# ( آنالیز ترکیبی )

①

- اصل ضرب : هرگاه عملی به $m$ طریق و عمل دیگری به $n$ طریق انجام شود این دو عمل باهم به $m\times n$ طریق انجام می‌شوند

* هرگاه بین اعمال از « و » استفاده شود از ضرب و اگر از « یا » استفاده شود از جمع استفاده می‌کنیم

- جایگشت : هرگاه بخواهیم $n$ شیء متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم تعداد حالات مختلف برابر است با :

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1 = n!$$

* تعداد حالات مختلف قرارگرفتن $n$ شیء یکسان برابر است با $1$

مثال : ۵ کتاب فارسی متمایز و ۴ کتاب ریاضی متمایز را کنار هم قرار می‌دهیم . الف) در چند حالت کتاب‌ها از نظر نوع جدا اند ؟ $2!\times 5!\times 4!$

* جایگشت شروع ! ← ؟ : فقط زمانی این $2!$ را می‌آوریم که در سوال قید شود انواع اشیاء از هم جدا باشند .

ب) در چند حالت سه کتاب فارسی مشخص همواره کنار هم هستند ؟

* در این موارد اشیایی که قرار است کنار هم باشند را به هم بسته و یک شیء فرض می‌کنیم و جایگشت آن‌ها را با بقیه محاسبه می‌کنیم و در آخر جایگشت خود اشیای بسته شده را نیز محاسبه می‌کنیم و در جواب اول ضرب می‌کنیم

$$\boxed{ف ف ف} + 6 = 7 \longrightarrow \underbrace{7!}_{کلی}\times\underbrace{3!}_{درونی}$$

* بدیهی است اگر اشیای بسته شده یکسان باشند جایگشت درونی برابر $1$ است .

مثال : ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ را یکی یکی از کیسه‌ای خارج می‌کنیم . در چند حالت کارت ۳ بعد از ۵ خارج می‌شود

$7! =$ کل حالات $\longrightarrow$ ۳ بعد از ۵ $= \frac{7!}{2}$

* در جایگشت اشیاء هر قبل و بعدی جایگشت را نصف می‌کند

در چند حالت ۳ بعد از ۵ و بعد از ۷ می‌آید ؟ $\frac{7!}{2\times 2}$

مثال : با ارقام ۰ تا ۹ چند عدد سه رقمی زوج و فرد می‌توان ساخت ؟

زوج:
- با تکرار: $9\times 10\times 5 = 450$
- بدون تکرار: $9\times 8\times 1 = 72$ (صفر) ؛ $8\times 8\times 4 = 256$ $\Rightarrow 256+72=328$

فرد:
- با تکرار: $9\times 10\times 5 = 450$ (۱،۳،۵،۷،۹) مراحل شروع تا آخر
- بدون تکرار: $8\times 8\times 5 = 320$ صفر نمی‌آید یک رقم هم کم می‌آید

* در دو نوع سوال صفر را جدا می‌کنیم: اعداد زوج ، مضرب‌های ۵
فقط در حالت‌های بدون تکرار

- ترتیب : هرگاه بخواهیم از بین $n$ شیء متمایز $r$ شیء را انتخاب کنیم به نحوی که ترتیب مهم باشد : $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

- ترکیب : " " " " " " " " " " " " نباشد :

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال : ۵ نفر می‌خواهند از یک ساختمان ۱۲ طبقه بالا روند به طوری که در هر طبقه حداکثر ۱ نفر از آسانسور پیاده شود . این کار به چند طریق انجام می‌شود ؟

راه اول: $\binom{12}{5}\times 5!$ انتخاب طبقات ، جابجایی افراد

راه دوم: $\frac{1}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}$

(۲)

## خواص ترکیب :

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

۳) $\binom{n}{r}=\binom{n}{r'} \Leftrightarrow n=r+r'$

$\binom{10}{3}=\binom{10}{7} \Leftarrow 3+7=10$

۴) تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی $=2^n$

۵) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی $=\binom{n}{r}$

۶) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \longrightarrow \binom{10}{4}+\binom{10}{3}=\binom{11}{4}$

در زیرمجموعه‌ها:

$2^n \xrightarrow{\text{شامل k عضو}} 2^{n-k}$

$2^n \xrightarrow{\text{فاقد k عضو}} 2^{n-k}$

$\binom{n}{r} \xrightarrow{\text{شامل k عضو}} \binom{n-k}{r-k}$

$\binom{n}{r} \xrightarrow{\text{فاقد k عضو}} \binom{n-k}{r}$

---

مثال: در مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱ رقمی :

الف) چند زیرمجموعه شامل اعداد اول داریم؟

$2^9 =$ کل $\longrightarrow \underbrace{\text{شامل اعداد اول}}_{\text{۴ عضو}} \longrightarrow 2^{9-4}=2^5$

ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل ۲ داریم؟

$\binom{9}{4}=$ کل $\longrightarrow \underbrace{\text{شامل ۲}}_{\text{یک عضو}} \longrightarrow \binom{9-1}{4-1}=\binom{8}{3}$

---

* هرگاه بخواهیم دو نوع شیء را کنار هم بچینیم طوری که یک نوع از آن‌ها کنار هم نباشند ابتدا نوع بیشتر را چیده (۱) و پس با انتخاب جا از بین آنها (۲) و اول و آخر آن‌ها نوع کمتر را می‌چینیم (۳).

مثال) ۸ پسر و ۴ دختر چگونه کنار هم قرار بگیرند که هیچ دو دختری کنار هم نباشند؟

$\underbrace{8!}_{\text{پسرها}} \times \underbrace{\binom{9}{4}}_{\text{انتخاب جا برای دختران}} \times \underbrace{4!}_{\text{دخترها}}$

جایگشت اشیای تکراری = $\dfrac{\text{جایگشت کل با فرض متمایز بودن اشیاء}}{\text{جایگشت اشیای تکراری}}$

مثال) با حروف کلمهٔ پرسپولیس چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت؟

$\dfrac{8!}{2!\times 2!}$

پ پ ، س س

چند کلمهٔ ۸ حرفی که با پ شروع و با پ تمام شود؟

۱ ← پ ------ پ → ۱ $\Rightarrow \dfrac{6!}{2!}$ ← س س

# احتمال

- فضای نمونه : کل حالات ممکن ← S
- " پیشامد : هر زیر مجموعه از فضای نمونه ← A

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ احتمال A

مثال) یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آمدن حداقل یک بار شیر بیشتر از ۹۹ درصد باشد؟

$\underbrace{\text{حداقل یک شیر} = 1 - \text{هیچ شیر}}_{\text{قانون متمم}} \to 1 - \frac{\binom{n}{0}}{2^n} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{-1}{2^n} > \underbrace{\frac{99}{100} - 1}_{-\frac{1}{100}} \xrightarrow{\times -1} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \to 2^n > 100$

$\to n_{min} = 7$

مثال) می‌خواهیم از بین ۵ زوج ۴ نفر را انتخاب کنیم. با چه احتمالی هیچ کدام زن و شوهر نیستند؟

$P = \frac{\binom{5}{4}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{4}}$

انتخاب ۴ نفر از ۵ زوج — انتخاب یک نفر از یک زوج

T) تجربی ۹۲

۲ تاس را باهم پرتاب می‌کنیم با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

$\underbrace{\text{مضرب ۴}}_{۴ \text{ و } ۸ \text{ و } ۱۲}$

الف) $\frac{2}{9}$ ب) $\frac{5}{18}$ ج) $\frac{1}{4}$ ✓ د) $\frac{5}{12}$

۴ → ۱و۳ ۳و۱ ۲و۲ ← ③

۸ → ۲و۶ ۶و۲ ۳و۵ ۵و۳ ۴و۴ ← ⑤

۱۲ → ۶و۶ ← ①

مجموع ۹ حالت

$P = \frac{9}{6 \times 6} = \frac{1}{4}$

* اگر آزمایشی فقط دو حالت داشت که شانس دو حالت مساوی بود (سکه یا فرزند) از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

n : تعداد کل آزمایش
k : تعداد دفعات خواسته شده

## قوانین احتمال :

$$1)\ 0 \leq P(A) \leq 1$$

نشدنی $P(A) = 0$

حتمی $P(A) = 1$

$$2)\ P(A') = 1 - P(A)$$

$$\boxed{A - B = A \cap B'}$$

$$3)\ \underbrace{P(A \cup B)}_{} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۱) A یا B
۲) یکی از دو پیشامد
۳) حداقل یکی از دو پیشامد

در تست‌ها هر وقت این ۳ گزینه مطرح بود این قانون مد نظر است

۴) $A \cap B = \emptyset \to$ A و B ناسازگارند

$\to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۵) $\underbrace{P(A - B)}_{\text{A باشد ولی B نباشد}} = P(A) - P(A \cap B)$

T) تجربی ۹۰ : در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

قانون سوم

با توجه به نکته بالا چون دختر و پسر احتمال برابر دارند

$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \to \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3}}{2^4} = \frac{5}{8}$

دو پسر — سه دختر — قانون سوم

- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد که بهم وابسته نباشند ← اگر A و B مستقل باشند: A و B' ـ B و A' ـ A' و B' هم مستقل

مثال) اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.2$ آنگاه پاسخ $P(B'-A')$ چیست؟

$$P(B'-A') = P(B') - \overbrace{P(A'\cap B')}^{P(A')\times P(B')} = 0.8 - 0.7\times 0.8 = 0.24$$

یادمان باشد: مستقل ← ربط نداشتن به هم

ناسازگار ← $A\cap B=\emptyset$ اشتراک ندارند

- احتمال شرطی: احتمال وقوع A به شرط آن که B اتفاق بیفتد

مثال) دو تاس پرتاب کردیم، مجموع ۷ یا ۸ شده است. با چه احتمالی هر دو عدد مساوی اند؟

احتمال ممکن ۷: ۳و۴، ۴و۳، ۲و۵، ۵و۲، ۱و۶، ۶و۱

احتمال ممکن ۸: ۴و۴ *، ۳و۵، ۵و۳، ۲و۶، ۶و۲

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{11}$$

(در این سوالات شرطی معمولاً خود صورت سوال آن چیزی است که اتفاق افتاده است)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- قانون احتمال کل (نمونه درختی): این نوع سوالات، شاخه بندی هایی را در خود دارند.

مثال) در یک دانشکده ۱۲۰۰ نفری ۸۰۰ نفر دختر و بقیه پسراند. اگر ۷۰٪ دختران و ۴۰٪ پسران در یک درس مردود شده اند، با چه احتمالی یک فرد انتخاب شده در آن درس قبول شده است؟

دختر $\frac{800}{1200}$: ق $0.3$ ، م $0.7$

پسر $\frac{400}{1200}$: ق $0.6$ ، م $0.4$

$$P = \frac{800}{1200}\times\frac{3}{10} + \frac{400}{1200}\times\frac{6}{10} = \frac{9}{10} = \frac{2}{5}$$

جدول توزیع احتمالی

* در هر جدول توزیع احتمال جمع احتمالات همواره ۱ است.

مثال) جدول توزیع احتمالی دختران یک خانواده ۳ فرزندی؟

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\binom{3}{0}}{2^3}=\frac{1}{8}$ | $\frac{\binom{3}{1}}{2^3}=\frac{3}{8}$ | $\frac{\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{3}{8}$ | $\frac{\binom{3}{3}}{2^3}=\frac{1}{8}$ |

$$\longrightarrow \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$

- توزیع دوجمله‌ای: اگر آزمایشی فقط ۲ حالت داشته باشد و آن را n مرتبه انجام دهیم داریم:

$$P(x) = \binom{n}{x}\times p^x \times (1-p)^{n-x}$$ (اگر شانس‌ها برابر نباشد)

$n$: تعداد کل آزمایش

$x$: تعداد دفعات خواسته شده

$P$: احتمال خواسته شده

اگر شانس ها برابر باشد از روش قبلی که گفته شد استفاده می شود: $P = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$

ت) تجربی ۸۹: از نوعی بذری که ۸۰ درصد آن جوانه می زند ۵ عدد کاشته شده، با کدام احتمال حداقل دو عدد از آن ها جوانه می زند؟

$$P(x) = 1-P(x') \rightarrow P(x') = 1-\left[\binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5 + \binom{5}{1}(0.8)^1(0.2)^4\right] = 0.99328$$

* از کجا بفهمیم توزیع دوجمله ای است؟

۱) آزمایش دوحالتی است (سکه یا فرزند یا ...)

۲) از تعداد کلی، تعدادی را می خواهد.

نتایج

- عبارت درجه ۲ $(ax^2+bx+c)$:
  - $\Delta>0$ ← ۲ ریشه حقیقی متمایز
  - $\Delta=0$ ← ریشه حقیقی مضاعف
  - $\Delta<0$ ← ریشه حقیقی ندارد

حالات خاص:
- $a+b+c=0$ ← $x_1=1$ ، $x_2=\frac{c}{a}$
- $a+c=b$ ← $x_1=-1$ ، $x_2=\frac{-c}{a}$

## نامعادلات :

* در نامعادلات درجه ۲ برای تعیین علامت ریشه‌ها : علامت $x^2$ و نامعادله را مقایسه می‌کنیم ←
  - یکسان باشند ← جواب خارج ریشه‌ها
  - " نباشند ← " بین دو ریشه

مثال) $4x^2+3x-7\leq 0$ (منفی) مثبت ؛ $x_1=1$ ، $x_2=\frac{-7}{4}$

$-\frac{7}{4}\leq x\leq 1$ ← بین دو ریشه

در نامعادلات درجه ۱ به درجه ۱ : همه را به یک طرف می‌بریم و ساده می‌کنیم - علامت ضریب $x$ در بالا و پایین را در هم ضرب می‌کنیم - با علامت نامعادله مقایسه می‌کنیم و طبق بالا عمل می‌کنیم . مثال :

$$\frac{2x-1}{x+3}\geq 1 \rightarrow \frac{2x-1}{x+3}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+3}\geq 0 \quad (x=4 ,\ x=-3)$$

$x<-3$ یا $x\geq 4$ ← خارج دو ریشه

مساوی نمی‌گیرد چون در مخرج است

در نامعادلات پیچیده‌تر به این شکل عمل می‌کنیم :

همه را به یک طرف برده و ساده می‌کنیم - در جدول تعیین علامت اولین علامت سمت چپ ، ضریب بزرگترین توان صورت به مخرج را بدست می‌آوریم و به متغیر آن عدد منفی فرضی می‌دهیم تا علامت مشخص شود - برای تعیین سایر علامت‌ها با توجه به نوع ریشه‌ها ، ریشه‌های ساده و مکرر فرد علامت را عوض می‌کنند اما ریشه‌های مکرر زوج تغییری نمی‌دهند .

* انواع ریشه‌ها :
  - ساده : $x-3=0\rightarrow x=3$ ؛ * $x^2-4=0$ ← $x=\mp 2$ ساده
  - مکرر زوج : $(x-3)^2=0\rightarrow x=3$ — توان بالای پرانتز مهم است .
  - مکرر فرد : $(x-3)^3=0\rightarrow x=3$

مثال :

$$\frac{(x^3-1)^{17}(x^2-4)}{(x^2+3x+2)^3(x^2+1)}\geq 0$$

$x=1$ ؛ $x=2$ ، $x=-2$ ؛ $x=-1$ ، $x=-2$ ؛ بدون ریشه

تعیین اولین علامت $\rightarrow \frac{x^{51}\times x^2}{x^6\times x^2}=x^{45}\xrightarrow{x\ \text{منفی}}$ منفی

| $x$ | | $-2$ (مکرر زوج) | | $-1$ (مکرر فرد) | | $1$ (مکرر فرد) | | $2$ (ساده) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| علامت | $-$ | ت.ن | $-$ | ت.ن | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

← $-1<x\leq 1$ یا $x\geq 2$

دوبار تکرار شده به عنوان ریشه

* اگر در معادله یا نامعادله‌ای ، جواب کامل در گزینه‌ها بود ← از عددگذاری استفاده کنید .
* اگر به عبارتی رسیدید که همواره مثبت (مثلاً $x^2+1$ یا $\Delta<0$ یا $a>0$) یا قدر مطلق و ... و یا همواره منفی ($\Delta<0$ و $a<0$ و یا $-x^2-1$ و ...) رسیدید می‌توانید آن‌ها را در نظر نگیرید و فقط اگر ریشه داشتند ریشه‌ها را در آخر بررسی کنید .

* در عبارات درجه ۲ :
  1. $ax^2+bx+c\geq 0$ ← همواره نامنفی : $\Delta\leq 0$ ، $a>0$
  2. $ax^2+bx+c>0$ ← همواره مثبت : $\Delta<0$ ، $a>0$
  3. $ax^2+bx+c\leq 0$ ← همواره نامثبت : $\Delta\leq 0$ ، $a<0$
  4. $ax^2+bx+c<0$ ← همواره منفی : $\Delta<0$ ، $a<0$

- تعریف تابع : زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول یکسان نباشند اگر هم ساوی بودند مؤلفه‌های دوم نیز یکسان باشد.

* در نمودار یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور $y$ ها آن را در حداکثر ۱ نقطه قطع کند.

* برای تشخیص تابع نبودن یک رابطه از روی ضابطه می‌توان به $x$ عدد دلخواه بدهیم ← اگر برای $y$ بیش از یک جواب بدست آید تابع نیست [ ولی اگر ۱ جواب بدست آید نمی‌توان گفت تابع است ]

مثال : کدام تابع نیست ؟

$$|x-2|+|y-3|=4 \xrightarrow{x=2} \begin{cases} y-3=4 \\ y-3=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=7 \\ y=-1 \end{cases} \times$$

$$\underbrace{|x-2|}_{+}+\underbrace{|y-1|^2}_{+}=0 \rightarrow$$ هرگاه جمع چند عبارت مثبت صفر شود هر یک از آنها صفر است $$\rightarrow \begin{matrix} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ y-1=0 \rightarrow y=1 \end{matrix} \rightarrow$$ نقطهٔ $(-2,1)$ تابع است

$$\underbrace{|x-2|}_{+\ \text{همواره}}+\underbrace{|y-1|}_{+\ \text{همواره}}+3=0 \rightarrow -3 \rightarrow$$ مجموع هیچ دو عدد مثبتی ، منفی نمی‌شود ← این رابطه برقرار نیست ← تهی ← تهی تابع است ✓

- دامنه و برد : به مؤلفه‌های اول ($x$) دامنه و مؤلفه‌های دوم ($y$) ، برد می‌گویند.

۱) دامنهٔ توابع چند جمله‌ای $R$ است .
۲) رادیکال با فرجهٔ فرد تأثیری در دامنه ندارد .
۳) در رادیکال با فرجهٔ زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر و مساوی صفر قرار دهیم و نامعادله را حل کنیم.
۴) در توابع کسری باید ریشه‌های مخرج را از دامنهٔ اصلی حذف کنیم.
۵) قدر مطلق و جزء صحیح تأثیری در دامنه ندارد. ( قدر مطلق و جزء صحیح دور کل تابع نه درون آن )
۶) سینوس و کسینوس تأثیری در دامنه ندارد .

۷) $F(x)=tgx \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow D=R-(K\pi+\frac{\pi}{2})$

۸) $F(x)=\cot g x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow D=R-K\pi$

۹) $y=\log_B^A \rightarrow D=\begin{cases} A>0 \\ B>0 \\ B\neq 1 \end{cases}$

* در بدست آوردن دامنه نباید عبارت را ساده کنیم .
* برای بدست آوردن دامنهٔ تابع چند ضابطه‌ای باید بین شرایط اجتماع بگیریم سپس محدودیت‌ها هر ضابطه را حساب کنیم
* برای همیشه به خاطر بسپارید : در کلیهٔ مباحث ریاضی هرگاه به قدر مطلق برخورد کردیم ریشه‌های داخل آن را بدست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم .

T) تجربی ۹۲ اگر $F(x)=\sqrt{2x-x^2}$ باشد ، دامنهٔ تابع $F(3-x)$ کدام است ؟

الف) $[0,2]$ ب) $[0,3]$
ج) $[1,2]$ د) $[1,3]$ ✓

$$F(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}=\sqrt{-x^2+4x-3} \rightarrow \boxed{a+b+c=0}$$

$x_1=1$ ، $x_2=3$

$$-x^2+4x-3\geq 0$$

بین دو ریشه $\rightarrow 1\leq x\leq 3$

- تساوی دو تابع : دو تابع را زمانی مساوی می‌دانیم که هر دو شرط زیر را همزمان داشته باشند.

۱- دامنه‌های مساوی          ۲- ضابطه‌های مساوی

مثال) $F(x)=\log x^2$ ، $x^2>0 \to D_F = R-\{0\}$

$g(x)=2\log x$ ، $x>0 \to D_g=(0,+\infty)$ → دامنه‌ها × ، ضابطه‌ها ✓ → × مساوی نیستند

---

- اعمال جبری روی توابع : * به شرطی که دامنه‌ی دو تابع اشتراک داشته باشند *

$$(F+g)x = F(x)+g(x) \longrightarrow D_{F+g} = D_F \cap D_g$$

$$(F-g)x = \text{〃} - \text{〃} \longrightarrow D_{F-g} = \text{〃}\ \text{〃}$$

$$(F\times g)x = \text{〃} \times \text{〃} \longrightarrow (F\times g)x = \text{〃}\ \text{〃}$$

$$\left(\frac{F}{g}\right)x = \frac{F(x)}{g(x)} \longrightarrow D_{\frac{F}{g}} = D_F \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$$

---

- ترکیب دو تابع

$$(F\circ g)x = F(g(x)) \longrightarrow D_{Fog} = \{x\in D_g \ ,\ g(x)\in D_F\}$$

$(g\circ F)x =$ برعکس بالایی‌ها

T) تجربی خارج از کشور ۹۰ ، اگر $F(x)=x^2-x-2$ و $F(g(x))=x^2+x-2$ آنگاه $(F+g)x$ کدام است

الف) $x^2-1$ ✓

ب) $x^2+1$

ج) $x^2-2x$

د) $x^2+2x$

$$F(g(x)) = g(x)^2 - g(x) - \cancel{2} = x^2+x-\cancel{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد دو}} \left(g(x)-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\tfrac{1}{4}} = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \cancel{\tfrac{1}{4}} \to g(x)-\tfrac{1}{2} = \mp\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\to \begin{cases} g(x)=x+1 \longrightarrow (F+g)x = x^2-1 \\ g(x)=-x \longrightarrow (F+g)x = x^2-2x-2 \end{cases}$$

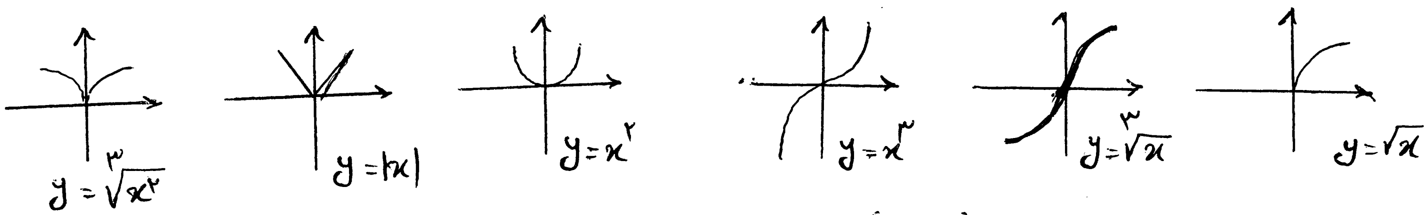
---

- تابع یک به یک : تابعی که برای x فقط یک y وجود داشته باشد یعنی مؤلفه‌های دوم تکراری نباشند.

در نمودار خطی هر خطی موازی محور xها باید نمودار تابع 1-1 را در حداکثر 1 نقطه قطع کند.

برای بررسی 1-1 نبودن می‌توان برعکس قبل ؛ این بار به y عدد داد و x را بررسی کرد.

* چند نمودار مهم *




* توابع چند جمله‌ای با درجه‌ی زوج همواره یک به یک نیستند و درجه‌ی فرد مشخص نیست *

* توابع هموگرافیک همواره یک به یک هستند * $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

- تابع وارون (معکوس) : تابع $f$ معکوس پذیر است هرگاه ۱-۱ باشد

در حالت زوج مرتب کافیست جای مولفه ها را برای معکوس شدن عوض کنیم

در حالت ضابطه : $x$ را برحسب $y$ می نویسیم ، در آخر جای $x$ و $y$ را عوض می کنیم

* هرگاه $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$

* برای رسم نمودار وارون باید نمودار اصلی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم

- انتقال نمودارها :

$y=f(x+a)$ , $a>0$ نمودار تابع اصلی $a$ واحد به سمت چپ

$y=f(x-a)$ , $a>0$ 〃 〃 〃 راست

$y=f(x+b)$ , $b>0$ بالا 〃 〃 $b$ 〃 〃

$y=f(x-b)$ , $b>0$ پایین 〃 〃 〃

$y=-f(x)$ نمودار اصلی نسبت به محور $x$ها قرینه شود

$y=f(-x)$ 〃 〃 $y$ها 〃 〃

رسم $y=|f(x)|$ ← نمودار را بدون قدرمطلق رسم می کنیم ← قسمت های پایین محور $x$ ها را نسبت به محور $x$ ها قرینه می کنیم و قسمت های پایین را حذف کنیم

رسم $y=f(|x|)$ ← 〃 〃 〃 〃 ← قسمت های چپ محور $y$ ها را حذف می کنیم سپس قسمت های سمت راست را نسبت به محور $y$ ها قرینه می کنیم

رسم $|y|=f(x)$ ← 〃 〃 〃 〃 ← 〃 〃 پایین محور $x$ ها را 〃 〃 بالایی را نسبت به محور $x$ ها قرینه می کنیم.

- روابط بین ضرایب و ریشه ها :

* $\Delta>0$
  - $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه مختلف العلامه
    - $-\frac{b}{a}>0$ ریشه مثبت از نظر عددی بزرگتر است
    - $-\frac{b}{a}<0$ ریشه منفی از نظر عددی بزرگتر است
  - $\frac{c}{a}>0$ دو ریشه هم علامت
    - $-\frac{b}{a}>0$ دو ریشه مثبت
    - $-\frac{b}{a}<0$ دو ریشه منفی

$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ جمع دو ریشه

$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ ضرب دو ریشه

$D=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ تفاضل دو ریشه

مثال : معادله $x^4-(x+2)x^2+m+5=0$ دارای چهار ریشه حقیقی است ، حدود $m$ را بدست آورید.

چون معادله ۴ ریشه حقیقی دارد پس معادله درجه ۲ آن باید دو ریشه مثبت داشته باشد :

$$\Delta>0 \Rightarrow m^2+4m+4-4(1)(m+5)>0 \Rightarrow m^2+4m-4-4m-20>0$$

$$\Rightarrow m^2-16>0 \rightarrow m<-4 \text{ یا } m>4$$

$$P>0 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{m+5}{1}>0 \Rightarrow m>-5$$

$$S>0 \Rightarrow \frac{-b}{a}=\frac{-(m+2)}{1}>0 \Rightarrow m>-2$$

$$\xrightarrow{\cap} m>4$$

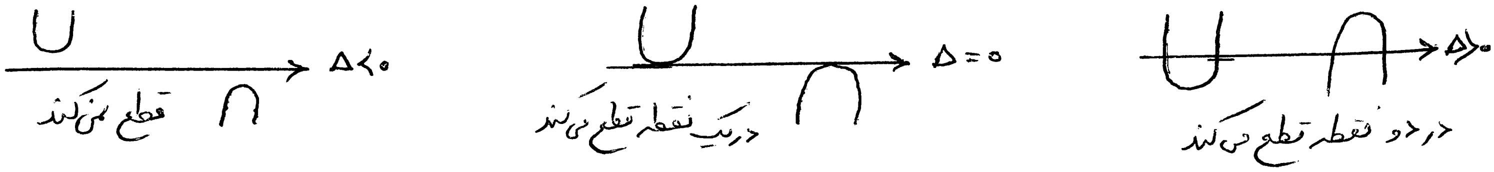
- نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

* خط $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن تابع است *

$a>0$ (دهانه رو به بالا)      $a<0$ (دهانه رو به پائین)

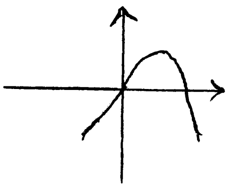
$\min\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$      $\max\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

- چند حالت مختلف نمودار : (برخورد توابع با محور xها ، همان ریشه‌های معادله‌است) :




مثال : منحنی $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیه دوم نمی‌گذرد ، حدود a را تعیین کنید .

چون معادله ضریب ثابت (c) ندارد از مبدأ مختصات می‌گذرد و چون از ناحیه دوم نمی‌گذرد شکل آن اینگونه است



$x^2$ ضریب $<0 \Rightarrow a<0$ ①

$P=0 \Rightarrow \frac{c}{a}=0 \Rightarrow \frac{0}{a}=0 \rightarrow$ کمکی نمی‌کند

$S>0 \Rightarrow \frac{-b}{a}>0 \Rightarrow \frac{c+2}{a}>0 \xrightarrow{a<0} a+2<0 \Rightarrow a<-2$ ②

$\xrightarrow{①, ②} \boxed{a<-2}$

* هرگاه در تابعی ماکسیمم یا مینیمم داده شود و مشخص نکند که مربوط به طول یا عرض است ← منظور عرض است

مسائل S و P : روابط مقابل را به خاطر بسپارید :

1) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

2) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

3) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{S^2-2P}{P}$

مثال) در معادلهٔ $x^2+x-1=0$ حاصل $5x_1^2+3x_2^2$ را بدست آورید $(x_2>x_1)$

طبق معادله : $S=-1$      $P=-1$      $D=\underbrace{|x_1-x_2|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{5}$

$x_2>x_1 \Rightarrow x_1-x_2=\boxed{-\sqrt{5}}$

$$5x_1^2+3x_2^2=4x_1^2+x_1^2+4x_2^2-x_2^2$$
$$=4(x_1^2+x_2^2)+(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$
$$=4(S^2-2P)+D\times S=$$
$$=4(1+2)-\sqrt{5}(-1)=\boxed{12+\sqrt{5}}$$

در مسائل معادله درجه ۲ که پارامتری خواسته می‌شود بعد از حل باید پارامترهای بدست آمده را در معادله برگرداند و $\Delta$ را بررسی کرد ($\Delta$ باید مثبت یا صفر شود).

۳) تجربی ۹۰ خارج از کشور: به ازای کدام مقدار $m$ ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2+3x+x^2=2$ معکوس یکدیگرند؟

چون ریشه‌ها معکوس اند $\Rightarrow P=\frac{c}{a}=1 \longrightarrow \frac{m^2-2}{x}=1 \longrightarrow m^2-m-2=0 \begin{cases} m=-1 & \checkmark \\ m=2 \xrightarrow{\Delta<0} & \times \end{cases}$

* اگر دو ریشه قرینه باشند $\longleftarrow \frac{-b}{a}=0 \longleftarrow \boxed{b=0}$ (باید a و c مختلف‌العلامه باشند).
* « « معکوس $\longleftarrow \frac{c}{a}=1 \longleftarrow \boxed{c=a}$
* « « عکس و قرینه باشند $\longleftarrow \frac{c}{a}=-1 \longleftarrow \boxed{c=-a}$
* هرگاه دو ریشه داده شود و خود معادله خواسته شود، S و P را بدست آورده و از معادله $\boxed{x^2-Sx+P=0}$ استفاده می‌کنیم.
* « یکی از ریشه‌های معادله $\boxed{a-\sqrt{b}}$ باشد، ریشه دیگر $\boxed{a+\sqrt{b}}$ است و بالعکس.

---

- تشکیل معادله درجه دوم جدید: هرگاه یک معادله درجه ۲ داده شود و معادله درجه ۲ دیگری خواسته شود که ریشه‌های جدید بر حسب ریشه‌های معادله قدیم داده شده باشند: ریشه‌های جدید را y و ریشه‌های قدیم را x می‌نامیم و y را برحسب x می‌نویسیم سپس x را برحسب y مرتب کرده و در معادله قدیم برمی‌گردانیم.

مثال: (معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2-3x-2=0$ باشد.

جدید $=y$

قدیم $=x$

$$y=x^2 \longrightarrow x=\sqrt{y} \longrightarrow (\sqrt{y})^2-3\sqrt{y}-2=0 \longrightarrow y-3\sqrt{y}-2=0$$
$$\longrightarrow y-2=3\sqrt{y}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2-4y+4=9y$$
$$\longrightarrow y^2-13y+4=0$$

---

- تابع قدر مطلق:

* این را به خاطر داشته باشید که کار اصلی قدر مطلق چیست؟ قدر مطلق درون خود را بررسی می‌کند. اگر مثبت باشد به آن دست نمی‌زند و اگر منفی باشد آن را در یک منفی ضرب می‌کند. به طور کلی در برخورد با قدر مطلق باید داخل آن را تعیین علامت کنیم تا قدر مطلق برداشته شود. برای این کار ریشه داخل آن را بدست می‌آوریم.

خواص قدر مطلق:

۱) $|x|\geq 0$

۲) $|xy|=|x||y|$

۳) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad y\neq 0$

۴) $|-x|=|x|$

* ۵) $\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$

۶) $|x|=a \longrightarrow x=\mp a$

۷) $|x|<a \longrightarrow -a<x<a$

۸) $|x|>a \longrightarrow x>a$ یا $x<-a$

۹) $|f(x)|=|g(x)| \longrightarrow f(x)=\mp g(x)$

* ۱۰) $\underbrace{|x+y|\leq |x|+|y|}$ اصل نامساوی مثلثی

اگر x و y هم علامت باشند: حالت تساوی

« « مختلف‌العلامه « : حالت کوچکتر

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

$$|x-|x||=1 \begin{cases} x-|x|=1 \begin{cases} x\geq 0: & x-x=1 \quad \times \quad \text{غلط} \\ x<0: & x-(-x)=1 \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2} \quad \times \end{cases} \\ x-|x|=-1 \begin{cases} x\geq 0: & x-x=-1 \quad \times \quad \text{غ} \\ x<0: & x-(-x)=-1 \to 2x=-1 \to \boxed{x=-\frac{1}{2}} \quad \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

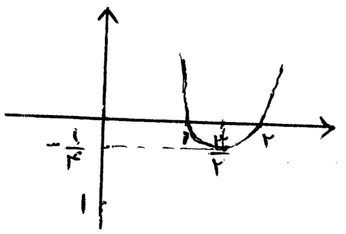
* در سؤالات اگر دو طرف معادله قدرمطلق بود می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم *

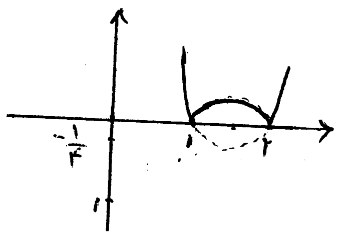
- نمودار $y=|f(x)|$: نمودار را بدون قدرمطلق رسم می‌کنیم پس قسمت‌های پایین محور $x$ ها را نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایینی را حذف می‌کنیم.

مثال:

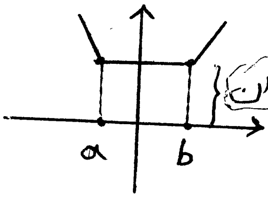
$y=|x^2-3x+2|$ $\quad a>0 \to \min\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

| $x$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 |





- نمودار $y=|x-a|+|x-b|$: ریشه‌های داخل قدرمطلق را در دستگاه مشخص می‌کنیم هرکدام را به اندازه اختلاف دو ریشه بالا می‌بریم (گلدانی)

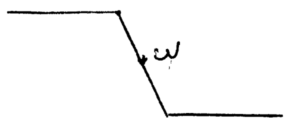


اختلاف بین ریشه‌ها = کف گلدان

برد $\Leftarrow$ $y \geq$ کف گلدان

محور تقارن $\Leftarrow$ $x=\frac{\text{جمع ریشه‌ها}}{2}$

- نمودار $y=|x-a|-|x-b|$: ریشه‌های داخل قدرمطلق را بدست آورده، هرکدام را در محل تابع برمی‌گردانیم تا $y$ بدست آید و به این ترتیب دو نقطه ایجاد می‌شود که شکل از روی آنها رسم می‌شود.



مرکز تقارن $=\omega=\left(\frac{\text{جمع ریشه‌ها}}{2}, 0\right)$

برد = اختلاف ریشه‌ها $\geq y \geq$ قرینه اختلاف ریشه‌ها

مثال: برد و مرکز تقارن تابع $y=\underbrace{|x-4|}_{+4}-\underbrace{|x+2|}_{-2}+2$ را تعیین کنید.

$\omega=(1,0)$

تنها $y$ را تغییر می‌دهد نه $x$

$\omega=(1,2)$

$-6\leq y\leq 6$

$\Downarrow$

$-4\leq y\leq 8$

- تابع جزء صحیح:

$x\in R \to x=n+p \quad n\in Z \quad , \quad 0\leq p<1 \to [x]=n$

## قوانین جزء صحیح

1) $0 \leq x-[x] < 1 \longrightarrow [x-[x]] = 0$

2) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $[x \mp k] = [x] \mp k \qquad k \in \mathbb{Z}$

4) $[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] & \text{جمع اعشارها به ۱ نمی‌رسد} \\ [x]+[y]+1 & \text{جمع اعشارها به ۱ می‌رسد} \end{cases}$

$2.3 \quad 3.1 \quad 2.7 \quad 3.9$

5) $[x+y] \geq [x]+[y]$ (برعکس قدر مطلق)

6) $[x] = a \longrightarrow a \leq x < a+1$

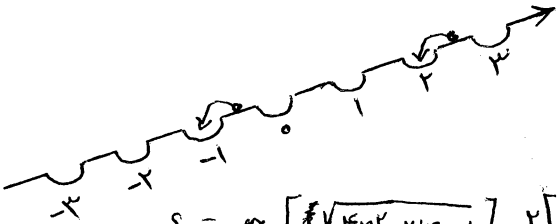
7) $[x] < a \longrightarrow x < a$

8) $[x] \leq a \longrightarrow x < a+1$

9) $[x] > a \longrightarrow x \geq a+1$

10) $[x] \geq a \longrightarrow x \geq a$

* برای اینکه جزء صحیح را برای همیشه یاد بگیرید
* محور مقابل را به خاطر بسپارید




T) **تجربی ۹۱** برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}] - 2[\sqrt{n^2-2n}]$ چیست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ ✓ د) ۴

عدد ۳ را جایگزین می‌کنیم ($n > 2$):

$[\sqrt{4(3)^2-3(3)+1}] - 2[\sqrt{3^2-2(3)}] = [\underbrace{\sqrt{28}}_{\text{بین ۵ و ۶}}] - 2[\underbrace{\sqrt{3}}_{\text{بین ۱ و ۲}}] = 5 - (2 \times 1) = \boxed{3}$

- برای رسم توابعی که درون آن‌ها جزء صحیح به‌کار رفته باید فاصلهٔ داده‌شده را یکی یکی جدا کرد و مقدار جزء صحیح را بدست آورد. سپس نمودار بدست آمده را در فاصلهٔ مشخص رسم کرد.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{[x]+1}$ در فاصلهٔ $[-2, 1]$ از چه اجزایی تشکیل شده است؟

$-2 \leq x < -1 \longrightarrow [x] = -2 \longrightarrow y = \frac{2x-1}{-2+1} = -2x+1$

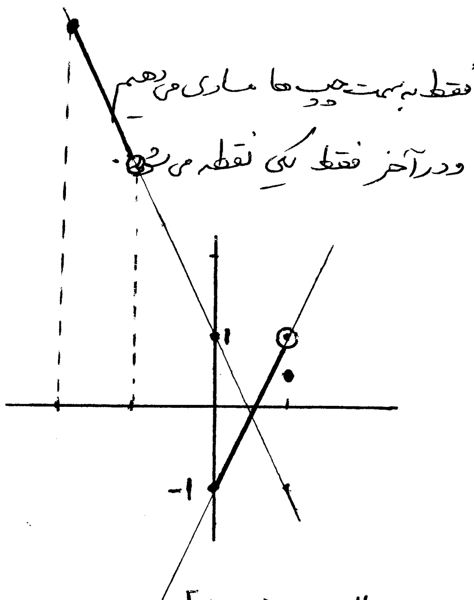
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | -1 |

$-1 \leq x < 0 \longrightarrow [x] = -1 \longrightarrow y = \frac{2x-1}{-1+1}$ ✗ غ

$0 \leq x < 1 \longrightarrow [x] = 0 \longrightarrow y = \frac{2x-1}{0+1} = 2x-1$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | -1 | 1 |

$x = 1 \xrightarrow{\text{نقطه}} y = \frac{1}{2} \quad (1, \frac{1}{2})$




قسمت‌های آبی نمودار اصلی است

* در حالت $[kx]$ باید فاصله را متناسب با معکوس $k$ جدا کرد.

مثال: $y = 2[\frac{x}{2}]+1$ را در فاصلهٔ $x \in [-2, 6]$ ؟

$k = \frac{1}{2} \longrightarrow$ ۲ تا ۲ تا جدا می‌کنیم $\longrightarrow -2 \leq x < 0$

$0 \leq x < 2$

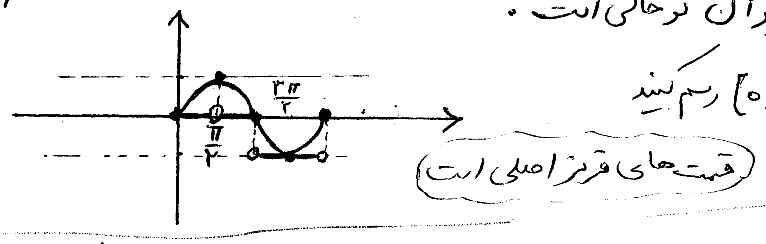
$2 \leq x < 4$

$4 \leq x < 6$

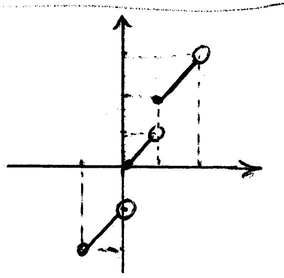
$x = 6$

- نمودار $y=[F(x)]$ : نمودار بدون جزء صحیح را رسم می‌کنیم، پس خطوط افقی گذرنده از اعداد صحیح که نمودار را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم، پس قسمت‌هایی از نمودار را که بین دو خط موازی قرار دارد را روی خط پایین تصویر می‌کنیم.
محل برخورد خطوط افقی با نمودار اولیه توپر و نظیر آن توخالی است.

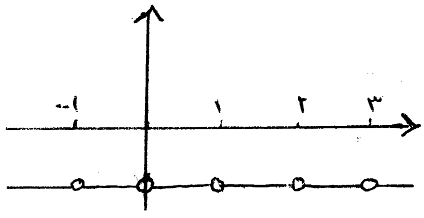
مثال: نمودار $y=[\sin x]$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید



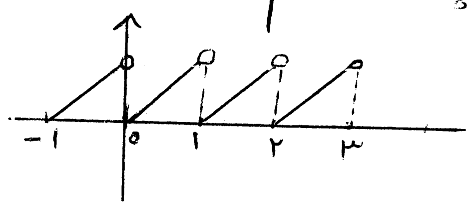

چند نمودار مهم *:



$y=x+[x]$

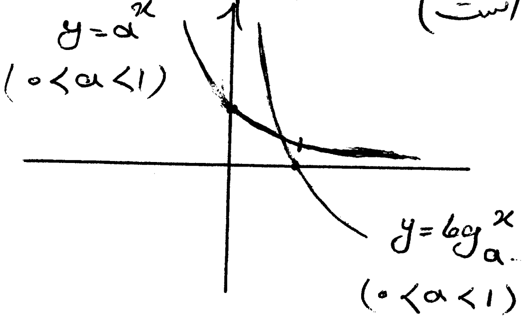


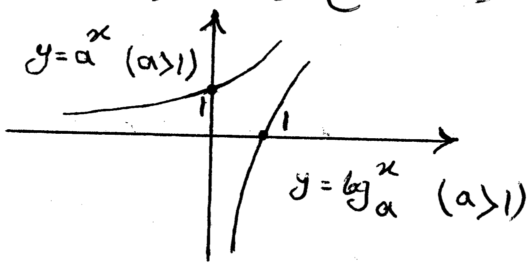

$y=[x]+[-x]$




$y=x-[x]$

قوانین توابع نمایی و لگاریتمی: (تابع لگاریتم معکوس نمایی است)




اگر پایه لگاریتم عدد نپر ($e \simeq 2.718$) باشد آن را لگاریتم نپرین می‌گوییم $[\log_e^a = \ln a]$

قوانین لگاریتم:

۱) $\log_a^1 = 0$

۲) $\log_a^a = 1$

۳) $\log_c^{(a\times b)} = \log_c^a + \log_c^b$ $\quad \log_c^{(a+b)}$ قانونی ندارد

۴) $\log_c^{(\frac{a}{b})} = \log_c^a - \log_c^b$ $\quad \log_c^{(a-b)}$ قانونی ندارد

۵) $\log_b^{a^n} = n\log_b^a \longrightarrow \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$

۶) $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ (برای تغییر مبنا) $\longrightarrow \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

۷) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

۸) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a} \longrightarrow a^{\log_a^b} = b$

۹) $\log_c^a = \log_c^b \Longleftrightarrow a=b$

۱۰) $a<b \rightarrow \begin{cases} \log_c^a < \log_c^b & c>1 \\ \log_c^a > \log_c^b & 0<c<1 \end{cases}$

*۱۱) $\log_c^a < \log_c^b \rightarrow \begin{cases} a>b & 0<c<1 \\ a<b & c>1 \end{cases}$

یادآوری

۱۲) $\log_B^A \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} A>0 \\ B>0 \\ B\neq 1 \end{cases}$ هر سه باید همزمان برقرار باشد

★ T) تجربی خارج از کشور ۸۸ :

اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2-10x+0/1=0$ باشند، حاصل $\underbrace{\log a+\log b}_{\log(a\times b)}-\log(a+b)$ چیست؟

✓ الف) ۲-　　ب) ۱-　　ج) صفر　　د) ۱

$$\log^{(a.b)}-\log(a+b)=\log\frac{a.b}{a+b}=\log\frac{P}{S}=\log\frac{0/1}{10}=\log\frac{1}{100}=-2$$

- برای حل معادلات نمایی باید پایه‌ها را یکسان کرد.

مثال: معادله $4^x+7\times 2^x+6=0$　　$4^x \leftarrow 2^{2x}$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2+7t+6=0 \begin{cases} t=-1 \rightarrow 2^x=-1 & \times \text{غ} \\ t=-6 \rightarrow 2^x=-6 & \times \text{غ} \end{cases} \rightarrow$$ معادله جواب ندارد

★ بعد از حل معادله باید جواب‌های بدست آمده را در معادلهٔ اولیه برگرداند و شرایط دامنه را بررسی کرد.

★ T) تجربی ۸۹ : اگر $\log_3^x+\log_3^y=2$ و $x^2+y^2=46 \longrightarrow \log_4^{(x+y)}=?$

✓ الف) ۱٫۵　　ب) ۲٫۵　　ج) ۲　　د) ۳

حل: $\log_3^{xy}=2 \rightarrow 3^2=9=xy$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=46+2\times 9=64$$

$$\rightarrow x+y=\begin{matrix}+8 & \checkmark \\ -8 & \times\end{matrix} \rightarrow \log_4^{x+y}=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

---

برای حل نامعادلات لگاریتمی: مانند معادله آن را ساده می‌کنیم تا به یکی از این حالات برسیم:

$$\log_c^a<\log_c^b \Rightarrow \begin{cases} a<b & c>1 \\ a>b & 0<c<1 \end{cases}$$

$$\log_c^a<b \Rightarrow \begin{cases} a<c^b & c>1 \\ a>c^b & 0<c<1 \end{cases}$$

★ بعد از حل نامعادله باید دامنهٔ عبارات لگاریتمی را بدست آورید و با جواب نامعادله اشتراک گرفت.

مثال: اگر $2^{-x}<0/000001$ و $\log 2=0/301$ ، کوچکترین عدد x را با دو رقم اعشار حساب کنید.

$$2^{-x}<10^{-6} \xrightarrow[\text{ها می‌گیریم log}]{\text{از طرفین}} \log 2^{-x}<\log 10^{-6} \rightarrow -x\log 2<-6\log 10 \Rightarrow x>\frac{6}{0/301}=\frac{6000}{301} \rightarrow x>19/93$$

$$\boxed{\rightarrow 19/94}$$

- تابع رشد و زوال: فرم کلی آن اینگونه است:

$$P(t)=P(t_0)\times e^{kt}$$ زمان

$K>0$ ضریب رشد　　$P(t)=$ مقدار ثانویه

$K<0$ ضریب زوال　　$P(t_0)=$ 〃 اولیه

T) تجربی ۹۲ : در شروع یک نوع کشت $\underset{P(t_0)}{1400}$ باکتری موجود است. تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t)=Ae^{\overset{K}{0/04}t}$ است. پس از چند دقیقه $\underset{P(t)}{7000}$ باکتری موجود است؟

الف) ۲۱　　ب) ۲۸　　ج) ۳۵　　✓ د) ۴۲

$$7000=1400\times e^{0/04t} \rightarrow 5=e^{0/04t} \rightarrow \overset{1/68}{\log}=0/04t$$

$$\rightarrow t=42$$

# ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad 2\times 3$$

$A_{13}=5$ سطر ستون

$A_{21}=1$

ماتریس مربعی: تعداد سطرها و ستون‌ها برابرند

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

ماتریس قطری: عناصر غیر قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس واحد (همانی): عناصر قطر اصلی 1 و بقیه صفر اند.

- تساوی دو ماتریس: هرگاه دو ماتریس هم‌مرتبه بوده و درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند، دو ماتریس مساوی‌اند.
- ضرب عدد در ماتریس: عدد را در تمام درایه‌ها ضرب می‌کنیم.
- جمع و تفریق دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان جمع و تفریق کرد. درایه‌ها نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می‌شوند
- ضرب دو ماتریس: اگر تعداد ستون‌های ماتریس اول با سطرهای ماتریس دوم برابر باشد می‌توانیم دو ماتریس را ضرب کنیم

* ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد $(AB\neq BA)$

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=(AB)_{m\times n}$$

* در هر ماتریس مربعی: $\{A^2=A\times A\ ,\ A^3=A^2\times A=A\times A^2\}$

* برای محاسبه توان‌های بالا باید چند توان اول را محاسبه کنیم تا به یک روند خاص برسیم. (اگر به روندی نرسیدیم به $I$ می‌رسیم)

مثال: هرگاه $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ آنگاه $A^{11}$ را بدست آورید

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2I\rightarrow A^{11}=(A^2)^5\times A=\underbrace{(2I)^5}\times A=32I=\begin{bmatrix}0 & 64\\ 32 & 0\end{bmatrix}$$

* $I$ در ضرب نقشی ندارد *

* برای به توان رساندن ماتریس‌های قطری باید عناصر قطر اصلی را به توان برسانیم.

- دترمینان: فقط برای ماتریس‌ها (مربعی) تعریف می‌شود و حاصل دترمینان همیشه یک عدد است.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow\boxed{|A|=ad-bc}$$

* برای دترمینان ماتریس $2\times 2$ این روابط صادق است:

1) $|A+B|\neq |A|+|B|$

2) $|AB|=|A|\times|B|$

3) $|A^n|=|A\times A\times\cdots\times A|=|A|\times|A|\times\cdots\times|A|=|A|^n$

4) $|KA|=K^2\times|A|$

ماتریس معکوس (وارون):

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

* چند رابطه:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ | 2) $(A^{-1})^{-1}=A$ | 2) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}\quad K\neq 0$ |
| 4) $\lvert A^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert A\rvert}$ | 5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ | |

ت) تجربی خارج از کشور ۹۱:

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ماتریس $B$ از معادله $A\times B=2I$ کدام است؟

✓ الف) $\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}1 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

$$A^{-1}\times AB=A^{-1}\times 2I\rightarrow \underbrace{(A^{-1}\times A)}_{I}B=2A^{-1}$$

$$\Rightarrow B=2A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\rightarrow 2A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

– حل دستگاه به کمک ماتریس وارون: هر دستگاه دو معادله دو مجهولی را می‌توان به یک معادله ماتریسی تبدیل کرد.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

$$AX=B \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{A^{-1}\text{ از سمت چپ: }} A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

۱) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
دستگاه سازگار است
(۱ جواب دارد)

۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
دستگاه ناسازگار است
(جواب ندارد)

۳) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
دستگاه مبهم
(بی‌شمار جواب)

مثال: به ازای کدام مقدار $m$ ماتریس زیر وارون پذیر نیست؟

$$A=\begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \dots \Rightarrow |A|=m^2+m-2=0 \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

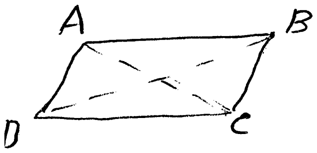
اگر صفر شود (مخرج) ← وارون پذیر نیست

دستگاه مختصات:

| | |
|---|---|
| دوم: $x<0$, $y>0$ | اول: $x>0$, $y>0$ |
| سوم: $x<0$, $y<0$ | چهارم: $x>0$, $y<0$ |

– فاصله بین دو نقطه: $A=(x_A, y_A) \quad B=(x_B, y_B) \Rightarrow AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

– نقطه وسط: $M=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$



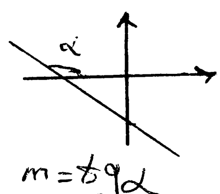
* در متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی و مربع) روابط زیر بین رئوس برقرار است.

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

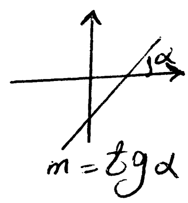
معادله خط: هر خط با محور $x$ ها در جهت مثبت زاویه‌ای می‌سازد که $tg$ آن زاویه، شیب خط نامیده می‌شود.

$y=mx+n \rightarrow m=$ شیب

$ax+by+c=0 \rightarrow$ شیب $= -\frac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}} = -\frac{a}{b}$



$m=tg\alpha$

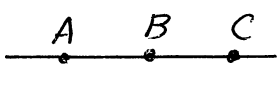


$m=tg\alpha$

* هرگاه دو نقطه از خطی داده شود:

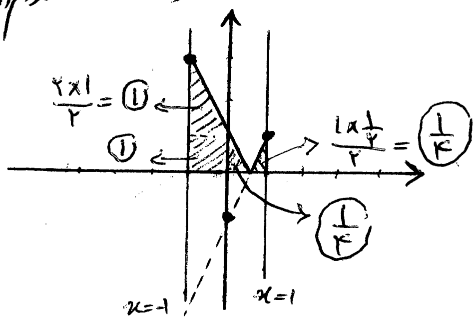
$$A=(x_A, y_A), \quad B=(x_B, y_B) \Rightarrow \boxed{m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

* شرط اینکه سه نقطه در یک راستا باشند:



$$\boxed{m_{AB}=m_{BC}}$$

T) تجربی ۹۰ : مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $f(x)=|2x-1|$ ، محور $x$ ها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟



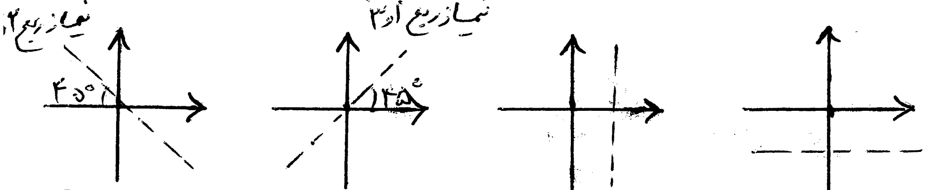

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $-1$ | $1$ |

$$\Rightarrow 1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

الف) $\frac{3}{2}$
ب) $2$
ج) $3$
د) $\frac{5}{2}$ ✓

---

چند حالت خاص:

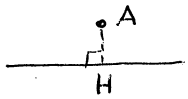



شیب $=-1$ ، شیب $=1$ ، شیب $=\infty$ ، شیب $=0$

---

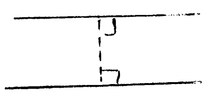
* هرگاه دو خط موازی باشند شیب آنها با هم برابر است.
* هرگاه دو خط عمود باشند شیب آنها عکس و قرینهٔ هم است.

- فاصلهٔ نقطه از خط $ax+by+c=0$




$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- فاصلهٔ دو خط موازی




$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

T) تجربی ۹۲ : دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $2x-2y=3$ و $y=x+1$ هستند. مساحت مربع کدام است؟

الف) $\frac{9}{8}$
ب) $\frac{9}{4}$
ج) $\frac{25}{8}$ ✓
د) $\frac{25}{4}$

فاصلهٔ دو ضلع مربع = اندازهٔ طول ضلع = $a$

$2x-2y-3=0$

$x-y+1=0 \xrightarrow{\times 2} 2x-2y+2=0$

فاصلهٔ دو خط $=\frac{|-3-2|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\boxed{\frac{5}{\sqrt{8}}}$

$\boxed{S=\left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2=\frac{25}{8}}$

---

- دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$$

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ دو خط در یک نقطه تلاقی دارند

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دو خط منطبق

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دو خط موازیند (تلاقی ندارند)

---

- دستگاه‌های خاص:

مثال) از دستگاه $\underbrace{\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+2}$ و $\underbrace{2x+y-2z=16}$ مقادیر $x$ و $y$ و $z$ را تعیین کنید.

$$=t\rightarrow\begin{cases}x=2t+1\\ y=3t\\ z=t-2\end{cases}$$

$4t+2+3t-2t+4=16$

$\rightarrow 5t=10\rightarrow t=2\rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=6\\ z=0\end{cases}$

* اگر تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر بود کافیست یکی از متغیرها را به دلخواه حذف کنیم. اگر به یک رابطهٔ غلط رسیدیم دستگاه فاقد جواب و اگر به یک معادله رسیدیم بی‌شمار جواب دارد.

مثال:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-4 & \times -1 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases} \to \begin{cases} -x-2y+3z=4 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases}$$

$x-y=8$ بی‌شمار جواب دارد

---

## مثلثات:

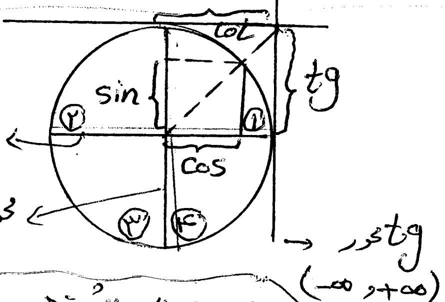
- ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری: $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$

- طول کمان: $L=r\theta$ ( $\theta$ برحسب رادیان)

دایرهٔ مثلثاتی:

شعاع 1 است.

جهت چرخش خلاف ساعت.




| | اول | دوم | سوم | چهارم |
|---|---|---|---|---|
| sin | + | + | − | |
| cos | + | − | − | |
| tg | + | − | + | |
| cotg | + | − | + | |

هستک ← ربع اول همه مثبت، ربع دوم سینوس مثبت، ربع سوم تانژانت مثبت، ربع چهارم کسینوس مثبت

مثال: اگر $\sin\alpha \cdot tg\alpha < 0$ و $\cos\alpha \cdot cotg\alpha > 0$ آنگاه انتهای کمان $\alpha$ در کدام ناحیه است

دوم و سوم

اول و دوم

دوم

---

- نسبت‌های مثلثاتی مهم:

| | 30 | 45 | 60 |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| cotg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

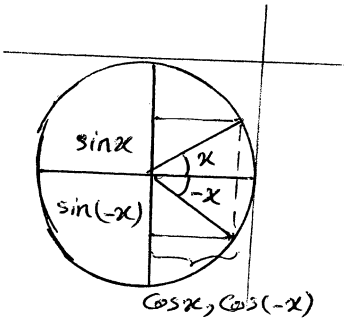
* هرگاه در کمان یک نسبت مثلثاتی مضارب $\pi$ اضافه یا کم شود؛ نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند. ولی اگر مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ اضافه یا کم شود نسبت تغییر می‌کند. که در هر دو حالت برای تعیین علامت از دایرهٔ مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$tg\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=-cotg\alpha$$

$$\sin(7\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

کمانهای قرینه:




$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$tg(-x) = -tg\,x$

$cotg(-x) = -cotg\,x$

T تجربی خارج از کشور ۸۸ :

اگر $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}$ آنگاه $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟

الف) $-\frac{1}{3}$

ب) $-\frac{1}{5}$ ✓

ج) $\frac{1}{5}$

د) $\frac{1}{3}$

حل: $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) = cotg\,\alpha \xrightarrow{\text{ربع اول}} +\frac{2}{3} \longrightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{2}$

$$tg(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}\times tg\alpha} = \frac{1-\frac{3}{2}}{1+1\times\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

---

خواص زوایای مکمل و متمم:

$$\alpha+\beta=90 \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta \\ tg\alpha = cotg\beta \\ cotg\alpha = tg\beta \end{cases}$$

$$\alpha+\beta=180 \begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = -\cos\beta \\ tg\alpha = -tg\beta \\ cotg\alpha = -cotg\beta \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{11\pi}{14} + \cos\frac{13\pi}{14}$$

$$0+0+0+\cos\frac{7\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

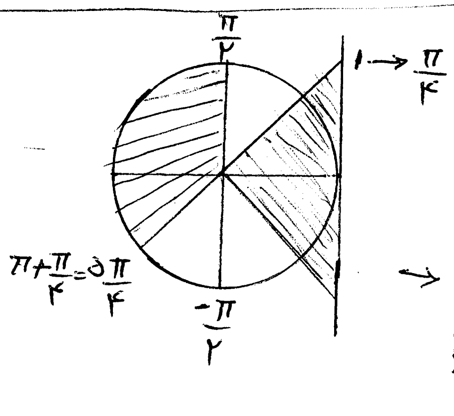
حاصل جمع صفر = کسینوس قرینه = مکمل

---

نامعادلات مثلثاتی: باید از دایره مثلثاتی استفاده کرد.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1-tgx}$ را بدست آورید

$1 - tgx \geq 0 \rightarrow tgx \leq 1$




$\rightarrow \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{4}$

یا $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$

# فرمول های مهم مثلثاتی

1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

2) $1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $1+cotg^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

* 4) $\sin(\alpha\mp\beta)=\sin\alpha\cos\beta\mp\cos\alpha\sin\beta$

* 5) $\cos(\alpha\mp\beta)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$

* 6) $tg(\alpha\mp\beta)=\dfrac{tg\alpha\mp tg\beta}{1\pm tg\alpha\, tg\beta}$

7) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

8) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\rightarrow\begin{cases}1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha\\ 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha\end{cases}$ فرمول های طلایی

9) $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

10) $(\sin\alpha\mp\cos\alpha)^2=1\mp\sin 2\alpha$

11) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ یا $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

12) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ یا $-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$

13) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

مثال: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید

$tg17+tg28+tg17\times tg28=?$

$\underbrace{17+28=45}\rightarrow tg(17+28)=tg45\rightarrow\dfrac{tg17+tg28}{1-tg17\times tg28}$

$\rightarrow tg17+tg28=1-tg17\times tg28$

$\rightarrow tg17+tg28+tg17\times tg28=1$

$\underbrace{tgx=-\frac{1}{2}}_{cotgx=-2}$ و $\underbrace{\cos x<0}$ $\Rightarrow\sin x=?$

ربع دوم $\rightarrow\sin x>0$

$1+cotg^2x=\dfrac{1}{\sin^2x}\rightarrow 1+4=5=\dfrac{1}{\sin^2 x}\rightarrow\sin^2x=\dfrac{1}{5}\rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5} & ✓\\ \sin x=-\frac{\sqrt{5}}{5} & ✗\end{cases}$

---

* هرگاه یک تساوی مثلثاتی برقرار باشد و پارامتری از داخل آن خواسته شود ($M$ ، $A$ و ...) کافیست به متغیر آن عدد بدهیم.

مثال؟

$\dfrac{1}{\cos^4x}+\dfrac{A}{\cos^2x}=tg^4x-1\Rightarrow A=?$

حل: $\xrightarrow{\text{فرض}} x=60^\circ\rightarrow\dfrac{1}{\frac{1}{16}}+\dfrac{A}{\frac{1}{4}}=9-1$

$\rightarrow 16+4A=18\rightarrow\boxed{A=-2}$

* اگر در یک عبارت مثلثاتی سینوس و کسینوس وجود داشت و ضریب یکی از آنها $\sqrt{3}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ بود می‌توان به جای $\sqrt{3}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ تانژانت آن را قرار داد و مخرج مشترک گرفت.

مثال:

$\sin50+\sqrt{3}\cos50=?$

حل: $\sin50+tg60\times\cos50=\sin50+\dfrac{\sin60}{\cos60}\times\cos50$

$=\dfrac{\sin50\cos60+\sin60\cos50}{\cos60}=\dfrac{\sin(60+50)}{\frac{1}{2}}=\boxed{2\sin110}$

★ اگر در سوالی حاصل یک عبارت مثلثاتی خواسته شود و عبارت دارای متغیر باشد می توان به جای متغیر در صورت سوال و گزینه ها عددگذاری کرد.

مثال:

$$\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1} - \frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x+\cos x} + \sqrt{2}\cos x = ?$$

✓ الف) $-1$  ب) صفر

ج) $1$  د) $2\sqrt{2}\cos x$

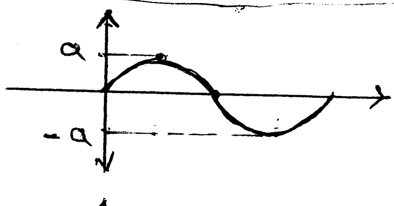
حل: $\xrightarrow{\text{فرض}} x=0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\times 0-1} - \frac{\sqrt{2}\times 1}{0+1} + \sqrt{2}\times 1$

$$= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{-1}$$

---

توابع مثلثاتی:

$y = a\sin bx$

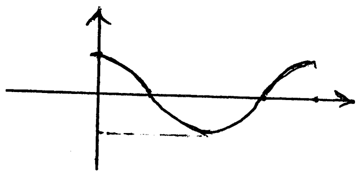



$a>0$ 

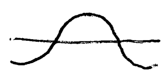
$a<0$ 

$T = \frac{2\pi}{|b|}$ دوره تناوب

$y = a\cos bx$



$a>0$ 

$a<0$ 

$T = \frac{2\pi}{|b|}$

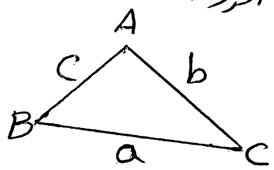
★ دوره تناوب توابع $\begin{cases} y = \cot g\, ax \\ y = tg\, ax \end{cases}$ برابر است با $T = \frac{\pi}{|a|}$ ★

---

قضیه کسینوس ها: زمانی کاربرد دارد که از یک مثلث ۳ ضلع داده شود و ۱ زاویه خواسته شود یا دو ضلع و زاویه بین داده شود و ضلع سوم خواسته شود.

★ مساحت مثلث را می توان از روابط زیر بدست آورد.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$




$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$
$$S = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

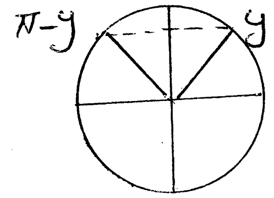
---

قضیه سینوس ها: هرگاه از یک مثلث، دو زاویه و یک ضلع داده شود و ضلع دیگر خواسته شود از این قضیه استفاده می کنیم.

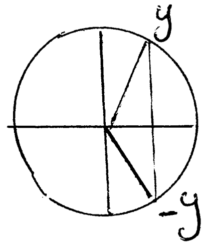
$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

- معادلهٔ مثلثاتی : به کمک اتحادهای مثلثاتی معادله را ساده می‌کنیم تا به یکی از حالات زیر برسیم:

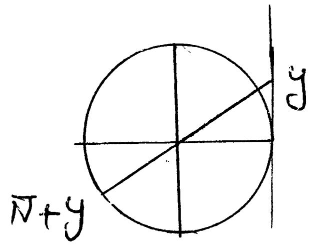
1) $\sin x = \sin y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$




2) $\cos x = \cos y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$




3) $tg\, x = tg\, y \rightarrow x = k\pi + y$




* هرگاه بخواهیم نسبت را عوض کنیم کافیست کمان آن را از $\frac{1}{2}$ کم کنیم ($\sin \leftrightarrow \cos$ یا $tg \leftrightarrow cotg$)

مثال: $\sin 3x + \cos 2x = 0$

$\sin 3x = -\cos 2x \rightarrow \sin 3x = \cos(\pi - 2x)$

$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(\pi - 2x)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = 2k\pi + \pi - 2x \rightarrow \boxed{x = -2k\pi - \frac{\pi}{2}} \\ \frac{\pi}{2} - 3x = 2k\pi - \pi + 2x \rightarrow \boxed{x = \frac{-2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}} \end{cases}$

ت) تجربی ۹۲ : جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\underbrace{\sin^4 x - \cos^4 x}_{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)} = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ کدام است

$(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$

1) $2k\pi \mp \frac{\pi}{6}$

2) $2k\pi \mp \frac{\pi}{3}$

3) $k\pi \mp \frac{\pi}{6}$

4) $k\pi \mp \frac{\pi}{3}$ ✓

$\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{حالت ۲}} 2x = 2k\pi \mp 2\frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$

# حد:

در محاسبهٔ حد اولین اقدام جای‌گذاری عدد مورد نظر است. ولی در بسیاری موارد حد تابع با مقدار آن مرتبط نیست و رفع ابهام لازم است. اگر حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه برابر باشد آن تابع در آن نقطه حد دارد

- در حالت های زیر رفع ابهام تعریف می‌شود:

$$\underset{\text{یک حدی}}{1}^{\infty} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty\times \underset{\text{صفر حدی}}{0} \qquad \infty-\infty \qquad \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$$

---

حالات زیر را بخاطر بسپارید.

$$\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر عددی}} = \text{تعریف نشده} \qquad \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \qquad \frac{\text{صفر عددی}}{\text{صفر عددی}} = 0$$

$$\text{عدد} \times \infty = \infty \qquad \text{صفر عددی} \times \infty = 0 \qquad \frac{\text{عدد}}{\text{صفر عددی}} = \text{تعریف نشده}$$

$$\infty + \infty = \infty \qquad \infty \times \infty = \infty \qquad \frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

---

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ :

۱) باید عامل صفر کننده از صورت و مخرج را پیدا کرده و آن را حذف کنیم (توسط اتحاد، تجزیه، گویا کردن و ...)

۲) هم ارزی

۳) قاعدهٔ هوپیتال: مشتق صورت و مخرج را جداگانه باید بگیریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{0}{0}} \xrightarrow{H} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فقط در این حالت هوپیتال استفاده می‌شود

* در مورد توابع دارای قدر مطلق و جزء صحیح ابتدا باید تکلیف آن ها را مشخص کرد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2|x|-[x]}{|x|+[x]} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-0}{x+0} = \dfrac{2x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x-(-1)}{-x-1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x+1}{-x-1} = \dfrac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

حد ندارد

* توابع $y=[x]$ و $y=[-x]$ در نقاط صحیح، حد ندارند و در نقاط غیر صحیح حد دارند.
* تابع $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح را غیر صحیح کند حد دارد ولی در نقاطی که داخل جزء صحیح را صحیح کند باید ت
* در توابع دارای قدر مطلق اگر $x$ به سمت ریشهٔ داخل قدر مطلق برود، باید سمت چپ و راست آن را تعیین کرد (مثال با
* در توابع چند ضابطه‌ای که $x$ به سمت مرز برود هم باید سمت چپ و راست را جدا کرد.

مثال:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1} & x<-1\\[2mm] [x]+2 & x\geq -1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}F(x) = ? \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+}([x]+2) = -1+2 = 1\\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1} \xrightarrow{H} \dfrac{2x-5}{2x} = \dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2}\end{cases}$$

* در توابع رادیکالی که $x$ به سمت ریشهٔ زیر رادیکال می رود قاعدهٔ هوپیتال استفاده نمی شود و باید از گویا کردن استفاده کرد.
(اگر فرجه زوج باشد سمت چپ و راست را باید جدا کرد)

مثال:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \begin{cases}\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x-1})}{x-1}\\ =\lim\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x-1})}{\cancel{x-1}}=2\times0=0\\ \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\times \quad \text{خارج از دامنه}\end{cases}$$

حد راست و چپ مساوی نیست $\Rightarrow$ و حد ندارد

* در توابعی که به صورت چند جمله‌ای هستند و همهٔ عبارت برحسب متغیرات و متغیر (هم شکل‌ها) به سمت صفر میل می‌کند کل عبارت هم ارز جمله‌ٔ دارای کوچکترین توان است.

مثال:

$$\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^3+(x-1)^5}{(x-1)^4+3(x-1)^3}=\lim\frac{2(x-1)^3}{3(x-1)^3}=\frac{2}{3}$$

---

حدهای مثلثاتی: چند هم ارزی:

$\sin u\sim u$ $\quad tgu\sim u$ $\quad \cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$

$\cos^n u\sim 1-\frac{nu^2}{2}$ $\quad \sqrt[m]{\cos u}\sim 1-\frac{u^2}{2m}$

(در هم ارزی‌ها $x$ به سمت هر عددی برود $u$ باید به سمت صفر برود)

T) تجربی ۹۱: حاصل عبارت $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

الف) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ ج) $1$

ب) $\frac{1}{2}$ $\quad$ د) ✓ $\frac{3}{2}$

$$\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{4x^2}{2}\right)}{x^2}=\frac{\frac{3x^2}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}$$

* به یاد داشته باشید که برای استفاده از قانون هوپیتال حتماً باید از صورت و مخرج همزمان مشتق گرفت ولی در هم ارزی‌ها می‌توان برصورت یا مخرج یا هردو از آن استفاده کرد.

* هرگاه از هم ارزی استفاده کردیم و متغیرها در اثر تفریق ساده شدند و حاصل صفر شد حق نداریم از آن هم ارزی استفاده کنیم.

مثال: حد زیر را حساب کنید.

در صورت نمی توان از هم ارزی استفاده کرد

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^2 tgx}=\lim\frac{tgx-\sin x}{x^3}\xrightarrow{H}\lim\frac{1+tg^2x-\cos x}{3x^2}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim\frac{1+x^2-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{3x^2}$$

ولی در مخرج می توان

$$=\frac{\frac{3x^2}{2}}{3x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

- قضیهٔ فشردگی (ساندویچ): هرگاه برای $x$ داشته باشیم: $f(x) \leqslant L(x) \leqslant g(x)$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \xrightarrow{\text{آنگاه داریم}} \lim_{x\to a} L(x) = b$$

T) تجربی ۸۹: در بازه‌ی $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ همواره $\frac{\sin\pi x}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ و $\lim_{x\to 1}\left|\frac{\sin\pi x}{1-x} - g(x)\right| = 0$، حاصل $\lim_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

الف) $-\pi$ ج) $\frac{\pi}{2}$

ب) $0$ د) $\pi$ ✓

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x} \xrightarrow{H} \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-1} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

---

* هرگاه تابع $g(x)$ در $x=a$ کران‌دار باشد (محصور بین دو عدد مشخص) و حد تابع $f(x)$ در $x=a$ صفر باشد

$$\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{\text{صفر}} \times \underbrace{g(x)}_{\text{کران دار}} = 0 \times \text{عدد} = 0$$

مثال: $\lim_{x\to -1}(x^2-1)\times\cos\frac{1}{x+1} = 0\times \underbrace{\cos\infty}_{\substack{\text{بین } -1 \text{ و } +1 \\ \text{کران دار}}} = 0$

---

* طبق نکتهٔ قبل اگر تابعی حد نداشت برای آن که حد دار شود کافیست در یک عامل صفرکننده ضرب شود.

مثال: تابع $f(x) = \underbrace{(4x^2-3x-1)}_{\text{عامل صفرکننده باید باشد}}\underbrace{[x]}_{\text{در اعداد صحیح حد ندارد}}$ در چند نقطهٔ صحیح حد دارد؟

$$4x^2-3x-1=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 & \checkmark \\ x=-\frac{1}{4} & \times \text{ صحیح نیست} \end{cases}$$

- حد بی‌نهایت:

اگر حاصل حدی $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$ شد باید سمت چپ و راست آن را جداگانه حساب کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)}{(x+1)^2} \begin{cases} \lim_{x\to -1^+}\frac{(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(0^+)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^-}\frac{(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(0^-)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

- حد در بی‌نهایت: وقتی متغیر یک عبارت به سمت بی‌نهایت میل کند، آن عبارت با جملهٔ دارای بزرگترین توان هم ارز است.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^5-7x^3-2}{x^2+3x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^5}{x^2} = -4(x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{x^2-x+1}}^{|x|}-x+2}{\underbrace{\sqrt{9x^2-x+11}}_{|3x|}+3} = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x}{3x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x-x}{-3x} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

* اگر $x\to\infty$ و داخل جزء صحیح عدد صحیح باشد مخرج را در صورت باید بسازیم!! *

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+1}{x-3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2(x-3)+7}{x-3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[2+\frac{7}{x-3}\right] = [2^-] = 1$$

– هم ارزی رادیکالی :

* هرگاه $x \to \infty$ و بزرگترین توان زیر رادیکال با درجه یکسان باشد :

$$\boxed{\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots} \sim \sqrt[n]{a}\,\left|x+\frac{b}{na}\right|}$$

مثال :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}+x+3\right)=\sqrt{1}\times\left|x+\frac{4}{2\times1}\right|=-x-2+x+3=1$$

(هم ارزی رادیکالی برای رفع ابهام $\infty-\infty$ است یعنی غیر کسری ها)

– رفع ابهام $0\times\infty$ : باید عامل $\infty$ شونده را معکوس کرد و در مخرج عامل صفر قرار دهیم .

مثال :

$$\lim_{x\to1}(x^2-1)\times tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)}{cotg\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to1}\frac{2x}{-\frac{\pi}{2}\left(1+cotg^2\frac{\pi x}{2}\right)}=\frac{2}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi}$$

– رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ : اگر نتوان هم ارزی بزرگترین جمله را استفاده کرد عوامل $\infty$ شونده در صورت و مخرج را معکوس کردن تا به $\frac{0}{0}$ برسیم : $\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg2x}{cotg4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg4x}{cotg2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4(1+tg^24x)}{-2(1+cotg^22x)}=\frac{4}{-2}=-2$$

– رفع ابهام $\infty-\infty$ : اگر نتوان از هم ارزی رادیکالی استفاده کرد باید مخرج مشترک گرفت تا به $\frac{0}{0}$ تبدیل شود .

مثال :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-x-1}{x(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{1+0}=-1$$

– رفع ابهام $1^\infty$ :

$$\lim f(x)^{g(x)}=1^\infty\sim e^{\lim_{x\to a}g(x)\times(f(x)-1)}$$

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{4x}=1^\infty=e^{\lim_{x\to\infty}4x\times\left(\frac{x+2}{x-3}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}4x\times\frac{x+2-x+3}{x-3}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{20x}{x-3}}=e^{20}$$

دنباله: جمله عمومی را $u_n$ می‌نامیم.

$u_n = \frac{2n+1}{n+5} \rightarrow u_7 = ? = \frac{15}{12}$

$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & n > 10 \\ \frac{1}{n} & n \leq 10 \end{cases} \quad a_{11} = ? = \frac{12}{13}$

- همگرایی: هرگاه حد دنباله وقتی $n \to +\infty$ برابر یک عدد شود دنباله را همگرا به آن عدد می‌نامیم.
ولی اگر حاصل بی‌نهایت یا نامعلوم شد، دنباله واگرا است

$\{\sqrt{n}\} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ واگرا

$\{\sin n\} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin n = \sin\infty \xrightarrow{\text{نامعلوم}}$ واگرا

$\left\{\frac{n-[n]}{2n+3}\right\} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n-[n]}{2n+3} = \frac{0^+}{2n} = 0$ همگرا به صفر

سرعت رشد دنباله‌ها: $n^n > n! > (\text{عدد بزرگتر از } 1)^n > n^{\text{عدد}} > \log n$

$\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\} \xrightarrow{\lim} \frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ واگرا

$\left\{\frac{n^3+2n-4}{2^n}\right\} \xrightarrow{\lim} \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ همگرا

- یکنوایی: اگر برای هر عدد طبیعی $n$ داشته باشیم: $u_n \leq u_{n+1}$ دنباله صعودی و اگر $u_n \geq u_{n+1}$ دنباله نزولی است در غیر اینصورت دنباله غیر یکنوا است. (برای بررسی یکنوایی از عددگذاری در رسم شکل استفاده می‌شود)

$\left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0$ نزولی

$\{\sin n\} \rightarrow$ غیر یکنوا

* در دنباله‌های کسری اگر ریشه مخرج $\leq 1$ باشد دنباله غیر یکنوا است در غیر اینصورت باید عددگذاری شود.

$\left\{\frac{2n+1}{\underbrace{n+3}_{\text{ریشه } -3}}\right\} \rightarrow \frac{3}{4}, 1, \ldots$ صعودی

- کران داری: اگر جملات یک دنباله بین دو عدد محدود باشد آن دنباله کران دار است که برای بررسی کران داری، حد دنباله را در $+\infty$ حساب می‌کنیم. اگر عدد شد کران دار است، اگر $\infty$ شد بی‌کران است و اگر نامعلوم شد باید عددگذاری کنیم

$\{\sqrt{n}\} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (از پایین کران دار) $\rightarrow$ بی‌کران

$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{n\pi}{2} =$ نامعلوم $\rightarrow -1 \leq \sin \leq 1$
کران دار

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \lim \frac{(-1)^n}{\ldots} = 0$ کران دار

ت) تجربی ۹۱ : کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و همگرا است؟

۱) $u_n=(\frac{3}{2})^n$ ۲) $u_n=\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ ۳) $u_n=\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$ ۴) $u_n=\frac{2n+1}{n}$

گزینه ① $\longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{2})^n=+\infty$ × همگرا نیست

گزینه ④ $\xrightarrow{\text{همگرا}}$ ۲ جمله اول $\to$ ۳، ۲٫۵ × صعودی نیست

گزینه ③ $\xrightarrow{\text{همگرا}}$ ۳ جمله اول $\to$ ۱-، ۰ و ۱- × صعودی نیست

---

- پیوستگی : اگر حد چپ و راست و مقدار تابع در یک نقطه باهم برابر باشند تابع در آن نقطه پیوسته است.

مثال :

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ x^2-1 & x<0\end{cases} \qquad x=0 \to \begin{cases}\text{حد راست}=1\\ \text{حد چپ}=-1\\ \text{مقدار}=1\end{cases}$$

ناپیوسته

ت) تجربی ۹۲ : به ازای کدام مقدار $a$ تابع با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}3x-[x] & x<2\\ a & x=2\\ x+2 & x>2\end{cases}$$

در نقطه $x=2$ پیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵ ۴) هیچ مقدار $a$

حل: حد چپ ۲ $= 6-[\cancel{2}]^{1} = 5$

حد راست ۲ $= 2+2=4$

پیوسته نیست

---

نقطه‌های مهم انفصال (عدم پیوستگی) :
۱) جزء صحیح در اعداد صحیح (باید بررسی شود)
۲) مرز تابع چند ضابطه‌ای (باید بررسی شود)
۳) ریشه مخرج تابع کسری (بدون بررسی)

مثال) به ازای چه مقادیری از $m$، تابع $y=\frac{x^2+1}{x^2+x-m}$ همواره پیوسته است؟

اگر تابع کسری همواره پیوسته باشد $\longrightarrow$ مخرج ریشه ندارد $\Longrightarrow \Delta<0$

$\to 1+4m<0 \to \boxed{m<-\frac{1}{4}}$

مشتق :

۱) $y = c$ (عدد ثابت $c$) $\Rightarrow y' = 0$

۲) $y = u^n$ ($u$ تابعی از $x$) $\Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

۳) $y = u \times v \Rightarrow y' = u'v + v'u$

۴) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

۵) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۶) $y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۷) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \times \cos u$

۸) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \times \sin u$

۹) $y = tg u \Rightarrow y' = u' \times (1 + tg^2 x)$

۱۰) $y = cotg u \Rightarrow y' = -u' \times (1 + cotg^2 x)$

۱۱) $y = a^u \Rightarrow y' = u' \times a^u \times Ln a$

۱۲) $y = e^u \Rightarrow y' = u' \times e^u$

۱۳) $y = \log_e^u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u \times Ln e}$

۱۴) $y = Ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

- تعریف مشتق :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h = x - a} f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* $f'(a)$ شیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطهٔ $x = a$ است . *

ت) تجربی ۹۱ : مقدار مشتق $\dfrac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \dfrac{\pi}{4}$ کدام است ؟

الف) $\dfrac{4}{9}$ ج) $\dfrac{7}{9}$

ب) $\dfrac{5}{9}$ د) $\dfrac{8}{9}$ ✓

قانون ۴ : $\longrightarrow y' = \dfrac{(2\sin x \cos x)(2 - \sin^2 x) - (-2\cos x \sin x)(1 - \cos^2 x)}{(2 - \sin^2 x)^2}$

$\xrightarrow{\frac{\pi}{4} \text{ جای‌گذاری}} = \dfrac{2}{\frac{9}{4}} = \dfrac{8}{9}$

* برای محاسبه حدهایی که فرم آن‌ها شبیه تعریف مشتق است از هوپیتال استفاده می‌کنیم . *

مثال)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(3x - 2h) - \cos 3x}{5h} \longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{-(-2) \times \sin(3x - 2h) - 0}{5} = \frac{2}{5} \sin 3x$$

( مشتق‌گیری براساس $h$ است نه $x$

پس $h$ متغیر ما محسوب می‌شود

- مشتق پذیری : اگر تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست دو عدد برابر باشند تابع در $x = a$ مشتق پذیر است .

در نمودار تابع زمانی در یک نقطه مشتق پذیر است که در آن نقطه بتوان خط مماسی بر نمودار رسم کرد . در واقع نیم مماس راست و چپ باید در راستای هم باشند و موازی محور $y$ها نباشند .

مثال : مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در $x = 2$ بررسی کنید .

