

معادله درجه دوم

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و مسائل کاربردی

معادله‌ی درجه‌ی دوم

تعداد و علامت ریشه‌های معادله

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم. در سال اول شما با روش‌های حل معادله آشنا شدید، کاربردی‌ترین آن‌ها روش تجزیه و فاکتورگیری، روش مربع کامل و در نهایت فرمول کلی حل معادله است.

■ **مثال:** معادلات زیر را حل کنید:

- (a) $x^2 + 2x = 0$ (روش فاکتورگیری)
 (b) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (روش تجزیه)
 (c) $x^2 - 2x - 11 = 0$ (روش مربع کامل)

◀ **حل:**

- (a) $x(x+2) = 0 \rightarrow x = 0$ یا $x = -2$
 (b) $(x+3)(x+2) = 0 \rightarrow x = -3$ یا $x = -2$
 دو عدد که ضرب آن‌ها 6 و مجموع آن‌ها 5 باشد
 (c) $x^2 - 2x - 11 = 0 \rightarrow (x^2 - 2x) - 11 = 0 \rightarrow ((x-1)^2 - 1) - 11 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 12 \rightarrow x-1 = \pm\sqrt{12}$
 $\rightarrow x = 1 \pm \sqrt{12}$

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) به صورت روبه‌روست:
 $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
 که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ ، مبین (دلتهای) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta \geq 0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تعداد و علامت ریشه‌های معادله

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با توجه به شرایط Δ و $-\frac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها نظر داد.

دو ریشه‌ی مثبت $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{a} > 0 \\ -\frac{c}{a} < 0 \end{array} \right.$
 دو ریشه‌ی منفی $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{a} < 0 \\ -\frac{c}{a} > 0 \end{array} \right.$
 دو ریشه‌ی متحد‌العلامه دارد. $\frac{c}{a} > 0$
 دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد. $\frac{c}{a} < 0$
 (۱) $\Delta > 0 \rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
 (۲) $\Delta = 0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $\rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ (معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود)
 (۳) $\Delta < 0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

■ **مثال:** بدون حل معادله در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید.

◀ **حل:** با محاسبه‌ی $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1) = 33 > 0$ چون $\Delta > 0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی چون $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ دو ریشه‌ی متحد‌العلامه‌اند،

اما $\frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0$ ، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

◀ **تذکره (۱):** در صورتی که دو ریشه‌ی حقیقی معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

الف - قرینه‌ی هم باشند، آنگاه $b = 0$ (زیرا مجموع ریشه‌ها صفر است و $\frac{-b}{a} = 0$).

ب - عکس هم باشند، آنگاه $a = c$ (زیرا حاصلضرب ریشه‌ها (۱) است و $\frac{c}{a} = 1$).

◀ **تذکره (۲):** در بعضی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد، به این گونه معادلات، معادله‌ی دوم‌جذوری گوئیم.

■ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 4x^2 - 7 = 0$ را بیابید.

◀ **حل:** با انتخاب $x^2 = t$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$t^2 - 4t - 7 = 0$$

معادله درجه دوم

در این معادله $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = \frac{-7}{1} < 0$ ، پس معادله برحسب t ، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، و در نتیجه برای $x^2 = t > 0$ ، دو جواب قرینه برای معادله به دست می‌آید.

■ **مثال:** معادله $(x^2 - 3x) + 2 = 0$ را حل کنید.

◀ **حل:** با فرض $x^2 - 3x = t$ ، به معادله $t^2 - 3t + 2 = 0$ می‌رسیم، ریشه‌های این معادله $t = 1$ و $t = 2$ است، لذا:

$$x^2 - 3x = 2 \rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 - 3x = 1 \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

پس معادله چهار ریشه دارد.

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها

معادله‌ی درجه‌ی دوم

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر x' و x'' به ترتیب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند آنگاه $(x - x')(x - x'') = 0$ و از آنجا خواهیم داشت:

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0 \quad (1)$$

از طرفی در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با تقسیم طرفین بر $a \neq 0$ داریم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

از دو معادله‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ و $x'x'' = \frac{c}{a}$.

◀ **تذکر (۱۳):** اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آنگاه:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها})$$

$$P = x'x'' = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصلضرب ریشه‌ها})$$

در این حالت معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ تبدیل خواهد شد.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که مجموع ریشه‌هایش ۹ و ضرب ریشه‌هایش ۵ باشد.

◀ **حل:** از آنجایی که $S = 9$ و $P = 5$ پس معادله $x^2 - 9x + 5 = 0$ است.

■ **مثال:** اگر $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی باشند، آن معادله را بنویسید.

◀ **حل:** از آنجایی که $S = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ و $P = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$ ، آنگاه معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را خواهیم داشت.

◀ **تذکر (۱۴):** اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه با استفاده از اتحادها داریم:

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

◀ **تذکر (۵):** اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه $|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

■ **مثال:** اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو عدد طبیعی متوالی باشند، آنگاه نشان دهید $\Delta = a^2$.

◀ **حل:** دو ریشه را α و $\alpha + 1$ در نظر می‌گیریم لذا تفاضل ریشه‌ها (۱) است پس $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1$ و از آنجا $\Delta = a^2$.

◀ **تذکر (۶):** در معادله $ax^2 + bx + c = 0$:

الف - اگر $a + b + c = 0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

ب - اگر $a + c = b$ ، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (-۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

معادله درجه دوم

■ **مثال:** ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ را بیابید.

◀ **حل:** چون مجموع ضرایب معادله صفر است پس یک ریشه (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ است.

◀ **تذکر (۷):** در بعضی از مسائل، می‌توانیم از این خاصیت که همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، استفاده کنیم.

■ **مثال:** در معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ ، اگر α و β ریشه‌ها باشند حاصل $\alpha^2(\beta - 1)$ را بیابید.

◀ **حل:** چون β ریشه‌ی معادله است در خود معادله صدق می‌کند، لذا $\beta^2 - 5\beta + 1 = 0$ و از آنجا $\beta^2 = 5\beta - 1$ ، در عبارت حاصل با جاگذاری

داریم $\alpha^2\beta^2$ یا $(\alpha\beta)^2$ ، اما $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$ ، پس حاصل $\alpha^2(\beta - 1) = 1$.

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید

معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله‌ی اول رابطه‌ی مشخصی داشته باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم.

(۲) رابطه‌ی بین x و y را می‌یابیم.

(۳) x را برحسب y می‌یابیم و در معادله‌ی اول جاگذاری می‌کنیم و سپس با عملیات جبری معادله را می‌نویسیم.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.

◀ **حل:** با توجه به خواسته‌ی مسأله $y = x^2$ ، پس $x = \pm\sqrt{y}$ ، حال در معادله قرار می‌دهیم:

$$(y + 1) = \pm 3\sqrt{y} \xrightarrow{\text{توان } 2} (y + 1)^2 = 9y \rightarrow y^2 + 2y + 1 = 9y \rightarrow y^2 - 7y + 1 = 0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

◀ **تذکر (۸):** روش دیگری نیز برای یافتن این معادله وجود دارد که محاسبه‌ی S و P در معادله‌ی جدید و نوشتن معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ است.

در مثال بالا، اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه α^2 و β^2 ریشه‌های معادله‌ی جدید هستند، پس:

$$\left. \begin{aligned} S &= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2(1) = 7 \\ P &= \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (1)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

معادلات گنگ

معادلاتی که شامل عبارات رادیکالی باشند را، معادلات گنگ می‌نامیم.

روش کلی برای حل معادلات گنگ وجود ندارد، اما دو موضوع در حل معادلات گنگ از اهمیت خاصی برخوردار است.

(۱) تعیین دامنه‌ی متغیر معادله

(۲) خارج کردن معادله از حالت گنگ، با به توان رساندن طرفین معادله

بعضی روش‌هایی که در حل معادلات گنگ کمک می‌نمایند را در زیر خواهیم دید:

برای حل معادلات با فرجه‌ی زوج، ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را معین کرده، سپس با به توان فرجه رساندن طرفین معادله، معادله‌ی ای را نتیجه می‌گیریم، با حل این معادله، ریشه‌هایی که در حوزه‌ی تعریف معادله‌ی اولیه هستند، ریشه‌ی معادله می‌باشند. شکل غالب این گونه معادلات به صورت زیر است:

معادله	شرایط (حوزه‌ی تعریف)	معادله‌ی تبدیل یافته	توضیح
(۱) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$	$f(x) = g(x)$	طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم
(۲) $\sqrt{f(x)} = g(x)$	$f(x) \geq 0 \cap g(x) \geq 0$	$f(x) = g^2(x)$	طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

معادله درجه دوم

مثال: معادله $\sqrt{x+2} = x$ را حل کنید.

حل: دامنه متغیر معادله از اشتراک شرایط $x+2 \geq 0$ یا $x \geq -2$ و $x \geq 0$ (سمت راست معادله) به دست می آید، در نتیجه $x \geq 0$ است. حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+2=x^2 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow (x-2)(x+1)=0 \rightarrow x=2 \text{ یا } x=-1$$


که تنها $x=2$ با توجه به حوزه تعریف معادله، قابل قبول است.

