به نام خدا

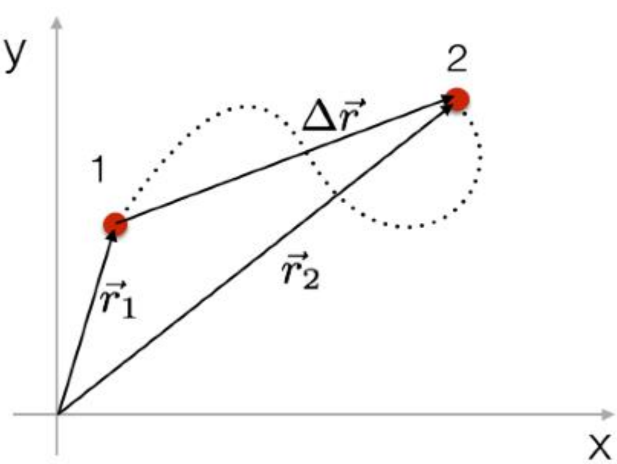
جزوه آموزشی فیزیک (۳)

صفحات ۱ الی ۲۱ کتاب درسی

به قلم مهدی غفاری – ارشد برق صنعتی شریف

مسافت و جابه جایی

برداری که در هر لحظه مکان یک جسم نسبت به مبدأ را نشان می دهد **بردار مکان** آن نامیده شده و با $\vec{r}$ نمایش داده می شود. برای مثال بردار های $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ به ترتیب بردار مکان جسم در موقعیت های ۱و ۲ را نمایش می دهد.



فرض کنید جسم از موقعیت شماره ۱ در روی مسیر نقطه چین به موقعیت شماره ۲ برود در این حالت به طول مسیر نقطه چین **مسافت** گفته می شود و با d معمولا نمایش داده می شود که یک کمیت اسکالر است.

حال برداری را که موقعیت های اولیه و ثانویه جسم را با یک بردار مستقیم به هم وصل می کند را در نظر بگیریم به این بردار **بردار جابجایی** گفته می شود و با $\Delta\vec{r}$ نمایش داده می شود. رابطه زیر را برای بردار جابجایی داریم:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

بنابرین بردار جابجایی تفاضل برداری مکان های اولیه و ثانویه جسم می باشد.

همان طور که از شکل مشخص می باشد بردار جابه جایی تنها به مکان اولیه و ثانویه بستگی دارد و مستقل از مسافت پیموده شده می باشد.

همچنین این نکته را به خاطر داشته باشید اگر جابه جایی های متوالی $\Delta\vec{r_1}$ ، $\Delta\vec{r_2}$ ، … و $\Delta\vec{r_n}$ را انجام شود جابه جایی حاصل برابر برآیند (جمع برداری) این بردار ها خواهد بود.

$$\Delta\vec{r_t} = \Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2} + \cdots + \Delta\vec{r_n}$$

تندی متوسط و سرعت متوسط

در مثال قبل جسم مسافت مورد نظر را در یک زمان معینی می پیماید که به نسبت مسافت پیموده شده بر زمان آن **تندی متوسط** و به نسبت جابه جایی به زمان **سرعت متوسط** نامیده می شود:

$$s_{av} = \frac{d}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

این نکته قابل ذکر می باشد که مفهوم سرعت متوسط یک مفهوم برداری است به طوری که اگر جسمی با طی مسافتی به نقطه ی شروع باز گردد در این صورت سرعت متوسط آن در این مسیر $\vec{0}$ (صفر برداری) خواهد بود.