✓ پیوسته

$y'$ : مشتق راست و چپ $= \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \longrightarrow \begin{cases} 2^+ \to \dfrac{\text{عدد}}{0^+} = +\infty \\ 2^- \to \dfrac{\text{عدد}}{0^+} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow$ مشتق ناپذیر

* توابع با فرجه فرد همواره پیوسته‌اند )

* اگر تابعی مشتق پذیر باشد همواره دارای خط مماس است ولی اگر مشتق پذیر نباشد فقط زمانی دارای مماس است که مشتق چپ و راست آن در بی نهایت هم علامت باشد *

* اگر تابع جزء صحیح داشته باشد باید ابتدا مقدار عددی جزء صحیح را تعیین کرد و سپس مشتق گیری کرد *

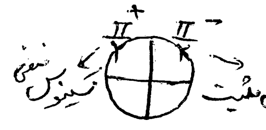
* " " قدر مطلق داشت ابتدا باید علامت داخل قدر مطلق را در نقطه داده شده مشخص کرد و سپس مشتق گرفت *

مثال: مشتق پذیری تابع $y=|\cos x|+1$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید

✓ پیوسته — مشتق راست: $y=-\cos x+1 \to y'=\sin x=1$

" " چپ: $y=\cos x+1 \to y'=-\sin x=-1$

مشتق ناپذیر (مماس هم ندارد)




* توابع دارای قدر مطلق در ریشه‌های ساده خود مشتق ناپذیر و در ریشه‌های مکرر خود مشتق پذیرند *

مثال: اگر $f(x)=|x-2|+\sqrt{2x}$ آنگاه $\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}}_{\text{مشتق چپ تابع به ازای ۲}}$ را بدست آورید.

$$\to f(x)=-x+2+\sqrt{2x} \to f'(x)=-1+\frac{2}{2\sqrt{2x}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$f'_-(2)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

---

- آهنگ تغییر: اگر $x$ در تابع $x=a$ تا $x=b$ تغییر کند آهنگ متوسط تغییر برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

همچنین آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f$ در $x=a$ همان $f'(a)$ است.

۲) تجربی ۹۰: در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{36}{x^2}$ آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

✓ الف) ۱ — ب) ۱/۵ — ج) ۲ — د) ۲/۵

آهنگ متوسط $=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{4-9}{3-2}=\boxed{-5}$

" لحظه‌ای $=f'(x)=\frac{0\times x^2-2x\times 36}{x^4}=\frac{-72}{x^3}\xrightarrow{x=\sqrt[3]{12}}\boxed{-6}$

---

توابع صعودی و نزولی:

تابع صعودی اگر: $x_1<x_2 \to f(x_1)\leq f(x_2)$

" نزولی ": $x_1<x_2 \to f(x_1)\geq f(x_2)$

در نمودار اگر تابع از چپ به راست همواره به سمت بالا حرکت کند اکیداً صعودی، همواره پایین اکیداً نزولی است. اگر توقف داشته باشد (خط افقی) حالت اکید برداشته می‌شود.

اگر تابعی در یک بازه پیوسته مشتق پذیر باشد می‌توان از روی تعیین علامت مشتق تابع صعودی یا نزولی بودن را تعیین کرد

مثال: $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ — $f'(x)=\frac{6-(-1)}{(x+3)^2}=\frac{7}{(x+3)^2}=0$ ✗ فاقد ریشه

| $x$ | فاقد ریشه |
| --- | --- |
| $y'$ | + + + |
| $y$ | ↗ ↗ ↗ |

غیر یکنوا

* اگر تابعی کسری باشد و مخرج آن ریشه داشته باشد به طور کلی غیر یکنوا است اما با تعیین علامت مشتق صعودی یا نزولی بودن شاخه‌ها را می‌توان تعیین کرد. (مثال صفحهٔ قبل)

- سرعت صعود، سرعت نزول: اندازهٔ مشتق همچنین نشان می‌دهد تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول است

* اگر تابعی به صورت ضرب چند عامل باشد و مقدار مشتق تابع در ریشهٔ یکی از عوامل خواسته شود، فقط از آن عامل مشتق می‌گیریم و در آخر نقطهٔ داده شده را جای گذاری می‌کنیم.

مثال:

$$f(x)=(x-3)|x-3|+\underbrace{\sqrt[3]{(x-3)^3(x-4)}}_{x-3\times\sqrt[3]{x-4}} \qquad f'(3)=?$$

$$\Rightarrow (x-3)\times\left(|x-3|+\sqrt[3]{x-4}\right)$$

$$\Rightarrow 1\times\left(|x-3|+\sqrt[3]{x-4}\right)\rightarrow f'(3)=-1$$

---

- مشتق تابع مرکب:

$$y=f\circ g(x)\longrightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$$

$$y=f(u)\longrightarrow y'=u'\times f'(u)$$

مثال) اگر $f'(e)=-2$ و $y=f(e^{x^2-3x+3})$ آنگاه $y'(1)$ را بدست آورید.

$$y'=(2x-3)\times e^{x^2-3x+3}\times f'(e^{x^2-3x+3})\xrightarrow{x=1} y'=-1\times e^1\times f'(e)=2e$$

---

- مشتق‌های زنجیره‌ای: اگر $y$ تابعی از $u$ و $u$ تابعی از $x$ باشد داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

ت) تجربی خارج از کشور ۸۸

اگر $y=tg^2(\pi u)$ و $u=x+\sqrt{x}$ آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{1}{4}$ کدام است؟

الف) $-8\pi$ ✓ ج) $4\pi$

ب) $-4\pi$ د) $8\pi$

$$x=\frac{1}{4}\rightarrow u=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=2\pi(tg\,\pi u)(1+tg^2\pi u)\times 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow[u=\frac{3}{4}]{x=\frac{1}{4}} 2\pi\times(-1)\times 2\times 1+1=-8\pi$$

---

- مشتق ضمنی: هر تابع به فرم $F(x,y)=0$ را یک تابع ضمنی $y$ برحسب $x$ می‌نامیم که مشتق آن اینگونه است:

(برای مشتق گیری باید همه اجزا را به یک طرف بیاوریم)

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}\quad \begin{matrix}\rightarrow \text{مشتق برحسب } x\\ \rightarrow \text{مشتق برحسب } y\end{matrix}$$

فراموش نشه

مثال) آهنگ تغییر تابع $\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=6$ را در نقطهٔ $(1,4)$ تعیین کنید.

$$y'=-\frac{-\frac{\sqrt{y}}{x^2}+y\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}}{x}+\sqrt{x}}\xrightarrow[y=4]{x=1} y'=-\frac{-2+2}{\frac{1}{4}+1}=0$$

معادلهٔ خط مماس و قائم : باید مشتق تابع را بگیریم و نقطه را در آن قرار دهیم تا شیب مماس بدست آید اگر آنرا عکس و قرینه کنیم شیب خط قائم بدست می‌آید و از فرمول زیر استفاده می‌کنیم .

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

مثال: معادلهٔ خط قائم بر منحنی $y=Ln(2x-5)$ را در نقطهٔ تلاقی با محور $x$ها تعیین کنید .

$$\text{محور } x\text{ها} \longrightarrow y=0 \Rightarrow Ln(2x-5)=0 \Rightarrow 2x-5=e^0=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow (3,0)$$

$$y'=\frac{2}{2x-5} \xrightarrow{x=3} m=2 \longrightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}(x-3)$$

$$\Rightarrow x+2y-3$$

* برای نوشتن معادلهٔ خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج منحنی کافی است نقطه‌ای مانند $(\alpha, f(\alpha))$ روی منحنی در نظر بگیریم و مانند قبل ادامه دهیم . در آخر نقطهٔ داده شده را در معادلهٔ خط نوشته شده جای‌گذاری کنیم تا $\alpha$ بدست آید

مثال) معادلهٔ مماس بر منحنی $y=\frac{1}{x}$ گذرنده از نقطهٔ $(2,0)$ را تعیین کنید . $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$

$$y'=-\frac{1}{x^2} \longrightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{\alpha^2}$$

$$y-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) \xrightarrow{\text{صدق } (2,0)}$$

$$0-\frac{1}{\alpha}=\frac{-1}{\alpha^2}(2-\alpha) \xrightarrow{\times \alpha^2}$$

$$\alpha=2-\alpha \longrightarrow \boxed{\alpha=1}$$

$$\longrightarrow y-1=-1(x-1) \longrightarrow y=-x+2$$

* برای بدست آوردن زاویهٔ یک منحنی با محور $x$ها کافیست شیب خط مماس بر نمودار را در نقطهٔ برخورد بدست آوریم معادلهٔ تابع را با $y=0$ قطع می‌دهیم (نقطهٔ برخورد بدست آید) و $x$ بدست آمده را در معادلهٔ مشتق تابع قرار می‌دهیم مقدار بدست آمده شیب خط مماس است که $tg$ زاویهٔ مورد نظر است .

مثال) منحنی $y=1+tgx$ محور $x$ها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

$$y=1+tgx \xrightarrow{y=0} tgx=-1 \longrightarrow \underset{\text{نقطهٔ برخورد}}{x=\frac{-\pi}{4}}$$

$$y'=1+tg^2x \xrightarrow{x=\frac{-\pi}{4}} m=2 \longrightarrow tg\alpha=2 \longrightarrow \alpha=Arctg2$$

* دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ زمانی مماس یکدیگر هستند :

$$1)\ f(a)=g(a)$$

$$2)\ f'(a)=g'(a)$$

مثال) به ازای کدام مقدار $m$ و $n$ منحنی توابع $y=x^2+mx-2$ و $y=x^3+n$ در $x=1$ بر هم مماس اند

$$\begin{cases} (1) & 1+n=1+m-2 \longrightarrow n-m=-2 \\ (2) & 3=2+m \longrightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{n=-1}$$

** اگر نقطه‌ای داده نشود ، دو منحنی زمانی بر هم مماس اند که معادلهٔ تلاقی آن ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد ($\Delta=0$) **

* به طور کلی یک معادله زمانی ریشهٔ مضاعف است که ریشهٔ مشتق آن در خودش صدق کند *

مثال ←

مثال) منحنی دو تابع $y=x^2+a$ و $y=x^3$ در ناحیه اول بر هم مماس اند ، $a$ را تعیین کنید

تلاقی $\rightarrow x^3 = x^2+a \xrightarrow{\text{مشتق}} 3x^2-2x=0 \longrightarrow x(3x-2)=0 \begin{cases} x=0 & \times \\ x=\frac{2}{3} & \checkmark \text{ ناحیه اول} \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{صدق می دهیم}]{\text{در خود معادله}} \frac{8}{27}-\frac{4}{9}-a=0 \longrightarrow \boxed{a=\frac{-4}{27}}$

---

## کاربرد مشتق :

- نقاط بحرانی : تابع $f$ در نقاط $x=a$ بحرانی است اگر یکی از دو شرط مقابل اتفاق بیفتد : $\begin{cases} 1- \ f'(a)=0 \\ \text{یا} \\ 2) \ f' \text{ در } x=a \text{ موجود نباشد} \end{cases}$

برای یافتن نقاط بحرانی کافی است مشتق گرفته و ریشه های آن و نقاط دارای مشکل را بیابیم . اگر عضو دامنه باشند بحرانی هستند

* نقاط دارای مشکل : ۱- ریشه مخرج مشتق اگر عضو دامنه باشد بحرانی است .
۲- در تابع چند ضابطه ای که باید پیوستگی و مشتق پذیری آن را بررسی کرد . اگر عضو دامنه تابع اصلی باشد و مشتق ناپذیر باشد بحرانی است .

مثال : نقاط بحرانی را مشخص کنید .

$f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}$

$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times(x^2-28)=\frac{6x^2+x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$=\frac{7x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \checkmark \text{ عضو دامنه} \\ x=-2 \checkmark \text{ عضو دامنه} \end{cases}$ ریشه مخرج (مشکل دار) $x=0 \checkmark$

* در توابع $y=|f(x)|$ نقاط بحرانی این ها هستند : ریشه های عبارت داخل قدر مطلق در ریشه های مشتق عبارت داخل قدر مطلق

* اگر مخرج مشکل دار مشتق و مخرج تابع یکی بود ، مشکل دار ها بحرانی نمی باشند .*

---

- اکسترمم نسبی : $x=a$ (عضوی از دامنه) ماکسیمم نسبی اگر $f(a)$ در آن بازه از سایر مقادیر بزرگتر یا مساوی باشد
اگر $f(a)$ از سایر مقادیر کوچکتر یا مساوی باشد $x=a$ مینیمم نسبی است .

آزمون مشتق اول : (برای یافتن اکسترمم ها توابعی که رسم ساده ای ندارند) اگر علامت مشتق قبل و بعد از نقطه تغییر کند آن نقطه اکسترمم نسبی است (در صورت پیوستگی) . باید ابتدا نقاط بحرانی را تعیین کنیم پس علامت مشتق قبل و بعد آن را تعیین کنیم .

مثال :

$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ $\quad f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} \longrightarrow 3x^2-6x=0 \longrightarrow 3x(x-2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

مشکل دار : $x^3-3x^2=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

$\nearrow x=0 \searrow x=2 \nearrow x=3 \nearrow$

max نسبی $\quad$ min نسبی

* در توابع قدر مطلقی که درون آن ها عبارت درجهٔ ۲ است داریم:

$$y=|ax^2+bx+c| \Rightarrow \begin{cases} \Delta<0 & \text{همواره یک min نسبی دارد که ریشه مشتق عبارت داخل قدرمطلق است} \\ \Delta=0 & \text{〃} \\ \Delta>0 & \text{همواره ۲ min نسبی و یک max نسبی دارد} \end{cases}$$

ریشه مشتق عبارت داخل قدرمطلق ← max نسبی — ریشه‌های داخل قدرمطلق عبارت ← min نسبی

مثال: اکسترمم ها را تعیین کنید.

$y=|x^2-3x+2|$

ریشه خودش: $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$ min نسبی

مشتق: $2x-3=0$ ، $x=\frac{3}{2}$ ← max نسبی

* نقاط اکسترمم نسبی در خود تابع صدق می‌کند *

* طول نقطه اکسترمم مشتق را صفر می‌کند *

مثال) مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $(2, -1)$ ماکسیموم نسبی باشد.

$y=-x^2+mx+n-1 \xrightarrow[(-1, 2)]{\text{صدق در تابع}} 2=-1-m+n-1 \longrightarrow m-n=-4$

$\xrightarrow[y'=0]{x=-1} 0=2+m \longrightarrow \boxed{m=-2}$ و $\longrightarrow \boxed{n=2}$

- اکسترمم مطلق: اگر مقدار تابع در یک نقطه از همهٔ مقادیر بزرگتر یا مساوی باشد آن نقطه را ماکسیموم مطلق و اگر از همهٔ مقادیر کوچکتر یا مساوی باشد آن را مینیمم مطلق می‌نامند. برای یافتن آن کافی است نقاط بحرانی را بدست آوریم و مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه تعیین کنیم. بیشترین مقدار ماکسیموم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق است.

مثال) مقادیر اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

$f(x)=x^2e^x \quad [-2, 1] \rightarrow y=e$

$$f'(x)=2x\times e^x+e^x\times x^2=0 \longrightarrow e^x(2x+x^2)=0 \begin{cases} x=0 \longrightarrow y=0 \\ x=-2 \longrightarrow y=4\times e^{-2}=\frac{4}{e^2}\simeq 0/6 \end{cases}$$

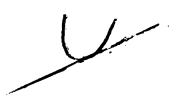
$$\longrightarrow \begin{cases} \max_{\text{مطلق}} \Rightarrow e \\ \min_{\text{مطلق}} \Rightarrow 0 \end{cases}$$

* در توابعی به فرم $y=a\cos^2x+b\cos x+c$ یا $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ برای بدست آوردن اکسترمم نسبی کافیست به جای sin یا cos مقادیر 1 و -1 و $\frac{-b}{2a}$ را قرار دهیم و y را تعیین کنیم بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق است.

مثال) اکسترمم تابع $y=\underbrace{\sin^2x}_{1-\cos^2x}+\cos x+2$ ؟

$$y=-\cos^2x+\cos x+3 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=-1 \rightarrow y=1 & \text{min مطلق} \\ \cos x=1 \rightarrow y=3 \\ \cos x=\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3 \Rightarrow y=\frac{13}{4} & \text{max مطلق} \end{cases}$$

- جهت تقعر : اگر تابع $f$ در بازه‌ای مشتق پذیر باشد و مشتق دوم موجود باشد :

$f''>0 \longrightarrow$ تقعر رو به بالا  (خط مماس بر منحنی زیر منحنی است)

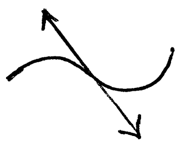
$f''<0 \longrightarrow$ " " پائین  ( " " بالای " )

- نقطه عطف : $x=a$ را نقطه عطف می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر با هم برقرار باشند :

۱) تابع در آن نقطه پیوسته باشد ($f$)

۲) دارای مماس باشد ($f'$) یعنی مشتق چپ و راست تابع دو عدد برابر یا دو بی‌نهایت هم علامت شود

۳) علامت مشتق دوم قبل و بعد نقطه عوض شود. ($f''$)



* در نقطه عطف مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند *

برای بدست آوردن نقطه عطف باید ریشه‌های مشتق دوم و شکل‌دارها را بدست آوریم و سه شرط بالا را بررسی کنیم.