تذکره (۹): در بعضی از معادلات گنگ، می‌توان با انتخاب متغیر جدیدی، معادله را به معادلات ساده‌تر و یا گاهی معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد و آن را حل نمود.

تابع درجه‌ی دوم


هر تابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ نمایش یک تابع درجه‌ی دوم است.
ماکزیمم یا می‌نیمم

$a > 0$



تابع می‌نیمم‌دار

$a < 0$



تابع ماکزیمم‌دار

ماکزیمم یا می‌نیمم مقدار تابع درجه‌ی دوم در نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید:

الف - اگر $a > 0$ تابع می‌نیمم‌دار است و می‌نیمم آن $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ است.

ب - اگر $a < 0$ تابع ماکزیمم‌دار است و ماکزیمم آن $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ است.

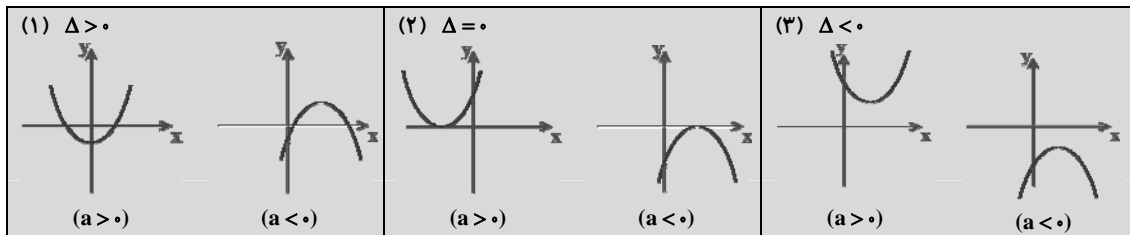
تذکره (۱۰): در تابع درجه‌ی دوم $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

محور تقارن

محور تقارن تابع خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که از نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) عبور می‌کند.

نمودار تابع درجه‌ی دوم

نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به شرایط a و Δ به صورت‌های زیر است:



توجه: برای پیدا کردن شکل دقیق علاوه بر a و Δ ، به اطلاعات دیگری نیز نیاز داریم.

تذکره (۱۱): در نقطه‌ی \min یا \max خط $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ بر منحنی تابع مماس است. هرگاه خطی بر یک منحنی مماس شود، معادله‌ی تلاقی خط و منحنی، دارای ریشه‌ی مضاعف است.

تذکره (۱۲): با توجه به حالت (۱)، اگر $ac < 0$ ، آنگاه نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند (چرا؟)

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + 4x - 1$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

حل: چون $ac = -1 < 0$ ، پس نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

تذکره (۱۳): با توجه به حالت (۲).

الف - اگر $a > 0$ و $\Delta = 0$ ، تابع از بالا بر محور x مماس است.

ب - اگر $a < 0$ و $\Delta = 0$ ، تابع از پایین بر محور x مماس است.

تذکره (۱۴): با توجه به حالت (۳).

الف - اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ ، یعنی تابع همواره بالای محور x هاست.

معادله درجه دوم

ب- اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ ، یعنی تابع همواره پائین محور x هاست.

شکل‌های دیگر تابع درجه‌ی دوم

به دو شکل زیر در تابع درجه‌ی دوم و نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم آن توجه کنید.

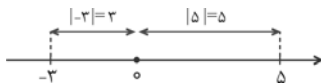
(۱) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم (h, k) است.

(۲) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ است.

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

تابع قدر مطلق

نمودار توابع قدر مطلق



تعریف: اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a برابر است با:

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

نکته: $|x|$ ، فاصله‌ی متغیر x روی محور اعداد تا مبدأ است (به شکل بالا توجه کنید). به همین ترتیب $|x-4|$ فاصله‌ی نقطه‌ی x تا ۴ است.

■ مثال: عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

(a) $||-6| - |-4||$

(b) $|\sin x - 2|$

◀ حل: (a) $|-6|=6$ و $|-4|=4$ ، پس $|-6-4|=|-10|=10$.

(b) از آنجایی که $-1 \leq \sin x \leq 1$ پس $-3 \leq \sin x - 2 \leq -1$ ، لذا $|\sin x - 2| = -(\sin x - 2)$

تساوی‌های قدر مطلق

هنگام کار با قدرمطلق خواص و ویژگی‌هایی وجود دارند که در زیر خلاصه شده است:

خاصیت	مثال	توضیح
(۱) $ a \geq 0$	$ -3 = 3 > 0$	قدرمطلق هر عددی همواره نامنفی است. قدرمطلق حاصلضرب برابر است با حاصلضرب قدرمطلق‌ها
(۲) $ a = -a $	$ 1-x = x-1 $	
(۳) $\sqrt{a^2} = a $	$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = x-1 $	
(۴) $ ab = a b $	$ -2 \times 5 = -2 5 = 2 \times 5 = 10$	
(۵) $\frac{ a }{ b } = \frac{ a }{ b }$ ، $b \neq 0$	$\frac{ x-1 }{ x-2 } = \frac{ x-1 }{ x-2 }$ ، $x \neq 2$	

نامساوی‌های قدر مطلق

خواص زیر در نامساوی‌های قدرمطلق برقرار هستند: ($a > 0$)

نامساوی	شکل معادله	نامساوی معادل
(۱) $ x < a$	$-a < x < a$	$\bullet x^2 < a^2$
(۲) $ x \leq a$	$-a \leq x \leq a$	$\bullet x^2 \leq a^2$
(۳) $ x > a$	$x < -a$ یا $x > a$	$\bullet x^2 > a^2$
(۴) $ x \geq a$	$x \geq a$ یا $x \leq -a$	$\bullet x^2 \geq a^2$

■ مثال: نامساوی‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید:

(a) $|x-1| < 2$

(b) $|3x+1| \geq 5$

◀ حل: (a) با توجه به قاعده‌ی (۱)، $-2 < x-1 < 2$ ، پس $-1 < x < 3$.

(b) با توجه به قاعده‌ی (۴)، $3x+1 \geq 5$ یا $3x+1 \leq -5$ بنابراین $x \geq \frac{4}{3}$ یا $x \leq -2$.

معادله درجه دوم

◀ **تذکره (۱۵):** برای هر عدد حقیقی a ، می‌توان نشان داد که $-|a| \leq a \leq |a|$.

نامساوی مثلثی

با استفاده از جدول نامساوی‌ها، می‌توانیم تعداد دیگری از نامساوی‌های قدرمطلق را بیابیم، مهم‌ترین آن‌ها، نامساوی مثلثی است.

نامساوی مثلثی: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

تساوی زمانی امکان‌پذیر است که $ab \geq 0$.

👉 **توجه:** با انتخاب $a = x - y$ و $b = y$ و قرار دادن در نامساوی به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$|(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y|$$

نمودار توابع قدرمطلق

روش کلی رسم: برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق، باید تابع را به ازای ریشه (ریشه‌های) داخل قدرمطلق، ضابطه‌بندی نمود، سپس تابع به‌دست آمده را، به ازای بازه‌های مورد نظر رسم کنیم.

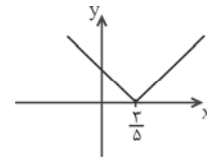
■ **مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید:

(a) $y = |\Delta x - 3|$ (b) $y = x + |x|$

◀ **هله:** (a) ریشه‌ی داخل قدرمطلق $\frac{3}{\Delta}$ است، پس دو بازه در نظر می‌گیریم:

$$y = |\Delta x - 3| = \begin{cases} \Delta x - 3, & x \geq \frac{3}{\Delta} \\ 3 - \Delta x, & x < \frac{3}{\Delta} \end{cases}$$

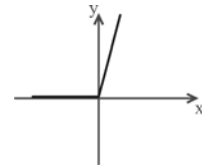
نقاط کمکی $\rightarrow (\frac{3}{\Delta}, 0)$, $(2, 7)$
نقاط کمکی $\rightarrow (\frac{3}{\Delta}, 0)$, $(0, 3)$



(b) ریشه‌ی داخل قدرمطلق (0) است، پس دو بازه در نظر می‌گیریم:

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x, & x \geq 0 \\ x - x = 0, & x < 0 \end{cases}$$

نقاط کمکی $\rightarrow (0, 0)$, $(1, 2)$

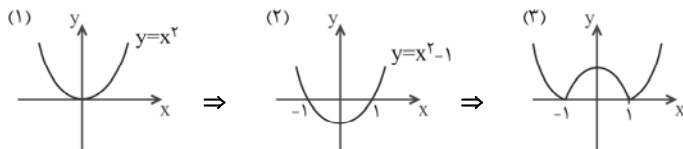


رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$

برای رسم تابع $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار که در زیر محور x هستند را، نسبت به محور x ها قرینه کرده و قسمت پایین محور x ها را حذف می‌کنیم.

■ **مثال:** نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم کنید.