مثال 1 :

متحرکی در مسیری مستقیم مسافت $1000\,m$ را در $80\,s$ بدون تغییر جهت طی می‌کند. اگر $400\,m$ اول را با سرعت ثابت $20\frac{m}{s}$ طی کند، سرعت متوسط آن در بقیهٔ مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵/۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۵

(آزمون ۲۱ مهر ۹۶ کانون)

پاسخ:

به کمک رابطهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط داریم:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1} = \frac{400}{20} = 20\,s$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = 80 - 20 = 60\,s$$
$$\Rightarrow \Delta x_2 = \bar{v}_2 \Delta t_2 \Rightarrow 600 = \bar{v}_2 \times 60$$
$$\Rightarrow \bar{v}_2 = 10\frac{m}{s}$$

$v_1 = 20\,\frac{m}{s}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\Delta x_1 = 400\,m \\ \Delta t_1}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\Delta x_2 = 600\,m \\ \Delta t_2}}$$

مثال ۲:

بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = (3t-5)\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}$ است ، بردار سرعت متوسط متحرک را در بازه ی زمانی (۰ تا ۲) ثانیه بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

پاسخ :

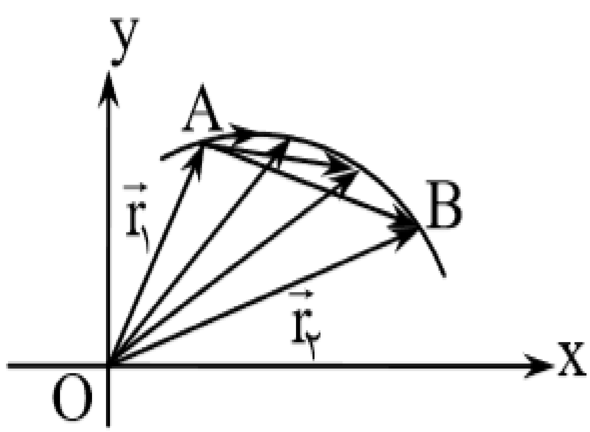
$$\overrightarrow{r_{t=0}} = -5\vec{i} + \vec{j}, \overrightarrow{r_{t=2}} = \vec{i} + 5\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{(1-(-5))}{2}\vec{i} + \frac{5-1}{2}\vec{j} \rightarrow \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

تندی لحظه ای و سرعت لحظه ای

اگر سرعت یک متحرک در یک لحظه ای خاص بیان شود به آن **تندی لحظه ای** گفته می شود و اگر جهت را همراه آن بیان کنیم **سرعت لحظه ای** گفته می شود. برای محاسبه تندی یا سرعت لحظه ای از مشتق نسبت به زمان استفاده می شود:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

برای درک مفهوم سرعت لحظه ای نمودار مقابل را تصور کنید که جسمی از نقطه A بخواهد به نقطه ی B برود حال اگر بخواهیم سرعت لحظه ای را در نقطای مثل A به دست آوریم کافی است سرعت متوسط را در یک بازه ای کوچک زمانی به دست بیاوریم اگر این بازه را کوچک کنیم در نهایت جهت بردار سرعت لحظه ای معادل بردار مماس بر مسیر خواهد بود.



برای نشان دادن حرکت یک جسم از نمودار مکان- زمان استفاده می شود این نمودار برای نشان دادن حرکت های یک بعدی استفاده می شود ولی می توان برای حرکت های دو و سه بعدی نیز تعمیم داد ولی معمولا استفاده نمی شوند.

اگر یک حرکت یک بعدی داشته باشیم به این گونه می باشد که یک راستای مشخص وجود دارد که ما می توانیم در دو جهت این راستا حرکت نمائیم که یک جهت را مثبت و دیگری را منفی

قرارداد می کنیم. برای مثال اگر راستای حرکت ما محور x ها باشد جهت های زیر را می توانیم تعریف نمائیم:

حال اگر بخواهیم نمودار مکان – زمان را به دست آوریم باید هر کدام از این نقاط را به یک نقطه در مختصات دو بعدی مکان – زمان نسبت دهیم. برای درک بهتر این مفاهیم به چند مثال زیر توجه فرمائید.

مثال ۳:

متحرکی دارای معادله مکان – زمان $r = 20ti + 5tj$ می باشد:

الف) بردار سرعت متحرک در $t=2$ ثانیه را بدست آورید.

