

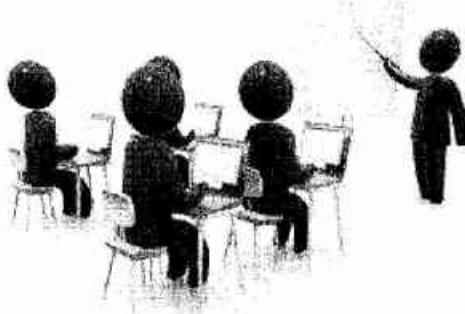
جزوه آموزشی

درس دیفرانسیل

مبحث : پیوستگی

مدرس : آخکندی

ایمیل: adel3115@gmail.com



لکن دیگر از مباحث اساسی کتاب درسی، بعداز حد فسمت پیوستگی است که به طور معمول بکجا دو سوال تکرار را شامل می‌شود. در کتاب دیفرانسیل جدید (چاپ ۹۲) تغییراتی در تعریف آن نسبت به سال هماجع قبل (۹۰) تبل از آن) ایجاد نموده است.

* تعریف نقطه‌ی درونی: نقطه‌ی x را، نقطه‌ی درونی بازه‌ی $[a, b]$ نامند هرگاه‌ی:

* تعریف نقطه‌ی انتهايی: در بازه‌ی $[a, b]$ ، نقطه‌ی به طول δ را نقطه‌ی انتهايی چه بر نقطه به طول δ را نقطه‌ی انتهايی راست گويند.

? همان طور که در کتاب درسی عنوان شده، لکماتی چون «مسلسل»، «به هم چسبیده»، «بدون برمیدگی» من توانند مترادفاتی مناسبی برای پیوستگی باشند. اما در ادامه خواهیم دید که پیوستگی فراتر از یک خط راست یا مخفی صاف و هموار خواهد بود.

— به نفوذ راهای زیج توجه کنید:



(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

در نفوذ راهی سماره ۱ و ۲ تابع در یک نقطه دچار سلسلتی شده است. اما در نفوذ راهی ۳ خیلی مشکلی وجود ندارد، به نفوذ راهی سماره ۱ و ۲ ناپیوستگی هفتگی شود و نقاطی که این خاصیت را ایجاد نموده اند، نقاط انفال مخفی گویند. اما در نفوذ راه سماره ۴، با یک نفوذ راه پیوسته برخورد کرد. ایم.

? نفوذ راه سماره ۴ یکی از مواردی است که اختلاف تعریفی بین کتاب راهی قدیمی و نفوذ راهی جدید را بیان می‌کند. این نفوذ راه با وجود سلسلتگی، مانند نقطه‌ی انفعالی است. حرکات نقطه‌ی ایجاد سلسلتگی در دامنه تعریف تابع تراز ندارد. پس در مورد ناپیوستگی آن نتوان بحث نفوذ.

یادداشت پردازی:

? با این توصیحات که اصل را می بینیم که بررسی سوستگی و یا فتن نقاط انقضای که تابع تنها باید در دامنه انجام شود.

نکته هم: همان طور که در قاعده کتاب آمده: سُرط بررسی سوستگی یا ناسوستگی که تابع در یک نقطه، آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایه چپ یا راست آن نقطه تعریف شده باشد

قاعده سوستگی تابع در یک نقطه: با در نظر گرفتن نسبت بالا، تابع f در نقطه a سوستگی است هرگاه داشته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

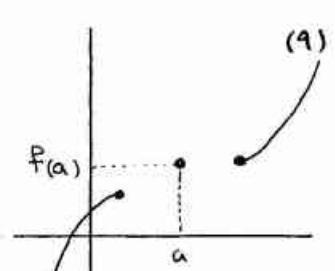
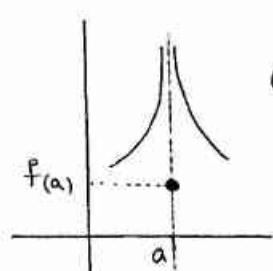
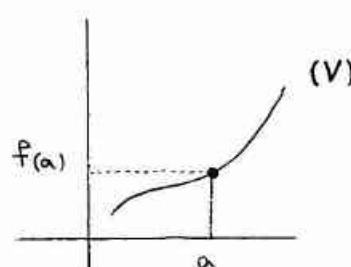
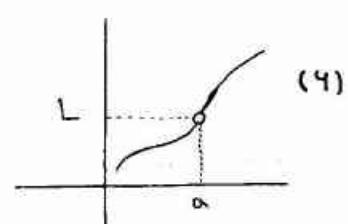
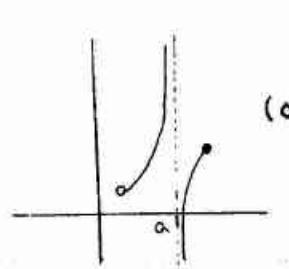
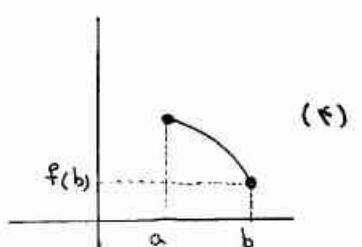
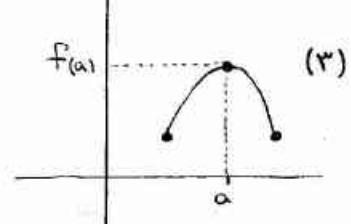
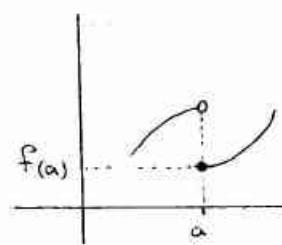
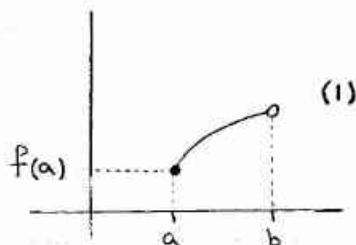
پس داریم:

۱) تابع f در a و یک همسایه آن تعریف شده باشد. ($f(a)$ موجود)

۲) حد تابع در نقطه a موجود باشد.

۳) حد تابع با مقدار آن در a مطابق باشد. ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$) مطابق باشد.

← به نفوذ از زیر دو مطالب بیان شده دقت کنید:



- (۱) تابع f در نقطه a پیوست است چون حد راست تابع به این مقدار آن است.
- (۲) تابع f در نقطه a ناپیوست است چون حد راست و چپ آن متفاوت است.
- (۳) تابع f در نقطه a پیوست است چون حد تابع، با مقدار آن برابر است.
- (۴) تابع f در نقطه a پیوست است چون حد چپ تابع به این مقدار آن است.
- (۵) در صورت پیوستگی تابع f در نقطه a نمی‌توان صحبت کرد چون $f(a)$ وجود ندارد.
- (۶) مساوی به مورد بالا می‌باشد (مورد ۵)
- (۷) مساوی به مورد (۳) می‌باشد.
- (۸) تابع f در نقطه a ناپیوست است زیرا حد تابع موجود نیست.
- (۹) مساوی به مورد (۵) می‌باشد.

