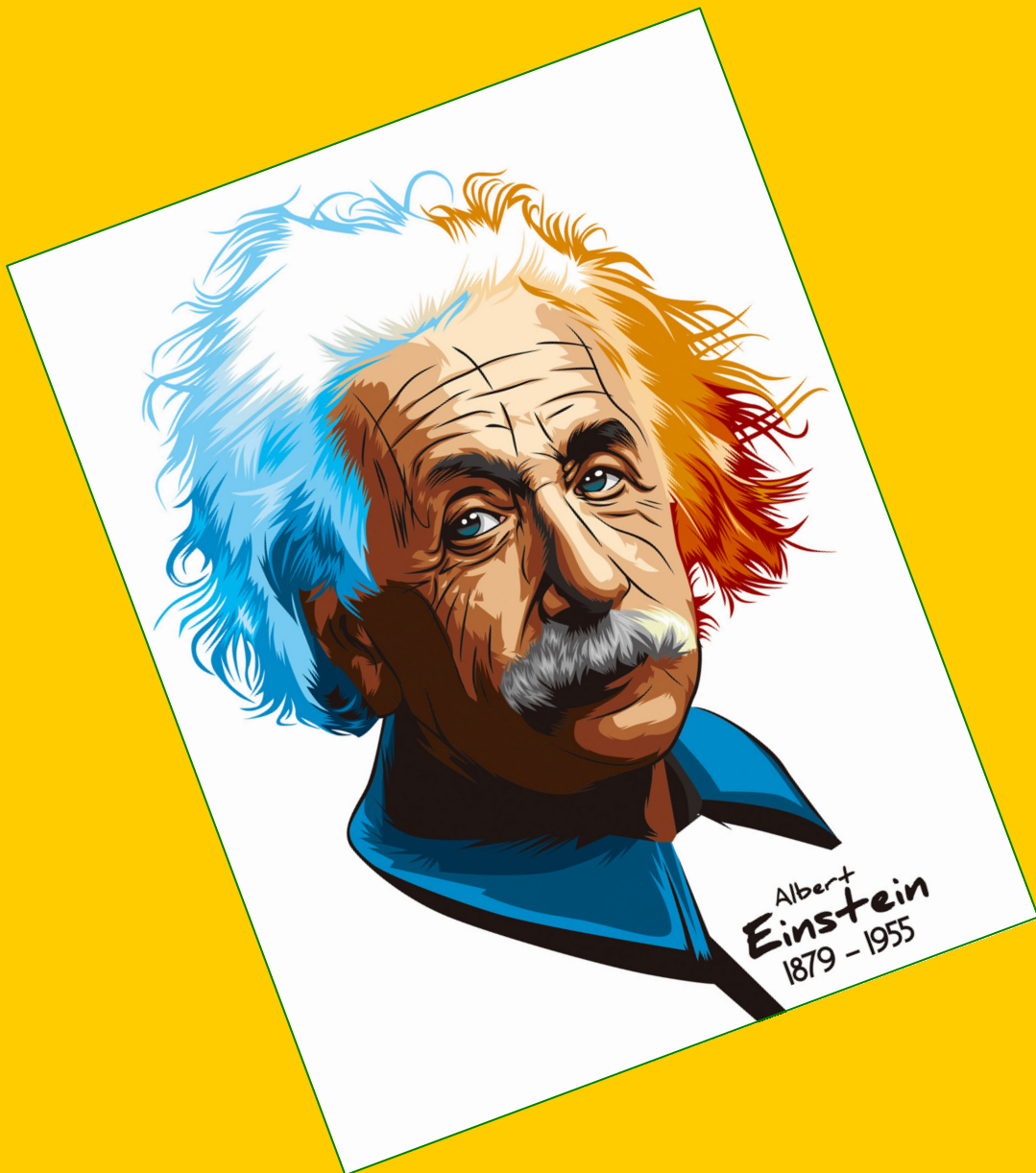




ویژه نخبگان ایرانی

نمونه از جزوات ریاضی:

## تیزهوشان نهم



آموزش مفهومی دروس، نکات دقیق و روش های سریع با جزوات درس آموز

شامل

## درسنامه دقیق و مفهومی در سطح بسیار بالا



**جراحی**

آزمون‌های ادوار گوناگون سمپاد تا جدیدترین دوره



**انواع فراوان**

مثالها و تستها در سطح دشوار و بسیار دشوار

ویژه علاقمندان یادگیری ریاضیات ناب

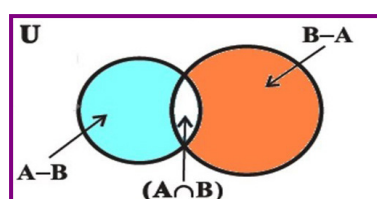
## فهرست کامل جزوات

۲	مفاهیم پایه‌ای مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ها، جبر مجموعه‌ها و نمودارهای مربوطه، کاربرد در احتمال + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۱ مجموعه و احتمال
۴۵	اعداد گویا و محاسبات، اعداد گنگ و نمایش آن‌ها، قدر مطلق عددها و محاسبات قدرمطلق + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۲ مجموعه اعداد حقیقی
۸۹	طرح کلی بحث استدلال، استدلال و اثبات در هندسه، هم‌نهشتی اشکال و مثلث‌ها، تشابه اشکال هندسی + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۳ استدلال در هندسه
۱۴۲	توان‌رسانی عددها و محاسبات توانی، کاربرد در نماد علمی، ریشه-گیری از عددها، محاسبات رادیکالی + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۴ توان و ریشه‌گیری
۱۹۸	چند جمله‌ای، مفاهیم مرتبط و محاسبات، اتحادهای جبری، تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها، نامساوی و نامعادلات + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۵ عبارت‌های جبری
۲۴۴	دستگاه مختصات و رسم نمودار خط، رابطه‌های خطی، معادله‌ی خط، مقایسه‌ی خطوط و حل دستگاه معادلات + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۶ خط و معادلات
۲۷۸	بیان مفهوم و ساده کردن عبارات، جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ضرب و تقسیم عبارات، تقسیم چند جمله‌ای و تعیین باقی‌مانده + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۷ عبارت‌های گویا
۳۰۵	بررسی حجم و مساحت‌های مربوطه در مکعب و مکعب مستطیل، منشور و استوانه، هرم و مخروط، کره و نیم‌کره + بخش پیشرفته‌تر در انتها	۸ مساحت و حجم

# تیزهوشان نهم



مجموعه و احتمال



صفحه	فهرست مطالب جزوه
۳	مفاهیم پایه مجموعه‌ها
۹	زیر مجموعه‌ها
۱۶	جبر مجموعه‌ها
۲۴	مجموعه و احتمال
۲۸	قدری پیشرفته‌تر
۳۹	سؤالات چهار گزینه‌ای

یک بیان واضح در مورد تعدادی عدد یا شیء، معمولاً یک مجموعه تشکیل می‌دهد. برای نمونه: مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰ برابر است با:

$$B = \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}$$

با این حال، برخی از عبارات مجموعه معرفی نمی‌کنند:

## نکته ۱

برای آن که تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهند لازم است:

این اعداد یا اشیاء «مشخص» یا «معین» باشند.

یعنی:

در مورد هر شیء یا عدد دلخواه، دقیقاً معلوم باشد که آیا جزء آن‌ها هست یا خیر.

به عبارت دیگر لازم است:

**تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی نداشته باشد!**

به عنوان نمونه‌ها:

الف) عبارت: «اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا:

دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

ب) عبارت: «پنج عدد طبیعی» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا:

دقیقاً معلوم نیست که کدام عددهای طبیعی جزء این پنج عدد بوده و کدام‌ها جزء آن‌ها قرار ندارند.

**تست:** کدام عبارت یک مجموعه مشخص نمی‌کند؟

- ① سه نفر اول کنکور سراسری سال ۹۶
- ② چهار عدد طبیعی یک رقمی فرد
- ③ چهار عدد طبیعی یک رقمی زوج
- ④ چهار عدد طبیعی یک رقمی اول

گزینه ۲

عددهای طبیعی یک رقمی فرد، پنج مورد هستند:

۱، ۳، ۵، ۷، ۹

پس دقیقاً نمی‌توان گفت کدام چهار عدد باید انتخاب شده و در مجموعه قرار بگیرند.



**تست:** کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

- ۱ داستان‌های بلند      ۲ ده هنریشه معروف دنیا      ۳ اعداد اول زوج      ۴ رنگ‌های زیبا

گزینه ۳

فقط اعداد اول زوج «معین» هستند و یک مجموعه مشخص می‌کنند:

$$\{2\}$$

سایر موارد به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی دارند.

### مجموعه‌های اعداد:

مجموعه‌های عددی معروف را همواره با نماد اختصاصی هر کدام در ذهن داشته باشید:

- اعداد طبیعی:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد حسابی:  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد صحیح:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد اول:  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
- اعداد طبیعی فرد:  $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- اعداد طبیعی زوج:  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

### توجه کنید:

عده‌های اول از یک بزرگ‌تر بوده و فقط بر یک و خودشان بخش‌پذیر هستند.

### نکته ۲

به دو مورد زیر در مجموعه‌ها توجه کنید:

- ترتیب نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.  
به عنوان نمونه:  
مجموعه‌های  $\{a, b, c\}$  و  $\{c, a, b\}$  کاملاً یکسان هستند.
- اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

اگر مجموعه عضو تکراری داشته باشد، فقط یک‌بار شمرده شده و تکرار آن را حذف می‌کنیم!

$$D = \{3, 5, 3\} \longrightarrow D = \{3, 5\}$$

بعلاوه:

تعداد عضوهای یک مجموعه چون  $A$  را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم.



**تست:** مجموعه‌ی  $A = \{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, \dots, 11\}$  که در آن هر عدد به تعداد خودش نوشته شده است، دارای چند عضو است؟

۴ نمی‌توان مشخص کرد.

۳ ۶

۲ ۱۱

۱ ۳۶

گزینه ۳

با حذف عددهای تکراری، مجموعه فقط شش عضو خواهد داشت:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

**تست:** مجموعه  $A = \{a, \{a\}, \{a, a\}, \{a, a, a\}, \dots\}$  چند عضو دارد؟

۴ نمی‌توان مشخص کرد.

۳ بی‌شمار

۲ ۲

۱ ۱

گزینه ۲

چون تمام مجموعه‌های  $\{a, a\}$  و  $\{a, a, a\}$  و  $\dots$  یا  $\{a\}$  برابر هستند، مجموعه‌ی  $A$  فقط دو عضو دارد:

$$A = \{a, \{a\}\}$$

تهی: 

هرگاه مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، به آن مجموعه‌ی «تهی» گفته و آن را با  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان می‌دهیم. به عنوان نمونه:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از صفر برابر تهی است.

**توجه کنید:**

مجموعه‌ی  $\{\emptyset\}$  خود دارای یک عضو  $\emptyset$  است، پس آن را با تهی برابر نگیرید.

**تست:** کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ی تهی است؟

۲ مجموعه اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸

۱ مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از ۳

۴  $\{\emptyset\}$

۳  $\{0\}$

گزینه ۲

چون بین ۲۴ و ۲۸ فقط عددهای طبیعی ۲۵، ۲۶ و ۲۷ قرار دارند که هیچ‌کدام عدد اول نیستند. پس:

این مجموعه هیچ عضوی نداشته و تهی است!



در ادامه دو روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها می‌آوریم:

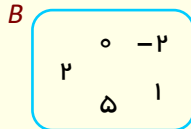
**نکته ۳**

- یک مجموعه را می‌توان با اشکال هندسی هم نمایش داد:
- یک شکل هندسی مثلاً چند ضلعی یا دایره رسم می‌کنیم.
- اعضای مجموعه را داخل آن می‌نویسیم.