ب) اندازه سرعت متوسط متحرک در چهار ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است.

پاسخ :

الف) $v=20i+10tj \xrightarrow{t=2} v=20i+20j$

ب) $t_1=0 \rightarrow r_1=0 \longrightarrow \Delta V=\frac{\Delta r}{\Delta t}= 20i+20j$

$T_2=4 \rightarrow r_2=80i+80j \qquad |\bar{v}|=20\sqrt{2}$

مثال ۴:

معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 - 5t + 6$ است.

الف) مکان اولیه‌ی متحرک را به‌دست آورید.

ب) متحرک در چه لحظاتی از مبدأ مختصات می‌گذرد؟

ج) متحرک در سه ثانیه‌ی اول حرکت چقدر جابه‌جا می‌شود؟

د) سرعت متوسط متحرک در ثانیه‌ی دوم چقدر است؟

پاسخ:

الف) $x_0 = +6m$

ب) $x = 0 \Rightarrow t = ۲,۳$

ج) $\Delta x = x_۳ - x_0 = 0 - ٦ = -٦m$

د) $\bar{v} = \frac{x_۲ - x_۱}{۲ - ۱} = \frac{0 - ۲}{۱} = -۲m/s$

مثال ۵:

معادله حرکت متحرکی بصورت $y = ۴t^۲$ و $x = ۶t + ۵$ می‌باشد.

الف) بردار سرعت در لحظه‌ی $t = ۱$ ثانیه را بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

ب) معادله مسیر حرکت چگونه است؟

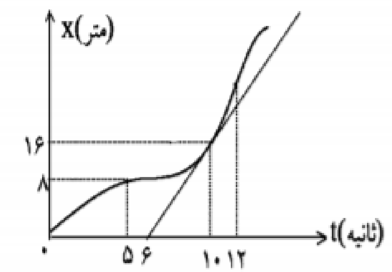
پاسخ:

الف) $V = ۶i + ۸t\,j$

ب) $\begin{cases} x = ۶t + ۵ \rightarrow t = \frac{(x-۵)}{۶} \\ y = ۴t^۲ \rightarrow y = ۴\frac{(x-۵)^۲}{۳۶} \rightarrow y = \frac{(x-۵)^۲}{۹} \end{cases}$

مثال ۶:

نمودار مکان – زمان متحرکی بر مسیر مستقیم به شکل مقابل است. اگر سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۱۰s$ برابر سرعت متوسط آن بین دو لحظه‌ی $t_1 = ۵s$ و $t_2 = ۱۲s$ باشد متحرک در لحظه‌ی $t = ۱۲s$ در چند متر مبدأ می‌باشد ؟



پاسخ:

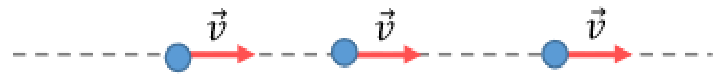
$$v_{۱۰} = \bar{v}_{۵-۱۲} \rightarrow \frac{۱۶}{۱۰-۶} = \frac{x_{۱۲}-۸}{۱۲-۵} \rightarrow ۲۸ = x_{۱۲} - ۸ \Rightarrow x_{۱۲} = ۳۶m$$

حرکت یکنواخت

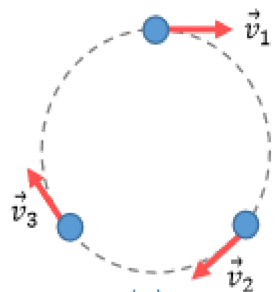
اگر متحرکی در یک مسیر همواره تندی ثابتی را داشته باشد، مستقل از این که چه نوع مسیری را طی می کند، حرکتی را دارد که به حرکت یکنواخت معروف است. دقت کنید که در حرکت یکنواخت ملاک ثابت بودن تندی (اندازه سرعت) می باشد. حرکت یکنواختی که مورد بررسی ماست حرکت یکنواخت بر روی خط راست می باشد. البته حرکت های یکنواخت فقط به این نوع ختم نمی شوند و انواع مختلفی دارند به عنوان مثال حرکت دایره ای یکنواخت که در فصل های بعد به آن پرداخته خواهد شد.