مثال ۱: در هر کدام از توابع زیر در مورد پیوستگی آنها در نقطه خواسته شده بحث کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}, \quad , x = 1$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}, \quad , x = 1$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x}, \quad , x \in \mathbb{R}$$

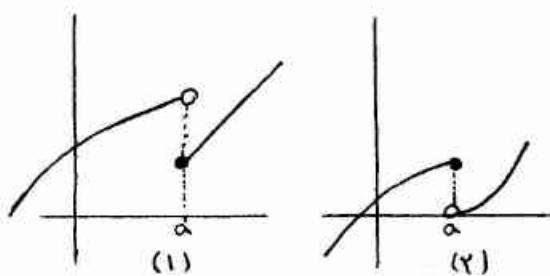
$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, \quad , x = 0$$

نکته: در محاسبه حد، محدوده بودن یا نبودن تابع در $x=a$ مهم نیست اما در پیوستگی فنورت دارد.
پیوستگی های بیکلام (پیوستگی راست و چپ)

پیوستگی راست: گوییم تابع f در a از راست پیوست است هرگاه:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ گوییم تابع f در a از چپ پیوست است هرگاه:

یادداشت پردازی:



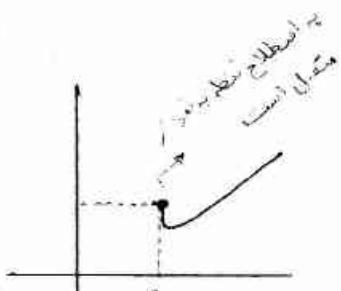
برای مثال در مثال (۱) تابع f در نقطه a نپایه است، اما پیوستگی راست دارد و در مثال (۲) تابع f در نقطه a پیوسته است، اما پیوستگی چپ دارد.

نتیجه: اگر تابع f در یک همسایه نقطه a تعریف شده باشد، در این صورت تابع f در نقطه a پیوسته است هرگاه هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد و برعکس.

* پیوستگی تابع در یک همسایه آن (دردنی و انتها و ابتدای)

مثال ۲: تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ را در نقطه a و نقاط ابتدای و انتها و دردنی را بیابید.

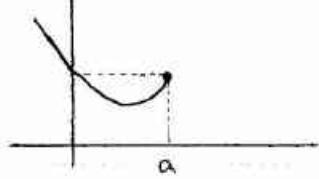
حل: در این سوال $D_f = \{x | x \leq 1\}$



الف) اگر تابع f نقطه در همسایه راست نقطه a تعریف شده باشد در این صورت سُرطان پیوستگی تابع f در نقطه a بصورت:

نقطه انتها چپ \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



ب) اگر تابع f نقطه در همسایه چپ نقطه a تعریف شده باشد در این صورت شرط پیوستگی تابع f در نقطه a بصورت:

نقطه انتها راست \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

مثال ۳: پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{14-x^2}$ را در نقاط $x=1, x=-4, x=4$ بررسی کنید.

یادداشت پدرداری: توجه کنید در مثال (۱) نقطه ای توپر به سمت چپ نهودار متصل است (پیوستگی چپ) و در مثال (۲) نقطه به سمت راست نهودار متصل است (پیوستگی راست)

در $x=0$ پیوسته باشد، $b-a$ کام است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} & x \neq 0 \\ [x] + b & x = 0 \end{cases}$$

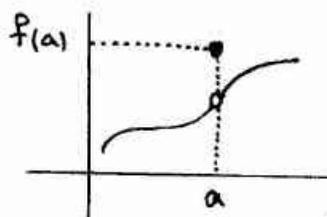
$$-\sqrt{2} \quad (4)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

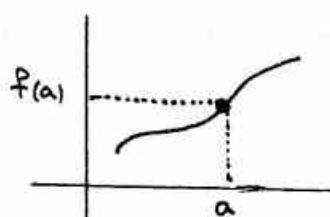
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

* تعریف ناپیوستگی رفع سعدی: تابع f در نقطه a حد راسته باشد. ولی با مقدار تابع به این نباشد.



رفع ناپیوستگی
در نقطه $x=a$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$$

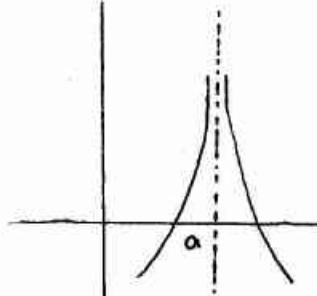
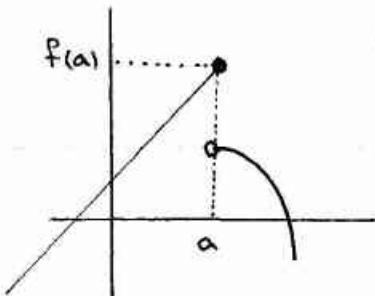
مثال ۴: توابع زیر در $x=0$ پیوست نیستند، $f(x)$ را حیان بیابید که تابع در این نقطه پیوست شود.

$$(الف) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

$$(ب) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{\delta} & x = 0 \end{cases}$$

* تعریف ناپیوستگی اساسی: کافی است تابع f در نقطه a دارای حد نباشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



مثال ۵: سُان دهید که تابع زیر در نقطه $x=2$ ناپیوستگی اساسی دارد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & x \neq 2 \\ x & x = 2 \end{cases}$$

یادداشت پردازی:

- نتیجه: به طور کلی ناپیوستگی بزرگ در نوع رفع شدنی و اساسی است.
- * انواع انقضای: اگر a یک نقطه درونی دامنه تابع f باشد و تابع در این نقطه ناپیوست باشد مگری از دلایل زیر ممکن است ناپیوستگی را ایجاد کرده باشد:
 - (الف) تابع در این نقطه حد داشته باشد، اما حد با مقادیر تابع بهتر نباشد (رفع شدنی)
 - (ب) تابع در این نقطه حد نداشته باشد (رفع نشدنی)

← پیوستگی روی یک بازه: گوییم تابع f روی بازه I پیوست است، هرگاه در هر نقطه I پیوست باشد. برای مثال در مورد پیوستگی تابع $\frac{1}{x}$ روی بازه $[1, -\infty)$ نمی‌توان صحبت کرد زیرا $f(x)$ تعریف نشده است. ولی تابع $\sqrt{1-x^2}$ روی بازه $[1, -1]$ پیوست است.

نکته: تابع $[x] + [-x] = (x) = f(x)$ روی بازه $(k+1, k)$ پیوست است.

نکته: اگر تابع در تمام نقاط دامنه خود پیوست باشد، آن را تابع پیوسته می‌نامند.

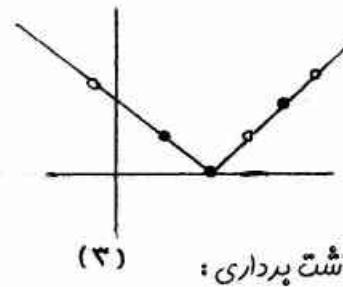
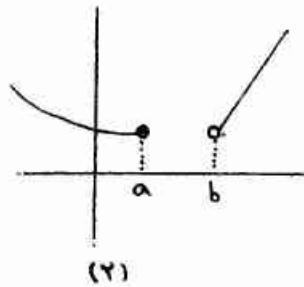
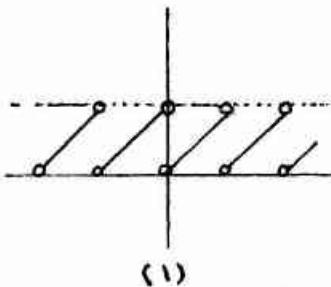
نکته: در بازه های به شرم (a, b) یا $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا $(-\infty, a]$ یا $[a, +\infty)$ پیوستگی در نقاط درونی و پیوستگی بینتر نه در a و b کافی است به سلسله متوجه کنید.....

$$\text{نکته ۲: اگر } f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & 1 < x \leq 2 \\ \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} & 2 < x < 3 \\ 5ax - 3b & x=1 \end{cases}$$

است؟

مثال اضافی: پیوستگی توابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و $h(x) = \begin{cases} x+1 & |x| < 1 \\ 2 & |x| \geq 1 \end{cases}$ را در $[1, -1]$ بررسی کنید*

* سلسله های زیر توابع اذ پیوسته که به ظاهر ناپیوسته اند



یادداشت پردازی:

* دانش آموزگاران سلسله (1) را با نفوذار $y = x - a$ مقایسه کنید که این نفوذار در بازه های (a, k) پیوست خواهد بود.