◀ **هله:** ابتدا تابع $y = x^2$ را رسم می‌کنیم (۱). سپس این تابع را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $y = x^2 - 1$ به‌دست آید (۲) و در مرحله آخر قسمت پایین محور x ها را قرینه می‌کنیم:

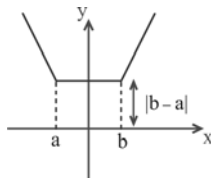


رسم دو تابع خاص

۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x - a| + |x - b|$ ($a < b$)

برای رسم نمودار این تابع با ضابطه‌بندی به ازای ریشه‌های داخل قدر مطلق داریم:

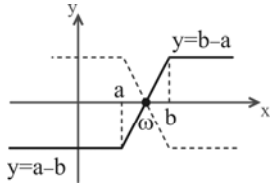
x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
y	$y = -2x + a + b$		$y = b - a$	$y = 2x - a - b$



نمودار تابع از یک پاره‌خط موازی محور x ها به طول $b - a$ و دو نیم خط به شیب‌های (۲) و (-۲) تشکیل شده است. تابع دارای محور تقارنی به

معادله‌ی $x = \frac{a+b}{2}$ است.

برای رسم نیازی به تشکیل جدول نیست. ریشه‌های داخل قدرمطلق را بیابید و مقدار تابع را در آن نقاط محاسبه کرده، پاره‌خط موازی محور Xها به دست می‌آید. سپس دو نیم خط به شیب‌های (۲) و (-۲) را رسم کنید.



۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x - a| - |x - b|$ ($a < b$)

با ضابطه‌بندی به ازای ریشه‌های داخل قدرمطلق داریم:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
y		$y = a - b$	$y = 2x - a - b$	$y = b - a$

در حالتی که $a > b$ باشد، شکل نقطه‌چین به دست می‌آید. این تابع مرکز تقارنی به مختصات $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ دارد.



به معادلاتی که شامل عبارت‌های قدر مطلق هستند، معادله‌ی قدرمطلق می‌گوییم. در زیر نمونه‌هایی از معادلات قدرمطلق آورده شده است:
 $|x-1|=3$ ، $|x-5|=|x-2|$ ، $|x+1|+|x-2|=5$

روش های حل معادلات قدر مطلق

۱- روش کلی حل: برای حل یک معادله‌ی قدر مطلق، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه‌های داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم و با حذف قدرمطلق، معادله‌ی حاصل را حل کنیم. جواب‌هایی قابل قبول هستند که در بازه‌ی اختیاری، صدق کنند.

■ مثال: معادله‌ی $|x-2|+|x-3|=1$ را حل کنید.

◀ حل: ریشه‌ی داخل قدر مطلق $x=3$ است، پس
 (قابل قبول) $x \geq 3: x-2+(x-3)=1 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$

همواره برقرار است $x < 3: x-2-(x-3)=1 \rightarrow 1=1$

پس مجموعه‌ی جواب معادله $\{3\} \cup \{x < 3\}$ یا بازه‌ی $(-\infty, 3]$ است.

۲- استفاده از خواص و ویژگی های قدرمطلق

برای حل بعضی از معادلات قدرمطلق، می‌توانیم از حل معادلات معادل آن یا خواص قدرمطلق استفاده کنیم و جواب‌های آن معادله را بیابیم. در زیر تعدادی از این معادلات دیده می‌شود.

معادله‌ی اصلی	معادله‌ی معادل	جواب کلی	مثال
(۱) $ x =a$	$x^2 = a^2$	$x = \pm a$	$ x-3 =2 \Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow x = 5, 1$
(۲) $ u = v $	$u^2 = v^2$	$u = \pm v$	$ x-3 = x \Rightarrow x-3 = \pm x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
(۳) $ u =v$	$u^2 = v^2, v \geq 0$	$u = \pm v, v > 0$	$ 2x-3 =x \Rightarrow 2x-3 = \pm x, x \geq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=x \rightarrow x=3 \\ 2x-3=-x \rightarrow x=1 \end{cases}$
(۴) $ u =u$	-	$u \geq 0$	$ x-2 =x-2 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
(۵) $ u =-u$	-	$u \leq 0$	$ 2x-1 =1-2x \Rightarrow 2x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

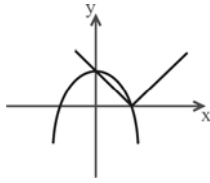
◀ تذکر (۱۶): اگر مجموع چند قدرمطلق صفر باشد، آنگاه هر کدام باید صفر باشند.

■ مثال: معادله‌ی $|x^2-1|+|x^2-3x+2|=0$ را حل کنید.

◀ حل: باید هر کدام از معادلات صفر باشند پس $x^2-1=0$ و $x^2-3x+2=0$. جواب‌های این معادلات به ترتیب $(x=1, x=-1)$ و $(x=1, x=2)$ هستند، باید جوابی بگیریم که هر دو را با هم صفر کند، پس $x=1$ جواب معادله است.

۳- استفاده از رسم نمودار

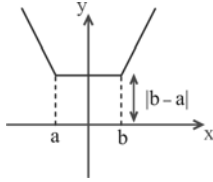
در بعضی از موارد برای تعیین تعداد ریشه‌های یک معادله‌ی قدرمطلق می‌توان از روش هندسی استفاده کرد. مبنای این روش استفاده از نقاط تقاطع دو منحنی است، در این حالت تابع قدرمطلق را یک طرف معادله و بقیه را در طرف دیگر قرار داده و توابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم، محل تلاقی دو نمودار ریشه‌های معادله است.



■ **مثال:** معادله $|x-1|+x^2=1$ چند جواب دارد؟

◀ **حل:** خواهیم داشت $|x-1|=1-x^2$ پس با رسم دو تابع $y_1=|x-1|$ و $y_2=1-x^2$ در یک دستگاه دیده می شود که معادله ۲ ریشه دارد.

◀ **تذکر (۱۷):** برای حل معادله $|x-a|+|x-b|=k$ ($a < b$)، نمودار $y=|x-a|+|x-b|$ و خط $y=k$ را با هم قطع می دهیم. با توجه به نمودار خواهیم داشت:



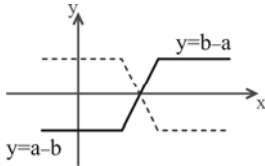
الف- $k > |b-a|$ معادله دو ریشه دارد.

ب- $k = |b-a|$ معادله بی شمار ریشه دارد.

ج- $k < |b-a|$ معادله ریشه ندارد.

به عنوان مثال در معادله $|x|+|x-1|=2$ چون $k=2 > b-a=1-0$ است. پس معادله دو ریشه دارد، هم چنین در معادله $|x|+|x-1|=1$ چون $k=b-a$ معادله بی شمار ریشه دارد.

◀ **تذکر (۱۸):** برای حل معادله $|x-a|-|x-b|=k$ ($a < b$)، نمودار $y=|x-a|-|x-b|$ و خط $y=k$ را با هم قطع می دهیم. با توجه به نمودار خواهیم داشت:



الف- اگر $a-b < k < b-a$ معادله یک ریشه دارد.

ب- اگر $k = \pm(b-a)$ معادله بی شمار ریشه دارد.

ج- اگر $k > |b-a|$ معادله ریشه ندارد.

نامعادلات قدر مطلق

هر نامعادله که شامل عبارات قدر مطلق باشد، یک نامعادله قدر مطلق نامیده می شود.

روش کلی حل: برای حل یک نامعادله قدر مطلق، باید عبارت را به ازای ریشه یا ریشه های داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم و با حذف قدرمطلق، نامعادله حاصل را حل کنیم، جواب به دست آمده را با بازه ای اختیار شده، اشتراک می گیریم.

■ **مثال:** نامعادله $|x-1| < 2x+1$ را حل کنید.

◀ **حل:** ریشه های داخل قدرمطلق $x=1$ است، پس:

$$x \geq 1: 2x+(x-1) < 1 \Rightarrow 3x-1 < 1 \rightarrow x < \frac{2}{3}$$

(اشتراکی ندارند)

$$x < 1: 2x-(x-1) < 1 \Rightarrow x+1 < 1 \rightarrow x < 0$$

(اشتراک دارند)

پس مجموعه جواب بازه $(-\infty, 0)$ است.

◀ **تذکر (۱۹):** در حل نامعادله های قدرمطلق می توانیم از نامساوی های قدرمطلق زیر استفاده کنیم:

$$(۱) \begin{cases} |x| \leq a \\ x^2 \leq a^2 \end{cases} \xrightarrow{a>0} -a \leq x \leq a$$

$$(۲) \begin{cases} |x| \geq a \\ x^2 \geq a^2 \end{cases} \xrightarrow{a>0} x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

تابع جزء صحیح

تعریف جزء صحیح و روابط موجود

تعریف: برای هر عدد حقیقی مانند x ، عدد منحصر بفرد n و عدد اعشاری p ($0 \leq p < 1$) وجود دارد که $x = n + p$ باشد، عدد صحیح n را با نماد $[x]$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر:

$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$

$$3 < 3/25 < 4 \rightarrow [3/25] = 3$$

به عنوان مثال برای عدد $3/25$ ، جزء صحیح عدد ۳ است زیرا:

$$-2 < -1/25 < -1 \rightarrow [-1/25] = -2$$

همچنین برای عدد $-1/25$ ، جزء صحیح عدد برابر (-2) است زیرا:

بنابراین طبق تعریف، جزء صحیح یک عدد، بزرگترین عدد صحیح نایبتر (کوچکتر یا مساوی) آن عدد است.

معادله درجه دوم

۱- تساوی های جزء صحیح

با استفاده از تعریف جزء صحیح، تساوی های زیر را خواهیم داشت:

خاصیت	مثال
(۱) $x \in \mathbb{Z}: [x] = x$	$[5] = 5$
(۲) $x \in \mathbb{Z}: [-x] = -x$	$[-3] = -[3] = -3$
(۳) $x \notin \mathbb{Z}: [-x] = -[x] - 1$	$[-3/25] = -[3/25] - 1 = -4$
(۴) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	
(۵) $[x+k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$	$[x+3] = [x] + 3$
(۶) $[x+[x]] = 2[x]$	$[2/5 + [2/5]] = 2[2/5] = 4$

■ **مثال:** حاصل $[\log_3^{28}]$ را بیابید.

◀ **حل:** باید ببینیم که \log_3^{28} بین کدام دو عدد متوالی است، از آنجایی که $3^3 < 28 < 3^4$ ، بنابراین $3 < \log_3^{28} < 4$ پس $[\log_3^{28}] = 3$.

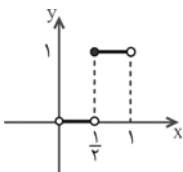
۲- نامساوی های جزء صحیح

با استفاده از تعریف جزء صحیح می توان نامساوی های زیر را ثابت کرد:

(۱) $[x] \leq x < [x] + 1$	(در تعریف به جای n ، $[x]$ قرار دهید)
(۲) $0 \leq x - [x] < 1$	(به طرفین نامساوی (۱)، $-[x]$ اضافه می کنیم)
(۳) $[x - [x]] = 0$	(در نامساوی (۲)، عددی بین صفر و یک را داریم)
(۴) $[x] \geq a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x \geq a$	
(۵) $[x] > a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x \geq a + 1$	
(۶) $[x] \leq a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x < a + 1$	
(۷) $[x] < a \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} x < a$	

نمودار تابع شامل جزء صحیح

فرض کنید می خواهیم نمودار تابع $y = [2x]$ را در بازه $(0, 1)$ رسم کنیم، اگر $0 < x < 1$ باشد آنگاه $0 < 2x < 2$ ، پس:



$$0 < 2x < 1 \rightarrow [2x] = 0 \text{ و } 0 < x < \frac{1}{4}$$

$$1 \leq 2x < 2 \rightarrow [2x] = 1 \text{ و } \frac{1}{4} \leq x < 1$$

◆ **نتیجه:** در نمودار تابع با ضابطه $y = [ax]$ ، طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ و ارتفاع آن ها (۱) است.

رسم نمودار تابع با ضابطه $y = [f(x)]$

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = [f(x)]$ ، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

الف - تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم.

ب - خطوط $y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را رسم می کنیم.

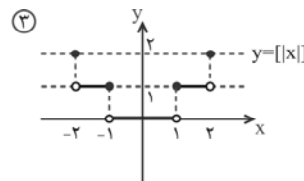
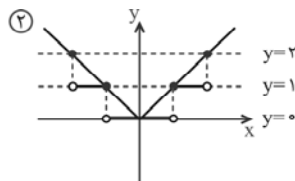
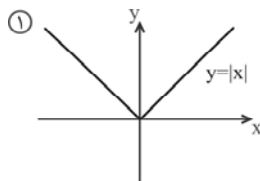
ج - قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ قرار می گیرد را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم.

د - در نقاط تلاقی خط و نمودار، نقطه توپر است.

■ **مثال:** نمودار تابع $y = [|x|]$ را در بازه $-2 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

◀ **حل:** نمودار $y = |x|$ در شکل (۱) رسم شده است، وقتی $-2 \leq x \leq 2$ است، آنگاه $0 \leq |x| \leq 2$ خواهد بود، پس سه خط $y = 0, y = 1$ و

$y = 2$ را داریم (شکل ۲)، با تصویر قسمت های بین نمودار و این خطوط شکل (۳) به دست می آید.



معادله درجه دوم

معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح

برای حل معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح، از تعریف و روابط و یا رسم نمودار استفاده می‌کنیم. به روابط زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} (1) [u] = k &\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq u < k + 1 & (4) [u] > a &\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} u \geq a + 1 \\ (2) [u] \geq a &\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} u \geq a & (5) [u] < a &\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} u < a \\ (3) [u] \leq a &\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} u < a + 1 & (6) [u] + [-u] &= \begin{cases} 0, & u \in \mathbb{Z} \\ -1, & u \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

■ **مثال:** معادله $\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x}{3}$ را حل کنید.

◀ **حل:** از آنجایی که $\left[\frac{x}{4}\right]$ عددی صحیح است پس $\frac{x}{3}$ نیز عددی صحیح خواهد بود لذا $\frac{x}{3} = k \in \mathbb{Z}$ و از آنجا $x = 3k$:

$$\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{x}{4} < \frac{x}{3} + 1 \xrightarrow{(2)} \underbrace{4x \leq 3x < 4x + 12}_{(1)}$$

دو نامعادله (1) و (2) را جداگانه حل می‌کنیم و مجموعه جواب آن را می‌یابیم، بنابراین $0 \leq x < 12$ ، اما x باید مضرب 3 باشد، بنابراین جواب‌های قابل قبول 0، -3، -6 و -9 خواهد بود.

■ **مثال:** نامعادله $[3x] > 4$ را حل کنید.

◀ **حل:** با استفاده از نامساوی (4)، $3x \geq 4 + 1$ ، لذا $3x \geq 5$ و از آنجا $x \geq \frac{5}{3}$.

تعریف: هر تابع که دامنه‌اش اعداد طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی نامیده می‌شود و به صورت $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود.

معمولاً جمله‌ی عمومی یک دنباله را با a_n نمایش می‌دهیم.

تذکره (۲۰): یک دنباله را با $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نمایش می‌دهیم. می‌توانیم به جای این نوع نمایش از نماد $\{a_n\}$ استفاده کنیم که نشانگر کلیه‌ی جملات دنباله از جمله‌ی اول تا بی‌نهایت است.

تذکره (۲۱): با داشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌توانیم خود دنباله را بنویسیم. به عنوان مثال در دنباله‌ی $\{n^2\}$ ، جملات دنباله به صورت زیر است:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

تذکره (۲۲): دنباله‌ی $\{c\}$ (c یک عدد حقیقی و ثابت است) را یک دنباله‌ی ثابت می‌نامیم.

تعریف ریاضی: دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به عدد L همگرا گوئیم هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \text{ و } n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

اندیس جمله

فاصله‌ی کلیه‌ی جملات از L



و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. به عدد L نقطه‌ی همگرایی دنباله نیز می‌گوییم.

قضیه اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حد آن یکتاست و داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

نتیجه‌ی کلی: اگر $\{a_n\}$ همگرا نباشد، آنگاه واگراست و به عبارت دیگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود ندارد. برای بررسی همگرایی و واگرایی یک دنباله

حالت کلی زیر را داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} = L \rightarrow \text{دنباله همگراست} & \text{مثال: } \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \\ = \infty & \text{مثال: } \left\{ \sqrt{n} \right\}, \left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\} \\ = \text{دو یا چند عدد متمایز} & \text{مثال: } \left\{ (-1)^n \right\}, \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \\ \text{عددی غیر مشخص باشد} & \text{مثال: } \{ \sin n \}, \{ \cos n \} \end{cases}$$

محاسبات همگرایی و واگرایی در دنباله‌ها

نکته ۱

هرچند جمله‌ای از x وقتی $x \rightarrow \infty$ ، هم‌ارز است با جمله‌ای که توان x در آن بزرگتر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_1 x^m + b_2 x^{m-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} \infty & , n > m \\ \frac{a_1}{b_1} & , n = m \\ 0 & , n < m \end{cases}$$

به عنوان مثال $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} = 0$ است.

معادله درجه دوم

نکته ۲

در دنباله‌ی $\{c^n\}$ (c یک عدد حقیقی و ثابت است)، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \begin{cases} = 0 & , |c| < 1 \\ = 1 & , c = 1 \\ = \text{واگرا} & , c = -1 \\ = \text{واگرا} & , |c| > 1 \end{cases}$$

مثال: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$

مثال: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log 20)^{n+1} = \infty$

نکته ۳

وقتی n سیر طبیعی خود را به بی‌نهایت طی کند، نامساوی‌های زیر همواره برقرار است:

$$n^n > n! > a^n > n^p > n > \sqrt{n} > \log n^k$$

$a > 1, p > 1$

به این نامساوی، نامساوی رشد گوئیم.

به عنوان مثال: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ (سرعت رشد صورت کم‌تر است) و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (سرعت رشد صورت کم‌تر است)

نکته ۴

از هم‌ارزی‌های زیر در تست‌ها می‌توان کمک گرفت:

(۱) $\sin u \approx u$
 $u \rightarrow 0$

(۲) $\tan u \approx u$
 $u \rightarrow 0$

(۳) $1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$
 $u \rightarrow 0$

(۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + an + b} \approx n + \frac{a}{2}$

یکنوایی و کران‌داری دنباله‌ها

دنباله‌ها

دنباله‌های یکنوا:

۱- دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی گویند هرگاه:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$$

یا

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

به عنوان مثال دنباله‌های $\{n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{2^n\}$ و $\{\log n\}$ همگی صعودی‌اند.