ملاک حرکت یکنواخت $\qquad s = |\vec{v}| =$ ثابت

شکل های زیر از کتاب حرکت های یکنواخت بر روی خط راست و دایره ای را نشان می دهد. مورد ب نشان می دهد که تغییر جهت در حرکت یکنواخت مهم نیست.



(الف)



(ب)

حرکت یکنواخت روی خط راست

همان طور که گفتیم در حرکت یکنواخت سرعت در همه مسیر برابر است پس اگر یک حرکت یکنواخت بر روی خط راست داشته باشیم سرعت متوسط برابر سرعت لحظه ای در هر زمان خواهد بود. پس داریم:

$$v_{av} = v$$

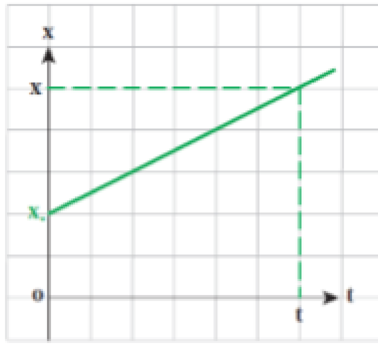
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av}=v} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x = v\Delta t \rightarrow$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

اکنون فرض می کنیم که در لحظه $t_0 = 0$ در مکان x_0 باشد در این صورت معادله حرکت به صورت زیر در می آید.

معادله حرکت یکنواخت روی خط راست	$x = vt + x_0$

در حرکت یکنواخت با توجه به این که سرعت در همه لحظات ثابت است پس باید شیب نمودار مکان- زمان در همه جا ثابت باشد. بنابرین یک خط راست با شیب معلوم را خواهیم داشت. شکل زیر از کتاب، حالت کلی نمودار مکان-زمان حرکت یکنواخت را نمایش می دهد.



در این نمودار مکان اولیه همان عرض از مبدا می باشد و همچنین شیب خط بیانگر سرعت جسم در یک حرکت یکنواخت است.

حرکت نسبی

ما هنگامی که از حرکت یک متحرک صحبت می کنیم وضعیت آن را نسبت به یک ناظر لخت بررسی می کنیم. در صورتی که ناظر خود دارای حرکت باشد، معادلات حرکت به این صورت نخواهد بود. اگر فرض کنیم جسم ما دارای معادله مکان ، سرعت و شتاب نسبت به ناظر لخت $\overrightarrow{r(t)}$ ، $\overrightarrow{\mathrm{v(t)}}$ و $\overrightarrow{a(t)}$ باشد و ناظر ما نیز دارای معادله مکان ، سرعت و شتاب نسبت به ناظر لخت $\overrightarrow{r_o(t)}$ ، $\overrightarrow{v_o(\mathrm{t})}$ و $\overrightarrow{a_o(t)}$ باشد ، در این صورت مکان و سرعت و شتاب جسم از دید ناظر غیر لخت به صورت زیر خواهد بود.

$$\overrightarrow{r_{\text{نسبی}}(t)} = \overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{r_o(t)}$$

$$\overrightarrow{v_{\text{نسبی}}(t)} = \overrightarrow{v(t)} - \overrightarrow{v_o(t)}$$

$$\overrightarrow{a_{\text{نسبی}}(t)} = \overrightarrow{a(t)} - \overrightarrow{a_o(t)}$$

در حالتی که ما یک حرکت روی خط راست داشته باشیم به جای عملیات برداری به صورت جمع و تفریق عمل خواهیم کرد. همچنین مسائلی که صحبت از دو جسم می باشد همانند مبحث ناظر غیر لخت می باشد. در این گونه مسائل برای حل خواسته مساله باید یکی از متحرک ها را ناظر و