مثال اضافی: بارسم نفوذار $\left[\frac{y}{x}\right] = y$ ، پیوستگی آن را در بازه های $(-2, 0)$ و $(2, 0)$ بررسی کنید.

نکات معم پیرامون پیوستگی:

۱) اگر f تابع پیوست باشد آن‌گاه $\sqrt[k]{f}$ در بازه‌ای که $0 \leq f$ باشد پیوست است.

۲) اگر f پیوست باشد، توابع زیر در دامنه‌اش، پیوست اند: (برای مثال f چند جمله‌ای باشد)

$\frac{1}{f}$, $\text{Arccot } f$, $\text{Arctan } f$, $\text{Arccos } f$, $\text{Arcsin } f$, $\log f$, f^n , $\sin f$, $\cos f$, $\tan f$

۳) اگر f پیوست باشد، $|f|$ نیز پیوست است اما عکس آن لزوماً بیقرار نیست.

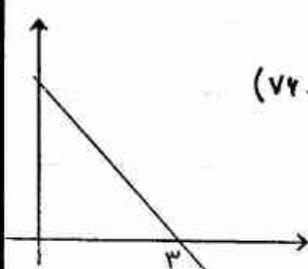
برای مثال توابع $y = \sin(\frac{x+1}{x})$ و $y = \sqrt{\sin x}$ در \mathbb{R} پیوست اند.

→ معنوم پیوستگی تابع در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها:

فرضی کنیم D دامنه‌ی تابع f ، زیرمجموعه‌ی \mathbb{R} باشد و $a \in D$ ، اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرای است، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد، آن‌گاه،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

بررسی حین سوال از نکور سراسی دارد:



الف) ۳ - ب) ۴ - ج) ۵ - د) ۶ -

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + b}{a-x} & x \neq a \\ 1 & x = a \end{cases}$$

۱) نهودار تابع

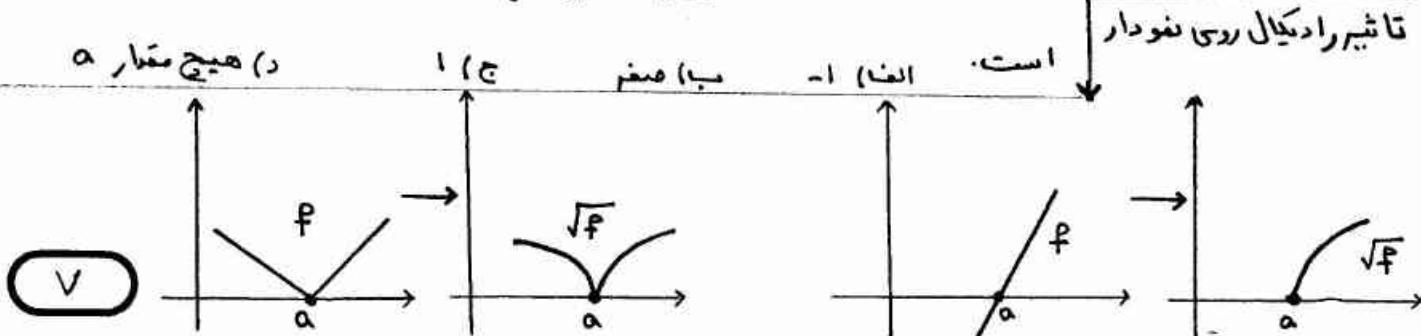
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

۲) تابع با مناطقی

است (س - ۷۷) الف) {۰,۲} ب) {۰} ج) {۲} د) {۰,۲}

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

۳) به ازای کدام مقدار a تابع با مناطقی $x=0$ پیوست



۴) به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & x < 2 \\ a+2\sin\frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$ پیوسته است؟

۱۵

۰

ب) ۱

الف) ۲

۵) به ازای کدام مقدار a ، تابع با مقاطعی $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} & x < -1 \\ ax+1 & x \geq -1 \end{cases}$ پیوسته است؟

۳

۵

۳

الف) ۱

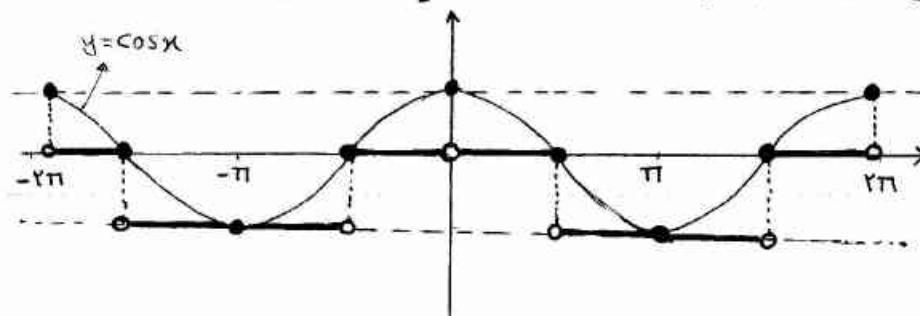
* پیوستگی در توابع حینه مقاطعی:

تابع حینه مقاطعی f به معادله $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \rightarrow D_{f_1} \\ f_2(x) & \rightarrow D_{f_2} \\ f_3(x) & \rightarrow D_{f_3} \\ \vdots \end{cases}$ وقتی در \mathbb{R} پیوست است که:

الف) تک تک مقاطعها در دامنه مربوط به خودشان پیوسته باشند

ب) تابع f در نقاط مرزی دامنه توابع (مقاطع) پیوست باشد.

مثال ۲) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x+4} & x > 0 \\ -\alpha & x = 0 \\ \frac{\alpha}{x-4} & x < 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.

← بررسی پیوستگی تابع $y = [f(x)]$ * به نمودار تابع $y = [\cos x]$ که در بازه $[-3\pi, 2\pi]$ رسم شده است توجه نمایید:

یادداشت پردازی:

تمرين کتاب درسی: پیوستگی تابع $\sin x = \pi$ را در نقطه $x = \pi$ بررسی کنید.

نکته های مهم

- (الف) اگر f در a پیوسته باشد $\Rightarrow f(a) = f(x)$ آنگاه $[f(x)]$ در a پیوسته است. یعنی به ازای نقاطی مانند a که داخل جزء صحیح غیر صحیح شود، تابع $[f(x)]$ پیوسته است.
- (ب) اگر f در a پیوسته و $f(a) \neq f(x)$ آنگاه $[f(x)]$ در a نکی از حادثه ای زیر را دارد:
- ۱) اگر f در a معمودی آکید باشد تابع $[f(x)]$ در آن ناپیوسته ولی از راست پیوسته است.
 - ۲) اگر f در a نزدیک آکید باشد تابع $[f(x)]$ در آن ناپیوسته ولی از چپ پیوسته است.
 - ۳) اگر a طول مانع میم نسبی f باشد، $[f(x)]$ در آن هیچ گونه پیوستگی ندارد.
 - ۴) اگر a طول مانع میم نسبی f باشد تابع $[f(x)]$ در آن پیوسته است.

* به طور کنی به ازای نقاطی چون a که $f(a) \in \mathbb{Z}$ تابع $[f(x)]$ ناپیوسته است مگر حادثه خود را ثابت باشد.

مثال امناگی: پیوستگی تابع $\left[\frac{x}{3} \right] = f(x)$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید (رسم نمودار)

مثال لا: تابع $[x^2] = f(x)$ در بازه $[-3, 3]$ در حین نقطه 0 ناپیوسته است. (رسم نمودار)
 $x^2 = k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{Z}$ و $x \neq 0$
 $\Rightarrow x = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3} \}$

نکته: تابع $f(x) = m[g(x)] + n[-g(x)]$ به ازای نقاطی که $g(x)$ صحیح و غیر ثابت باشد ناپیوسته است.