۲- دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی گویند هرگاه:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$$

یا

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

به عنوان مثال دنباله‌های $\{-n\}$ ، $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ، $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ و $\left\{\log \frac{n}{n+1}\right\}$ همگی نزولی‌اند.

۳- دنباله‌ی عدد ثابت $\{c\}$ را دنباله‌ای هم صعودی و هم نزولی گوئیم. به عنوان مثال $\{\sin n\pi\}$ یا $\{n - [n]\}$.

۴- دنباله‌ی نه صعودی و نه نزولی:

در سه حالت زیر دنباله نه صعودی و نه نزولی است:

الف - دنباله‌های نوسانی نه صعودی‌اند و نه نزولی. به عنوان مثال $\{(-1)^n\}$ ، $\left\{\sin \frac{n\pi}{2}\right\}$ و $\{\sin n\}$.

ب - هرگاه به ازای تعدادی جمله، دنباله صعودی و بعد نزولی باشد. به عنوان مثال دنباله‌ی $\{n^2 - 9n + 11\}$ به ازای $n \geq 5$ صعودی و به ازای $n \leq 4$ نزولی است. این دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

ج - دنباله‌هایی که مجانب قائم را در بین اعداد طبیعی می‌پذیرند. به عنوان مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ نه صعودی و نه نزولی است.

روش‌های تشخیص یکنوایی

برای بررسی یکنوایی توابع چند روش را مطرح می‌کنیم.

معادله درجه دوم

روش اول: مقایسه a_{n+1} و a_n (روش کتاب درسی)

در این روش $a_{n+1} - a_n$ را محاسبه می‌کنیم. اگر ≥ 0 شد دنباله صعودی و اگر ≤ 0 شد دنباله نزولی است. به عنوان مثال در دنباله $\{n^2\}$ داریم:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \rightarrow \text{دنباله صعودی است.}$$

روش دوم: استفاده از مشتق تابع حقیقی (خارج کتاب درسی)

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر به ازای $x \geq 1$ باشد، آنگاه اگر $f'(x) \geq 0$ تابع صعودی و لذا دنباله آن صعودی است، و اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع نزولی، لذا دنباله آن نیز نزولی است. به عنوان مثال دنباله $\left\{\frac{n+3}{n+1}\right\}$ نزولی است زیرا:

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \Big|_{x \geq 1} < 0$$

روش سوم: استفاده از قضایای یکنوایی (خارج کتاب درسی)

۱- اگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی (نزولی) باشد، دنباله $\{-a_n\}$ نزولی (صعودی) است.

۲- اگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی و مثبت باشد، دنباله $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ نزولی و مثبت است.

به عنوان مثال دنباله $\left\{\frac{-1}{n^3+3n}\right\}$ صعودی است زیرا دنباله n^3+3n صعودی و $\frac{1}{n^3+3n}$ نزولی و بنابراین $\frac{-1}{n^3+3n}$ صعودی است.

۳- اگر a_n و b_n دو دنباله صعودی باشند، $a_n + b_n$ نیز صعودی است.

به عنوان مثال دو دنباله $a_n = n$ و $b_n = \frac{-1}{n}$ هر دو صعودی‌اند، پس دنباله $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$ صعودی است.

دنباله‌های کران‌دار

معمولاً برای بررسی کران‌داری یک دنباله الگوی زیر قابل استفاده است:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} L \rightarrow \text{دنباله همگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{مثال: } \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \text{ و } \left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\} \\ \infty \rightarrow \text{بیکران} \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \begin{cases} -\infty \rightarrow \text{از بالا کران‌دار} \rightarrow \text{مثال: } \{-\sqrt{n}\} \\ +\infty \rightarrow \text{از پایین کران‌دار} \rightarrow \text{مثال: } \{\sqrt{n}\} \\ \pm\infty \rightarrow \text{از بالا و پایین بیکران} \rightarrow \text{مثال: } \{(-1)^n n\} \end{cases} \\ \left\{\sin \frac{n\pi}{2}\right\} \rightarrow \text{مثال} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \text{دو یا چند عدد متمایز} \\ \{\sin n\} \rightarrow \text{مثال} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{واگرا} \rightarrow \text{عددی سرگردان} \end{cases}$$

با توجه به الگوی بالا در حالتی که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ باشد، دنباله بیکران است.

◀ تذکر (۲۳): همگرایی دنباله شرط کافی برای کران‌داری است.

◀ تذکر (۲۴): هر دنباله یکنوای کران‌دار، همگراست.

در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت d ، مجموع n جمله‌ی اول آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1)$$

از آنجایی که $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، پس:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (2)$$

◀ تذکر (۲۵): از رابطه‌ی (۱) معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که جمله‌ی عمومی (a_n) داده شده باشد.

■ مثال: در دنباله‌ی عددی که جمله‌ی n ام $a_n = 5n - 2$ است، مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) \Rightarrow S_{10} = 5(2 + 48) = 5(50) = 250$$

◀ حل:

◀ تذکر (۲۶): از رابطه‌ی (۲) معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که a_1 و d موجود باشد یا رابطه‌ای بین جملات داده شده باشد.

■ مثال: جملات چهارم و شانزدهم از یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱ و ۲۵ است، مجموع ده جمله‌ی اول آن را بیابید.

◀ حل:

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_{16} = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + 15d = 25 \end{cases} \Rightarrow d = 2, a_1 = -5 \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) \Rightarrow S_{10} = 5(-10 + 18) = 40$$

◀ تذکر (۲۷): در یک دنباله‌ی حسابی، برای یافتن تعداد جملاتی که مجموع آن‌ها برابر مقدار معینی می‌شود، کافی است معادله‌ی S_n را بر حسب n (یک معادله‌ی درجه‌ی دوم) حل کنیم و n را بیابیم. (a_1 و d باید معلوم باشند).

■ مثال: مجموع چند جمله‌ی دنباله‌ی $15, 12, 9, \dots$ برابر صفر است؟

$$a_1 = 15, d = -3 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(15) + (n-1)(-3)) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(33 - 3n) = 0 \Rightarrow n = 11$$

◀ حل:

بدیهی است $n = 0$ غیر قابل قبول است.

◀ تذکر (۲۸): اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی S_n داده شده باشد آنگاه جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{aligned} \longrightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

مجموع جمله‌های هندسی

مجموع همه‌ی جمله‌های دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ها

مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت q ، مجموع n جمله‌ی اول آن، یعنی:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}, \quad q \neq 1$$

برابر است با:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

■ مثال: حاصل $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$ را به ازای $x = \sqrt{3}$ بیابید.

◀ حل: مجموع فوق، مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a = x$ و قدر نسبت $q = \frac{x^2}{x} = x$ است و تعداد جملات آن ۱۰ تا است.

$$S_{10} = \frac{x(1-x^{10})}{1-x} = \frac{\sqrt{3}[1-(\sqrt{3})^{10}]}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-3^5)}{1-\sqrt{3}}$$

پس:

◀ تذکر (۲۹): در یک دنباله‌ی هندسی، رابطه‌ی بین مجموع $2n$ جمله‌ی اول یعنی S_{2n} و مجموع n جمله‌ی اول یعنی S_n به صورت زیر است:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

اثبات: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ و $S_{2n} = \frac{a(1-q^{2n})}{1-q}$ ، با تقسیم و استفاده از اتحاد مزدوج به جواب می‌رسیم.

■ مثال: در یک دنباله هندسی با قدر نسبت $q=2$ ، مجموع شش جمله اول، چند برابر مجموع سه جمله اول است؟

$$\frac{S_6}{S_3} = 1+q^3 \rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 1+2^3 = 9$$

◀ حل:

حد مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی

اثبات: اگر $|q| < 1$ باشد، آنگاه:

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

$$S = a + q(a + aq + aq^2 + \dots)$$

$$S = a + qS \Rightarrow S - qS = a$$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{1-q}$$

اگر $|q| < 1$ ، مجموع همه جمله‌های دنباله هندسی $\{aq^{n-1}\}$ که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

برابر است با:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

در آن a جمله اول دنباله هندسی و q قدر نسبت آن است.

لذ توجه! در تست‌های کنکور سال‌های گذشته به جای «مجموع همه جملات» از «حد مجموع» استفاده شده است.

■ مثال: حد مجموع $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$ را بیابید.

◀ حل: با استفاده از فرمول بالا، از آنجایی که $a_n = \frac{2}{5^{n-1}}$ است، پس $a = 2$ و $q = \frac{1}{5}$ می‌باشد، پس:

$$S = \frac{a}{1-q} \Rightarrow S = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

کسر مولد اعداد اعشاری ساده و متناوب

◆ عدد $0.\overline{aa \dots a}$ را یک عدد اعشاری متناوب ساده می‌نامیم و به اختصار به صورت $0.\overline{a}$ نمایش می‌دهیم، اگر بخواهیم کسر مولد این عدد

$$0.\overline{a} = 0.\overline{aa \dots a} = \frac{a}{10^1} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \dots$$

اعشاری را بیابیم، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

که مجموع یک دنباله هندسی است با جمله اول $\frac{a}{10}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$ ، پس:

$$0.\overline{a} = \frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{a}{9}$$

به طور کلی:

$$0.\overline{D} = \frac{D}{9} \quad \text{به تعداد دور گردش 9}$$

به عنوان مثال: $0.\overline{12} = \frac{12}{99}$ و $0.\overline{153} = \frac{153}{999}$.

