace{(\sin^{-1} x) (3x^2 + 5)}_{(./5)} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + 5x)$ $\text{ب) } g'(x) = \underbrace{5}_{(./25)} \underbrace{(\tan x + 3x^2)^2}_{(./25)} \underbrace{((1 + \tan^2 x) + 6x)}_{(./5)}$	۱۶
دی ۹۴	$\text{الف) } y' = \frac{1 \times (-\sin x) \cdot (./25)}{2\sqrt{\cos^2 x} \cdot (./25)} + \frac{2 \cdot (./25)}{\sqrt{1-x^2} \cdot (./25)}$ $\text{ب) } y' = 5 \underbrace{(2x - x^2)^2}_{(./25)} \underbrace{(2 - 2x^2)}_{(./25)} \left(\underbrace{\sqrt{2x}}_{(./25)} + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \underbrace{(2x - x^2)^5}_{(./25)} \right)$	۱۷

دی ۸۹	$s(p) = \frac{p^2}{4\pi} \Rightarrow s'(p) = \frac{p}{2\pi} \Rightarrow s'(\Delta\pi) = \frac{\Delta\pi}{2\pi} = \frac{\Delta}{2}$ <p style="text-align: center;">(./۲۵) (./۲۵) (./۲۵) (./۲۵)</p>	۱
خرداد ۹۰	$s = x^2, p = 4x \text{ (./۲۵)} \Rightarrow x = \frac{p}{4} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow s = \frac{p^2}{16} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow s'_{(p)} = \frac{p}{8} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow s'_{(۱۶)} = 2 \text{ (./۲۵)}$	۲
شهریور ۹۱	<p>اگر ضلع مربع را x در نظر بگیریم و مساحت را با s و محیط را با p نشان دهیم آن گاه:</p> $\left. \begin{array}{l} s = x^2 \rightarrow x = \sqrt{s} \\ p = 4x \end{array} \right\} \rightarrow p(s) = 4\sqrt{s} \text{ (./۵)} \rightarrow p'(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} \text{ (./۲۵)} \rightarrow p'(9) = \frac{2}{3} \text{ (./۲۵)}$	۳
دی ۹۱	<p>اگر مساحت دایره را با s و محیط آن را با p نشان دهیم آنگاه:</p> $\left. \begin{array}{l} p = 2\pi r \\ s = \pi r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow s(p) = \frac{1}{4\pi} p^2 \text{ (./۷۵)}$ $s'(p) = \frac{1}{2\pi} p \text{ (./۲۵)} \rightarrow s'(2\pi) = \frac{1}{2} \text{ (./۲۵)}$	۴
دی ۹۲	$S(r) = \pi r^2 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow S'(r) = 2\pi r \text{ (./۲۵)} \Rightarrow S'(2) = 4\pi \text{ (./۵)}$	۵
دی ۹۳	$S(r) = \pi r^2 \text{ (./۲۵)}, P(r) = 2\pi r \Rightarrow S(p) = \frac{1}{4\pi} P^2 \text{ (./۱۲۵)} \Rightarrow S'(P) = \frac{P}{2\pi} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow S'(2\pi) = \frac{1}{2} \text{ (./۲۵)}$	۶
خرداد ۹۴	$S(R) = \pi R^2 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow S'(R) = 2\pi R \text{ (./۲۵)} \Rightarrow S'(4) = 8\pi \text{ (./۵)}$	۷

دی ۹۴	$P = 2\pi R \quad (./25)$ $S = \pi R^2 \rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (./25)$ $P = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} \rightarrow P'(S) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\pi S}} \xrightarrow{S=2\pi} \frac{\pi}{\sqrt{\pi \times 2\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (./25)$ <p style="text-align: center;">(./5)</p>	۸
	خط مماس و خط قائم	
دی ۸۹	$y' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = \frac{-1}{1^2} \Rightarrow m = -1$ <p style="text-align: center;">(./5) (./25)</p>	۱
شهریور ۹۰	$\left. \begin{array}{l} y' = 2x^2 - 2 \quad (./25) \\ y = x \Rightarrow m = 1 \quad (./25) \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 - 2 = 1$ $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2 \quad (./25)$ $x = -1 \Rightarrow y = 0 \quad (./25)$	۲
دی ۹۰	$f'(x) = 6x^2 \quad (./25) \quad m = \frac{-1}{f'(1)} = \frac{-1}{6} \quad (./5) \quad f(1) = 1 \quad (./25)$ $y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y = \frac{-1}{6}x + \frac{7}{6} \quad (./25)$	۳
خرداد ۹۱	$f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1 \quad (./25) \quad y' = 6x^2 - 1 \quad (./25)$ $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{5} \quad (./25) \quad y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1) \quad (./5)$	۴
خرداد ۹۲	$y' = \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2} \quad (./5) \Rightarrow m = f'(2) = \frac{-2}{1} = -2 \quad (./25)$ $y - y_0 = m(x - x_0) \quad (./25) \rightarrow y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 9 \quad (./25)$	۵

شهریور ۹۲	$y = x \rightarrow m_1 = 1 \text{ (./۲۵)}$ $y' = 2x + 2 \text{ (./۲۵)} \rightarrow m_2 = 2a + 2 \left. \vphantom{y' = 2x + 2} \right\} \rightarrow 2a + 2 = 1 \text{ (./۲۵)} \rightarrow a = -1 \text{ (./۲۵)} \rightarrow A(-1, -2) \text{ (./۲۵)}$	۶
خرداد ۹۳	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = 2a \text{ (./۲۵)}$ $m_1 = 2 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \text{ (./۲۵)}$	۷
خرداد ۹۳	$f'(x) = \cos x = 0 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ (./۵)} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ (./۲۵)}, \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) \text{ (./۲۵)}$	۸
شهریور ۹۳	$f(2) = 4 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \text{ (./۵)} \Rightarrow m = f'(2) = -3 \text{ (./۲۵)} \Rightarrow m = \frac{1}{3} \text{ (./۲۵)}$ $y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \text{ (./۲۵)} \text{ معادله‌ی خط قائم}$	۹
شهریور ۹۴	$y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \text{ (./۵)}$ $m = -\frac{1}{8} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow m' = 8 \text{ (./۲۵)}, x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 8(x - 1) \text{ (./۲۵)}$	۱۰

تهیه کننده: احمد عچرش کلاس سوم ریاضی دبیرستان امام حسین (ع)