دیگری را جسم مورد نظر قرار داد و سپس مسئله را حل نمود. برای حالت حرکت در یک بعد روابط بالا را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x_{\text{نسبی}}(t) = x(t) \pm x_o(t)$$

$$v_{\text{نسبی}}(t) = v(t) \pm v_o(t)$$

$$a_{\text{نسبی}}(t) = a(t) \pm a_o(t)$$

علامت مثبت هنگامی به کار می رود که جهت ها در خلاف هم باشد و علامت منفی هنگامی که جهت ها موافق هم باشند.

برای درک بهتر مطالب به مثال های زیر توجه فرمائید.

مثال ۱

دو متحرک با سرعت‌های $۷۲\frac{km}{h}$ و $۱۰۸\frac{km}{h}$ هم زمان از یک شهر به سمت شهر دیگری در فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری حرکت می‌کنند. حداکثر فاصله‌ی این دو متحرک در طول مسیر چند متر می‌شود؟

پاسخ:

$v_۱ = ۷۲ \div ۳/۶ = ۲۰\frac{m}{s}$

$v_۲ = ۱۰۸ \div ۳/۶ = ۳۰\frac{m}{s}$

$\Delta x_۲ = v_۲ t \rightarrow ۱۲۰۰ = ۳۰t \rightarrow t = ۴۰$

$\Delta x_۱ = v_۱ t \rightarrow \Delta x_۱ = ۲۰ \times ۴۰ = ۸۰۰m$

حداکثر فاصله $۱۲۰۰ - ۸۰۰ = ۴۰۰$

مثال ۲

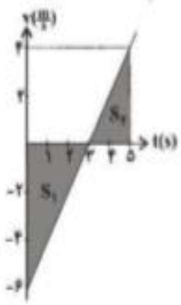
معادله‌ی سرعت یک متحرک در SI به صورت $v = ۲t - ۶$ است. مسافت طی شده در پنج ثانیه‌ی اول حرکت، چند متر است؟

۱) ۹   ۲) ۱۳

۳) ۵   ۴) ۴

پاسخ:

می‌دانیم که سطح زیر نمودار سرعت با محور زمان معرف جابه‌جایی متحرک است، بنابراین ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم کرده، سپس به کمک سطح زیرنمودار مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:



$$|\Delta x_1| = S_1 = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹m$$

$$|\Delta x_2| = S_2 = \frac{۲ \times ۴}{۲} = ۴m$$

$$\text{کل مسافت طی شده} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = ۹ + ۴ = ۱۳m$$

مثال ۳

اتومبیل‌های A و B به طور هم‌زمان با سرعت‌های ثابت $۱۲۰\frac{km}{h}$ و $۹۰\frac{km}{h}$ فاصله‌ی مستقیم دو شهر را طی می‌کنند اگر اتومبیل تندرو به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه زودتر به شهر مقصد برسد فاصله‌ی دو شهر چند کیلومتر بوده است؟

پاسخ:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \rightarrow V_A t_A = V_B t_B \quad (۱)$$

$$t_A = t_B - \frac{۱}{۳}$$

اما مدت حرکت اتومبیل A به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه یا $\frac{۱}{۳}$ ساعت از B کم‌تر بوده است. (زیرا سریعتر از B حرکت می‌کند) پس از جاگذاری t_A و t_B در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$۱۲۰(t_B - \frac{۱}{۳}) = ۹۰ \times t_B$$

$$۴t_B - \frac{۴}{۳} = ۳t_B \rightarrow t_B = \frac{۴}{۳}h$$

$$\Delta x_A = V_A t_A = ۱۲۰\frac{km}{h} \times (\frac{۴}{۳}h - \frac{۱h}{۳}) = ۱۲۰ \times ۱ = ۱۲۰km$$