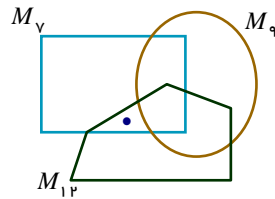
به عنوان نمونه:

$$B = \{-2, 0, 1, 2, 5\}$$

به چنین نمایشی از یک مجموعه، «**نمودار ون**» گفته می‌شود.



**تست:** در نمودار زیر، مجموعه‌های  $M_7$  و  $M_9$  و  $M_{12}$ ، به ترتیب مضرب‌های ۷ و مضرب‌های ۹ و مضرب‌های ۱۲ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در شکل نشان داده شده است، نمایانگر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟



- ۱ ۶۳
- ۲ ۱۹
- ۳ ۲۵۲
- ۴ ۱۶۸

**گزینه ۴**

به شکل نگاه کنید:

نقطه در  $M_7$  و  $M_9$  قرار دارد، ولی در  $M_{12}$  قرار ندارد، یعنی:

عدد مربوطه باید بر ۷ و ۱۲ بخش پذیر بوده ولی بر ۹ بخش پذیر نباشد!

فقط عدد ۱۶۸ در بین گزینه‌ها این خاصیت را دارد.

مهم‌ترین روش نمایش مجموعه‌ها به صورت زیر است:

**نکته ۴**

**نمایش نمادین:**

مجموعه‌ها را می‌توان با علائم ریاضی به صورت کوتاه معرفی کرد:

مثلاً: اعداد طبیعی زوج به صورت زیر هستند:

$$2, 4, 6, \dots \Rightarrow 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots$$

پس مجموعه  $E$  شامل این عددها چنین است:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

به همین ترتیب، مجموعه اعداد طبیعی فرد:

$$O = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$





**تست:** اگر  $\{-2 \leq x < 3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  و  $A = \{-x^2 + 1 | x \in \mathbb{Z}\}$  و  $B = \{-x^3 | x \in A\}$  باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعه‌ی  $B$  را نشان می‌دهد؟

- 1  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 
2  $\{-3, 0, 1\}$ 
3  $\{-1, 0, 27\}$ 
4  $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

**گزینه ۳**

پایده:

عددهای صحیح  $-2, -1, 0, 1, 2$  را در عبارت  $-x^2 + 1$  جای  $x$  قرار دهیم تا عضوهای  $A$  مشخص گردند.

سپس: عدد بدست آمده را در عبارت  $-x^3$  جای  $x$  قرار دهیم تا عضوهای  $B$  مشخص گردند:

$$x = -2: -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \in A \Rightarrow -(-3)^3 = -(-27) = 27 \in B$$

فقط گزینه‌ی سوم عدد  $27$  را دارد و می‌تواند جواب درست باشد.

**تست:** عضوهای مجموعه‌ی  $\{\frac{2m+1}{3} | \frac{m}{2} \in \mathbb{N}, m \leq 4\}$  کدام است؟

- 1  $\{\frac{5}{3}\}$ 
2  $\{\frac{1}{3}, 3, \frac{5}{3}\}$ 
3  $\{\frac{7}{3}, 3\}$ 
4  $\{\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 3, \frac{5}{3}\}$

**گزینه ۱**

اولاً: فقط برای  $m = 2$  و  $m = 4$  شرط  $\frac{m}{2} \in \mathbb{N}$  برقرار خواهد بود.

ثانیاً: با قرار دادن این دو عدد در عبارت  $\frac{2m+1}{3}$  عضوهای مجموعه مشخص می‌شوند:

$$m = 2: \frac{2(2)+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$m = 4: \frac{2(4)+1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

**تست:** اگر  $\{x > -3, x \in \mathbb{Z}\}$  و  $A = \{x | -x \in A\}$  باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- 1  $-2 \notin B$ 
2  $-2 \in B$ 
3  $3 \in A$ 
4  $-4 \in B$

**گزینه ۱**

عضوهای  $A$  به صورت  $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  هستند. قرینه‌ی (این عددها) عضوهای مجموعه‌ی  $B$  را تشکیل خواهند داد:

$$2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$

پس  $-2 \in B$  است و در نتیجه عبارت  $-2 \notin B$  نادرست خواهد بود.



در پایان این بخش، به خاصیتی از مجموعه‌ها توجه کنید:

## نکته ۵

به مجموعه‌ی  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  توجه کنید:

▪ اگر هر دو عضو آن را با هم جمع کنیم، حاصل داخل خود  $\mathbb{N}$  باقی می‌ماند. برای همین گوئیم:

مجموعه  $\mathbb{N}$  نسبت به عمل جمع بسته است!

▪ اگر دو عضو از  $\mathbb{N}$  را از هم تفریق کنیم، ممکن است حاصل در  $\mathbb{N}$  قرار نداشته باشد. مثلاً:

$$3, 7 \in \mathbb{N}, \quad 3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$$

پس  $\mathbb{N}$  نسبت به تفریق بسته نیست.

**تست:** کدام مجموعه نسبت به هر یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

- ① مجموعه‌ی اعداد گویا ( $\mathbb{Q}$ )  
 ② مجموعه‌ی اعداد صحیح ( $\mathbb{Z}$ )  
 ③ مجموعه‌ی اعداد گویا به جز صفر ( $\mathbb{Q} - \{0\}$ )  
 ④ مجموعه‌ی اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ )

## گزینه ۳

نادرست بودن گزینه‌های ۲ و ۴ بدیهی است، چون نسبت به تقسیم بسته نیستند. گزینه‌ی ۱ هم نادرست است، چون: عددهای ۱ و ۰ هر دو گویا هستند، ولی تقسیم آن‌ها  $\frac{1}{0}$  تعریف نشده بوده و در نتیجه جواب در  $\mathbb{Q}$  قرار ندارد. پس فقط مورد سوم صحیح خواهد بود.

**تست:** کدام عبارت زیر درست است؟

- ① مجموعه‌ی  $\{-1, 0, 1\}$  نسبت به عمل جمع بسته است.  
 ② مجموعه‌ی  $\{2x+1 \mid x\}$  نسبت به عمل جمع بسته است.  
 ③ مجموعه‌ی  $\{2^x \mid x\}$  نسبت به عمل ضرب بسته است.  
 ④ مجموعه‌ی  $\{-1, 0, 1\}$  نسبت به عمل جمع ضرب بسته نیست.

## گزینه ۳

اگر دو عضو مختلف  $2^m$  و  $2^n$  را از مجموعه‌ی  $\{2^x \mid x\}$  بپذیرید، طبق قانون ضرب:

$$2^n \times 2^m = 2^{n+m}, \quad n+m$$

پس حاصل در مجموعه‌ی اولیه جای خواهد داشت.

بفش ۲

زیر مجموعه‌ها

<http://www.darsamoz.com>

با استفاده از مفهوم زیر می‌توان دو مجموعه را با هم مقایسه کرد:

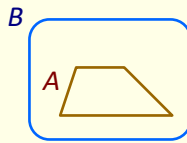
## نکته ۶

هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی  $A$  در  $B$  هم قرار داشته باشد، یعنی:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

در این صورت گوئیم  $A$  «زیر مجموعه»  $B$  است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B$$

اگر این شرط برقرار نباشد،  $A$  زیر مجموعه‌ی  $B$  نیست و می‌نویسیم:  $A \not\subseteq B$ .

برای نمونه،

تمام زیرمجموعه‌های  $A = \{2, \{2\}\}$  چهار مورد زیر هستند:

$$\emptyset, \{2\}, \{\{2\}\}, A$$

**تست:** اگر  $A = \{0, 1\}$  باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر درست است؟

$$\{\{1\}\} \subseteq A \quad \text{④}$$

$$\{1\} \subseteq A \quad \text{③}$$

$$\{1\} \in A \quad \text{②}$$

$$\emptyset \in A \quad \text{①}$$

گزینه ۳ چون  $1 \in A$  است، پس  $\{1\} \subseteq A$  درست خواهد بود؛ هر سه مورد دیگر نادرست هستند.**تست:** اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  باشد، کدام عبارت زیر نادرست است؟

$$\{1, 2\} \subseteq A \quad \text{④}$$

$$\{1\} \subseteq A \quad \text{③}$$

$$\{1\} \in A \quad \text{②}$$

$$\{1, 2\} \in A \quad \text{①}$$

گزینه ۲ 

با نگاه دقیق به مجموعه می‌پسندید که داخل آن فقط سه عضو زیر قرار دارند:

$$1, 2, \{1, 2\}$$

پس  $\{1\}$  عضوی از این مجموعه نیست.**تست:** اگر  $A = \{a, \{1, 2a+b\}\}$  زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی  $B = \{3, 2a+1, \{-a, 0\}\}$  باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

$$2 \quad \text{④}$$

$$1 \quad \text{③}$$

$$-6 \quad \text{②}$$

$$-9 \quad \text{①}$$



گزینه ۴ چون  $\{1, 2a+b\}$  در  $A$  هست، باید عضو  $B$  هم باشد:

$$\{1, 2a+b\} = \{-a, 0\} \rightarrow \begin{cases} -a=1 \rightarrow a=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightarrow 2(-1)+b=0 \Rightarrow b=2$$



چند مورد مربوط به مفهوم زیر مجموعه:

نکته ۷

برای هر مجموعه چون  $A$  همیشه:

- $A \subseteq A$ : یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.
- $\emptyset \subseteq A$ : یعنی تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

**توجه کنید:**به زیر مجموعه‌های  $A$  غیر از خودش، زیر مجموعه‌ی «سره» یا «محض» گویند.**تست:** اگر  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  باشد، آنگاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست‌اند؟

- |                             |                         |                           |                                 |
|-----------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| $\{\emptyset\} \subseteq A$ | $\emptyset \subseteq A$ | $\{\{\emptyset\}\} \in A$ | $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ |
| ۴ ④                         | ۳ ③                     | ۲ ②                       | ۱ ①                             |

گزینه ۴ **توجه کنید:** مجموعه‌ی  $A$  دارای سه عضو  $\emptyset$  و  $\{\emptyset\}$  و  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  است. بررسی تمام رابطه‌ها از سمت چپ به صورت دقیق:

- چون  $A$  دارای سه عضو  $\emptyset$  و  $\{\emptyset\}$  و  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  است، پس رابطه‌ی  $A$   $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$  درست است.
  - می‌دانیم رابطه‌ی  $A$   $\emptyset \subseteq A$  همیشه درست است.
  - عضو  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  در  $A$  هست و در نتیجه رابطه‌ی  $A$   $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq A$  درست است.
  - چون  $A$   $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  است، پس رابطه‌ی  $A$   $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subseteq A$  درست است.
- پس هر چهار مورد صحیح است.



نکته ۸

همان‌طور که دیدیم یک مجموعه‌ی ۲ عضوی تعداد ۴ زیر مجموعه داشت.  
در کل:اگر یک مجموعه دارای  $n$  عضو باشد، تعداد زیر مجموعه‌های آن همیشه  $2^n$  است.

**مثال:** یک مجموعه‌ی پنج عضوی:

- الف) چند زیر مجموعه دارد؟  
 ب) چند زیر مجموعه‌ی محض دارد؟  
 ج) چند زیر مجموعه‌ی محض و ناتهی دارد؟

پاسخ

الف) تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر  $2^5 = 32$  است.