مثال س: رفتار تابع $f(x) = [\sqrt{x}] + [-\sqrt{x}]$ را در نقاط $x = 1, 7, 9$ از نظر پیوستگی بررسی کنید.

تست س: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \sin(\pi(x - [x]))$ روی بازه $(2, 4)$ کدام است؟

(الف) ۵ (ب) ۲ (ج) ۱ (د) ۳

تست س: تابع هر آلت $y = [x^2]$ در $x = 0$ پیوستگی نداشت.

(الف) از راست پیوسته (ب) ناپیوسته (ج) پیوسته (د) از چپ پیوسته

یادداشت پردازی:

ست یا: تابع با مابطه $f(x) = x^2 - 2x + k$ پیوست است، بین تین مقدار کدام است؟ (س - ۸۸)

(الف) $\sqrt{2} - 1$ (ب) $\sqrt{3} - 1$ (ج) $\sqrt{5} - 2$

ست ۱۱: تابع f با مابطه $|x| = f(x)$ روی بازه $(-2, 2)$ در حین نقطه ناپیوست است

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱

* در تابع $f(x) = ax + b$ اگر $a \neq 0$ ، درون جزو صحیح، عددی صحیح سود آن گاه:
اگر $a > 0$ ، f در \mathbb{R} ناپیوست و پیوستگی چپ دارد.
اگر $a < 0$ ، f در \mathbb{R} ناپیوست و پیوستگی راست دارد.

مثال ۱: توابع با مابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & x \neq 0 \\ g(x), & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ چه نوع پیوستگی دارند؟

مثال اضافی: پیوستگی تابع $y = [-(-x)^3] = -x^3$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

→ بررسی متضایای مرتبه پیوستگی در نقاط میانی:
الن) اعمال جبری روی توابع و پیوستگی:

(۱) اگر f و g در \mathbb{R} پیوست باشند و $f \pm g$ در \mathbb{R} پیوست من باشند، تابع $\frac{f}{g}$ نیز

باشد ($0 \neq g$) نیز در \mathbb{R} پیوست است. برای مثال: $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$ و $g(x) = x^2 - 1$

(۲) اگر f و g محدود تابت باشند، $f \circ g$ نیز در \mathbb{R} پیوست خواهد بود.

(۳) اگر f و g در \mathbb{R} ناپیوست باشند تابع $f \circ g$ نیز در \mathbb{R} ممکن است در \mathbb{R} پیوست باشند یا نباشند. برای مثال اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = 2x$ در $x = 1$ ناپیوست اما تناول آنها پیوست است

(۴) اگر از f یا g در \mathbb{R} پیوست و دیگری ناپیوست باشد، آنگاه $f \pm g$ حتی در \mathbb{R} ناپیوست است و $f \circ g$ ممکن است در \mathbb{R} پیوست باشد یا نباشد. مثال: $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = [x]$ در $x = 1$ دقت کنید که حالت (۱) در حالت مکس برقرار نیست.

* اگر تابع g در \mathbb{R} ناپیوست و یا حد نداشت باشد و لی در یک همسایه a تعریف شده و کراندار باشد و f در \mathbb{R} پیوست و $f(g)$ آنگاه تابع $f \circ g$ حتی در \mathbb{R} پیوست است. برای مثال اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = [x]$ و $a = 1$ ، داریم ...

نتیجه‌ای محض: اگر $h(x)$ در نقاطی ناپیوست و $g(x)$ پیوست در $(x_0, h(x_0))$ نتیجه ناپیوستی f : $\{x_i\}_{i=1}^n$ - تعداد نقاط ناپیوستی h

مثال اضافی: تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ در بازه $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ چند نقطه‌ی انتقال دارد؟

مثال اضافی: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \sin(\pi x)$ در $[0, 1]$ را بایابید.

نتیجه‌ی مهم: اگر f یک چند جمله‌ای باشد، تابع $y = f(x)[x]$ در رشته‌های پیوست است. برای مثال تعداد نقاط ناپیوستگی $\left[\frac{16}{3} - 9x^3\right] = f(x)$ در بازه‌ی $(-7, 10)$ بیشتر است... مثال: تابع $[x]$ در $x=1$ ناپیوست و $x=1$ در این نقطه پیوست و مقدارش صفر است. بنابراین $[x-1](x) = f(x)$ در $x=1$ پیوست است.

تست ۱۲: تابع $[2x] + [3x] = f(x)$ در کدام نقطه‌ی زیر پیوست است (س-۷۹)

- الف) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{2}{3}$

مثال ۱۳: تابع $[x-4](x-1) = f(x)$ در تمام اعداد صحیح ناپیوست است بجز نقاط $x=4, 5, 6, \dots$
ب) هر تابع چند جمله‌ای در تمام نقاط حقیقی پیوست است.
ج) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوست است.

مثال ۱۴: تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ در $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ پیوست است.

د) (پیوستگی توابع مُلْتِفَت)

توابع $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ روی \mathbb{R} پیوست اند.

توابع $f(x) = \cot x$ و $f(x) = \tan x$ روی دامنه‌شان پیوست اند.

$$f(x) = \tan x \rightarrow D_f \neq \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{Z} \right\}$$

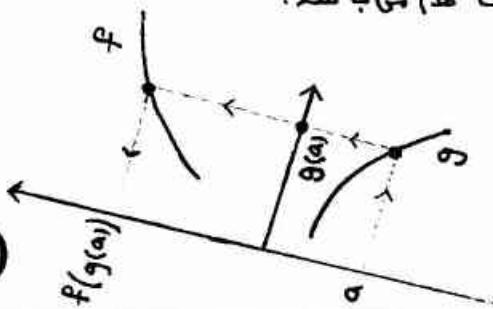
$$f(x) = \cot x \rightarrow D_f \neq \left\{ x \mid x = k\pi, x \in \mathbb{Z} \right\}$$

ه) اگر تابع g در a حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ و تابع f در b پیوست باشد، آن‌گاه

$$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(b) \quad ***$$

به عبارت دیگر تعویض و جابجایی « f » و « \lim » مجاز است که به اصطلاح متغیر گوییم

***: دقت لشیده نسبت به تعریف زیر تناهیست، تقسیم قسمت ه) می‌باشد.



توجه کنید که اگر f و g در a پیوست باشند ملن

است $f \circ g$ در a پیوست باشد یا نباشد.

و اگر g در a ناپیوست و f در $g(a)$ پیوست باشد

آن‌گاه $f \circ g$ در a پیوست می‌باشد یا نمی‌باشد.

حداکثر تابع پیوسته عبوری کند.

نتیجه: اگر تابع و در نقطهٔ a و تابع f در (a) و پیوسته باشد، آنگاه تابع $f \circ g$ در نقطهٔ a پیوسته است.

مثال ۱۳: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = \pi^2$ پیوسته است و تابع $g(x) = \sin x$ در $x = \pi^2$ پیوسته است. پس $f \circ g(x) = \sin(\sqrt{x})$ در $x = \pi^2$ پیوسته است.

حل: میرهنی از نظرین در کلاس‌های کتاب درسی:

مثال ۱۴: پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ را در نقاط انتهایی دامنه آن بررسی کنید.
حل: دامنهٔ تابع $[0, 2]$ می‌باشد، پس هدف سوال بررسی پیوستگی پیش در $x = 2$ و $x = 0$ پیوستگی را می‌نماییم. در $x = 2$ می‌باشد پس

مثال ۱۵: تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ در تمام نقاط دامنه اش که $(1, +\infty)$ است، پیوسته است.

مثال ۱۶: تابع $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$ روی دامنهٔ خود $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$ پیوسته است

به عبارتی روی بازه‌های $(-\infty, 3)$ و $(3, +\infty)$ پیوسته است.