یک روش دیگر یافتن کسر مولد عدد $0.\overline{a}$ ، فرض کنیم $0.\overline{a} = A$ ، طرفین رابطه را در 10 ضرب می‌کنیم، لذا داریم:

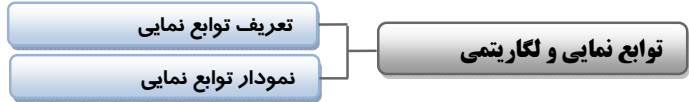
$$\begin{cases} (1) a.\overline{a} = 10A \\ (2) 0.\overline{a} = A \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} a = 10A - A \Rightarrow A = \frac{a}{9}$$

◆ عدد $0.\overline{abbb \dots b}$ را یک عدد اعشاری متناوب مرکب می‌نامیم و به اختصار به صورت $0.\overline{a}b$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$0.\overline{a}b = \frac{a}{10^1} + \frac{b}{10^2} + \frac{b}{10^3} + \dots = \frac{a}{10} + \frac{10^2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{a}{10} + \frac{b}{9}$$

دنباله روبرو یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{b}{100}$ و قدر نسبت $\frac{1}{10}$ است، پس:

$$0.\overline{L}D = \frac{LD-L}{9} \quad \text{به تعداد دور گردش 9 و به تعداد عدد ثابت صفر}$$



تعریف: تابع نمایی به پایه a به صورت $f(x) = a^x$ تعریف می‌شود که $a > 0$ و $a \neq 1$ و x یک عدد حقیقی است.

دقت کنید که شرط $a \neq 1$ به این دلیل است که $f(x) = 1^x = 1$ ، یک تابع ثابت است.

نمودار توابع نمایی

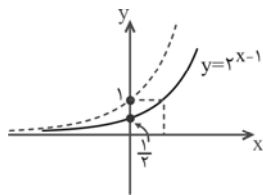
نمودار $y = a^x$	
	اگر $a > 1$ باشد
نمودار	
دامنه	$R =$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی
برد	بازه‌ی $(0, +\infty)$
خاصیت	با افزایش x از چپ به راست، y افزایش می‌یابد. تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است.
	اگر $0 < a < 1$ باشد
نمودار	
دامنه	$R =$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی
برد	بازه‌ی $(0, +\infty)$
خاصیت	با افزایش x از چپ به راست، y کاهش می‌یابد. تابع یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است.

تذکره (۱۳۰): با استفاده از خواص انتقال، می‌توانیم نمودار بعضی از توابع نمایی را رسم کنیم.

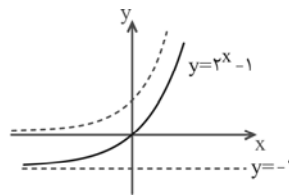
مثال: نمودار توابع $y = 2^{x-1}$ و $y = 2^x - 1$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $y = 2^{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y = 2^x$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. (شکل ۱)

همچنین برای رسم تابع $y = 2^x - 1$ ، کافی است نمودار تابع $y = 2^x$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. (شکل ۲)



(شکل ۱)



(شکل ۲)

توجه: عدد e را عدد نپر می‌نامیم، می‌توان ثابت کرد که $e \approx 2.71$ ، پس نمودار تابع $y = e^x$ شبیه نمودار تابع $y = a^x$ در حالت $a > 1$ است.



تعریف: اگر a عددی مثبت و $a \neq 1$ باشد، تابع لگاریتمی به پایه a با نماد \log_a نمایش داده می‌شود و داریم:

$$\log_a^x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

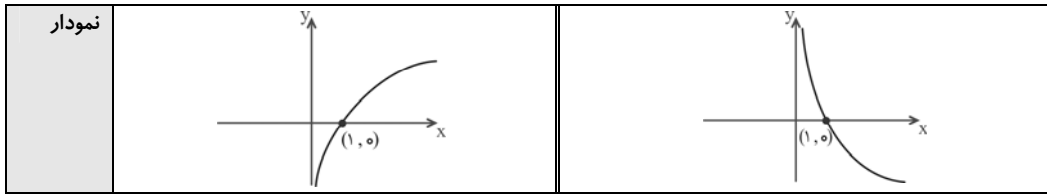
تذکره (۱۳۱): به دو خاصیت زیر توجه کنید:

- (۱) $\log_a^1 = 0$
- (۲) $\log_a^a = 1$ ($a > 0, a \neq 1$)

توجه: \log_e^x را لگاریتم طبیعی می‌نامیم و با نماد $\ln x$ نمایش می‌دهیم.

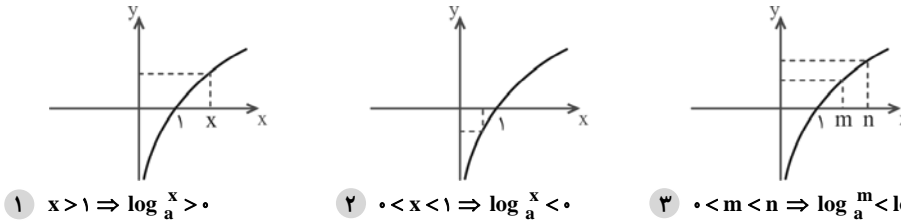
نمودار تابع لگاریتمی

$y = \log_a^x, a > 1$	$y = \log_a^x, 0 < a < 1$
-----------------------	---------------------------



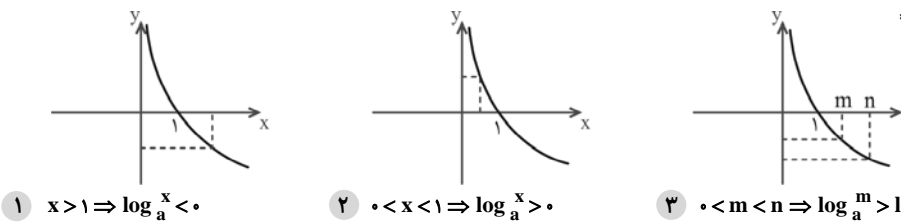
نامساوی‌های لگاریتمی

با توجه به نمودار تابع‌های $y = \log_a x$ در دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ ، می‌توان درستی نامساوی‌های زیر را دید:
الف - اگر $a > 1$ باشد، آنگاه:



- ۱ $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$ ۲ $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$ ۳ $0 < m < n \Rightarrow \log_a^m < \log_a^n$

ب - اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه:



- ۱ $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$ ۲ $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$ ۳ $0 < m < n \Rightarrow \log_a^m > \log_a^n$

قوانین لگاریتمی توابع نمایی و لگاریتمی

در این بخش خواص و قوانینی را در لگاریتم می‌بینیم، این خواص به ما در محاسبات لگاریتم و حل معادلات آن‌ها کمک می‌نماید.

■ **مثال:** اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ آنگاه مطلوبست:

◀ **حل:**

(۱) $\log 6$

$\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = a + b$

(۲) $\log 5$

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

(۳) $\log 8$

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3a$

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد و n عددی حقیقی و A و B اعداد مثبت باشند، آنگاه:

① $\log_a^{(AB)} = \log_a^A + \log_a^B$ (قانون ضرب)

② $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a^A - \log_a^B$ (قانون تقسیم)

③ $\log_a^{A^n} = n \log_a^A$ (قانون توانی)

◀ **تذکر (۱۳۲):** توجه کنید وقتی پایه‌ی لگاریتم نوشته نمی‌شود، یعنی پایه‌ی آن (۱۰) است.

◀ **تذکر (۱۳۳):** دقت کنید که $\log(x+y) \neq \log x + \log y$ و $\log \frac{x}{y} \neq \frac{\log x}{\log y}$.

◀ **تذکر (۱۳۴):** قانون توانی را می‌توان تعمیم داد و قانون زیر را نتیجه گرفت:

④ $\log_a^{A^n} = \frac{n}{m} \log_a^A$

■ **مثال:** حاصل $\log_{81} \sqrt[3]{3}$ را بیابید.

◀ **حل:**

معادله درجه دوم

$$\log_{\sqrt{3}}^{-1} = \log_{3^{\frac{1}{2}}}^{-1} = \log_{3^{\frac{2}{4}}}^{-1} = \frac{2}{4} \log_3^{-1} = \frac{-1}{2}$$

قوانین تغییر مبنا

در خیلی از موارد، نیاز داریم که پایه‌ی لگاریتم را با عدد دیگری، غیر از عدد داده شده بیان کنیم، برای این منظور از قانون تغییر مبنا استفاده می‌کنیم.

■ **مثال:** اگر $\log_5 a = a$ ، آنگاه $\log_2 a$ را بر حسب a بیابید.