ب) از کل ۳۲ زیرمجموعه، یکی خودش است که محض محسوب نمی‌شود. پس:

$$32 - 1 = 31$$

ج) از کل ۳۱ زیرمجموعه‌ی محض، یکی تهی است که باید کم شود. پس:

$$31 - 1 = 30$$

**تست:** مجموعه‌ی  $A$  دارای ۲۵۵ زیرمجموعه‌ی محض است. این مجموعه چند عضو دارد؟

- ۱) ۶۴      ۲) ۶      ۳) ۲۵۶      ۴) ۸

گزینه ۴

چون ۲۵۵ زیر مجموعه‌ی محض دارد، پس در کل  $255 + 1 = 256$  زیر مجموعه داشته است. چون:

$$256 = 2^8$$

پس تعداد عضوهای مجموعه برابر ۸ بوده است.

**تست:** مجموعه‌ی  $A = \{1^n + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  چند زیر مجموعه دارد؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) بی‌شمار      ۴) ۸

گزینه ۲

جای  $n$  عددهای طبیعی را قرار می‌دهیم تا مجموعه مشخص گردد:

$$n=1: \quad 1^1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 \in A$$

$$n=2: \quad 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \in A$$

هر عدد دیگری جای  $n$  قرار دهیم، همین دو عضو برای  $A$  بدست خواهد آمد. پس مجموعه دو عضو دارد و تعداد زیر مجموعه‌ها:

$$2^2 = 4$$

**تست:** مجموعه‌ی  $A = \{2^{1390} + 2, 2^{1390} + 4, 2^{1390} + 8, \dots, 2^{1391}\}$  چند زیر مجموعه دارد؟

- ۱)  $2^{1388}$       ۲)  $2^{1389}$       ۳)  $2^{1390}$       ۴)  $2^{1391}$

گزینه ۳

**توجه کنید:** عضوهای مجموعه به ترتیب چین هستند:



$$2^{1390} + 2^1, 2^{1390} + 2^2, 2^{1390} + 2^3, \dots$$

برای آن که آخرین عضو  $2^{1391}$  شود، باید به صورت  $2^{1390} + 2^{1390} = 2 \times 2^{1390} = 2^{1391}$  باشد. یعنی عضوهای  $A$  دقیقاً  $1390$  عدد زیر هستند:

$$2^{1390} + 2^1, 2^{1390} + 2^2, 2^{1390} + 2^3, \dots, 2^{1390} + 2^{1390}$$

چون مجموعه  $1390$  عضو دارد، پس  $2^{1390}$  زیرمجموعه خواهد داشت.

**مثال:** مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  را در نظر بگیرید.

الف)  $A$  چند زیرمجموعه‌ی یک عضوی دارد؟

ب)  $A$  چند زیرمجموعه شامل عددهای زوج دارد؟

ج)  $A$  چند زیرمجموعه دارد که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ باشد؟

**پاسخ** ✓

الف) به تعداد عضوهایش، زیرمجموعه‌ی یک عضوی دارد:

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

ب) برای این که عضوهای زیرمجموعه زوج باشند، باید زیرمجموعه‌ی  $\{2, 4, 6\}$  باشند که چون سه عضو دارد:

$$2^3 = 8$$

(مواب ۷ است، چون یکی از این هشت مجموعه، تهی است که قابل قبول نیست.)

ج) **دقیق توجه کنید:**

زیرمجموعه‌ای که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ باشد، در واقع یک زیرمجموعه از  $\{1, 2, 3, 4\}$  بوده که عضو ۵ را هم در آن قرار داده‌ایم؛ چون  $\{1, 2, 3, 4\}$  دارای چهار عضو است:

$$2^4 = 16$$

### نکته ۹

یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی دارای:

- تعداد  $n$  زیرمجموعه‌ی یک عضوی است.
- تعداد  $\frac{n \times (n-1)}{2}$  زیرمجموعه‌ی دو عضوی است.
- تعداد  $2^n - 1$  زیرمجموعه‌ی محض، تعداد  $2^n - 1$  زیرمجموعه‌ی ناتهی و تعداد  $2^n - 2$  زیرمجموعه‌ی محض و ناتهی است.

**تست:** تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  که کوچک‌ترین عضو آن ۵ باشد، برابر کدام است؟

۱۶ ④

۱۰ ③

۱۵ ②

۲۰ ①

گزینه ۳ 

باید دو عضو از بین پنج عضو  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  انتخاب کنیم و سپس عدد ۵ را کنار آنها قرار دهیم تا؛  
اولاً: زیر مجموعه‌های دارای سه عضو تشکیل گردند.

ثانیاً: کمترین عضو هر یک ۵ شود.

طبق نکته‌ی قبل، تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  برابر است با:

$$\frac{۵ \times (۵-۱)}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

**تست:** در چند زیر مجموعه از مجموعه  $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$  کوچک‌ترین عضو ۲، و بزرگ‌ترین عضو ۸ است؟

۸ **4**۶۴ **3**۱۶ **2**۳۲ **1**گزینه ۱ 

مشابه تست قبل:

باید تمام زیر مجموعه‌های  $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$  را انتخاب کرده و سپس عددهای ۲ و ۸ را به هر کدام اضافه کنیم:

$$۲^۵ = ۳۲$$

**تست:** مجموعه‌ی  $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$  چند زیر مجموعه دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۵ باشد؟

۸ **4**۶۴ **3**۸۰ **2**۳۲ **1**گزینه ۲ 

کاملاً مشابه تست قبل، ولی چند حالت مختلف دارد:

- کوچک‌ترین عضو ۱ و بزرگ‌ترین عضو ۶ باشد:

$$۲^۴ = ۱۶$$

حالات دیگر هم تعداد مشابه دارند:

- کوچک‌ترین عضو ۲ و بزرگ‌ترین عضو ۷ باشد:  $۲^۴ = ۱۶$

- کوچک‌ترین عضو ۳ و بزرگ‌ترین عضو ۸ باشد:  $۲^۴ = ۱۶$

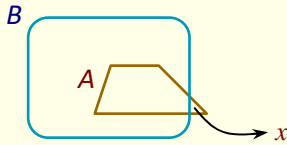
- کوچک‌ترین عضو ۴ و بزرگ‌ترین عضو ۹ باشد:  $۲^۴ = ۱۶$

- کوچک‌ترین عضو ۵ و بزرگ‌ترین عضو ۱۰ باشد:  $۲^۴ = ۱۶$

پس کل حالات برابر  $۵ \times ۱۶ = ۸۰$  خواهد شد.



## نکته ۱۰



بررسی حالت  $A \not\subseteq B$ :

توجه داشته باشید که رابطه‌ی  $A \not\subseteq B$  فقط به این معنی است که: لااقل یک عضو چون  $x$  در  $A$  هست که در  $B$  نباشد.

برای نمونه:

در مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  چون  $1 \in A$  است ولی  $1 \notin B$ ، در نتیجه: در این دو مجموعه عبارت  $A \not\subseteq B$  صحیح است. (ولی سایر عضوهای  $A$  در  $B$  هستند!)

## نکته ۱۱

## مجموعه بی پایان:

یک مجموعه را بی پایان گویند، هرگاه تعداد عضوهای آن یک عدد نشود. مثلاً:

- بی پایان است.  $\mathbb{N}$
- مجموعه عددهای گویای بین ۰ و ۱ بی پایان است، چون بی‌شمار عدد زیر در آن قرار دارند:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

## توجه کنید:

سایر مجموعه‌ها را متناهی یا باپایان گوئیم.

**تست:** کدام مجموعه‌ی زیر باپایان است؟

①  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 2^n\}$

②  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 \geq n^2\}$

③  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 \leq 2^n\}$

④  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 2^n\}$

گزینه ۴

به آسانی و با عدد دادن به  $n$  می‌بینید که شرط  $n^2 \geq 2^n$  فقط برای عددهای ۲ و ۳ و ۴ برقرار است. پس مجموعه‌ی گزینه‌ی چهارم به صورت:

$$\{2, 3, 4\}$$

بوده و باپایان است.



در پایان این بخش، مفهوم دیگری در مورد دو مجموعه ببینید:

## نکته ۱۲

هرگاه اعضای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  کاملاً یکسان باشند، یعنی:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

در این صورت، دو مجموعه را «برابر» یا «مساوی» گفته و می‌نویسیم:

$$A = B$$

**توجه کنید:**

مجموعه‌های  $A$  و  $B$  هنگامی برابرند که عبارت‌های  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$  هر دو درست باشند.

**تست:** دو مجموعه‌ی  $A = \{7, -x, y\}$  و  $B = \{5, -2, 7\}$  مساوی هستند.  $xy$  کدام است؟

۸ ④

۵ ③

۷ ②

۱۰ ①

گزینه ۱ 

با مقایسه‌ی دو مجموعه نتیجه می‌گیریم که  $x = 2$  و  $y = 5$  است، در نتیجه:

$$xy = 2 \times 5 = 10$$



**تست:** به ازای چه تعداد عدد صحیح  $x$ ، دو مجموعه‌ی  $A = \{1, x^2, x\}$  و  $B = \{y, y^2\}$  برابر هستند؟

هیچ ④

۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۲ 

عضوهای دو مجموعه را مقایسه می‌کنیم:

چون عدد ۱ در  $A$  هست، باید در  $B$  هم باشد، دو حالت ممکن است:

- می‌تواند  $y = 1$  باشد؛ در این صورت  $B = \{1\}$  است و باید  $x = 1$  باشد تا تساوی  $A = B$  برقرار گردد.
- می‌تواند  $y^2 = 1$  باشد؛ در این صورت  $y = -1$  هم قبول است و  $B = \{-1, 1\}$  است و باید  $x = -1$  باشد تا تساوی  $A = B$  برقرار گردد.

پس برای  $x$  دو جواب ۱ و  $-1$  وجود خواهد داشت.



بفش ۱۱

جبر مجموعه‌ها

<http://www.darsamoz.com>

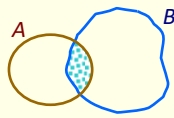
در این بخش، روش‌هایی جبری برای ترکیب چند مجموعه و نکات مهم آن‌ها را خواهیم دید.

نکته ۱۳

برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$ ، «اشتراک» آن‌ها:

مجموعه‌ی تمام اعضایی است که هم در  $A$  و هم در  $B$  قرار داشته باشند.

این مجموعه را به صورت  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

**تست:**  $A$  مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۱۲ و  $B$  مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۱۴ است.  $A \cap B$  کدام است؟

④  $\{1, 2, 4\}$ ③  $\{1, 12, 14\}$ ②  $\{1, 2, 4\}$ ①  $\{1, 2\}$ گزینه ۱ 

**مهم:** توجه داشته باشید که:

$A \cap B$  دقیقاً شامل عددهایی است که بر ب.م.م ۱۲ و ۱۴ یعنی بر ۲ بخش پذیر باشند!

پس چنانچه مجموعه شمارنده‌های عدد ۲ و به صورت  $\{1, 2\}$  است.