T) طول نقطه عطف منحنی $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

الف) $-1$ ج) $1$

ب) صفر د) فاقد نقطه عطف

$$\frac{x}{1+|x|}\begin{cases}\frac{x}{1+x} & x\geq 0\\ \frac{x}{1-x} & x<0\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2} & x>0\\ \frac{1}{(1-x)^2} & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{-2}{(x+1)^3} & x>0\\ \frac{2}{(-x+1)^3} & x<0\end{cases}$$

$f''(x)=0 \longrightarrow$ فاقد ریشه

شکل‌دار $\rightarrow x=0$ ۱) پیوسته ۲) دارای مماس ۳) تغییر تقعر $\longrightarrow$ عطف $\Leftarrow \boxed{x=0}$

* در توابع $y=(x-a)|x-a|$ ، $x=a$ طول نقطه عطف است *

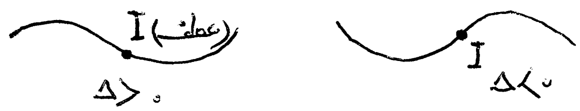
* " $y=\sqrt[m]{(x-a)^n}$ با شرایط $m$ و $n$ فرد و $n<m$ ، $x=a$ طول نقطه عطف است :

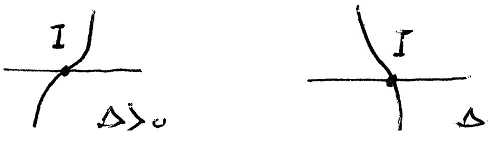
* نقطه عطف هر تابع در خود تابع صدق می‌کند و مشتق دوم را نیز صفر می‌کند *

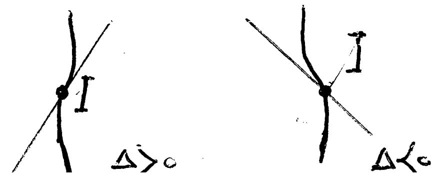
---

- منحنی شناسی

تابع درجه سوم : $y=ax^3+bx^2+cx+d \longrightarrow y'=3ax^2+2bx+c$

1) $\Delta y'>0 \longrightarrow$ 


2) $\Delta y'=0 \longrightarrow$ 

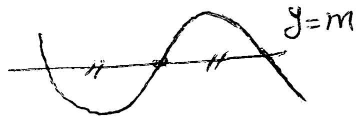

3) $\Delta y'<0$ 

* نقطهٔ $I\left(-\frac{b}{3a}, \dots\right)$ مختصات نقطهٔ عطف تابع است که مرکز تقارن نمودار نیز هست. در حالت $\Delta y' > 0$ که منحنی دارای نقاط اکسترموم است نقطهٔ عطف وسط پاره خط واصل ماکسیموم و مینیموم است:

$$x_I = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \quad , \quad y_I = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$$

مثال) خط $y = m$ منحنی تابع $y = \frac{-x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{3}$ را در سه نقطهٔ A و B و C قطع کرده و $AB = AC$، m را بدست آورید.

$$I\left(\frac{-b}{3a}, m\right) \longrightarrow I(1, m) \xrightarrow{\text{صدق}} m = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = \boxed{2}$$

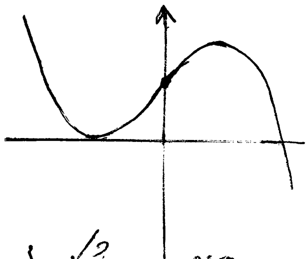



برای شناختن منحنی تابع درجه ۳ از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) علامت a ۲) مختصات نقطهٔ عطف ۳) $\Delta y'$

۴) نقاط اکسترموم ۵) محل برخورد با محورهای مختصات ۶) شیب مماس

۳) تجربی ۸۸:



شکل مقابل نمودار تابع $y = -x^3 + ax^2 + bx + 2$ است. زوج مرتب $(a, b)$ کدام است؟

الف) $(0, -3)$ ج) ✓ $(0, 3)$

ب) $(1, -2)$ د) $(0, 6)$

در شکل $x_I = 0$

در تابع $x_I = \frac{-a}{3(-1)} = \frac{a}{3} \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$$y = -x^3 + bx + 2 \xrightarrow{\Delta y' > 0} y' = -3x^2 + b$$

$$\longrightarrow \Delta y' = 12b > 0 \longrightarrow b > 0 \xrightarrow{\text{طبق گزینه‌ها}} \begin{cases} b = 3 \\ b = 6 \end{cases}$$

در شکل $y_{min} = 0 \xrightarrow[b=3]{\text{فرض}} y = -x^3 + 3x + 2$

$$\longrightarrow y' = -3x^2 + 3 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = 1 \ \times \\ x = -1 \end{cases}$$

$$y_{min} = 1 - 3 + 2 = 0$$

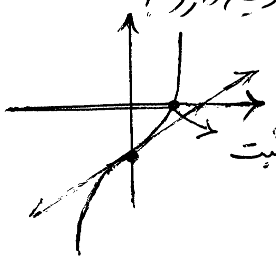
پس b برابر ۳ صحیح است

* به کمک رسم نمودار می‌توان تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه ۳ را پیدا کرد. *

مثال) معادلهٔ $x^3 - 3x + 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

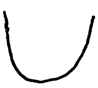
$$y' = 3x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \ \times \longrightarrow \Delta y' < 0$$

$$I\left(\frac{-b}{3a}, \dots\right) \Rightarrow I = (0, -1)$$




- تابع درجه ۴ دو مجذوری: فرم کلی آن اینگونه است:

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$



$a > 0$
$b > 0$

$a < 0$
$b < 0$


$a > 0$


$a < 0$
$b > 0$

- مجانب قائم : برای بدست آوردن مجانب قائم کافیست ریشهٔ مخرج را بدست آوریم . اگر این ریشه، ریشهٔ صورت نبود مجانب قائم است . ولی اگر ریشهٔ صورت هم بود آن را رفع ابهام می‌کنیم ، اگر پس از رفع ابهام حاصل حد بی نهایت شود مجانب قائم است .

- مجانب افقی : برای بدست آوردن مجانب افقی کافی است حد تابع را در بی نهایت بدست آوریم . اگر حاصل عدد شود آن عدد مجانب افقی است .

مثال ) مجانب‌های مقابل را بدست آورید :

$$f(x)=\frac{\cos x+1}{2\sin x-1} \qquad [0,2\pi]$$

$$\text{م.ق} \rightarrow 2\sin x-1=0 \rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \ \checkmark \\ x=\frac{5\pi}{6} \ \checkmark \end{cases}$$

م افقی ندارد چون sin و cos در ∞ نامعلوم است .

۳) تجربی ۹۱ : اگر $f(x)=\frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ باشند نقطهٔ تلاقی مجانب‌ها تابع $fog$ کدام است ؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$ ✓

$$fog=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+3}{\frac{4x-2}{x+2}+1}=\frac{5x+1}{5x} \begin{cases} \text{م.ا} \rightarrow y=1 \\ \text{م.ق} \rightarrow x=0 \end{cases} \rightarrow (0,1)$$

---

* هرگاه حد تابع در بی نهایت ، بی نهایت شود احتمالا منحنی دارای مجانب مایل است .
یکی از این توابع ، تابع کسری است که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند و درجهٔ صورت فقط یک واحد از درجهٔ مخرج بیشتر است . در این صورت مجانب مایل خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج است .

مثال : مجانب مایل $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{2x+1}$ ؟

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+1 & 2x+1 \\ \underline{x^2+\frac{1}{2}x} & \frac{1}{2}x-\frac{7}{4} \\ -\frac{7}{2}x+1 & \end{array}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$$

* دو روش تستی مجانب مایل :

حتماً درجه ۱

$$1)\ y=3x-1+\frac{2x^2+5x-1}{x^2+7x-3} \rightarrow \text{حد در بی نهایت}=2 \rightarrow y=3x-1+2=\boxed{\text{م مایل } 3x+1}$$

حتماً جمع یا تفریق

$$2)\ 2x-1+\frac{3x^2+5x-1}{x+2} \rightarrow \text{حد در بی نهایت}=\infty \Rightarrow (3x^2+5x-1)\div(x+2)=3x-1$$

(به درد نمی‌خوره!)

$$\rightarrow y=2x-1+3x-1=\boxed{5x-2 \ \text{م.مایل}}$$

* در توابع رادیکالی برای بدست آوردن خطوط مجانب از هم ارزی رادیکالی استفاده می‌شود ( در مبحث حد هم گفته شد

در توابع به فرم $y=mx+n\mp\sqrt{ax^2+bx+c}$

هم ارزی

$\sqrt{a}\,\left|x+\frac{b}{2a}\right|$

T) تجربی ۹۰ خارج از کشور: فاصله نقطه $A(-2,0)$ از خط مجانب منحنی $y=x-\sqrt{x^2-2x}$ ، $x<0$ کدام است؟ الف) ۱ ب) ۲ ج) $\sqrt{5}$ ✓ د) $2\sqrt{2}$

هم ارزی $\Longrightarrow x-|x-1| \xrightarrow{x<0} 2x-1=y \longrightarrow y-2x+1=0$

فاصله نقطه داده شده تا خط $\longrightarrow \frac{|0-2(-2)+1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

---

* به طور کلی مجانب مایل از رابطه زیر بدست می آید:

$y=mx+h$ ؛ در این رابطه: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $h=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

* اگر m یا h ، $\infty$ شود، مجانب مایل ندارد. *

* فرمول تستی: اگر $y=kx\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ $\xrightarrow{\text{مایل}}$ $y=k\left(x+\frac{a-b}{2}\right)$

---

مثال) مجانب مایل $y=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$ را بدست آورید:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x}}{\frac{x}{1}}=\frac{x^2}{x^2}=1\to m=1$

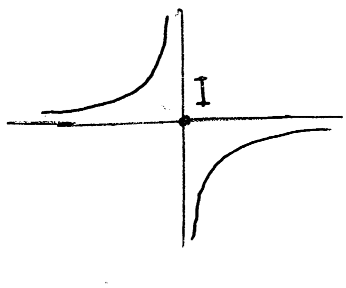
$h=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}-x^2-x}{x+1}=\frac{-x}{x}=-1\to h=-1$

$\Longrightarrow y=x-1$

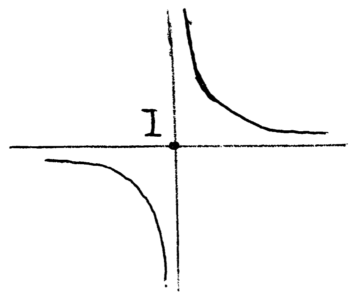
---

تابع هموگرافیک: $y=\frac{ax+b}{cx+d}\longrightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

* اگر $cd-bc=0$ آنگاه نمودار به صورت خط راستی است که ریشه در مخرج، توخالی است. *




$cd-bc>0$




$ad-bc<0$

* نقطه I (مرکز تقارن) محل برخورد مجانب های افقی و قائم است *

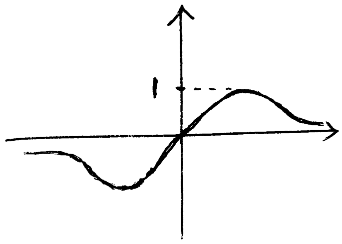
* شیب های محورهای تقارن توابع هموگرافیک همواره ۱- و ۱+ است. *

- برای شناسایی نمودار این توابع از علامت $ad-bc$ و هم چنین مجانب‌های قائم و افقی استفاده می‌کنیم.

به طور کلی برای شناسایی منحنی‌ها از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

۱) شناسایی مجانب‌ها و محاسبهٔ حد تابع در اطراف مجانب قائم
۲) شناسایی نقاط عطف و اکسترموم
۳) محل برخورد نمودار با محورها
۴) دورهٔ تناوب (در توابع مثلثاتی)

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $y=\dfrac{ax^2+bx}{x^2+4}$ است. در این صورت $(a,b)$ را تعیین کنید.



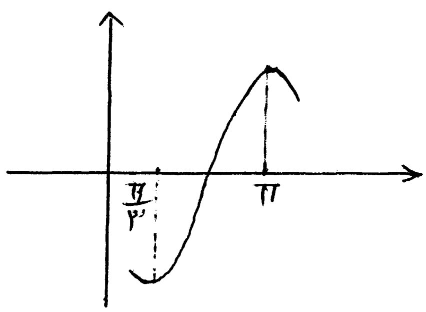
$$\left.\begin{array}{l} y=a \text{ : م. افقی} \\ y=0 \text{ : در شکل مجانب افقی} \end{array}\right\} \Rightarrow a=0$$

$$y=\frac{bx}{x^2+4} \rightarrow y'=\frac{b(x^2+4)-2x\times bx}{(x^2+4)^2}=0$$

$$\rightarrow bx^2+4x=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow y=1 \rightarrow 1=\frac{2b}{4+4} \rightarrow \boxed{b=4}$$

مثال ۲: به ازای کدام مقدار $a$ نمودار تابع $y=\cos^2 x+2a\cos x$ به صورت زیر است؟



$$y'=-2\cos x\sin x-2a\sin x$$

$$\xrightarrow[y'=0]{x=\frac{\pi}{3}} 0=-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a\sqrt{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

## مقاطع مخروطی

۱) دایره :

فرم متعارف : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \rightarrow C(\alpha , \beta)$

فرم گسترده : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

در فرم گسترده : $C(f'_x=0 \; , \; f'_y=0)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

*** ضریب $x^2$ و $y^2$ باید ۱ باشد ***

در فرم گسترده باید شرایط زیر برقرار باشد :

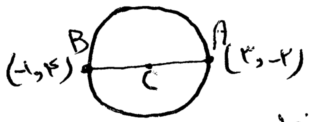
۱) ضریب $x^2$ = ضریب $y^2$ = ۱

۲) $a^2+b^2-4c>0$ $\begin{cases} a^2+b^2-4c=0 \Rightarrow \text{نقطه} \\ a^2+b^2-4c<0 \Rightarrow \text{تهی} \end{cases}$

برای نوشتن معادلهٔ دایره باید مرکز و شعاع آن را بدست آورد و از فرم متعارف استفاده کرد .

مثال ) معادلهٔ کوچکترین دایره ای را بنویسید که از نقاط $(-1,4)$ و $(3,-2)$ بگذرد .

* کوچکترین دایره مربوط به زمانی است که دو نقطه دو سر قطر باشد *




وسط دو نقطه $C\left(\frac{3+(-1)}{2} , \frac{-2+4}{2}\right) \rightarrow C(1,1)$

$R=CA=\sqrt{4+9}=\sqrt{13} \Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=13$

* هرگاه خط بر دایره مماس باشد فاصلهٔ مرکز تا خط برابر شعاع است *

* هرگاه نقاطی از دایره داده شد و معادله را می خواستن در فرم گسترده صدق می دهیم ( تا a و b و c بدست آیند )

۲) تجربی ۹۱ : شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات $(2,1)$ و $(-2,4)$ و $(0,0)$ می گذرد کدام است ؟

۱) ۲    ۲) ۲٫۵ ✓    ۳) ۳    ۴) ۳٫۵

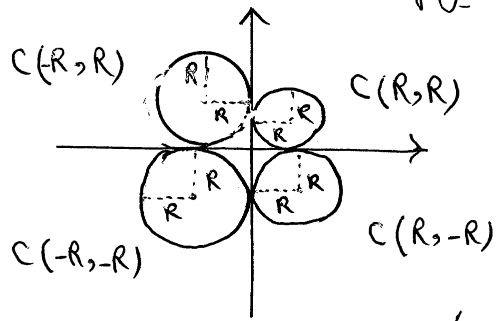
$(0,0) \Rightarrow 0^2+0^2+a(0)+b(0)+c=0 \longrightarrow \boxed{c=0}$

$(-2,4) \Rightarrow (-2)^2+4^2+a(-2)+b(4)+c=0 \longrightarrow a-2b=10$

$(2,1) \Rightarrow 2^2+1^2+a(2)+b(1)+c=0 \longrightarrow 2a+b=-5$ $\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ \boxed{b=-5} \end{cases}$

معادلهٔ دایره : $x^2+y^2-5y=0 \Longrightarrow x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4} \Longrightarrow R=\frac{5}{2}=2.5$

* اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس باشد، مختصات مرکز از لحاظ عددی برحسب شعاع خواهد بود و علامت آن براساس ناحیهٔ مختصات تعیین می‌شود:

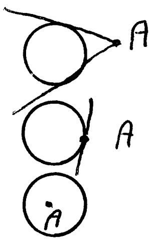



برای بررسی اوضاع نسبی نقطه و دایره معادله به فرم گسترده را می‌نویسیم (ضریب $x^2$ و $y^2$ ۱ باشد) و نقطه را جایگذاری می‌کنیم:

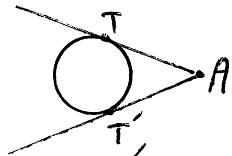
$f(A) > 0 \longrightarrow$ A خارج دایره / ۲ مماس از آن بر دایره رسم می‌شود

$f(A) = 0 \longrightarrow$ A روی دایره / ۱ مماس بر دایره رسم می‌شود

$f(A) < 0 \longrightarrow$ A داخل دایره / مماس بر دایره رسم نمی‌شود




* در حالت اول که نقطه خارج دایره است داریم:

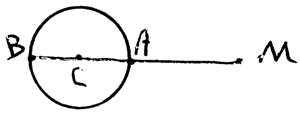



$AT = AT' = \sqrt{f(A)}$

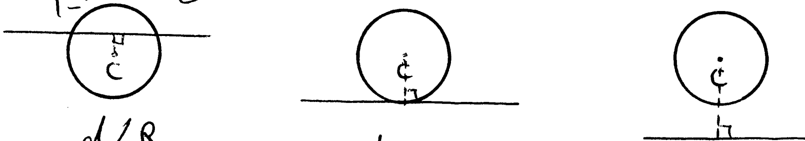
* دورترین و نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا یک نقطهٔ دلخواه مربوط است به زمانی که از مرکز عبور کرده باشیم:

دورترین: $MB = MC + R$

نزدیک‌ترین: $MA = MC - R$




برای بررسی اوضاع نسبی یک خط و دایره فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را با شعاع مقایسه می‌کنیم:




$d < R$ $\qquad$ $d = R$ $\qquad$ $d > R$

* خطی که از مرکز دایره عبور کند بر دایره عمود است پس برای نوشتن معادلهٔ خط قائم از یک نقطه بر دایره کافیست بین آن نقطه و مرکز دایره معادلهٔ خط بنویسیم.

۳) تجربی ۸۸: هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ (-۲و۱) می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - 1$ مماس است. شعاع کدام است؟

۱) ۲ $\qquad$ ۲) $2\sqrt{2}$ ✓ $\qquad$ ۳) ۳ $\qquad$ ۴) $3\sqrt{2}$

مرکز ← (-۲و۱)

فاصلهٔ C تا خط $= R \Longrightarrow \frac{|2+1+1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

برای بررسی اوضاع نسبی دو دایره فاصله مراکز را تعیین کرده و آن را با $R_1+R_2$ و $|R_1-R_2|$ مقایسه می‌کنیم:


① (متقاطع) $|R_1-R_2|<d<R_1+R_2$

② (مماس خارج) $d=R_1+R_2$

③ (متخارج) $d>R_1+R_2$

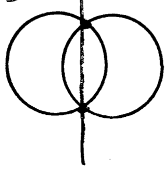
④ (متداخل) $d<|R_1-R_2|$

⑤ (مماس داخل) $d=|R_1-R_2|$

* در حالت متقاطع، معادله وتر مشترک دو دایره از حذف $x^2$ و $y^2$ در بین هر دو معادله بدست می‌آید

* برای طول وتر مشترک نیز کافی است خط وتر مشترک را با یکی از دایره‌ها قطع دهیم تا دو نقطه بدست آید

وتر مشترک



مثال) معادله وتر مشترک دو دایره $x^2+y^2=2$ و $x^2+y^2+2x+2y=0$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

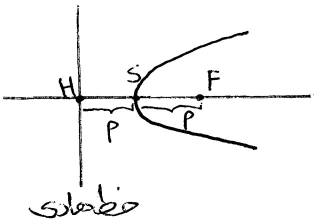
$$2x+2y=-2 \Longrightarrow \underline{x+y=-1}$$

۲) سهمی: $S(\alpha,\beta)$ رأس

فرم کلی $\begin{cases} \text{سهمی قائم} \Longrightarrow (x-\alpha)^2=4p(y-\beta) \\ \text{سهمی افقی} \Longrightarrow (y-\beta)^2=4p(x-\alpha) \end{cases}$

فاصله رأس تا خط هادی = فاصله رأس تا کانون ⟵ $p=SH=SF$ (پارامتر سهمی)

* $p$ پارامتر سهمی است و علامت آن فقط در معادله مثبت یا منفی است.




در سهمی قائم $\begin{cases} p>0 \Longrightarrow \text{دهانه رو به بالا} \\ p<0 \Longrightarrow \text{دهانه رو به پایین} \end{cases}$

در سهمی افقی $\begin{cases} p>0 \Longrightarrow \text{دهانه رو به راست} \\ p<0 \Longrightarrow \text{دهانه رو به چپ} \end{cases}$

فرم گسترده سهمی $\begin{cases} \text{سهمی قائم} \Longrightarrow Ax^2+Bx+Cy+D=0 \\ \text{سهمی افقی} \Longrightarrow Ay^2+By+Cx+D=0 \end{cases}$

($x^2$) در سهمی قائم ⟵ $S(f'_x=0\ ,\ \dots)$

($y^2$) در سهمی افقی ⟵ $S(\dots\ ,\ f'_y=0)$

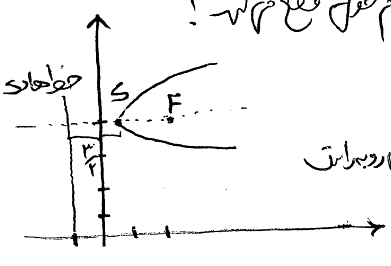
$\Longrightarrow p=-\dfrac{C}{4A}$

ضریب درجه ۱ اون یکی!!

ضریب جمله ۲

T) تجربی ۹۲: سهمی به کانون $F(2,4)$ و خط هادی به معادله $x=-1$، محور $x$ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{17}{6}$ ۲) $\frac{19}{6}$ ✓ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$




$F$ تا خط هادی $=3=2p \to p=+\frac{3}{2} \to S(\frac{1}{2},4)$ ⟸ سهمی افقی رو به راست

$$\Longrightarrow (y-4)^2=6(x-\tfrac{1}{2}) \xrightarrow[y=0]{\text{محور } x \text{ ها را قطع کند}} x=\frac{19}{6}$$

* اگر اشعه های نورانی به موازات محور کانونی به سهمی بتابند، بازتابش آنها از کانون می‌گذرد و بالعکس.

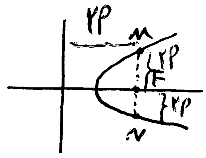
اوضاع نسبی نقطه و سهمی: اگر $f(x,y)=0$ معادلهٔ سهمی باشد با شرط مثبت بودن ضریب جملهٔ توان ۲ باشد داریم:

$f(A)>0 \Longrightarrow$ A خارج سهمی / ۲ مماس رسم می‌شود

$f(A)<0 \Longrightarrow$ A داخل سهمی / مماس رسم نمی‌شود

$f(A)=0 \Longrightarrow$ A روی سهمی / ۱ مماس رسم می‌شود (معادلهٔ آن از طریق مشتق بدست می‌آید)

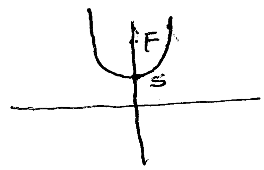
* پاره خطی که در نقطهٔ کانون بر محور کانونی عمود و به سهمی محدود است، وتر کانونی نامیده می‌شود و اندازهٔ آن $4|p|$ است.




$$MN = 4|p|$$

* در هر سهمی، دایره به قطر وتر کانونی (یعنی دایره‌ای به مرکز F و شعاع 2p) همواره بر خط هادی مماس است.

مثال) دایره‌ای به قطر وتر کانونی سهمی $x^2-6x+8=2y$ بر کدام خط مماس است؟




$S(3, -\frac{1}{2})$ $\quad p = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Longrightarrow y=-1$

۳) بیضی:

فرم بیضی
$$\begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \end{cases} \qquad S(\alpha, \beta)$$

$A, A'$ رئوس اصلی (کانونی)

$B, B'$ رئوس فرعی (غیرکانونی)

$F, F'$ کانون‌ها

$SA = SA' = a \Longrightarrow AA' = 2a$

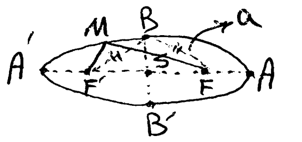
$SB = SB' = b \Longrightarrow BB' = 2b$

$SF = SF' = c \Longrightarrow FF' = 2c$

در هر بیضی $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

* همواره در بیضی: $a > b, c$

برای شناسایی:
- اگر a زیر x باشد ← افقی
- اگر a زیر y باشد ← قائم




$MF + MF' = 2a$

$BF + BF' = 2a$

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر 2a است:

برای نوشتن معادلهٔ بیضی داشتن مرکز و a و b و نوع بیضی لازم است.

فرم گستردهٔ بیضی $\Longrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

نوع بیضی:
- $|A| < |B|$ افقی
- $|A| > |B|$ قائم

شرایط:
- $A \neq B$
- $A, B$ هم علامت
- $f(S) < 0$

$\longrightarrow$
- $f(S) = 0$ نقطه
- $f(S) > 0$ تهی

برای محاسبه $F(S)$ باید همه عبارت یک سمت تساوی باشد و سمت دیگر صفر باشد و ضرایب $x^2$ و $y^2$ مثبت باشند.

مثال ۱) معادله بیضی را بنویسید که مجموع فواصل هر نقطه آن تا نقاط $(3,-1)$ و $(3,5)$ برابر ۸ باشد.

$F(3,5)$ هم طول → قائم

$F(3,5),\ F'(3,-1) \to S(3,2)$

$FF' = 2c = 6 \to c = 3$

$\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{7}$

$$\frac{(x-3)^2}{7} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

* وضعیت دایره داخل بیضی با قطر $FF'$ (شعاع دایره $= \frac{FF'}{2}$)

$c = b$ ← در ۲ نقطه مماس بر بیضی

$c > b$ ← در ۴ نقطه بیضی را قطع می‌کند

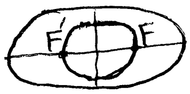
$c < b$ ← بیضی را قطع نمی‌کند

مثال) دایره به قطر $F$ و $F'$ که $F$ و $F'$ کانون های بیضی $4x^2+6y^2-8x+12y-2=0$ هستند نسبت به بیضی چه وضعی دارد؟

$4(x^2-2x+1-1)+6(y^2+2y+1-1)-2=0$

$4(x-1)^2+6(y+1)^2=12 \xrightarrow{\div 12} \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$

$a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{2} \Rightarrow c=1 \overset{c<b}{\Longrightarrow}$ دایره بیضی را قطع نمی‌کند



- ویژگی بازتابندگی بیضی: اگر یک منبع نورانی در یکی از کانون ها قرار بگیرد و دسته ای از پرتو های آن به سطح بیضی بتابد بازتابش آن از کانون دیگر می‌گذرد.

- خروج از مرکز: میزان کشیدگی بیضی را تعیین می‌کند (هر چقدر $e$ به صفر نزدیکتر باشد بیضی به دایره شبیه می‌شود و هرچقدر $e$ به ۱ نزدیکتر شود بیضی کشیده تر می‌شود)

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \qquad 0<e<1$$

۳) تجربی ۹۲ مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی $(-1,3)$ و $(-1,-1)$ است. این بیضی از نقطه $(-4,2)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ✓ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

وسط دو سر قطر $\to S(-1,1)$ $\qquad BB' = 2b = 4 \to b = 2$

افقی $\to \frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1 \xrightarrow[y=2]{b=2,\ x=-4} a^2=12$

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{12}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

در فرم گسترده: $e=\sqrt{1-\frac{Min(|A|,|B|)}{Max(|A|,|B|)}}$

$Min(|A|,|B|) \rightarrow$ مقدار کمتر از بین $|A|$ و $|B|$

$Max(|A|,|B|) \rightarrow$ مقدار بیشتر از بین $|A|$ و $|B|$

اوضاع نسبی نقطه و بیضی: اگر $F(x,y)=0$ معادله بیضی باشد با شرط مثبت بودن $x^2$ و $y^2$ و $A$ نقطه مورد نظر باشد:

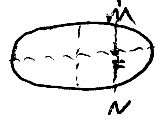
$F(A)>0 \longrightarrow$ A خارج بیضی / ۲ مماس از آن بر بیضی رسم می‌شود

$F(A)<0 \longrightarrow$ A داخل بیضی / مماس رسم نمی‌شود

$F(A)=0 \longrightarrow$ A روی بیضی / ۱ مماس رسم می‌شود (معادله آن از شکافتن به دست می‌آید)

- وتر کانونی: پاره خطی که در کانون بر محور کانونی عمود است و به بیضی محدود است.

وتر کانونی $= MN$




طول پاره خط وتر کانونی $= \boxed{\frac{2b^2}{a}}$

۴) هذلولی:

$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 & \text{افقی} \rightarrow \text{ضریب مثبت و} \\ \frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 & \text{قائم} \rightarrow \text{ضریب مثبت } x \end{cases}$$

$S(\alpha,\beta)$

$SA=SA'=a \Longrightarrow AA'=2a$ قطر قاطع (کانونی)

$SB=SB'=b \Longrightarrow BB'=2b$ قطر مجازی

$SF=SF'=c \Longrightarrow FF'=2c$ فاصله کانونی

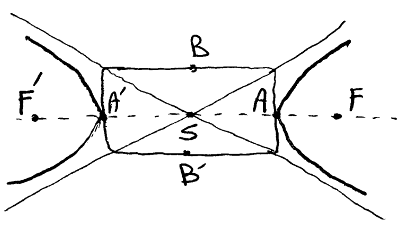
$\boxed{c>a,b}$

$\boxed{c^2=a^2+b^2}$

فرم گسترده هذلولی $\longrightarrow Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

$S(f'_x=0 \ , \ f'_y=0)$

شرایط $\begin{cases} A,B & \text{مختلف العلامت} \\ f(S)\neq 0 \end{cases}$




★ اگر $f(S)=0$ ⇐ شکل به صورت دو خط متقاطع می‌شود.

برای نوشتن معادله هذلولی داشتن مرکز، a و b و نوع هذلولی لازم است.

خروج از مرکز (e): $\boxed{e=\frac{c}{a}}$ و $\boxed{e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}$

وتر کانونی هذلولی: پاره خطی که در کانون بر محور کانونی عمود بر هذلولی است و اندازه آن برابر است با $\boxed{\frac{2b^2}{a}}$

مثال) مختصات رئوس و کانون های هذلولی $9x^2-4y^2-18x+16y+29=0$ را تعیین کنید.

$$9(x^2-2x+1-1)-4(y^2-4y+4-4)+29=0$$

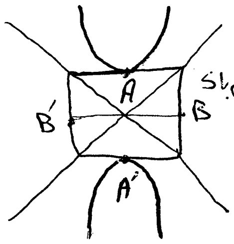
نصف ← به توان ۲ ← اضافه و کم می‌کنیم

$$9(x-1)^2-4(y-2)^2=36 \xrightarrow{\div 36} \frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$$

قائم $S(1,2)$

$a=3$

$b=2$



$A'(1,2+3)$ هم طول باک
$A(1,2-3)$

$F(1,2+\sqrt{13})$ هم طول باک
$F'(1,2-\sqrt{13})$

$B(1+2,2)$
$B'(1-2,2)$ هم عرض باک

T) تجربی ۹۱: در هذلولی به معادلهٔ $x^2-3y^2-2x=2$ اندازهٔ وتر گذرنده بر کانون و عمود بر محور کانونی آن کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt3}{3}$ ✓    ۲) $\sqrt3$    ۳) $3$    ۴) $2\sqrt3$

$$(x^2-2x)-3y^2=2$$

$$\rightarrow (x^2-2x-1+1)-3y^2=2 \Longrightarrow (x-1)^2-3y^2=3$$

$$\xrightarrow{\div 3} \frac{(x-1)^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \rightarrow \begin{cases} a^2=3 \rightarrow a=\sqrt3 \\ b^2=1 \end{cases}$$

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times1}{\sqrt3}=\frac{2\sqrt3}{3}$$

مجانب های هذلولی: هر هذلولی دو مجانب مایل دارد که امتداد قطرهای مستطیل وسطانی هستند.

افقی $\xrightarrow[\text{مجانب‌ها}]{\text{معادلهٔ}} \frac{x-\alpha}{a}\pm\frac{y-\beta}{b}=0$

قائم $\longrightarrow \frac{y-\beta}{a}\pm\frac{x-\alpha}{b}=0$

* مجانب ها همدیگر را در S قطع می‌کنند.
* شیب مجانب‌ها قرینهٔ هم است.
* مساحت مستطیل $4ab$ است.

در هذلولی افقی: شیب مجانب‌ها $=\pm\frac{b}{a}$

در هذلولی قائم: شیب مجانب‌ها $=\pm\frac{a}{b}$

اگر معادلهٔ دو مجانب را داشته باشیم و مختصات یک نقطهٔ هذلولی را داشته باشیم و معادلهٔ هذلولی را بخواهیم:

دو معادله را مرتب می‌کنیم (همه یک طرف) و آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و سمت چپ یک مساوی می‌نویسیم. سپس در سمت راست آن عدد حاصل از جایگذاری نقطهٔ داده شده در عبارت سمت چپ را می‌نویسیم.

مثال) معادلهٔ هذلولی را بنویسید که خطوط $y=3x-1$ و $y=-3x+5$ مجانب های آن باشند و هذلولی از نقطهٔ $(3,-2)$ بگذرد.

$$\begin{matrix} y-3x+1=0 \\ y+3x-5=0 \end{matrix} \Longrightarrow (y-3x+1)(y+3x-5)=-10\times2 \Longrightarrow y^2+3xy-5y-3xy-9x^2+15x+y+3x-5=-20$$

صدق $(3,-2)$

$$\longrightarrow y^2-9x^2+18x-4y+15=0$$

* در هر هذلولی فاصلهٔ کانون تا خط مجانب برابر است با $b$

* در هر هذلولی فاصلهٔ رأس تا خط مجانب برابر است با $\frac{ab}{c}$

هذلولی متساوی القطرین: اگر در یک هذلولی $a=b$ در فرم گستردهٔ آن: $\boxed{A+B=0}$

* در این هذلولی خروج از مرکز همواره $\sqrt{2}$ است و زاویهٔ بین مجانب‌ها $90^\circ$ است.