مثال ۱۷: تابع $f(x) = \frac{\tan x}{1+\sin x}$ را در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ برای بررسی نقاط پیوستگی آن کاری کنید.
است ریشه‌های مخرج را حدث کنیم.

$$f(x) = \frac{\tan x}{1+\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$\rightarrow \cos x(1+\sin x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس با حدث نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است.

مثال اضافی: تابع $y = \frac{x-1}{x}$ در بازهٔ $(0, 1)$ چند نقطهٔ ناپیوستگی دارد؟

مثال ۱۸: می‌خواهیم بررسی کنیم که تابع $f(x) = \tan(\sqrt{x})$ در جهات نقاطی ناپیوسته است:

مثال اضافی: $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ می‌باشد، پیوستگی $f \circ g$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

مثال اضافی: تعداد نقاط ناپیوستگی $f(x) = [2x] - [3x]$ را در بازهٔ $(0, 1)$ بیابید.

نکته: نقاط غیر مشترک جزء نقاط ناپیوستگی و نقاط مشترک را بعد مررت جدا بررسی کنیم.

تابع $\tan x$ در همه نقاط با جز $k\pi + \frac{\pi}{2}$ و تابع $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ پیوست است
بنابراین اگر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ در این صورت تمکیب دوتاگه معنی $f(x) = \tan \sqrt{x}$
با معنی خواهد بود.

→ توجه کنید که حل مسائل مبتدا اول پیوستگی در کتاب درسی، در پایان جزو و وجود دارد.

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in Q \\ f_2 & x \notin Q \end{cases} \quad (\text{حالت دیریکله})$$

* دقت کنید که تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای پیوست نیست
اگر f_1 , f_2 پیوست باشند، ریشه‌های $f_1(x) = f_2(x)$ تنها نقاطی مستند که تابع f در آنها
پیوست است (شکل پایین مشاهده).

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases} \quad \text{برای مثال در تابع } f \text{ ریشه‌ی } x = 0 \text{ برایم معنی ندارد.}$$

این نقطه پیوست است. یا در فرمین کتاب درسی $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ تابع تنها در

نقطه‌ی $x = 0$ (کویا) پیوست خواهد بود.

۲) اگر f_1 , f_2 ناپیوست باشند تابع منتهی در نقطه‌ی a ناپیوست باشد به سُلطانه
حد تابع در a برایم مقدار تابع باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [x + \frac{1}{x}] & x \in Q \\ [x] - [-x] & x \notin Q \end{cases} \quad \text{برای مثال تابع}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ وجود خواهد.

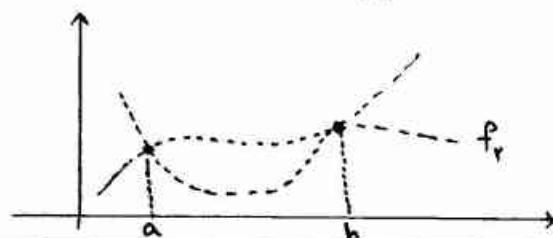
$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x \in Q \\ \frac{5}{4} & x \notin Q \end{cases}$ است ۳۳: تابع f با مقاطعی

۱) بأسفار

۲) هیچ

۳) هیچ

۴) انت



به شکل رو برو که مبوطه حالت اول تابع

دیریکله است توجه نمایید:

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in \mathbb{Z} \\ f_2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

* بررسی پیوستگی تابع (به شکل پایین صفحه دقت کنید)

۱) تابع f در نقاط غیر صحیح دقتی پیوسته است که f_2 در آنها پیوسته باشد.

$$\text{مثال ۱۹: تابع } f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2[x] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ در نقاط غیر صحیح چون } \frac{1}{2} = x \text{ پیوسته است}$$

۲) تابع f در نقطه a صحیح α زمانی پیوسته است که حد تابع در a (که از مقادیر f_2 بدست می‌آید) با مقدار تابع در a (که از مقادیر f_1 بدست می‌آید) برابر باشد.
→ توجه داشته باشید زمانی که a یک عدد حقیقی باشد معناست که $x \neq a$

$$\text{مثال ۲۰: پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} [-\sqrt{x}] & x \in \mathbb{Z} \\ -\sqrt{x} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ را در نقاط } x=16 \text{ و } x=5 \text{ بررسی کنید.}$$

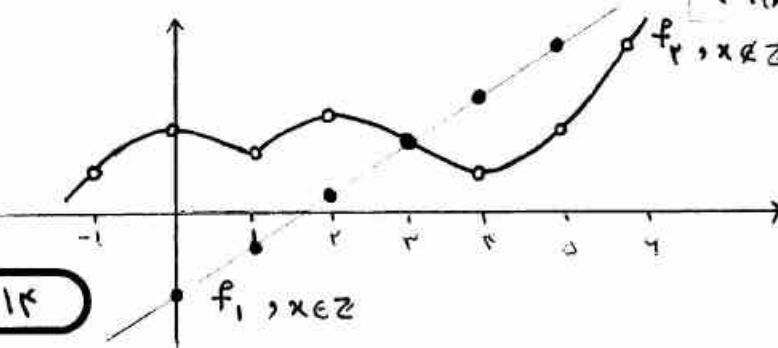
۳) اگر f پیوسته باشد، تابع f در همه نقاط غیر صحیح پیوسته و در نقاط صحیح مانند دقتی پیوسته است که α رسیبی $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$ باشد.

$$\text{مثال ۲۱: تابع } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in \mathbb{Z} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ در تمام نقاط غیر صحیح پیوسته است و}$$

رسیبی های $x^3 = \sqrt{x}$ عبارتند از 0 و 1 یعنی تابع f در 0 و 1 پیوسته است،

$$\text{نایپوستگی } z - \{0, 1\} \text{ است.}$$

ست ۱۶: اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Z} \\ f(x)-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



* به شکل رو به رو توجه نمایید:

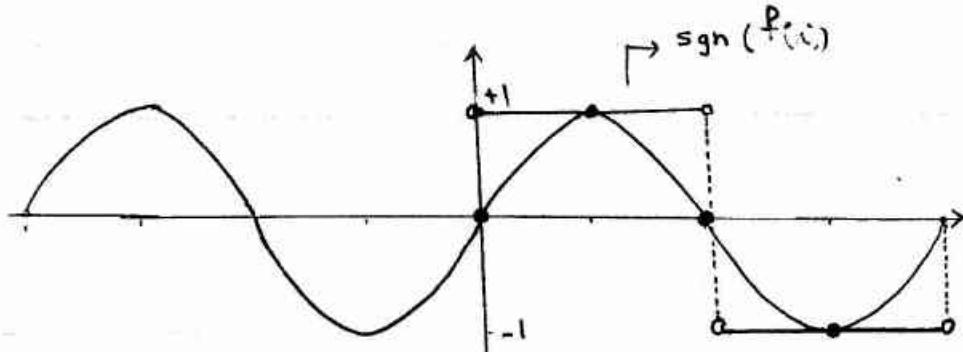
نقطاط ناپیوستگی تابع و روی باره [۴، ۴] کدام است (س-ر- ۹۲) انت ۱) ب) ۲) ب) ۳) مخت

$$y = \operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

* بررسی پیوستگی تابع

ابتدا موضع را با مثال زیر آغاز می کنیم:

مثال ۲۲: نمودار تابع $y = \operatorname{sgn}(f(x))$ رارسم کنید: در سکل زیر سمت چپ را تکمیل ناید.



از نعمتار منق عا توان نتیجه گرفتند:

اگر f تابع پیوست باشد، نقاط ناپیوستگی تابع $y = \operatorname{sgn}(f(x))$ همان رسمی های $f(x) = 0$ است. البته باشرط آنکه تابع حد امثل درین مساله راست یا چپ این رسمی ها مخالف نباشد.