**تست:** اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی سه عضوی و متفاوت از مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d\}$  دارای چند عضو است؟

④ صفر

③ ۱

② ۳

① ۲

گزینه ۱ 

چون مجموعه در کل چهار عضو دارد، در هر زیرمجموعه‌ی سه عضوی، یک عضو پیرون می‌ماند. پس در دو مجموعه، دو عضو پیرون مانده و دو عضو دیگر آن‌ها یکسان (مشترک) خواهند ماند. مثلاً:

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$$



## توجه کنید:

گاهی مجموعه‌ها را با یک اندیس  $n$  به صورت  $A_n$  معرفی می‌کنند؛ مانند:

$$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < n\}$$

در این صورت، با قرار دادن عددهای ۱، ۲، ۳ و به جای  $n$ ، می‌توان مجموعه‌های  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$  و ... را نوشت:

$$n=1: A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\} \Rightarrow A_1 = \emptyset$$

$$n=2: A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 2\} \Rightarrow A_2 = \{1\}$$

$$n=3: A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} \Rightarrow A_3 = \{1, 2\}$$

با ادامه، به عنوان نمونه می‌توان نوشت:

$$A_{10} = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \text{و} \quad A_{84} = \{1, 2, 3, \dots, 83\}$$

و در کل می‌توان گفت:

$$A_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

**تست:** اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq n\}$  باشد، آنگاه مجموعه‌ی  $A_n \cap A_m$  چند زیر مجموعه دارد؟

۸ ④

۳۲ ③

۱۶ ②

۶۴ ①

گزینه ۳ 

با دقت تمام، جای  $n$  عددهای ۳ و ۴ را قرار می‌دهیم:

$$n=3: A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\}$$

**یادآوری:**  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$  و  $2^{-2} = \frac{1}{4}$  و  $2^{-1} = \frac{1}{2}$  و  $2^0 = 1$ ، پس:

$$A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

به روش مشابه:

$$n=4: A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\}$$

پس:  $A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  (است و  $A_3 \cap A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ ، چون دارای پنج عضو است، تعداد زیر مجموعه‌ها:

$$2^5 = 32$$

## نکته ۱۴

اگر  $A \subseteq B$  باشد، اشتراک آن‌ها برابر **مجموعه‌ی کوچک‌تر** یعنی  $A$  است:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

در نتیجه موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{و} \quad A \cap A = A$$

**تست:** اگر  $\{x \mid -i < x < i, x \in \mathbb{N}\} = A_i$  باشد،  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$  کدام است؟

۴  $A_1$

۳  $A_n - A_1$

۲  $A_n$

۱  $A_1$

گزینه ۱

مشابه قبل، با عدد دادن به  $i$  داریم:

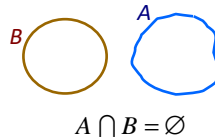
$$A_1 = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

چون تهی عضو ندارد، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای همان تهی است.



### حالت ویژه:

ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند که در این صورت آن‌ها را «جدا از هم» یا «مجزا» گویند:



$$A \cap B = \emptyset$$

به عنوان نمونه: در مورد مجموعه اعداد طبیعی فرد  $O$  و مجموعه اعداد طبیعی زوج  $E$  داریم:

$$O \cap E = \emptyset$$

عمل دیگر بین مجموعه‌ها چنین بیان می‌شود:

### نکته ۱۵

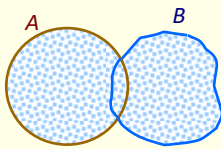
برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$ ، اجتماعشان را با  $A \cup B$  نشان داده و آن:

شامل تمام اعضایی است که لااقل در یکی از  $A$  یا  $B$  قرار داشته باشند!

بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

توجه کنید: در مجموعه‌ی  $A \cup B$ :



اعضای تکراری دو مجموعه، فقط یک بار نوشته می‌شوند!

**تست:** اجتماع دو مجموعه‌ی  $\{a\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}$  و  $\{\emptyset, a, \emptyset\}$ ، چند زیر مجموعه دارد؟

۸ ۴

۳ ۴

۲ ۱۶

۱ ۳۲

گزینه ۴

**دقت کنید:** مجموعه‌ی اول فقط یک عضو  $\{a\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}$  و مجموعه‌ی دوم دو عضو  $\emptyset$  و  $a$  را دارد. پس اجتماعشان سه عضو داشته و

تعداد زیر مجموعه‌ها:



$$۲^۳ = ۸$$

## نکته ۱۶

اگر  $A \subseteq B$  باشد، اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر یعنی  $B$  است:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

در نتیجه موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{و} \quad A \cup A = A$$

**تست:** اگر  $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -i \leq x \leq i\}$  باشد، آنگاه  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  برابر خواهد بود با:

④ از  $-\infty$  تا  $+\infty$

③  $\emptyset$

②  $\{-1, 0, 1\}$

①  $A_n$

گزینه ۱

**به دو مورد توجه کنید:**

- منظور از  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  همان  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$  است.
- مجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots$  رفته رفته در حال بزرگ‌تر شدن هستند؛ چون:  
 $A_1 = \{-1, 0, 1\}, A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \dots$   
 پس اجتماع آن‌ها بزرگ‌ترین مجموعه، یعنی  $A_n$  خواهد شد.

**تست:** اگر  $A, B$  و  $C$  سه مجموعه باشند به طوری که  $A \subseteq B \subseteq C$  باشد، آنگاه  $(A \cup B) \cap (A \cap B) \cup C$  کدام است؟

④  $C$

③  $B$

②  $C \cup B$

①  $A \cap B$

گزینه ۳

طبق نکات قبل و توجه به شرط  $A \subseteq B \subseteq C$ ، عبارات ساده می‌شوند:

$$[(\underbrace{A \cap B}_{=A}) \cup C] \cap (\underbrace{A \cup B}_{=B}) = [\underbrace{A \cup C}_{=C}] \cap B = C \cap B = B$$

**توجه کنید:**

برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  همیشه:

▪  $A \cap B$  زیر مجموعه‌ی هر دوی  $A$  و  $B$  است:

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{و} \quad A \cap B \subseteq B$$

▪ هر دوی  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌ی  $A \cup B$  هستند:



$$A \subseteq A \cup B \quad \text{و} \quad B \subseteq A \cup B$$

تست: حاصل  $(A \cup B) \cap [A \cup (A \cup B)]$  کدام است؟

4  $A \cup B$

3  $B$

2  $A$

1  $\emptyset$

گزینه ۲

طبق نکته‌ی قبل و مقایسه‌ی مجموعه‌های کوچک یا بزرگ و این که تهی در اجتماع نقشی ندارد:

$$\emptyset \cup [A \cap (A \cup B)] = [A \cap (A \cup B)] = A$$

توجه کنید که بین  $A$  و  $A \cup B$ ، مجموعه‌ی  $A$  کوچک و مجموعه‌ی  $A \cup B$  بزرگ محسوب می‌شود.



تست: اگر  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  باشد، حاصل مجموعه‌ی  $(A_4 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5)$  کدام است؟

4  $\{1, 2, 3, 4\}$

3  $\{1, 2\}$

2  $\{1\}$

1  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

گزینه ۴

می‌پسیند که:

$$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 2, 3\}, A_4 \cap A_3 = \{1, 2, 3\}, A_4 \cap A_5 = \{1, 2, 3, 4\}$$

چون با زیاد شدن  $n$ ، مجموعه‌ها بزرگ می‌شوند، با مقایسه مجموعه‌ی کوچک و بزرگ به آسانی می‌توینیم:

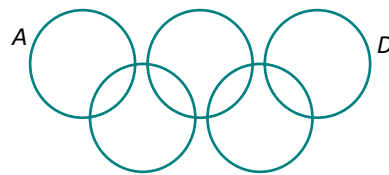
$$\underbrace{(A_4 \cap A_3)}_{=A_3} \cup \underbrace{(A_4 \cap A_5)}_{=A_4} = A_3 \cup A_4 = A_4$$



آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۷

شکل زیر نمودار ون تعدادی از زیر مجموعه‌های متفاوت  $\{1, 2, 3\}$  را نشان می‌دهد. کدام گزینه در مورد  $A \cup D$

درست است؟



1 می‌تواند دو عضوی باشد.

2 می‌تواند سه عضوی باشد.

4 احتمالاً یک عضو هم می‌توانند متفاوت باشند.

گزینه ۴

مجموعه‌ی  $A$  حداقل یک عضو مشترک با مجموعه‌ی پایین خود دارد و چون باید آن دو متفاوت باشند، حداقل یکی از آن‌ها عضو دیگری دارد. پس:

$A$  و مجموعه‌ی پایین آن با هم حداقل ۲ عضو دارند.

به صورت مشابه: مجموعه‌ی  $D$  و مجموعه‌ی پایینی آن هم با هم حداقل باید ۲ عضو داشته باشند. اما مجموعه‌ی اولیه:  $\{1, 2, 3\}$  در کل سه عضو دارد، پس این مجموعه‌ها نمی‌توانند متفاوت باشند.

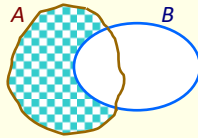


اختلاف یک مجموعه با مجموعه‌ای دیگر را می‌توان با استفاده از مفهوم زیر بدست آورد:

## نکته ۱۷

تفاضل مجموعه‌ی  $B$  از  $A$  را با  $A - B$  نشان داده و آن:

شامل تمام عضوهایی است که در  $A$  هستند ولی در  $B$  قرار ندارند.



با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

**توجه کنید:**

مجموعه‌ی  $B - A$  نیز شامل اعضای است که در  $B$  بوده ولی در  $A$  نیستند.

**مثال:** با در نظر گرفتن  $A = \{-1, 2, 5, 6\}$  و  $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ، مجموعه‌ی زیر را با اعضاء مشخص کنید.

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

پاسخ

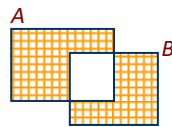
مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را مشخص کرده و سپس تفاضل را طبق تعریف تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{-1, 2, 3, 5, 6, 7\} \\ A \cap B &= \{2, 5\} \end{aligned} \Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{-1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{2, 5\} = \{-1, 3, 6, 7\}$$



**توجه کنید:**

مجموعه‌ای که در مثال قبل دیدیم، اعضای را مشخص می‌کند که دقیقاً در یکی از  $A$  و  $B$  قرار دارند. بعلاوه، تساوی زیر هم همیشه برقرار است:



$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۸

اگر  $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{1, \{1\}\}$ ، آنگاه کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- |                                |                         |
|--------------------------------|-------------------------|
| $n(A \cap C) = 2$ ②            | $C \subseteq A$ ①       |
| $(B - C) \cap A = \emptyset$ ④ | $A \cap B = \{1, 2\}$ ③ |

گزینه ۳

به آسانی دیده می‌شود که بین  $A$  و  $B$  فقط عدد ۱ مشترک است:

$$A \cap B = \{1\}$$



## نکته ۱۸

هنگام محاسبه‌ی  $A - B$ ، دقیقاً اتفاق زیر رخ می‌دهد:

عضوهای مشترک بین دو مجموعه از  $A$  برداشته می‌شوند.

یعنی:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

بویژه: برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  حالت‌های خاص زیر وجود دارند:

▪ اگر  $A \subseteq B$  باشد، آنگاه:

$$A - B = \emptyset$$

▪ اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، آنگاه:

$$A - B = A$$

بعلاوه، عکس هر دو مورد بالا هم برقرار است:

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \quad \text{و} \quad A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

**تست:** اگر  $B \subset A$  باشد، ساده شده‌ی عبارت  $(B - C) - (A - B)$  کدام است؟

④  $C$

③  $\emptyset$

②  $B$

①  $A$

گزینه ۳

با توجه به شرط  $B \subset A$ ، حاصل  $B - A$  تهی است و در نتیجه بدون توجه به عضوهای  $B - C$ ، همیشه  $(B - C) - (A - B) = \emptyset$  است.

**تست:** با شرط  $A \neq B$ ، کدام تساوی زیر نادرست است؟

②  $A - A = \emptyset$

①  $A - \emptyset = A$

④  $\emptyset - A = \emptyset$

③  $A - B = B - A$

گزینه ۳

چون  $A$  و  $B$  برابر نیستند، مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  نیز متفاوت خواهند شد.

**آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۸**

اگر  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  چهار مجموعه باشند به طوری که  $D = D - (C - (A \cup B))$ ، آنگاه حاصل  $A \cup B \cup C \cup D$  همواره برابر کدام است؟

④  $A \cup B$

③  $D$

②  $C$

①  $\emptyset$

گزینه ۲

اگر  $D$  عضوی مانند  $a$  داشته باشد، از حاصل عبارت  $D - (C - (A \cup B))$  حذف می‌شود و در نتیجه تساوی داده شده برقرار نمی‌شود؛ پس:  $D = \emptyset$ ، اکنون تساوی چنین نوشته می‌شود:





$$((A \cup B) - C) - \emptyset = \emptyset \rightarrow (A \cup B) - C = \emptyset \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

در نتیجه طبق خواص اجتماع:

$$A \cup B \cup C \cup \emptyset = (A \cup B) \cup C = C$$



### آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۷

یازده زیر مجموعه‌ی غیر مساوی از  $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  را طوری انتخاب می‌کنیم که از هر دوتای آن‌ها، یکی زیر مجموعه‌ی دیگری باشد. اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب مجموعه‌های ۷، ۵ و ۳ عضوی این ۱۱ مجموعه باشند، در مورد  $A \cup (B - C)$  چه می‌توان گفت؟

- ① ۱۱ عضوی است.      ② ۹ عضوی است.      ③ ۷ عضوی است.      ④ ۵ عضوی است.

گزینه ۳

چون  $B$  و  $C$  تعداد عضو کمتری از  $A$  دارند، هر دو زیر مجموعه‌ی  $A$  هستند. در نتیجه:

$$(B - C) \subseteq A \Rightarrow A \cup (B - C) = A$$

این مجموعه ۷ عضوی است.



مجموعه‌ها در بیان و محاسبه‌ی احتمالات کاربرد فراوان دارند.

## نکته ۱۹

در یک آزمایش شانس:

**فضای نمونه ای:** مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن را فضای نمونه‌ای گفته و با  $S$  نشان می‌دهیم.  
**پیشامد:** هر زیر مجموعه از  $S$  یک پیشامد محسوب می‌شود که با حروف  $A$ ،  $B$ ، ... نامگذاری می‌شوند.

برای نمونه:

در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای و چند پیشامد مربوط به آن را ببینید:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

• پیشامد ظاهر شدن عدد مضرب ۵ چنین است:  $A = \{5\}$

• پیشامد ظاهر شدن عدد اول:  $B = \{2, 3, 5\}$

• پیشامد ظاهر شدن عدد دو رقمی تهی است:  $C = \{\} = \emptyset$

## آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۸

اگر در پرتاب یک تاس بدانیم که عدد رو شده، شمارنده‌ی عدد ۶ نمی‌باشد. در این صورت تعداد کل پیشامدها برابر کدام است؟

۸ ④

۶ ③

۴ ②

۲ ①

گزینه ۲ 

تمام حالات ممکن عبارت است از:  $S = \{4, 5\}$ . تعداد کل پیشامدها، دقیقاً برابر تعداد زیر مجموعه‌های  $S$  است:

$$2^2 = 4$$



گاهی آزمایش شانس بیش از یک نتیجه دارد؛ نمونه‌هایی ببینید:

**مثال:** الف) اگر یک سکه پرتاب شود، فضای نمونه‌ای چیست؟

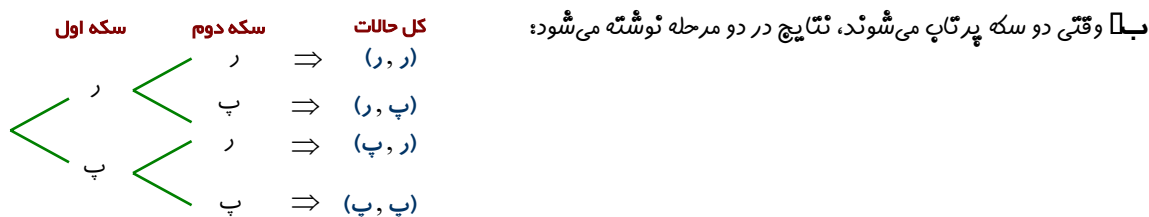
ب) اگر دو سکه باهم پرتاب شوند، فضای نمونه‌ای چیست؟

پاسخ 

از این پس، ظاهر شدن پشت سکه را با «پ» و ظاهر شدن روی آن را با «ر» نشان می‌دهیم.  
الف) فقط دو حالت می‌تواند رخ دهد:

$$S = \{ر, پ\}$$





پس کلاً چهار حالت می‌تواند اتفاق بیفتد:

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\} \rightarrow n(S) = 4$$

**تست:** یک سکه را با یک تاس انداختیم. تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۸ **4**۱۸ **3**۱۲ **2**۳۶ **1**گزینه ۲ 

سکه دو حالت دارد و برای هر حالت آن، برای تاس شش حالت می‌تواند رخ دهد. پس در کل:

$$2 \times 6 = 12$$

**تست:** سه سکه را با هم انداختیم. اگر  $A$  پیشامد «حداقل یک بار رو ظاهر شدن» و  $B$  پیشامد «حداکثر یک بار پشت ظاهر شدن» باشد، در مورد تعداد عضوهای پیشامدها کدام مورد درست است؟

$$n(A) = n(B) + 3 \quad \text{2}$$

$$n(A) = 3n(B) \quad \text{1}$$

$$n(B) = n(A) + 3 \quad \text{4}$$

$$n(B) = 3n(A) \quad \text{3}$$

گزینه ۲ 

چون هر سکه دو حالت دارد، فضای نمونه‌ای  $2 \times 2 \times 2 = 8$  عضو به صورت زیر دارد:

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

پس:

$$A = \{(ر, ر, پ), (پ, ر, پ), (ر, ر, ر), (پ, پ, ر), (ر, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ), (ر, ر, ر)\}$$

و:

$$B = \{(ر, ر, ر), (پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (پ, پ, ر), (ر, ر, ر), (پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (پ, پ, ر)\}$$

می‌بینید که  $n(A) = 7$  و  $n(B) = 4$  بوده و فقط گزینه‌ی دوم درست است.

## نکته ۲۰

احتمال رخ دادن یک پیشامد  $A$  را با  $P(A)$  نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

**تست:** کدام مورد درست است؟

- ① احتمال این که تاس مضرب ۲ نیاید، کمتر از این است که تاس مضرب ۳ بیاید.
- ② احتمال این که سکه رو بیاید، بیشتر از این است که تاس عدد فرد بیاید.
- ③ احتمال این که یک سکه رو بیاید کمتر از این است که دو سکه هم زمان رو بیاید.
- ④ احتمال این که مجموع دو تاس هفت شود، بیشتر از این است که مجموع دو تاس پنج شود.

گزینه ۴

پاید هر مورد بررسی شده و جمله‌ی درست مشخص گردد:

- **گزینه ۱:** عبارت به صورت  $\frac{۳}{۶} < \frac{۲}{۶}$  نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۲:** عبارت به صورت  $\frac{۱}{۲} > \frac{۳}{۶}$  نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۳:** عبارت به صورت  $\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۴}$  نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۴:** عبارت به صورت  $\frac{۶}{۳۶} > \frac{۴}{۳۶}$  نوشته می‌شود که درست است.

**تست:** در یک جعبه ۲۰ توپ قرمز، ۳۰ توپ سفید و تعدادی توپ آبی وجود دارد. اگر شما یک توپ به دلخواه از جعبه

بردارید احتمال یا شانس آبی بودن آن،  $\frac{۹}{۱۱}$  است. چند توپ در جعبه است؟

۲۲۵ ④

۲۷۵ ③

۱۷۵ ②

۱۲۵ ①

گزینه ۳

تعداد توپ‌های آبی را عدد مجهول  $x$  در نظر بگیرید. بنابراین:

- تعداد کل توپ‌های داخل جعبه برابر  $۵۰ + x = ۲۰ + ۳۰ + x$  خواهد شد.
- پس احتمال آبی بودن توپ برابر است با:

$$\frac{x}{۵۰ + x}$$

بنابراین:

$$\frac{x}{۵۰ + x} = \frac{۹}{۱۱} \rightarrow ۱۱x = ۴۵۰ + ۹x \rightarrow ۲x = ۴۵۰ \Rightarrow x = ۲۲۵$$

در نتیجه تعداد کل توپ‌ها  $۵۰ + ۲۲۵ = ۲۷۵$  بوده است.



## توجه کنید:

در یک فضای نمونه ای  $S$  موارد زیر همیشه درست هستند:

$$P(\emptyset) = \frac{0}{n(S)} = 0$$

■ چون  $n(\emptyset) = 0$  است، پس:

یعنی: پیشامد تهی هیچ وقت رخ نمی‌دهد.

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

■ همیشه:

یعنی: پیشامد تهی هیچ وقت رخ نمی‌دهد.

■ چون  $0 \leq n(A) \leq n(S)$  است، پس:

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

یعنی: کمترین احتمال برابر صفر و بیشترین احتمال برابر یک است.



بمش ۵

قدری بیشترفته‌تر

<http://www.darsamoz.com>

برخی مباحث پیشرفته‌تر در ارتباط و مجموعه‌ها را در این بخش خواهیم دید.

نکته ۲۱

فرمول مجموع عددهای طبیعی متوالی با شروع از عدد ۱ اهمیت زیادی دارد:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

به عنوان نمونه:

$$1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \times (100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

**مثال:** مجموع عددهای زیر را به دست آورید:

$$50, 51, 52, \dots, 150$$

پاسخ 

وقتی عددها از یک شروع نمی‌شوند، همیشه تکنیک زیر را بکار ببرید:

$$\begin{aligned} 50+51+52+\dots+150 &= (1+2+3+\dots+150) - (1+2+3+\dots+49) \\ &= \frac{150 \times (150+1)}{2} - \frac{49 \times (49+1)}{2} = 11325 - 1225 = 10100 \end{aligned}$$

**تست:** مجموع مضرب‌های دو رقمی عدد ۷ کدام است؟

۷۲۸ ④

۷۹۸ ③

۶۹۸ ②

۶۲۸ ①

گزینه ۴ 

تمام مضرب‌های دو رقمی عدد ۷ چنین هستند:

$$14, 21, \dots, 98$$

جمع آن‌ها مشابه نمونه‌ی بالا:

$$\begin{aligned} 14+21+\dots+98 &= 7(2+3+\dots+14) = 7 \times [(1+2+3+\dots+14) - 1] \\ &= 7 \times \left[ \frac{14 \times (14+1)}{2} - 1 \right] = 7 \times (105 - 1) = 728 \end{aligned}$$

**تست:** اگر  $A_1 = \{1\}$ ،  $A_2 = \{2, 3\}$ ،  $A_3 = \{4, 5, 6\}$  و  $A_n = \{7, 8, 9, 10\}$  باشند، مجموعه‌ی  $A_1$  با چه عددی شروع می‌شود؟

۵۶ ④

۵۵ ③

۴۶ ②

۴۵ ①

گزینه ۲ 

با نگاه به مجموعه‌ها می‌بینید که تا  $A_9$  تعداد  $1+2+3+\dots+9$  عدد نوشته خواهد شد:

$$1+2+3+\dots+9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

پس آخرین عضو مجموعه‌ی  $A_9$  عدد ۴۵ است و اولین عضو مجموعه‌ی بعدی، یعنی  $A_{10}$  عدد ۴۶ خواهد بود.

### آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۵

مجموعه‌ی  $A = \left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N} \right\}$  چند عضو دارد؟

۴ ۷۸ عضو

۳ ۵۵ عضو

۲ ۴۵ عضو

۱ ۴۹ عضو

گزینه ۲ 

برای این که شرط  $\frac{a}{b} < 1$  برقرار باشد، لازم است که  $a < b$  باشد. باید تمام کسرهای ممکن را بنویسیم و البته کسرهای تکراری فقط یک بار شمرده شوند:

• برای  $b=1$  هیچ کسری وجود ندارد.

• برای  $b=2$  فقط یک کسر  $\frac{1}{2}$  را داریم. (۱ جواب)

• برای  $b=3$  کسرهای  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  را داریم. (۲ جواب)

• برای  $b=4$  فقط دو کسر جدید  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{3}{4}$  بدست می‌آیند. (۲ جواب)

ادامه به ترتیب تا آخرین حالت:

• برای  $b=5$  تعداد ۴ کسر جدید، برای  $b=6$  تعداد ۲ کسر جدید، برای  $b=7$  تعداد ۱ کسر جدید، برای  $b=8$  تعداد

۴ کسر جدید، برای  $b=9$  تعداد ۱ کسر جدید، برای  $b=10$  تعداد ۴ کسر جدید، برای  $b=11$  تعداد ۱۰ کسر جدید و

برای  $b=12$  تعداد ۴ کسر جدید وجود دارد.

پس تعداد کل کسرها که عضو مجموعه هستند برابر است با:

$$1+2+2+4+2+6+4+6+4+10+4=45$$

### آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۹

مجموعه‌ی  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 100\}$  و  $B$  زیر مجموعه‌ای از  $A$  باشد به طوری که هر دو عضو دلخواه که از آن در نظر بگیریم، یکی شمارنده‌ی دیگری باشد. مجموعه‌ی  $B$  حداکثر چند عضو دارد؟

۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

گزینه ۲ 

باید عضوهای مجموعه‌ی  $B$ ، همه توان‌های یک عدد باشند تا شرط گفته شده برقرار باشد، مانند:  $\dots, 3^3, 3^2, 3^1$  یا  $\dots, 6^2, 6^1, 6^0$ . برای این که بیشترین تعداد عضو در مجموعه واقع شود، کافی است پایه را کوچک‌ترین مقدار ممکن بگیریم:

$$B = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

بحث کامل و دقیق تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه در دو نکته‌ی بعدی بیان شده‌اند. ابتدا حالتی که تعداد عضوهای زیر مجموعه‌ها مشخص شده باشد:

## نکته ۲۲

فرض کنید مجموعه‌ی  $A$  دارای  $n$  عضو باشد. در این صورت:

تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی  $A$  برابر  $n$  است.  $\frac{n}{1}$

تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی  $A$  برابر  $\frac{n \times (n-1)}{2}$  است.

برای تعیین تعداد زیر مجموعه‌ها در سایر حالت‌ها، الگوی بالا را ادامه دهید:

$$\text{تعداد زیرمجموعه سه عضوی} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه چهار عضوی} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

**تست:** اختلاف تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی و ۴ عضوی مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  چقدر است؟

۵ ④

۶ ③

۸ ②

۱۰ ①

گزینه ۴ 

طبق نکته‌ی قبل:

$$\text{زیرمجموعه سه عضوی} = \frac{6 \times (6-1) \times (6-2)}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

$$\text{زیرمجموعه چهار عضوی} = \frac{6 \times (6-1) \times (6-2) \times (6-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15$$

اختلاف جواب‌ها برابر ۵ است.

**تست:** چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  حداقل سه عضو دارند؟

۹۲۴ ④

۹۶۸ ③

۹۶۹ ②

۱۰۲۴ ①

گزینه ۳ 

تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر  $2^{10} = 1024$  است. زیرمجموعه‌هایی که شرط «حداقل سه عضو» را ندارند، کم می‌کنیم:

• تعداد یک زیرمجموعه‌ی صفر عضوی داریم.

• تعداد ده زیرمجموعه‌ی یک عضوی داریم.

• تعداد  $\frac{10 \times (10-1)}{2} = 45$  زیرمجموعه‌ی دو عضوی داریم.

پس تعداد جواب‌ها  $1024 - (1 + 10 + 45) = 968$  خواهد شد.



**تست:** مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  چند زیر مجموعه سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر با ۱۵ و عدد ۴ عضو هر کدام باشد؟

- ۱ ۴  
۲ ۳  
۳ ۲  
۴ ۳
- چنین زیر مجموعه‌ای وجود ندارد.

گزینه ۲ 

پایده مجموعه‌هایی مشخص شوند که:  
دو عضو غیر از ۴ با مجموع ۱۱ داشته باشند که وقتی عدد ۴ به آن‌ها اضافه می‌شود، شرط سوال برقرار گردد!  
تمام حالت‌ها به راحتی نوشته می‌شوند:

$$\{2, 9\}, \{3, 8\}, \{5, 6\}$$

پس جواب برابر ۳ است.

اکنون حالتی که تعداد عضوهای زیر مجموعه‌ها آزاد باشد. می‌دانیم تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه از رابطه‌ی  $2^n$  به دست می‌آید که البته گاهی زیر مجموعه‌ها شرایط خاصی هم دارند:

## نکته ۲۳

فرض کنید مجموعه‌ی  $A$  دارای  $n$  عضو باشد.

- تعداد زیر مجموعه‌های  $A$  که شامل  $k_1$  عضو خاص باشند، برابر است با:  
 $2^{n-k_1}$
- تعداد زیر مجموعه‌های  $A$  که شامل  $k_2$  عضو خاص نباشند، برابر است با:  
 $2^{n-k_2}$
- تعداد زیر مجموعه‌های  $A$  که شامل  $k_1$  عضو خاص باشند و شامل  $k_2$  عضو خاص نباشند، برابر است با:  
 $2^{n-k_1-k_2}$

**تست:** مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند زیر مجموعه دارد به طوری که هر یک از آن‌ها شامل  $a$  باشد و  $c$  و  $b$  را نداشته باشد؟

- ۱ ۳۲  
۲ ۱۶  
۳ ۴  
۴ ۸

گزینه ۴ 

مجموعه دارای  $n = 6$  عضو است، باید تعداد  $k_1 = 1$  عضو را داشته و  $k_2 = 2$  عضو را نداشته باشد. طبق نکته‌ی قبل:

$$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$$

**تست:** چند مجموعه‌ی  $A$  می‌توان نوشت که رابطه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 10\} \supseteq A \supseteq \{2, 4, 6, 8\}$  برای آن‌ها برقرار باشد؟

۱۲۸ ④

۶۴ ③

۱۰۰۸ ②

۶ ①

گزینه ۳ 

تمام زیرمجموعه‌ها قبول هستند؛ فقط باید تعداد  $k_1 = 4$  عضو اجباری  $2, 4, 6, 8$  در آن‌ها قرار گیرند؛

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

**تست:** اگر  $B = \{3, 4\}$  و  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، برای مجموعه‌ی  $A$  چند جواب وجود دارد؟

۸ ④

۴ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۳ 

**توجه کنید:** مجموعه‌ی  $A$  باید یک زیرمجموعه از  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (با دو شرط زیر باشد)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  شود:

- سه عدد ۱ و ۲ و ۵ باید در  $A$  قرار داشته باشند.
- عددهای ۳ و ۴ شرطی ندارند، چون در  $B$  هستند و در نتیجه در اجتماع هم خواهند بود.
- بنابراین طبق طبقه‌بندی قیل برای  $n = 5$  و  $k_1 = 3$  خواهیم داشت:

$$2^{5-3} = 2^2 = 4$$

**تست:** چند زیر مجموعه برای مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  می‌توان نوشت که ۵ یا ۶ را نداشته باشد؟

۲۴ ④

۶۴ ③

۱۶ ②

۴۸ ①

گزینه ۱ 

**به تکنیک حل، دقیقاً توجه کنید:**

سه نوع مجموعه قبول هستند که تعداد عضوهایشان باید جمع شوند:

- آن‌هایی که ۵ را داشته، ولی ۶ را ندارند:  $2^{6-1} = 2^5 = 16$
- آن‌هایی که ۶ را داشته، ولی ۵ را ندارند:  $2^{6-1} = 2^5 = 16$
- آن‌هایی که هیچ‌کدام از ۵ و ۶ را ندارند:  $2^{6-2} = 2^4 = 16$

پس تعداد کل آن‌ها  $16 \times 3 = 48$  است.

شمارش سریع تعداد حالت‌هایی که یک کار می‌تواند انجام شود، بر مبنای دو قانون زیر انجام می‌شود:

## نکته ۲۴

فرض کنید کار ۱) (را به  $m$  روش و کار ۲) (را به  $n$  روش بتوان انجام داد.

قانون ضرب:

انجام کار ۱) (و کار ۲) (با هم (همزمان) به  $m \times n$  روش انجام می‌شود.

قانون جمع:

انجام فقط یکی از کارهای ۱) (یا ۲) (به  $m + n$  روش انجام می‌شود.

توجه کنید:

حرف «و» نشانه‌ی ضرب و «یا» نشانه‌ی جمع است!

**مثال:** چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت که:

الف) تکرار رقم‌ها مجاز باشد. ب) تکرار رقم‌ها مجاز نباشد.

پاسخ 

**توجه کنید:** برای نوشتن یک عدد دو رقمی باید دو کار انجام شود:

**کار اول:** انتخاب دهگان **کار دوم:** انتخاب یکان

این کارها با انتخاب‌های قابل قبول از بین رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ انجام می‌شوند. سپس طبق قانون ضرب، جواب‌ها در هم ضرب می‌شوند.

توجه داشته باشید که:

در دهگان نمی‌تواند رقم صفر قرار گیرد، چون عدد دو رقمی نخواهد شد!

**الف)** برای دهگان تمام رقم‌های ۱ تا ۹ می‌توانند انتخاب شوند (۹ حالت) و برای یکان رقم صفر هم می‌تواند انتخاب شود (۱۰ حالت). پس:

$$9 \times 10 = 90$$

**ب)** برای دهگان تمام رقم‌های ۱ تا ۹ می‌توانند انتخاب شوند (۹ حالت) ولی چون تکرار رقم‌ها مجاز نیست، رقم دهگان را نمی‌توانید در یکان قرار دهید؛ پس باز هم انتخاب دارید (۹ حالت). پس:

$$9 \times 9 = 81$$

**تست:** در پرتاب دو تاس، هر دو زوج آمدن را  $A$  و هر دو فرد آمدن را  $B$  می‌نامیم. کدام مورد درست است؟

$$P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{4} \quad \text{②}$$

$$P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{8} \quad \text{①}$$

$$P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{2} \quad \text{④}$$

$$P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{16} \quad \text{③}$$

گزینه ۱ 

در پرتاب دو تاس، چون هر تاس ۶ حالت دارد، کل حالت‌ها:



$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

• هر دو تاس زوج بیایند، تعداد  $n(A) = 3 \times 3 = 9$  حالت دارد؛

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

• هر دو تاس فرد بیایند نیز تعداد  $n(B) = 3 \times 3 = 9$  حالت دارد؛

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پس: } P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \text{ است.}$$

### توجه کنید:

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد در فضای نمونه‌ای  $S$  باشند؛

- $A \cap B$  پیشامد این است که هر دوی  $A$  و  $B$  رخ دهند.
- $A \cup B$  پیشامد این است که لااقل یکی از  $A$  و  $B$  رخ دهند.
- $A - B$  پیشامد این است که  $A$  رخ دهد، ولی  $B$  رخ ندهد؛ (یعنی: فقط  $A$  رخ دهد).

قوانینی که در زیر می‌آوریم، درک و محاسبه‌ی احتمالات را سریع‌تر می‌کنند:

### نکته ۲۵

#### قوانین احتمال:

به دو مورد پرکاربرد توجه کنید:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

**تست:** اگر  $p(A) = 2p(B) = 3p(A \cap B)$  باشد، حاصل  $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$  کدام است؟

④  $\frac{9}{2}$

③  $\frac{7}{2}$

②  $\frac{5}{2}$

① ۲

### گزینه ۳

از شرط داده شده دو نتیجه می‌گیریم:

$$p(A) = 2p(B) = 3p(A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} p(A) = 3p(A \cap B) \\ p(B) = \frac{3}{2}p(A \cap B) \end{cases}$$

این روابط را در کسر جایگزین می‌کنیم:



$$\frac{p(A \cup B)}{p(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{p(A \cap B)}$$

$$= \frac{2P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{\frac{7}{2}P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{7}{2}$$

**تست:** اگر  $p(A \cup B) = 4p(A \cap B)$  باشد، حاصل  $\frac{p(A) + p(B)}{p(A \cup B) - 3p(A \cap B)}$  کدام است؟

۳ ④

۴ ③

۵ ②

۲ ①

گزینه ۲ 

طبق شرط داده شده:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4p(A \cap B) \Rightarrow P(A) + P(B) = 5p(A \cap B)$$

اکنون جایگزینی در کسر داده شده:

$$\frac{p(A) + p(B)}{p(A \cup B) - 3p(A \cap B)} = \frac{5p(A \cap B)}{4p(A \cap B) - 3p(A \cap B)} = \frac{5p(A \cap B)}{p(A \cap B)} = 5$$

**تست:** از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$  عددی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ می‌باشد و بر ۶ بخش پذیر نیست؟

۰/۱۷۸ ④

۰/۱۷۲ ③

۰/۱۶۸ ②

۰/۱۶۲ ①

گزینه ۲ 

قرار می‌دهیم:

A: پیشامد مضرب ۴ بودن

B: پیشامد مضرب ۶ بودن

**به دو مورد توجه کنید:**

■ تعداد عددهای (از ۱ تا ۵۰۰) که مضرب ۴ هستند، تقسیم (صحیح) ۵۰۰ بر ۴ است.

$$\frac{500}{4} = 125 \Rightarrow n(A) = 125 \quad \text{و} \quad \frac{500}{6} \cong 83/3 \Rightarrow n(B) = 83$$

■  $A \cap B$  شامل عددهایی است که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۶ هستند؛ یعنی مضرب کم‌کم این دو عدد، یعنی ۱۲ هستند:

$$\frac{500}{12} = 41/6 \Rightarrow n(A \cap B) = 41$$

احتمال این که عدد مضرب ۴ باشد و مضرب ۶ نباشد همان  $P(A - B)$  است. طبق قوانین:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{125}{500} - \frac{41}{500} = \frac{84}{500} = 0/168$$

**تست:** از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدامین احتمال این عدد مضرب ۹ یا مضرب ۶ است؟

۴  $0/33$

۳  $0/25$

۲  $0/15$

۱  $0/22$

گزینه ۱

قرار می‌دهیم:

$B$ : پیشامد مضرب ۶ بودن

$A$ : پیشامد مضرب ۹ بودن

احتمال خواسته شده  $P(A \cup B)$  است که مشابه تست قبل محاسبه می‌شود:

$$\frac{200}{9} = 22/2 \Rightarrow n(A) = 22 \quad \text{و} \quad \frac{200}{6} \cong 33/3 \Rightarrow n(B) = 33$$

$A \cap B$  شامل عددهایی است که مضرب کم‌کم دو عدد ۹ و ۶ یعنی ۱۸ هستند:

$$\frac{200}{18} = 11/1 \Rightarrow n(A \cap B) = 11$$

پناپراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{22}{200} + \frac{33}{200} - \frac{11}{200} = \frac{44}{200} = 0/22$$

#### نکته ۲۶

**پیشامد متمم:** فرض کنید  $A$  یک پیشامد باشد. متمم آن چنین است:

$$A' = S - A$$

یعنی: تمام عضوهای  $S$  به جز عضوهای  $A$ . در این صورت:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{و} \quad P(A) = 1 - P(A')$$

**توجه کنید:**

از این رابطه‌ها وقتی محاسبه‌ی احتمال  $P(A)$  طولانی یا سخت باشد، استفاده می‌کنیم!

**تست:** در پرتاب چهار سکه با هم، چقدر احتمال دارد که لااقل یک سکه «رو» ظاهر شود؟

۴  $15/16$

۳  $14/16$

۲  $13/16$

۱  $12/16$

گزینه ۴

چون در حالت‌های زیادی شرط «لااقل یک سکه رو» برقرار است، خلاف آن را در نظر می‌گیریم:

$A'$ : پیشامد هیچ رو ظاهر نشود.

فقط یک حالت هست که همه پشت بیایند:  $n(A') = 1$ . در نتیجه:

$$P(A') = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$



## آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۷

مریم یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب کرده است. احتمال این که حاصل ضرب ارقام عددی زوج باشد، چقدر است؟

$$\frac{13}{18} \quad 4$$

$$\frac{7}{14} \quad 3$$

$$\frac{2}{8} \quad 2$$

$$\frac{3}{4} \quad 1$$

گزینه ۴

با روشی که در بالاتر دیدیم، تعداد کل اعداد دو رقمی:  $9 \times 10 = 90$

توجه کنید:

محاسبه‌ی تعداد حالاتی که ضرب ارقام فرد باشد، آسان‌تر است؛ باید هر دو رقم فرد باشند:

$$5 \times 5 = 25$$

پس:

$$P(A') = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

تست: از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$  عددی انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که آن نه بر ۶ بخش‌پذیر باشد و نه بر

۹؟

$$0/78 \quad 4$$

$$0/72 \quad 3$$

$$0/68 \quad 2$$

$$0/88 \quad 1$$

گزینه ۴

چون پاسخ‌گویی مستقیم کمی مشکل است، خلاف آن را در نظر می‌گیریم:

$A'$ : پیشامد این که عدد لااقل بر ۶ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

کمی قبل‌تر در یک تست دیدیم که  $P(A') = 0/22$  است و در نتیجه:

$$P(A) = 1 - 0/22 = 0/78$$

این جزوه را با بررسی چند تست دیگر از آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان به پایان می‌بریم.

## آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۶

از کیسه‌ای شامل ۹ گوی شماره گذاری شده از ۱ تا ۹، در سه نوبت، هر بار یک گوی بیرون می‌آوریم و در جدول زیر، خانه‌ی مربوطه را ضربدر می‌زنیم. (گوی‌ها را به کیسه بر نمی‌گردانیم!) چقدر احتمال دارد که همه‌ی خانه‌های یک سطر یا ستون یا قطر این جدول علامت‌دار شوند؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

$$\frac{24}{504} \quad 2$$

$$\frac{48}{504} \quad 4$$

$$\frac{8}{504} \quad 1$$

$$\frac{30}{504} \quad 3$$

## گزینه ۴

برای گوی اول ۹ حالت داریم، چون گوی‌ها را بر نمی‌گردانیم، برای گوی دوم ۸ حالت و برای گوی سوم ۷ حالت داریم. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$n(S) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

## توجه کنید:

برای این که عددهای سطر اول علامت‌دار شوند، باید سه عدد ۱ و ۲ و ۳ با هر ترتیبی خارج شوند:

۱, ۲, ۳    ۱, ۳, ۲    ۲, ۱, ۳    ۲, ۳, ۱    ۳, ۱, ۲    ۳, ۲, ۱

پس ۶ حالت قابل قبول است. حالات مطلوب هفت قسمت دیگر هم دارد:

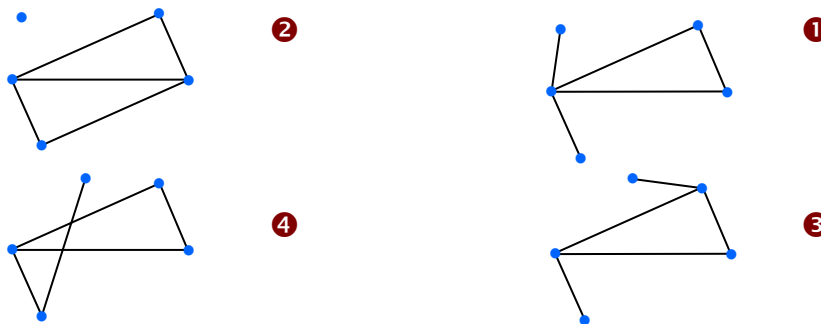
سطر دوم    سطر سوم    ستون اول    ستون دوم    ستون سوم    قطر اول    قطر دوم

یعنی: ۸ حالت کلی که هر کدام خودشان ۶ حالت دارند:  $n(A) = 8 \times 6 = 48$ . در نتیجه:

$$P(A) = \frac{48}{504}$$

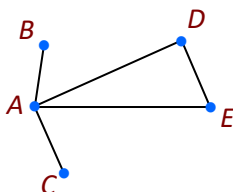
## آزمون کشوری ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی ۱۳۹۶

پنج مجموعه‌ی دو عضوی غیر مساوی داریم. در گزینه‌های زیر، هر نقطه یکی از این مجموعه‌ها را نمایش می‌دهد. اگر اشتراک دو مجموعه تهی نباشد، نقاط مربوط به آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. کدام یک از اشکال زیر نمی‌تواند مربوط به این پنج مجموعه باشد؟



## گزینه ۱

برای توضیح بهتر، نقاط را به نام چند مجموعه نام گذاری می‌کنیم: مجموعه‌ی  $A$  را به صورت  $\{x, y\}$  در نظر گرفته و به گزینه‌ی یک توجه کنید:



مجموعه‌ی  $A$  با  $B$  و  $C$  عضو مشترک داشته و چون خود  $B$  و  $C$  عضو مشترک ندارند، باید یکی از عضوهای  $x$  و  $y$  در  $B$  و یکی در  $C$  باشد (مثلاً:  $x \in B$  و  $y \in C$ ). اما در این گزینه،  $A$  با  $D$  هم عضو مشترک دارد، مثلاً:  $x \in D$ . پس  $D$  باید به  $B$  هم وصل شده باشد که این‌گونه نشده است!



## سؤالات چهار گزینه‌ای



۱- کدام یک از عبارتهای زیر تشکیل مجموعه نمی‌دهد؟

- ۱ اعداد صحیح کمتر از ۲۱ -
- ۲ اعداد طبیعی کمتر از ۰
- ۳ بزرگ‌ترین پنج عدد فرد دو رقمی
- ۴ سه عدد زوج متوالی

۲- مجموعه‌ی عددهای صحیح بین  $13 - \sqrt{13}$  و  $-17 + \sqrt{17}$  کدام است؟

- ۱  $\{8, -10, \dots, -11\}$
- ۲  $\{9, -11, \dots, -12\}$
- ۳  $\{9, -12, \dots, -13\}$
- ۴  $\{10, -12, \dots, -13\}$

۳- اگر  $x \in \mathbb{Z}$  و  $x \in A$  درست باشد، آنگاه مجموعه‌ی  $A$  کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

- ۱  $\mathbb{Z}$
- ۲  $\mathbb{Q}$
- ۳  $\mathbb{R}$
- ۴  $\mathbb{N}$

۴- مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۴
- ۴ بی‌شمار

۵- مجموعه‌ی  $\{a, a, \dots, a, \{\{a\}\}, \{\{a, a\}\}, \{\{a\}\}, \{\{a\}\}\}$  چند عضو دارد؟

- ۱ ۳
- ۲ ۴
- ۳ ۵
- ۴ ۶

۶- مجموع عضوهای مجموعه‌ی  $A = \{2, 5, 8, \dots, 59\}$  کدام است؟

- ۱ ۶۲۰
- ۲ ۶۱۰
- ۳ ۶۱۸
- ۴ ۶۰۰

۷- مجموعه‌ی جوابهای صحیح معادله‌ی  $x^2 + 8 = 0$  کدام است؟

- ۱  $\{4\}$
- ۲  $\{4, -4\}$
- ۳  $\emptyset$
- ۴  $\{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\}$

۸- کدام گزاره نادرست است؟

- ۱ مجموعه اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته است.
- ۲ مجموعه اعداد طبیعی زوج نسبت به عمل ضرب بسته است.
- ۳ مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل ضرب بسته است.
- ۴ مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل جمع بسته است.