◀ **حل:**

$$\log_5 a = \log_{\frac{1}{2}} a = \log_{10} a - \log_2 a$$

$$\Rightarrow a = 1 - \log_2 a \Rightarrow \log_2 a = 1 - a$$

با توجه به قانون تغییر مبنا:

$$\log_2 a = \frac{\log_5 a}{\log_5 2} = \frac{1 - a}{a}$$

اگر $a > 0$ ، $b > 0$ و $c > 0$ و $b, c \neq 1$ ، آنگاه:

$$\textcircled{5} \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

◀ **تذکر (۱۳۵):** با توجه به قانون تغییر مبنا می‌توانیم روابط زیر را بیابیم:

◉

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

◉

$$\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$$

■ **مثال:** اگر $\log_4^5 = a$ باشد، \log_5^4 را بر حسب a بیابید.

◀ **حل:**

$$\log_4^5 = a \rightarrow \log_5^4 = \frac{1}{a} \rightarrow \log_4^{5 \times 4} = \log_4^5 + \log_4^4 = \frac{1}{a} \rightarrow 1 + \log_4^5 = \frac{1}{a} \rightarrow \log_4^5 = \frac{1}{a} - 1$$

قوانین نمایی

با توجه به رابطه‌ی $\log_a^x = y$ داریم، $x = a^y$ ، با قرار دادن به جای y در این رابطه‌ی توانی داریم $x = a^{\log_a^x}$ ، بنابراین قانون زیر را خواهیم داشت:

■ **مثال:** حاصل $\sqrt{5^{\log_5^6}}$ را بیابید.

◀ **حل:** ابتدا باید پایه‌ها را یکی کنیم لذا:

$$5^{\frac{1}{2} \log_5^6} = 5^{\log_5^{\sqrt{6}}} = \sqrt{6}$$

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\textcircled{8} a^{\log_a^n} = n$$

که در آن $n > 0$ است.

◀ **تذکر (۱۳۶):** با توجه به قانون نمایی می‌توان قانون زیر را نتیجه گرفت:

◉

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

معادلات نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی و لگاریتمی

معادلات نمایی

در حل معادلات نمایی به حالت‌هایی برمی‌خوریم که دو حالت آن در زیر بررسی می‌شود. در حد برنامه‌ی کتاب درسی دبیرستان ما با معادلات نمایی به شکل کلی $a^{f(x)} = b$ و یا $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ رو به رو هستیم. برای حل این گونه معادلات روش‌های زیر را خواهیم داشت:

(۱) اگر بتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم

حل این نوع معادلات بر این موضوع استوار است که اگر پایه‌ها برابر باشند، آنگاه نماها با هم برابر خواهند بود.

■ **مثال:** معادله‌ی $27^{2x} = 9^{5x-1}$ را حل کنید.

◀ **حل:**

$$(3^3)^{2x} = (3^2)^{5x-1} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{10x-2} \Rightarrow 6x = 10x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(۲) اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم

برای حل معادله‌ی $a^{f(x)} = b$ ، اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم، از دو طرف معادله در پایه‌ی a لگاریتم می‌گیریم.

معادله درجه دوم

■ **مثال:** معادله $\delta^x = 4$ را حل کنید.

◀ **حل:** $\delta^x = 4 \xrightarrow{\text{از طرفین در پایه ۵ لگاریتم می‌گیریم}} \log_5 \delta^x = \log_5 4 \Rightarrow x \log_5 \delta = \log_5 4 \Rightarrow x = \log_5 4$

(۳) **معادلاتی که با تغییر متغیر حل می‌شوند**

در این حالت برای حل معادله $f(a^{u(x)}) = 0$ ، معمولاً قرار می‌دهیم $a^{u(x)} = y$ و معادله $f(y) = 0$ را نسبت به y حل می‌کنیم و سپس مقادیری که برای y پیدا شده است را در $a^{u(x)} = y$ قرار می‌دهیم و x را پیدا می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله $49^x + 7^x - 2 = 0$ را حل کنید.

◀ **حل:** $(7^2)^x + 7^x - 2 = 0 \Rightarrow 7^{2x} + 7^x - 2 = 0$

با فرض $y = 7^x > 0$ ، به معادله $y^2 + y - 2 = 0$ می‌رسیم که جواب‌های آن $y = 1$ و $y = -2$ است که فقط $y = 1$ قابل قبول است و از آنجا $7^x = 1$ و $x = 0$.

معادلات لگاریتمی

منظور از حل یک معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق می‌کند.

در حل معادلات لگاریتمی به نکات زیر توجه می‌کنیم:

(۱) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم.

(۲) اگر از خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنید، ممکن است جواب خارجی ظاهر شود باید این جواب با توجه به دامنه‌ی تعریف معادله، از مجموعه جواب‌ها کسر گردد.

در حل معادلات لگاریتمی به حالت‌های زیر برمی‌خوریم:

(۱) **معادلاتی به شکل کلی $\log_a f(x) = b$**

برای حل این گونه معادلات با استفاده از ارتباط لگاریتم و توان، به تساوی $f(x) = a^b$ می‌رسیم. این معادله را با توجه به شرایط $f(x) > 0$ ، $a > 0$ و $a \neq 1$ حل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله $\log_7 (x^2 - 3) = 2$ را حل کنید.

◀ **حل:** اولاً باید $x^2 - 3 > 0$ پس $x > \sqrt{3}$ یا $x < -\sqrt{3}$ و از طرفی $x^2 - 3 = 7^2$ و از آنجا $x^2 = 7$ ، $x = \sqrt{7}$ و $x = -\sqrt{7}$ که هر دو قابل قبول‌اند.

(۲) **معادلاتی به شکل کلی $\log_a f(x) = \log_a g(x)$**

برای حل این گونه معادلات از تساوی $f(x) = g(x)$ ، ریشه‌های معادله را یافته و شرایط $f(x) > 0$ ، $g(x) > 0$ ، $a > 0$ و $a \neq 1$ را بررسی می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله $\log_7 x^2 - 3 = \log_7 2x$ را حل کنید.

◀ **حل:** باید $x^2 - 3 = 2x$ ، با حل معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ ، ریشه‌های معادله $x = 3$ و $x = -1$ خواهند بود، اما $x = -1$ قابل قبول نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است.

(۳) **معادلاتی که با استفاده از قوانین لگاریتم به یکی از دو حالت (۱) یا (۲) تبدیل می‌شوند:**

برای حل این گونه معادلات با استفاده از قوانین لگاریتم، معادله را به یکی از دو شکل (۱) یا (۲) تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله $\log(x+1) + \log(x-1) = 2$ را حل کنید.

◀ **حل:** با استفاده از قانون $\log AB = \log A + \log B$ داریم:

$\log(x^2 - 1) = 2 \xrightarrow{\text{نوع (۱)}} x^2 - 1 = 10^2 \rightarrow x^2 = 101 \rightarrow x = \sqrt{101}$ و $x = -\sqrt{101}$

که جواب $x = -\sqrt{101}$ قابل قبول نیست، زیرا لگاریتم مقادیر منفی قابل تعریف نیست.

(۴) **معادلات لگاریتمی که با تغییر متغیر حل می‌شوند:**

برای حل معادله $f(\log_a x) = 0$ ، معمولاً قرار می‌دهند $\log_a x = y$ و معادله $f(y) = 0$ را نسبت به y حل می‌کنند و مقادیری را که برای y پیدا شده در معادله $\log_a x = y$ قرار می‌دهند و x را می‌یابند.

■ **مثال:** معادله $\log^2 x - 2 \log x + 1 = 0$ را حل کنید.

◀ **حل:** دامنه‌ی تعریف معادله $(0, +\infty)$ است، قرار می‌دهیم $\log x = y$ ، داریم:

$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

معادله درجه دوم

$$y_1 = 1 - \log 3 \quad \text{و} \quad y_2 = 1 + \log 3$$

$$\begin{cases} \log x = 1 - \log 3 \Rightarrow \log x = \log \frac{10}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} \\ \log x = 1 + \log 3 \Rightarrow \log x = \log 30 \Rightarrow x_2 = 30 \end{cases}$$

پس:

(۵) معادلاتی که با گرفتن لگاریتم از طرفین حل می‌شوند.

این روش در معادلاتی کاربرد دارد که در طرفین معادله، عملیاتی از قبیل توان و ریشه‌گیری صورت گرفته باشد.

■ مثال: معادله $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = x$ را حل کنید.

◀ حل: از طرفین معادله در پایه‌ی ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = \log x \Rightarrow \frac{1}{2} \log x^{\log \sqrt{x}} = \log x \Rightarrow \frac{1}{2} \log \sqrt{x} \times \log x = \log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log x \right) (\log x) = \log x \Rightarrow \frac{1}{4} \log^2 x - \log x = 0 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{4} \log x - 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \log x = 4 \Rightarrow x_2 = 10^4 \end{cases}$$

نامعادلات نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی و لگاریتمی

نامعادلات نمایی: برای حل نامعادلات نمایی، ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کنیم، سپس اگر پایه بزرگتر از ۱ بود در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود و اگر پایه بین صفر و یک بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض می‌شود.

■ مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

$$(a) \quad 32^{-2x} < \frac{1}{8} \qquad (b) \quad (\sqrt{3}-1)^{x^2} \geq (\sqrt{3}-1)^x$$

◀ حل:

$$(a) \quad 32^{-2x} < \frac{1}{8} \Rightarrow (2^5)^{-2x} < 2^{-3} \Rightarrow 2^{-10x} < 2^{-3} \Rightarrow -10x < -3 \Rightarrow x > \frac{3}{10}$$

(b) از آنجایی که $0 < \sqrt{3}-1 < 1$ ، پس با برداشتن پایه‌ها، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

نامعادلات لگاریتمی: برای حل نامعادلات لگاریتمی به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف - دامنه‌ی متغیر نامعادله را می‌یابیم.

ب - اگر پایه (a) بزرگتر از یک باشد جهت نامساوی در برداشتن لگاریتم یا تبدیل آن به توان عوض نمی‌شود (تابع صعودی است) اگر پایه

(a) بین صفر و یک باشد جهت نامساوی در برداشتن لگاریتم یا تبدیل آن به توان عوض می‌شود (تابع نزولی است).

■ مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

$$(a) \quad \log(\delta - 3x) < 0 \qquad (b) \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

◀ حل: (a) دامنه‌ی متغیر نامعادله $\delta - 3x > 0$ یا $x < \frac{\delta}{3}$ است، از طرفی پایه‌ی لگاریتم بزرگتر از یک است، پس در تبدیل لگاریتم به توان

$$\log(\delta - 3x) < 0 \Rightarrow \delta - 3x < 10^0 \Rightarrow \delta - 3x < 1 \Rightarrow x > \frac{\delta - 1}{3}$$

از اشتراک $x > \frac{\delta - 1}{3}$ و $x < \frac{\delta}{3}$ ، مجموعه جواب نامعادله $\frac{\delta - 1}{3} < x < \frac{\delta}{3}$ است.

(b) ابتدا دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 2x-3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2} \\ x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > \frac{3}{2} \quad (1)$$

از طرفی پایه کوچکتر از یک است، پس در برداشتن لگاریتم‌ها از طرفین جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$2x-3 < x+1 \rightarrow x < 4 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، مجموعه جواب نامعادله $\left\{ x : \frac{3}{2} < x < 4 \right\}$ است.

عدد e

می‌توان ثابت کرد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ و به طور کلی خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{an+b}\right)^{cn+d} = e^{\frac{ck}{a}}$$

تابع رشد و زوال

تعریف: تابع با ضابطه‌ی $p(t) = p(0)e^{kt}$ را تابع نمایی رشد با نسبت افزایش k برای $(k > 0)$ و تابع نمایی زوال با نسبت کاهش k برای $(k < 0)$ می‌نامیم، در این تابع $p(0)$ مقدار اولیه در $t = 0$ است:

الف- اگر $(k > 0)$ تابع اکیداً صعودی است.

ب- اگر $(k < 0)$ تابع اکیداً نزولی است.

معادلات مثلثاتی

معادلات اصلی

منظور از حل یک معادله‌ی مثلثاتی آن است که پس از محاسبات جبری، معادله را به یکی از شکل‌های اصلی $\sin x = \sin \alpha$ ، $\cos x = \cos \alpha$ ، $\tan x = \tan \alpha$ و $\cot x = \cot \alpha$ تبدیل کنیم و کلیه‌ی جواب‌های آن‌ها را بیابیم.
 < تذکر (۳۷) > در جدول زیر جواب‌های کلی معادلات فوق بیان شده است:

شکل معادله	جواب کلی $(k \in \mathbb{Z})$	جواب روی دایره‌ی مثلثاتی	حالت‌های خاص $(k \in \mathbb{Z})$
$\sin x = a = \sin \alpha$ $-1 \leq a \leq 1$	$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$		$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
$\cos x = a = \cos \alpha$ $-1 \leq a \leq 1$	$x = 2k\pi \pm \alpha$		$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$
$\tan x = a = \tan \alpha$	$x = k\pi + \alpha$		$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$
$\cot x = a = \cot \alpha$	$x = k\pi + \alpha$		$\cot x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

■ مثال: معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

◀ حل: از آنجایی که $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ، پس معادله‌ی $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ را خواهیم داشت و جواب‌های آن $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ خواهد بود.

< تذکر (۳۸) > در معادلات بالا می‌توانیم به جای x ، کمان دلخواه β را داشته باشیم.

■ مثال: جواب کلی معادله‌ی $\cos 4x = \cos x$ را بیابید.

معادله درجه دوم

$$\varphi x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} \varphi x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{\varphi} \\ \varphi x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{\delta} \end{cases} \quad \leftarrow \text{حل:}$$

◀ **تذکر (۱۳۹):** در معادلاتی به شکل کلی $\sin \alpha = \cos \beta$ یا $\tan \alpha = \cot \beta$ با استفاده از فرمول‌های تبدیل $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ، دو طرف را به دو نسبت مثلثاتی هم‌نام تبدیل می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله $\cos 3x = \sin x$ را حل کنید.

$$\cos 3x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \leftarrow \text{حل:}$$

◀ **تذکر (۱۴۰):** وقتی تعداد جواب‌های یک معادله را در یک بازه می‌خواهند، ابتدا جواب کلی معادله را یافته و سپس به ازای مقادیر صحیح $k \in \mathbb{Z}$ (..., -2, -1, 0, 1, 2, ...) جواب‌های قابل قبول معادله را می‌یابیم.

■ **مثال:** معادله $\tan 2x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

◀ **حل:** از آنجایی که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ ، پس $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{4}$ ، لذا $2x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و از آنجا، جواب کلی معادله، $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ خواهد بود. جدول زیر جواب‌های قابل قبول را در بازه $(0, 2\pi)$ نشان می‌دهد.

k	0	1	2	3
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$	$\pi + \frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

حل معادلات مثلثاتی با فاکتورگیری و تجزیه

فاکتورگیری یکی از روش‌های حل معادلات است، در حل بعضی از معادله‌های مثلثاتی، از خاصیت جبری زیر می‌توان استفاده کرد.

$$AB = 0 \rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

■ **مثال:** جواب‌های کلی معادله $\cos x \cdot \cos 2x = 0$ را بیابید.

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{حل: با استفاده از خاصیت جبری بالا باید } \cos x = 0 \text{ یا } \cos 2x = 0 \text{ باشد، پس:}$$

$$\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

◀ **تذکر (۱۴۱):** با استفاده از روش‌های حل معادلات (اتحاد یک جمله مشترک) می‌توان بعضی از معادلات از درجه‌ی دوم مثلثاتی را حل نمود.

■ **مثال:** معادله $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$ را حل کنید.

◀ **حل:** سمت چپ را به حاصلضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم:

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0 \rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \text{ یا } \cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ یا } \cos x = 3 \text{ (ریشه ندارد)}$$

$$\text{جواب‌های معادله } \cos x = \frac{1}{2} \text{ با } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

◀ **تذکر (۱۴۲):** با انتخاب مجهول کمکی مناسب می‌توان جواب کلی بعضی از معادلات را یافت.

به عنوان مثال برای حل معادله $a \tan x + b \cot x = c$ ، با تبدیل $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ و جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت:

$$a \tan x + \frac{b}{\tan x} = c \Rightarrow a \tan^2 x - c \tan x + b = 0$$

شرط وجود جواب برای این معادله آن است که $\Delta = c^2 - 4ab \geq 0$ باشد.

حل معادلات مثلثاتی با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

در حل بعضی از معادلات مثلثاتی می‌توانیم با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله را به یک معادله‌ی اصلی تبدیل کرده و سپس حل کنیم.

■ **مثال:** معادله $\cos 4x \cos x + \sin x \sin 4x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\cos(4x - x) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} \quad \leftarrow \text{حل: با استفاده از فرمول } \cos(\alpha - \beta) \text{ داریم:}$$

حل معادلات مثلثاتی و حدود تغییرات نسبت‌ها

در حل بعضی از معادلات مثلثاتی با استفاده از حدود تغییرات نسبت‌های مثلثاتی و استفاده از نامساوی‌های مثلثاتی می‌توان در تعداد ریشه‌ها و یا عدم وجود آن‌ها نظر داد.

■ **مثال:** معادله $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

معادله درجه دوم

◀ **حل:** از آنجایی که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ و $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ ، لذا $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ ، پس سمت چپ حداکثر $\sqrt{2}$ خواهد بود و تساوی به ازای هیچ مقدار x برقرار نیست.

◀ **تذکره (۴۳):** در بعضی از معادلات، دو طرف معادله با توجه به حدود تغییرات نسبت مثلثاتی فقط به ازای مقادیری خاص مساوی خواهند بود، در این حالت اگر معادله به صورت جمع چند نسبت مثلثاتی باشد، باید جواب مشترک آن‌ها را در نظر بگیریم.

■ **مثال:** معادله $5 \sin x + 7 \sin^2 x = 12$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

◀ **حل:** از آنجایی که $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس سمت چپ زمانی می‌تواند با سمت راست برابر باشد که هر یک از عبارت‌های $\sin x$ و $\sin^2 x$ برابر یک باشند و اشتراک آنها وقتی است که $\sin x = 1$ باشد، پس جواب قابل قبول فقط $x = \frac{\pi}{2}$ است.