مثال ۲۳: نمودار تابع $y = \operatorname{sgn}([x])$ رارسم نموده و نمودار آن را از نظر پیوستگی بررسی کنید. * با توجه به اینکه توابع زدج سبست به محضر معرفی شده توابع خود سبست به مبدأ متقارن هستند، لذا توابع در نقطه ای صفر یا همواره پیوسته اند یا هیچ گونه پیوستگی ندارند.

مثال: ۵ را طوری تعیین کنید که تابع $y = \operatorname{sgn}(x-2)(x+5)^3$ پیوست باشد (خط آخر فتح)

یادداشت پردازی:

بررسی پیوستگی تابع f^{-1} بر اساس تابع f
از کتاب درسی حسابان به بیان داریم که:

اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوست و محدودی آنید باشد، تابع f^{-1} روی بازه $[f(a), f(b)]$ پیوست و آنید. محدودی خواهد بود، برای حالت نزولی آنید نیز متشابه و وجود دارد. (*)
همین‌ها به بیان داریم که نفوذارهای f و f^{-1} سمتی به $x = y$ (سیماز ربع اول و سوم) تن مینهند.
و در آخر اینکه: $(a, f(a)) \in f \rightarrow (f(a), a) \in f^{-1}$

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

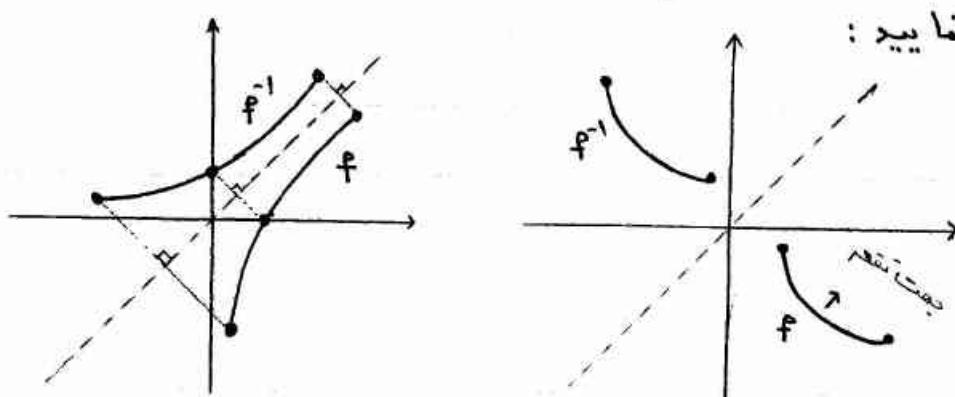
با مر نظر گرفتن شرط وارون پذیری تابع f (یک به یک بودن f) داریم:

۱) اگر f پیوست باشد، f^{-1} نیز پیوست است.

۲) f و f^{-1} یا هر دو محدودی اند (آنید) یا هر دو نزولی اند (آنید)

۳) اگر f محدودی آنید باشد تقعیر f^{-1} قیمتی یکدیگرند و اگر f نزولی آنید باشد تقعیر f^{-1} نیکیان خواهد بود. به این مثال اگر $f = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$ بازه‌ای که f^{-1} پیوست است ...

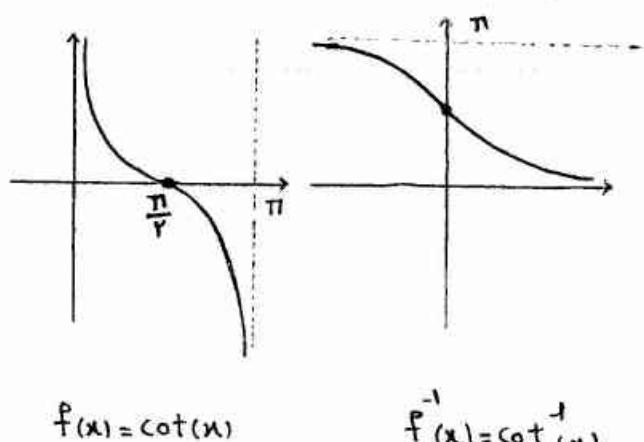
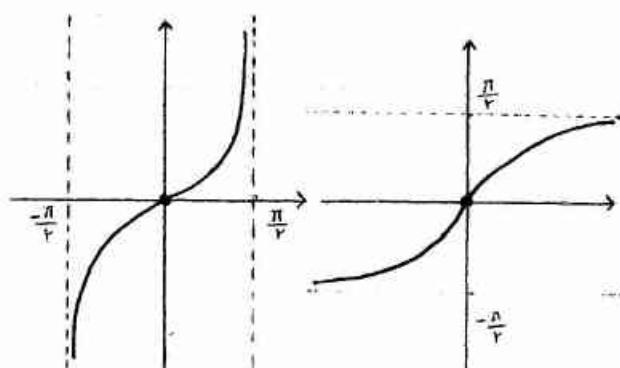
به نفوذارهای زیر توجه نمایید:



مسئل ۲۴: نفوذار توابع زیر به معنای وارون آنها در صفحه محنتها رسم کنید:

$$f(x) = \tan x \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

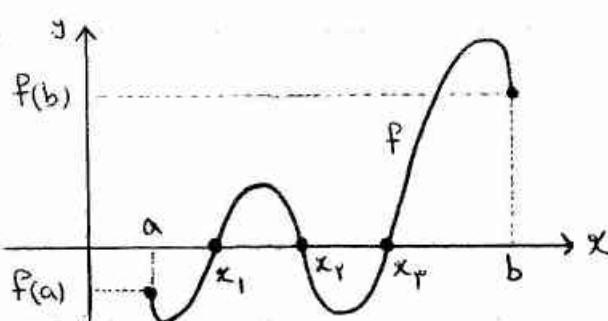
$$g(x) = \cot x \quad , \quad 0 < x < \pi$$



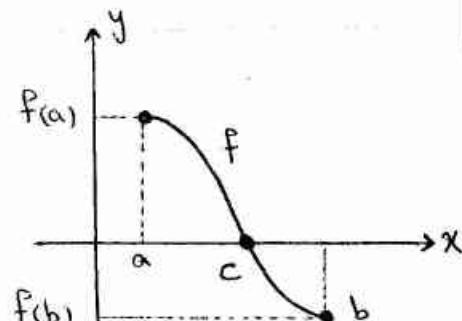
* دیگری های مضم توایع پیوسته بر اساس انتقال و یکپارچگی آنها:

۱) قضیه بولتزانو (رسیه)

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و در نقطه‌ی a مثبت و در نقطه‌ی b منفی یا به عکس باشد (به طور کنی $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$) و مختص العلامت باشد) آنگاه حداقل یک $c \in [a, b]$ متعلق به بازه‌ی (a, b) وجود دارد که $f(c) = 0$ به عبارت دیگر $f(x)$ در فاصله (a, b) حداقل یک ریشه به نام c دارد. پس c مخصوص به خود به خرد نیست.



شکل (۱)



شکل (۲)

نکته: اگر f در فاصله $[a, b]$ کمتر از یک نواحی باشد، آنگاه c مخصوص به خود است. (شکل ۲)

نکته: عکس قضیه‌ی رسیه همواره برقرار نیست به صارتی اگر f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و ریشه داشته باشد معنی توان لعنت کرد $f(a) < f(b)$.

نکته: اگر f در $[a, b]$ پیوسته و در این بازه ماقاد ریشه باشد آنگاه $f(a) < f(b)$ است.

مثال ۲۵: معادله $x - \cos x = 0$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ یک ریشه دارد با توجه به اینکه

$$f(0) = -1 \quad f(\pi) = 0 \quad f'(x) = 1 + \sin x > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

تمرین: حدود m را به قسمی تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ قرار گیرد.