۹- مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به کدام یک از موارد زیر بسته است؟

- ① جمع      ② ضرب      ③ تفریق      ④ تقسیم

۱۰- کدام مورد عضوهای مجموعه‌ی  $\{n \in \mathbb{N} \mid x = (-1)^n \times (n^2 - 2n + 1)^2\}$  را مشخص می‌کند؟

- ①  $\{0, 1, 4, \dots\}$       ②  $\{0, 1, -16, \dots\}$   
 ③  $\{1, -4, \dots\}$       ④  $\{1, -16, \dots\}$

۱۱- کدام مجموعه‌ی زیر نمایش ریاضی مجموعه‌ی  $\{7, 77, 777, \dots\}$  است؟

- ①  $\{7 \times \frac{10^x + 1}{9} \mid x \in \mathbb{N}\}$   
 ②  $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{Z}\}$   
 ③  $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{W}\}$   
 ④  $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۲- نمایش ریاضی مجموعه‌ی  $\{-26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26\}$  کدام است؟

- ①  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -26 \leq x \leq 26\}$   
 ②  $\{x \in \mathbb{W} \mid -26 \leq x \leq 26\}$   
 ③  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{26}{x} \in \mathbb{Z}\}$   
 ④  $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{26} \in \mathbb{Z}\}$

۱۳- مجموعه‌ی  $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$  با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- ①  $\{(-1) \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 ②  $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 ③  $\{(-n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
 ④  $\{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۱۴- مجموعه‌ی  $\{2^{xy} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$  با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- ①  $\{2, 4, 8, 16\}$   
 ②  $\{x \mid x^2 = 64\}$   
 ③  $\{64, 16\}$   
 ④  $\{\}$



۱۵- نمایش ریاضی مجموعه‌ی  $\{-۲, ۴, -۸, ۱۶, \dots\}$  کدام است؟

- ①  $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$   
 ②  $\{-2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$   
 ③  $\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$   
 ④  $\{(-1)^{2^x} \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۶- مجموعه‌ی  $\{2^{x-3y} \mid x-1=3y\}$  با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- ①  $\{۱۶\}$   
 ②  $\{۲\}$   
 ③  $\{۳۲\}$   
 ④  $\{۵, -۵\}$

۱۷- مجموعه‌ی  $\{2^{11} + ۲, 2^{11} + ۴, 2^{11} + ۶, \dots, 2^{12}\}$  چند عضو دارد؟

- ①  $2^{12}$   
 ②  $2^{11}$   
 ③  $2^{10}$   
 ④  $2^9$

۱۸- مجموعه‌ی  $\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq ۲, y \leq ۲\}$  چند زیر مجموعه دارد؟

- ① ۱۶  
 ② ۴  
 ③ ۲  
 ④ ۸

۱۹- مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۱ چند زیر مجموعه دارد که حداقل یکی از اعداد ۲ یا ۳ را دارند، ولی قطعاً دو عضو ۵ و ۶ را ندارند؟

- ① ۲۵۶  
 ② ۱۹۲  
 ③ ۶۴  
 ④ ۲۰۸

۲۰- مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$  چند زیر مجموعه‌ی دو عضوی به شکل  $\{x, x+۲\}$  دارد؟

- ① ۹۶  
 ② ۹۷  
 ③ ۹۸  
 ④ ۹۹

۲۱- در چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, ۲۰\}$  حداکثر ۹ عدد فرد وجود دارد؟

- ①  $2^{20} - 2^9$   
 ②  $2^{11}$   
 ③  $2^{10}$   
 ④  $2^{20} - 2^{10}$

۲۲- در چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, ۱۰\}$  مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۱ است؟

- ① ۳۲۰  
 ② ۳۲۸  
 ③ ۳۴۱  
 ④ ۳۵۲

۲۳- در مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که بزرگ‌ترین عضو ۲ برابر کوچک‌ترین عضو آن باشد؟

- ① ۵۱۱  
 ② ۵۱۲  
 ③ ۱۰۲۳  
 ④ ۱۰۲۴



۲۴- تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی  $n+3$  عضو چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی  $n-1$  عضو است؟

- ۱ ۸      ۲  $n+4$       ۳ ۱۶      ۴ ۳۲

۲۵- اگر  $\{a\} = \{2x-5, 25-3x\}$  باشد،  $a$  چقدر است؟

- ۱ ۶      ۲ ۷      ۳  $\frac{25}{3}$       ۴  $\frac{5}{2}$

۲۶-  $A$  مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۴ و  $B$  مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۲ است.  $A \cap B$  کدام است؟

- ۱  $\{1, 2\}$       ۲  $\{1, 2, 4\}$       ۳  $\{1, 2, 14\}$       ۴  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 14\}$

۲۷- اگر  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{2, \{1\}\}$  باشد تعداد زیر مجموعه‌های  $A \cap B$  کدام است؟

- ۱ ۲      ۲ ۴      ۳ ۱۶      ۴ ۱

۲۸-  $A$  و  $B$  دو مجموعه هستند. اگر  $A \cup B = A$  باشد، همواره داریم:

- ۱  $A \subseteq B$       ۲  $B \subseteq A$       ۳  $A = B$       ۴  $B = \emptyset$

۲۹- فرض کنید  $A_n$  نشان دهنده‌ی مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد  $n$  باشد. مجموعه‌ی زیر چند عضو دارد؟

$$A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100}$$

- ۱ ۵۰      ۲ ۱۰۰      ۳ ۲۰۰      ۴ ۳۷۷۵

۳۰- کدام مورد نادرست است؟

- ۱  $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$       ۲  $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$       ۳  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$       ۴  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$

۳۱- اگر به مجموعه‌ی  $A$  سه عضو جدید اضافه شود، به تعداد زیر مجموعه‌های آن ۴۴۸ مجموعه اضافه می‌شود. مجموعه‌ی  $A$  چند عضو است؟

- ۱ ۶      ۲ ۵      ۳ ۴      ۴ ۳

۳۲-  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی غیر تهی و  $(A \cup B) \subseteq B$  است. آنگاه:

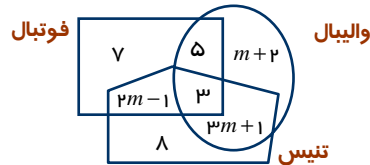
- ۱  $A \cap B = \emptyset$       ۲  $B \subseteq A$       ۳  $A \cap B = B$       ۴  $A \cap B = A$



۳۳- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  باشند، چند مجموعه مانند  $X$  در رابطه‌ی  $(A \cup B) \subseteq X \subseteq (A \cap B)$  صدق می‌کند؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) ۶      ۴) ۸

۳۴- با توجه به نمودار زیر، اگر تعداد افرادی که تنها به یک ورزش علاقه دارند ۲۱ نفر باشد، چند نفر تنها به ۲ ورزش علاقه‌مند هستند؟



- ۱) ۳۰  
۲) ۲۸  
۳) ۲۵  
۴) ۲۲

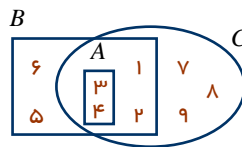
۳۵- تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر و یا مساوی با ۱۰۰۰ که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیرند، کدام است؟

- ۱) ۶۸۸      ۲) ۶۸۶      ۳) ۳۱۴      ۴) ۶۵۸

۳۶- در یک کلاس ۴۲ نفره، ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند و ۲۱ نفر هم به اردو نمی‌روند. اگر ۲ نفر هم ورزش نکنند و هم اردو نروند، چند نفر هم ورزش می‌کنند و هم اردو می‌روند؟

- ۱) ۱      ۲) ۳      ۳) ۵      ۴) ۷

۳۷- با توجه به شکل، مجموعه‌ی  $(A-B) \cup (C-A)$  چند عضو دارد؟



- ۱) ۳  
۲) ۴  
۳) ۵  
۴) ۶

۳۸- مجموعه‌ی  $[A \cap B \cap (A-B)] \cup A$  کدام است؟

- ۱) A      ۲) B      ۳) A-B      ۴)  $\emptyset$

۳۹- کدام مجموعه با پایان است؟

- ۱)  $W - \mathbb{N}$   
۲)  $\mathbb{Z} - W$   
۳)  $W \cap \mathbb{N}$   
۴)  $\mathbb{Z} \cap W$

۴۰- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

- ۱)  $A \cap B$       ۲) B-A      ۳) A-B      ۴)  $(A-B) - A$



۴۱- اگر پنج سکه را با پنج تاس بیندازیم، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای آن به صورت عدد توان‌دار در کدام گزینه آمده است؟

- ①  $۲ \times ۶^۵$       ②  $۱۲^۵$       ③  $۲^۵ \times ۶$       ④  $۵^{۱۲}$

۴۲- اگر  $P(A) = ۰/۲$  و  $n(A) = ۸$  و  $n(B) = ۵$  باشد، مقدار  $P(B)$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{۱۳}$       ②  $\frac{1}{۸}$       ③  $\frac{۸}{۱۰}$       ④  $\frac{۵}{۱۳}$

۴۳- دو تاس را با هم انداختیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده عددی اول است؟

- ①  $\frac{۷}{۱۲}$       ②  $\frac{۵}{۹}$       ③  $\frac{۴}{۹}$       ④  $\frac{۵}{۱۲}$

۴۴- روی وجه‌های یک مکعب عددهای ۳-، ۲-، ۱- و ۰ و ۱ و ۲ را نوشته‌ایم. مکعب را دو بار می‌اندازیم. احتمال این که حاصل ضرب دو عددی که به دست آورده‌ایم منفی باشد، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{۲}$       ②  $\frac{۱۱}{۳۶}$       ③  $\frac{۱۳}{۳۶}$       ④  $\frac{1}{۳}$

۴۵- علی رقم‌های ۱ تا ۹ را روی ۹ کارت نوشته و در کیسه‌ای می‌اندازد. سپس ۴ کارت از آن پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کند و آن‌ها را به ترتیب بیرون آمدن کنار هم قرار می‌دهد. احتمال آن که عدد چهار رقمی بدست آید که اختلاف رقم یکان و هزارگان آن ۴ باشد، کدام است؟

- ①  $\frac{۵}{۱۸}$       ②  $\frac{۵}{۳۶}$       ③  $\frac{۵}{۷۲}$       ④  $\frac{۵}{۲۷}$

۴۶- اتاقی داریم که کف آن از کاشی‌های مربع شکل پوشیده شده است. طول اتاق شامل ۸ و عرض آن شامل ۵ کاشی است. اگر یکی از کاشی‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن که این کاشی، کاشی کنج یا کناره‌های اتاق باشد، کدام است؟

- ①  $\frac{۱۹}{۴۰}$       ②  $\frac{1}{۲}$       ③  $\frac{۱۱}{۲۰}$       ④  $\frac{۲۱}{۴۰}$