مسئله ۱۵: یکی از ریشه‌های حقیقی معادله

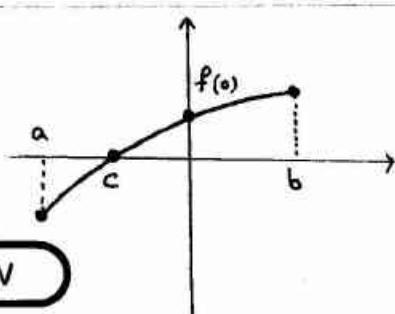
عدد او-۱ است. مجموع مقادیر a کدام است (س-خ-ر-۸۸)

$\text{IR} (۱)$

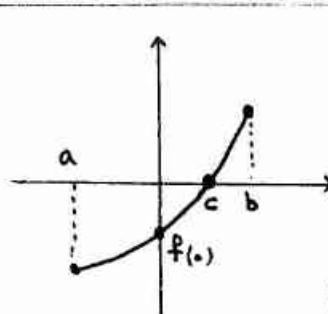
\mathcal{F} (ج)

$a > 2$ (ب)

$a < -2$ (الف)

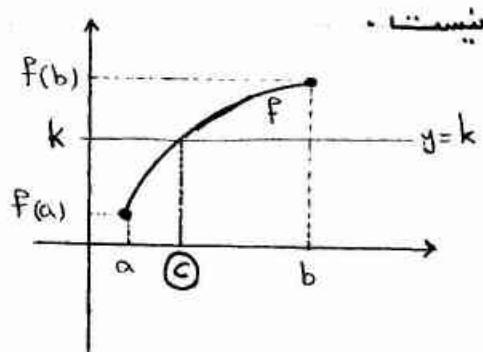
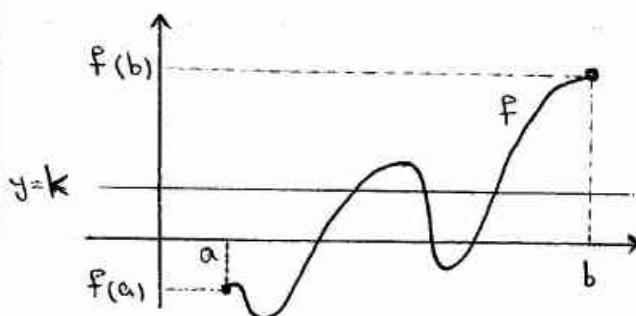


اگر $a < b$ و f آنگاه c معدودی
مختص العلامت تعیین
رسیه‌ای منفی داریم.



اگر $a < b$ و f آنگاه c و $f(c) < 0$
مختص العلامت اند
تعیین ریشه‌ای مثبت داریم.

قضیی مقدار میانی: اگر تابع f در بازه‌ی بسته $[a, b]$ پیوست باشد و اگر عدد حقیقی k بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یک c در بازه‌ی $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k$ باشد. به عبارت دیگر خط $y = k$ نمودار f را هسته دریک یا چند نقطه قطع می‌کند، پس c منحصر به فرد نیست.



مثال ۲۷: آیا تابع $f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4$ در بازه $[-2, 2]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4 = 5 \Rightarrow \frac{x^3}{4} + \sin \pi x - 1 = 0 \rightarrow g(x)$$

طبق قضیی مقدار میانی (به کمک قضیی بولتزانو)

$$g(-2) = -2 + 0 - 1 = 1$$

$$g(-1) = -1 + 0 - 1 = -2 \Rightarrow g(2) \cdot g(-2) < 0$$

و حداقل یک ریشه در $[-2, 2]$ دارد پس f می‌تواند مقدار ۵ داشته باشد.

نتیجه: اگر $f(x)$ یک حینه‌ای از درجی n باشد آن‌گاه $f'(x)$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. توجه کنید که حل نظریه این مسئله در کتاب درسی این فرم است: میز در جزده موجود است.

* اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوست و ایکد محدودی باشد بُرداً $[f(a), f(b)]$ است و برای حالت نزولی ایکد با این شرایط بُرد f مصور است $[f(b), f(a)]$ است.

مثال ۲۸: مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 5 & x \in \mathbb{Z} \\ 3x^2 + x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ چه است؟

یادداشت پردازی:

تست ۱۶) تابع f با صفتی کدام است؟ (س-ر- ۸۰)

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-1}{x} & ۱ < x \\ ax+b & -1 \leq x \leq ۱ \end{cases}$

الف) $(1, 0)$ ب) $(0, 1)$ ج) $(-1, 0)$ د) $(0, -1)$

تست ۱۷) به ازای کدام مقدار a تابع f در بازه $[0, 3]$ پیوست است؟ (س-ر- ۸۱)

$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & x < 2 \\ a+2\sin\frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$

الف) -2 ب) -1 ج) 0 د) 1

تست ۱۸) اگر $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x}}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ باشد، آنچه از نظر پیوستی:

الف) از همپاپیوست - از راست ناپیوست
(س-ر- ۸۲)

ب) از همپاپیوست - از راست پیوست

ج) از همپاپیوست - از راست ناپیوست

د) از همپاپیوست - از راست پیوست

تست ۱۹) در نقطه ای که تابع پیوست و دیگری ناپیوست است. با کدام عمل بین توابع ممکن است تابع حامل در آن نقطه پیوست باشد

الف) تقسیم ب) تفاصل ج) ضرب د) جمع

تست ۲۰) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با صفاتی $f(x) = [x] - x^2$ روی بازه $(-1, 2)$ کدام است؟ (س-ر- ۸۳)

الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 0

تست ۲۱) تابع $f(x) = [2\sin x]$ در نقطه $x=0$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

(س-ر- ۸۴)

الف) از همپاپیوست - از راست ناپیوست
ب) از همپاپیوست - از راست پیوست
ج) از همپاپیوست - از راست ناپیوست

تست ۲۲) تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ از نظر پیوستگی چگونه است (س-ر- ۸۵)

یادداشت پردازی:

ست ۲۲) تابع f با مatabطی $[f(x) = \frac{1}{3}x - 1]$ روی بازه $(0, 9)$ در چند نقطه، ناپیوست است (س-ر- ۸۵) (الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

ست ۲۳) تابع با مatabطی $[f(x) = 2x^2 + k]$ روی بازه $[2, 4]$ پیوست است، بسیستین مقدار کدام است؟ (س-ر- ۸۸) (الف) ۱ ج) ۲ د) ۳ ب) ۴

ست ۲۴) با کدام مقادیر a ، تکی از رسیتی معادله $x^3 + 2x^2 - x + 4 = 0$ در بازه $(1, 0)$ قرار می‌گیرد. (س-ر- ۸۸) (الف) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{5}{4}$

ست ۲۵) رسیتی معادله $x^3 + 2x^2 - 2x = 0$ در کدام بازه است؟ (س-ر- ۸۹)

الف) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ب) $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$ ج) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ د) $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$

ست ۲۶) اگر $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{اگر } x \neq 1 \\ x[x] & \text{اگر } x = 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوست باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با

کدام طول قطعه منتهی است (س-ر- ۹۰-۰) (الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

ست ۲۷) اگر $f+g$ و $f-g$ حدود در نقطه x_0 پیوست باشند، آنگاه کدام بیان درست است؟ (س-ر- ۹۱) (الف) از زاید $f+g$ در x_0 پیوست است

ب) $f+g$ ممکن است در x_0 پیوست باشد

ج) $f+g$ ممکن است در x_0 پیوست باشد

د) $f+g$ از زاید $f+g$ در x_0 پیوست است

ست ۲۸) تابع با مatabطی $[f(x) = \begin{cases} x[x] & \text{اگر } x \neq 1 \\ ax+b & \text{اگر } x = 1 \end{cases}]$ بر روی \mathbb{R} پیوست است، مقدار a کدام است؟

(خ- ۸۵) (الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) ۱

یادداشت پردازی:

ست ۴۹) $f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ کدام تابع در $x=0$ پیوست است
 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$

الف) $f \circ g$ ب) $g \circ f$ ج) $f \circ f$ د) $f + g$
 ست ۵۰)

ب) ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} & x < -1 \\ ax+1 & x \geq -1 \end{cases}$ پیوست است؟ (خ-۸۷)

الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{5}{4}$ ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{1}{2}$

ست ۵۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$ کدام مقدار a ، تابع با منابطی پیوست است

الف) هیچ مقدار a ب) ۱ ج) π د) $-\pi$ (خ-۸۸)

ست ۵۲) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ ازای کدام مقدار a ، تابع پیوست است (خ-۹۰)

الف) هیچ مقدار a ب) ۰ ج) ۱ د) -۱

ست ۵۳) $f(x) = \frac{ax}{x}$ تابع از نظر پیوستگی در $x=0$ چگونه است. (خ-۹۱)*

الف) پیوست ب) از پیوست ج) از راست پیوست د) ناپیوست

ست ۵۴) کوچکتین رمیهی مثبت معادله $x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ در کدام بازه است؟ (خ-۹۱)

الف) $[\frac{1}{12}, \frac{1}{11}]$ ب) $[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}]$ ج) $[\frac{1}{10}, \frac{1}{9}]$

ست ۵۵) تابع $y = \cos(\pi[\frac{x}{3}])$ در $x=2$ (آزاد-۸۳)

الف) پیوستگی راست دارد ب) پیوستگی چپ دارد ج) پیوست است د) پیوست نیست

یادداشت پردازی:

ست ۳۶) تابع $y = \left[\frac{4x}{3} \right] - \left[\frac{3x}{7} \right]$ در بازه $[5, 7]$ حین نقطه ناپیوستگی دارد (آزاد ۸۴)

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۳ د) ۲

ست ۳۷) $x = \begin{cases} 4 & \text{تابع} \\ x^2 + 3 & \text{سایر} \end{cases}$ حین نقطه ناپیوستگی دارد؟ (آزاد ۸۵)

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۳ د) هضر

ست ۳۸) محدودار تابع $f(x)$ در بازه $[3, 1]$ بصورت زیر است. اگر برداشتن $[2, 2]$ باشد محدودار $f(x)$ در این بازه، چند نقطه ناپیوستگی دارد. (آزاد ۸۶)

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۷ د) ۸

ست ۳۹) تابع $y = x^3 - 12x$ در نقاط $x=2$ و $x=-2$ پیوستی داشته باشد. (آزاد ۸۷)

الف) پیوست-پیوست ب) ناپیوست-ناپیوست ج) ناپیوست-پیوست د) پیوست-ناپیوست

ست ۴۰) تابع $y = \sqrt{2\sin x + 5\cos x}$ حین نقطه ناپیوستگی در بازه $(2\pi, 4\pi)$ دارد:

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۸

ست ۴۱) تابع $y = 35\sin^3 x + 1$ در $x=\pi$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

الف) از راست پیوست ، از چپ ناپیوست ب) از راست و چپ پیوست است

ج) از چپ و راست ناپیوست د) از چپ و راست ناپیوست است.

ست ۴۲) تابع $y = [10x] - [5x]$ در بازه $[3, 4]$ حین نقطه ناپیوستگی دارد. (آزاد ۹۰)

الف) ۵ ب) ۱۵ ج) ۱۰ د) ۱

ست ۴۳) محدودار تابع $y = x^2 - 2x$ در بازه $[5, 3]$ حین نقطه ناپیوستگی دارد (آزاد ۹۱)

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۵ د) ۳

یادداشت پردازی:

تست (۴۳) اگر تابع $[\sin 2\pi x] = ۰$ در بازه‌ی $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ پیوسته باشد، حد اکثر مقدار a را باید
 (جامع - قلم چهار) (الف) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) ۱

تست (۴۴) اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \text{Arctan}x$ ، آن‌گاه مقدار تابع $g \circ f$ در نقطه‌ی ناپیوستگی
 آن کدام است تا این تابع روی \mathbb{R} پیوست شود. (جامع - قلم چهار)

(الف) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{2}$ (الف) صفر

تست (۴۵) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan \pi x}{x^2-1} & x > 1 \\ b & x = 1 \\ ax + \frac{b}{x} & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد. مقدار a کدام است (ناتج)
 (الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) صفر (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $-\frac{\pi}{2}$ (الف) $-\frac{\pi}{2}$

تست (۴۶) چه تعداد از متواضع زیر پیوسته نیستند (جامع - گنج)

(الف) $y = [x^2] + 1$ (ب) $y = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 5x + 2}$ (ج) $y = \sqrt{4-x^2}$ (د) $y = \frac{1}{x-1}$

تست (۴۷) تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \neq 0 \\ ax^2 + bx & x = 0 \end{cases}$ در بازه‌ی $(-9, 9)$ پیوسته است، مقدار (a, b) چقدر است?
 (الف) (∞, ∞) (ب) $(-47, -47)$ (ج) $(-3, -3)$ (د) $(-28, -28)$

تست (۴۸) اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-1} & x > 1 \\ a & x \leq 1 \end{cases}$ در \mathbb{R} پیوسته باشد، مقدار a چه عددی است؟ (جامع - گزینه ۲)

(الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $-\frac{\pi}{2}$ (ج) 2π (د) -2π (الف) $\frac{\pi}{2}$

تست (۴۹) تابع $f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{در چند نقطه‌ی [وارد-]} \\ \text{ناپیوستگی دارد.} & \end{cases}$ (جامع - رزمندان)

(الف) ۱۹۹۹ (ب) ۲۰۰۰ (ج) ۲۰۰۱ (د) ۱۰۰۰ (الف) ۱۰۰۰

تست (۵۰) تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 - \frac{1}{x} & |x| > ۱ \\ ax+b & |x| \leq ۱ \end{cases}$ روس مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است، ط کدام
 یادداشت پردازی:
 است؟ (جامع - سنجش)

تست ۵۱) تابع با مناطقی پیوست است

$$f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \tan 2x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(ج) مجموع مقدار a (ب) ۲ (الف) ۱ (جمع - سنجش)

تست ۵۲) تابع کدام مقدار a ، تابع پیوست است؟ (سنجش)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \sin 2x}{x^2} & x \neq 0 \\ a-1 & x=0 \end{cases}$$

(الف) ۱ (ب) ۱ (ج) ۳ (د) صفر

تست ۵۳) تابع $f(x) = \frac{x^3}{mx^4 + 2x - 1}$ در نقطه $x=0$ از چه مقدار m در \mathbb{R} پیوست است؟

$$m > 1 \quad m = \pm 1 \quad m < -1 \quad m = +1$$

تست ۵۴) تابع $y = (x - [x])(x - 1 - \cos x)$ در بازه $[1, 2]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

(الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

تست ۵۵) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{2} \right]$ در بازه $[4, 6]$ را بایا بیند.

(الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶

تست ۵۶) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = x - [x] + [\sqrt{x}]$ روی بازه $[3, 5]$ کدام است؟

(الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳

تست ۵۷) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} [2x] & x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ را بایا بیند؟

(الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶

تست ۵۸) تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \in \mathbb{Q}' \\ x^2 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ در چند نقطه پیوست است.

یادداشت پدرداری: (الف) ۰

تست ۵۹) کدام خطا ممکن است $y = \frac{1}{x} + x^2$ را در بازه‌ی $(-1, 1)$ قطع نماید. (تفصیل مقدار میانی)

الف) $y=1$ ب) $y=0$ ج) $y=8$

یادداشت پردازی: