به نام خدا

درسنامه ریاضی۲ پایه یازدهم رشته تجربی به همراه سوالات آزمون های سراسری

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

فصل دوم: هندسه

فصل سوم: تابع

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

تهیه و تنظیم: مهندس رسول دلیار

کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی تهران

دبیر ریاضیات مدارس استان قم و مدرس کنکور

۰۹۰۱۰۸۲۵۲۵۸ : شماره تماس دارای واتساپ و تلگرام

Telegram:@Rasouldelyar

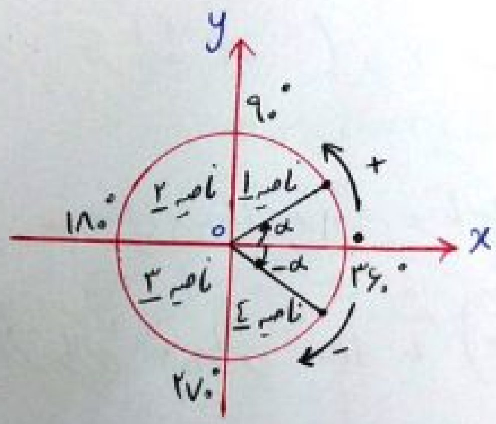
تهیه و تنظیم: دلبایر

09010825258

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

دایره مثلثاتی: دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. مرکز دایرهٔ مثلثاتی، مبدأ مختصات می‌باشد.



واحدهای اندازه‌گیری زاویه:

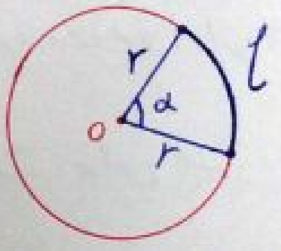
* درجه: اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبروی هرکدام از این کمان‌ها 1 درجه است. (اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبروی آن کمان برحسب درجه برابر است)

* رادیان: 1 رادیان برابراست با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبروی آن با شعاع دایره، مساوی است.

درنتیجه اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبروی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$

اگر طول کمان روبروی زاویه را با l ، شعاع دایره را با r و اندازهٔ زاویه برحسب رادیان را با α نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت:



$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r.\alpha$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند. (اندازهٔ زاویهٔ پیموده شده (α) همواره مثبت است)

* تبدیل رادیان به درجه و بالعکس:

اگر زاویهٔ α برابر 180° باشد (نیم صفحه باشد)، طول کمان مقابل به آن برابر نصف محیط دایره خواهد بود، پس داریم:

$$180^\circ = \frac{\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} \text{ رادیان} \longrightarrow 180^\circ = \pi \text{ رادیان}$$

در نتیجه رابطهٔ زیر بین درجه و رادیان برقرار است:

اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

تذکر: برای تبدیل یک زاویه از درجه به رادیان، کافی است این زاویه رو در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب کنیم،

مثلاً 90° برحسب رادیان، برابر است با:

$$\overset{1}{\cancel{90^\circ}} \times \frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{180^\circ}}} = \frac{\pi}{2}$$

همچنین برای تبدیل یک زاویه از رادیان به درجه، کافی است این زاویه را در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ضرب کنیم،

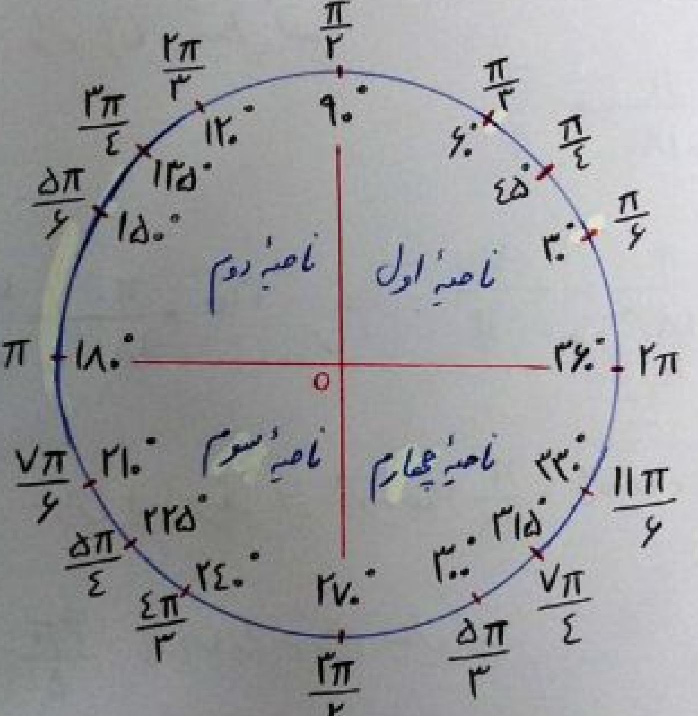
مثلاً $\frac{\pi}{3}$ رادیان برحسب درجه، برابر است با:

$$\frac{\cancel{\pi}}{3} \times \frac{180^\circ}{\cancel{\pi}} = 60^\circ$$

نکته: اندازهٔ یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بگردد، 360° یا 2π رادیان است.

نکته: یک رادیان دقیقاً $\frac{180}{\pi}$ درجه یا تقریباً $57{,}3^\circ$ است و هر درجه، $\frac{\pi}{180}$ رادیان می‌باشد. (π، نسبت محیط هر دایره به قطر آن است که مقدار تقریبی آن ۳٫۱۴ می‌باشد)

* شکل مقابل، اندازهٔ زوایای مهم مثلثاتی را برحسب درجه و رادیان نشان می‌دهد.



زاویه‌های بسیار مهم:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad , \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad , \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \quad , \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$180^\circ = \pi \quad , \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \quad , \quad 360^\circ = 2\pi$$

تهیه و تنظیم: دلیار

مثال: طول کمانی که از زاویه‌ی مرکزی به اندازه‌ی ۴۵° در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر پدید می‌آید، چقدر است؟

$$۴۵^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi}{۴}$$

$$l = r.\alpha = ۳ \times \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} = \frac{۳ \times ۳/۱۴}{۴} = ۲/۳۵۵ \quad cm$$

تمرین ص ۷۶ - سوال ۱: هر یک از زاویه‌های -۱۲° ، ۳۶° ، ۷۲° ، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید.

$$-۱۲^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = -\frac{\pi}{۱۵} \quad , \quad ۳۶^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi}{۵}$$

$$\overset{۲}{\cancel{۷۲^\circ}} \times \frac{\pi}{\underset{۵}{\cancel{۱۸۰^\circ}}} = \frac{۲\pi}{۵} \quad , \quad \overset{۷}{\cancel{-۱۰۵^\circ}} \times \frac{\pi}{\underset{۱۲}{\cancel{۱۸۰^\circ}}} = -\frac{۷\pi}{۱۲} \quad , \quad \overset{۷}{\cancel{۳۱۵^\circ}} \times \frac{\pi}{\underset{۴}{\cancel{۱۸۰^\circ}}} = \frac{۷\pi}{۴}$$

سوال ۲: هر یک از زاویه‌های $-\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان، $\frac{-۲\pi}{۵}$ رادیان، $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان و $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

$$-\frac{۲\cancel{\pi}}{۵} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\cancel{\pi}} = -۷۲^\circ$$

$$-\frac{\cancel{\pi}}{۱۸} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\cancel{\pi}} = -۱۰^\circ \quad , \quad \frac{۳\pi}{۴} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۱۳۵^\circ$$

$$\frac{۷\cancel{\pi}}{۸} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\cancel{\pi}} = ۱۵۷/۵^\circ \quad , \quad \frac{۶\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۲۱۶^\circ$$

سوال ۳: زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{\cancel{\pi}}{۲۰} \times \frac{۱۸۰^\circ}{\cancel{\pi}} = ۹^\circ$$

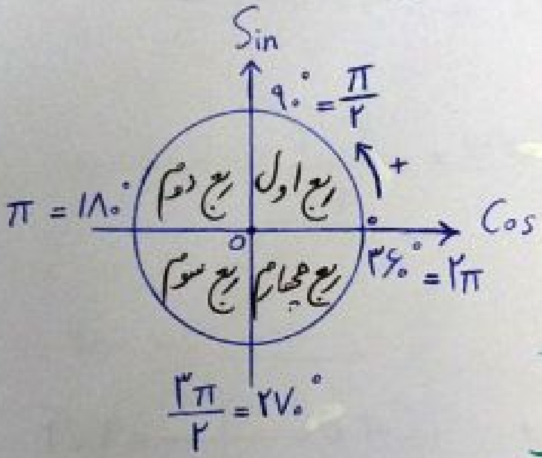
تهیه و تنظیم : دلبایر

09010825258

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

محورهای مثلثاتی و ربع ها (ناحیه ها) ی مثلثاتی :

علامت نسبت های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی را می توان به صورت جدول زیر مشخص کرد.



ناحیه \ نسبت مثلثاتی	Sin	Cos	tan	Cot
اول $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$	+	+	+	+
دوم $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$	+	−	−	−
سوم $\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$	−	−	+	+
چهارم $\left(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$	−	+	−	−

پس در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی ، همهٔ نسبت ها مثبت هستند.

در ربع دوم ، فقط Sin مثبت است و بقیهٔ نسبت ها منفی هستند.

در ربع سوم ، tan و Cot مثبت اند و Sin و Cos منفی اند.

در ربع چهارم ، نسبت Cos مثبت و بقیه منفی هستند.

یادآوری فرمول های هم مثلثاتی : برای هر زاویهٔ دلخواه θ داریم :

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad , \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad و \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad و \quad 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

مثال: اگر $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان روبرو به زاویهٔ θ در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را بدست آورید.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{\theta \text{ در ربع سوم}} \boxed{\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{\cancel{3}}}{-\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 2\sqrt{2}$$

مثال: اگر $\cot\alpha = -2$ و $\cos\alpha > 0$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

با توجه به اینکه $\cot\alpha < 0$ و $\cos\alpha > 0$ است، پس انتهای کمان زاویهٔ α در ربع چهارم قرار دارد.

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \longrightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = 5 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow -2 = \frac{\cos\alpha}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{2}$$

مثال: اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

با توجه به اینکه $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ است، پس انتهای کمان x در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \sin^2 x + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \longrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\longrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ربع دوم } x} \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{-\frac{4}{\cancel{5}}} = -\frac{3}{4} \quad , \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

نکته: با توجه به اینکه شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر 1 می‌باشد، درنتیجه همواره:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

مثال: اگر $\cos\theta - \sin\theta = \frac{6}{5}$، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی است؟

1) اول
2) دوم
3) سوم
4) چهارم ✓

با توجه به اینکه $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ می‌باشند، بنابراین برای آنکه $\cos\theta - \sin\theta > 1$ شود، باید $\cos\theta > 0$ و $\sin\theta < 0$ باشند، پس انتهای کمان θ باید در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد.

مثال: ضلع انتهایی زاویهٔ θ، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ P قطع کرده است. مختصات نقطهٔ P کدام می‌تواند باشد؟

1) $\left(\frac{-3}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$
2) $\left(\frac{\sqrt{6}}{7}, \frac{2}{7}\right)$
3) $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ ✓
4) $(-0/9, -0/4)$

با توجه به رابطهٔ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، گزینهٔ 3 صحیح است چون: $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = 1$

* نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم بین صفر تا ۳۶۰° (صفر تا ۲π رادیان) مطابق جدول زیر است:

زاویه α / نسبت مثلثاتی	۰	$۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$	$۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}$	$۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}$	$۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}$	$۱۸۰^\circ = \pi$	$۲۷۰^\circ = \frac{۳\pi}{۲}$	$۳۶۰^\circ = ۲\pi$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

تذکر: اگر α و β دو زاویهٔ متمم باشند ($\alpha+\beta=۹۰^\circ$ یا $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$)، آنگاه:

$\sin\alpha = \cos\beta$ و $\tan\alpha = \cot\beta$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۳} \times \sin\frac{\pi}{۴} = \sqrt{۳} - \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۶}}{۲}$

ب) $$\frac{\tan^۲\left(\frac{\pi}{۶}\right) + \sin^۲\left(\frac{\pi}{۴}\right)}{\cot^۲\left(\frac{\pi}{۴}\right) - \cos^۲\left(\frac{\pi}{۳}\right)} + \underbrace{\cos^۲ ۷۵^\circ + \sin^۲ ۷۵^\circ}_{۱} = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۴}} + ۱ = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}} + ۱ = \frac{۱۹}{۹}$$

پ) $$\frac{\sin ۰^\circ + \sin ۲۷۰^\circ - \cos ۹۰^\circ}{\tan ۱۸۰^\circ + \sin ۹۰^\circ} = \frac{۰ - ۱ - ۰}{۰ + ۱} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

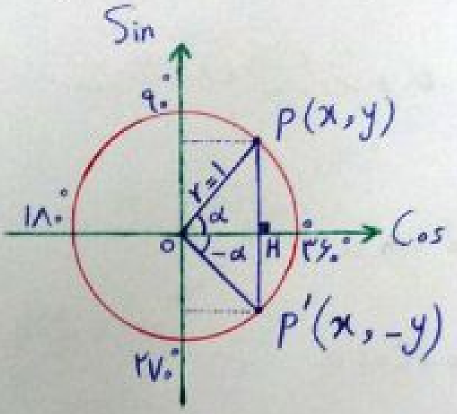
تهیه و تنظیم: دلیار

09010825258

تهیه و تنظیم: دلیار

* نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه:

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینهٔ یکدیگر می گویند. نسبت های مثلثاتی زاویهٔ «$-\alpha$» را به شکل زیر بدست می آوریم:



$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\cot\alpha$$

P'، قرینهٔ P نسبت به محور افقی

همانطور که مشاهده می شود در محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویهٔ $-\alpha$، فقط کسینوس بدون تغییر باقی می ماند و بقیهٔ نسبت های مثلثاتی، قرینه می شوند.

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3}{6} - 1 = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$$

ب) $\dfrac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)} = \dfrac{\cos 90^\circ - \sin 270^\circ}{-\sin 180^\circ - \cos 360^\circ} = \dfrac{0-(-1)}{0-1} = -1$

پ) $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

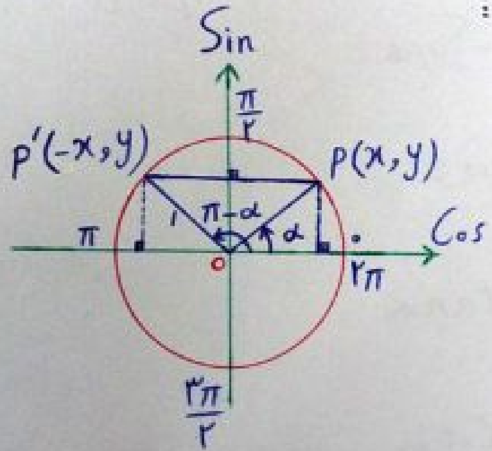
ت) $\cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ)$

$$= \cos 45^\circ \times \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \times (-\sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

* نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل :

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم هرگاه مجموع آن ها 180° یا π رادیان شود.

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ «$\pi-\alpha$» را به شکل زیر محاسبه می کنیم :



$$\sin(\pi-\alpha) = y = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -x = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{y}{-x} = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha) = \frac{-x}{y} = -\cot\alpha$$

P' : قرینهٔ P نسبت به محور عمودی

همانطور که مشاهده می شود در محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویهٔ «$\pi-\alpha$»، فقط نسبت سینوس بدون تغییر باقی می ماند و بقیهٔ نسبت های مثلثاتی، قرینه می شوند.

مثال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ب) $\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

پ) $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ-60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

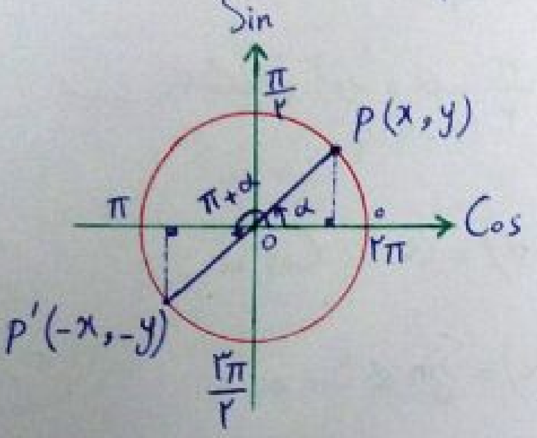
ت) $\cot(-120^\circ) = -\cot(120^\circ) = -\cot(180^\circ-60^\circ) = -(-\cot 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ث) $\cos(135^\circ) = \cos(180^\circ-45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

تهیه و تنظیم : دلیار

* نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان :

نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی « $\pi + \alpha$ » را به شکل زیر محاسبه می کنیم :



$$\sin(\pi+\alpha) = -y = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = -x = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot\alpha$$

قرینه‌ی P نسبت به مبدأ مختصات : P'

مثال : حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

پ) $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

ث) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

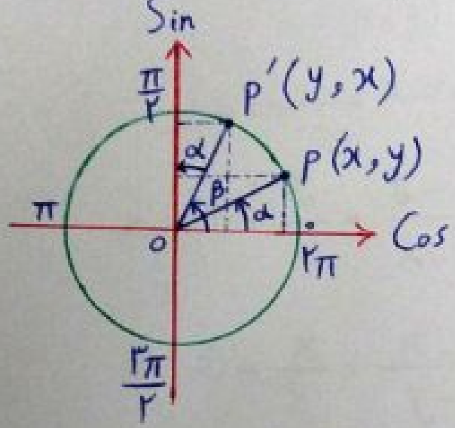
ج) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

چ) $\cos^2\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{6} = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

* نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم :

دو زاویه α و β را متمم می گوییم، هرگاه مجموع آن ها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. $\left(\beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$

نسبت های مثلثاتی زاویه « $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ » را به شکل زیر محاسبه می کنیم:



$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = x = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = y = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \frac{x}{y} = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

قرینه P نسبت به خط $y=x$: P'

به عبارت دیگر اگر زاویه های α و β متمم یکدیگر باشند، آنگاه:

$\sin\alpha = \cos\beta$ و $\tan\alpha = \cot\beta$

بعنوان مثال:

$$\sin(۳۰^\circ) = \cos(۶۰^\circ) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin\frac{\pi}{۴} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

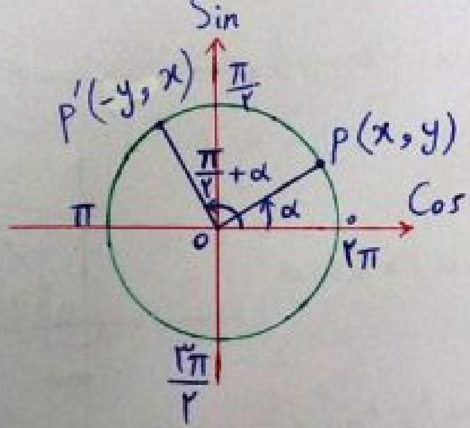
$$\tan ۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ = ۱$$

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \cos(۰) = ۱$$

تهیه و تنظیم: دلیار

* نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان:

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ « $\frac{\pi}{2}+\alpha$ » را به شکل زیر محاسبه می کنیم:



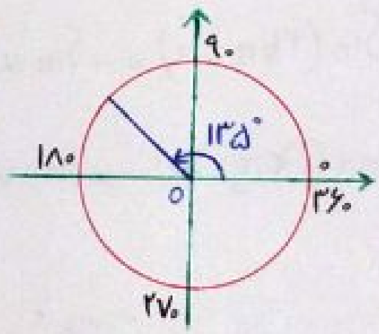
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-y=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

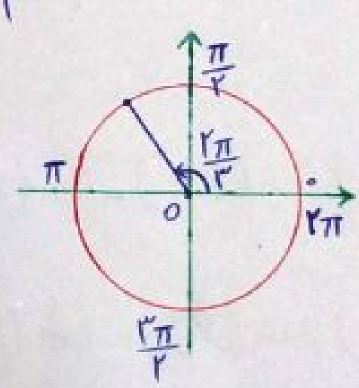
بعنوان مثال $\sin(135^\circ)$ را به دو روش می توانیم محاسبه کنیم:



I) $\sin(135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

II) $\sin(135^\circ)=\sin(90^\circ+45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

همچنین برای محاسبهٔ $\cos\frac{2\pi}{3}$ داریم:



روش اول: $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

روش دوم: $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

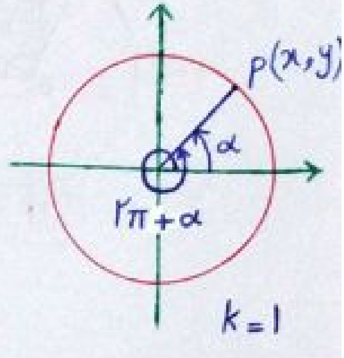
* نسبت های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان):

در واقع $2k\pi$ به معنای k دور کامل مثلثاتی می باشد، بنابراین برای هر عدد صحیح k می توان نوشت،

نسبت های مثلثاتی زاویه های «$2k\pi+\alpha$»:

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

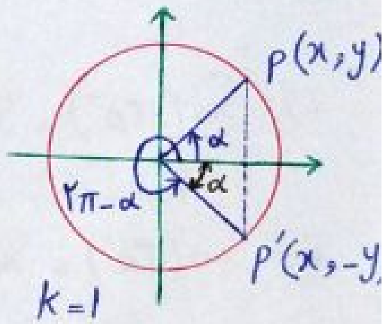
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های «$2k\pi-\alpha$»:

$$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$



* بنابراین در محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویه های مختلف، مضارب صحیح $\frac{360^\circ}{2\pi}$ را می توان کنار گذاشت.

مثال: حاصل هریک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin(405^\circ)=\sin(360^\circ+45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

پ) $\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\cot\left(\frac{13\pi}{3}\right)=\cot\left(\frac{12\pi+\pi}{3}\right)=\cot\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

تهیه و تنظیم: دلیار

مثال: حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{16\pi + 2\pi}{2}\right) = \sin(8\pi + \pi) = \sin(\pi) = 0$

ب) $\cos 750^\circ = \cos\left(\underbrace{720^\circ}_{2\times 360^\circ} + 30^\circ\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پ) $\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

ت) $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

ث) $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ج) $\tan(-225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

چ) $\cot(-330^\circ) = -\cot(330^\circ) = -\cot(360^\circ - 30^\circ) = +\cot 30^\circ = \sqrt{3}$

ح) $\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{8\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \overbrace{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}^{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

خ) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

د) $\sin(840^\circ) = \sin\left(\underbrace{720^\circ}_{2\times 360^\circ} + 120^\circ\right) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ذ) $\cot(-990^\circ) = \cot\left(\underbrace{-1080^\circ}_{3\times 360^\circ} + 90^\circ\right) = \cot 90^\circ = 0$

09010825258

تمرین ص ۸۷ :

۱) حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan 135^\circ + \cot 120^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 60^\circ)$

$= -\tan(45^\circ) - \cot 60^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos 210^\circ + \cot(180^\circ + 60^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) + \cot 60^\circ$

$= -\cos 30^\circ + \cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

پ) $\sin(630^\circ) + \tan(-540^\circ) = \sin(720^\circ - 90^\circ) + \tan(-720^\circ + 180^\circ)$

$= -\sin 90^\circ + \tan 180^\circ = -1 + 0 = -1$

ت) $\cos(-720) + \cot(-600) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ)$

$= \cos(0) + \underbrace{\cot(-720^\circ + 120^\circ)}_{\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ} + \underbrace{\tan(0)}_{0} - \underbrace{\tan(-720^\circ + 120^\circ)}_{\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$

ث) $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \overbrace{\sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)}^{\sin\frac{\pi}{3}} - \overbrace{\cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right)}^{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

ج) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

$= \dfrac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

تهیه و تنظیم: دلبار

درس سوم: توابع مثلثاتی

تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی اند.

* رسم تابع سینوس:

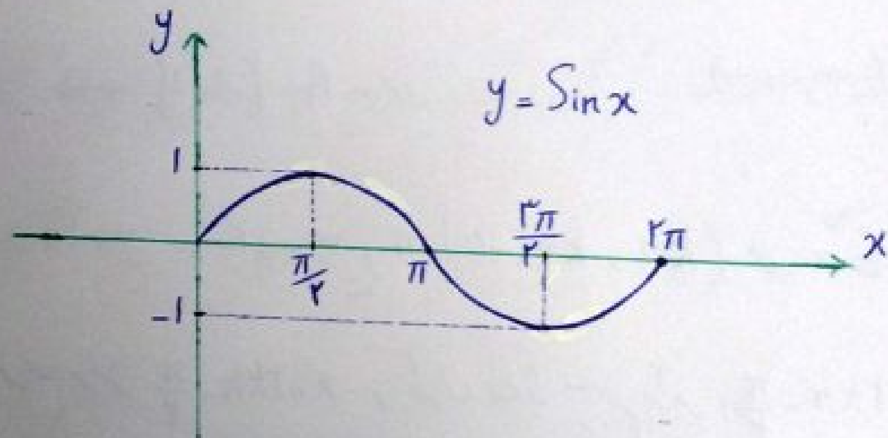
تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ از طریق نقطه‌یابی به شکل زیر رسم می‌شود:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

$\pi \simeq 3.14$

$\sqrt{2} \simeq 1.4$

$\sqrt{3} \simeq 1.7$



در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان ($2k\pi$ رادیان) به کمان آن، تغییر نمی‌کند، یعنی:

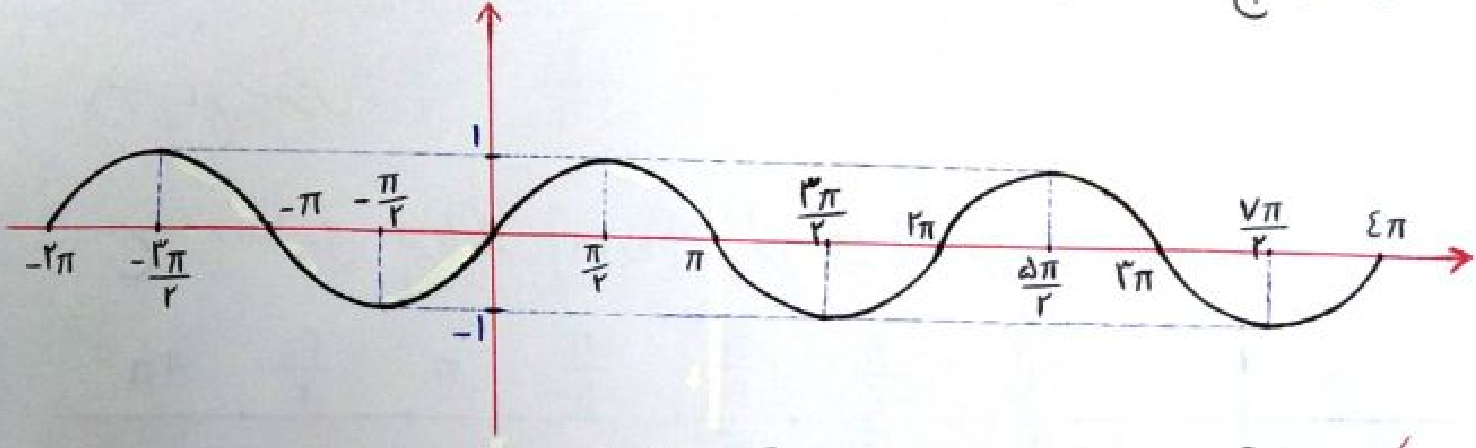
$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \quad , \quad k\in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x-2k\pi)=\sin x \quad , \quad k\in \mathbb{Z}$$

بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi,(2k+2)\pi]$ یکسان است، در نتیجه منحنی تابع $y=\sin x$ که در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم شده است، در بازه‌های $[2\pi,4\pi]$ و $[4\pi,6\pi]$ و $[-2\pi,0]$ و $[-4\pi,-2\pi]$ و ... تکرار می‌شود.

نکته: نمودار تابع سینوس مرتباً در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود. در تابع $y=\sin x$ به مقدار 2π دورهٔ تناوب یا دورهٔ گردش می‌گویند.

نمودار کلی تابع $y=\sin x$ به صورت زیر است:



نکته: دامنهٔ تابع $y=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد.

دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

برد: $R=[-1,1] \longrightarrow -1\le \sin x\le 1$

تذکر: ۱) تابع $y=\sin x$ در مضارب صحیح π $(k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$ محور x ها را قطع می‌کند.

۲) طول نقاط ماکزیمم برابر $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و طول نقاط مینیمم برابر $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. $(k\in\mathbb{Z})$

۳) تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ افزایشی و در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کاهشی و در فاصلهٔ $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ مجدداً افزایشی است. اگر ابتدا و انتهای بازه‌ها را با مضارب صحیح 2π (یعنی $2k\pi$) جمع کنیم نیز این رفتار تکرار می‌شود.

تهیه و تنظیم: دلبار
09010825258

* رسم تابع کسینوس:

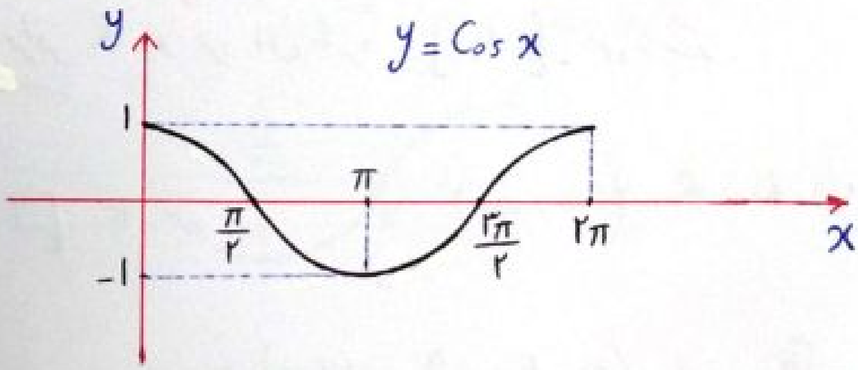
تابع $y=\cos x$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ از طریق نقطه یابی به شکل زیر رسم می شود:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$\pi \simeq 3{,}14$

$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$

$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$



* مقدار تابع کسینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان ($2k\pi$ رادیان) به کمان آن تغییر نمی کند، یعنی:

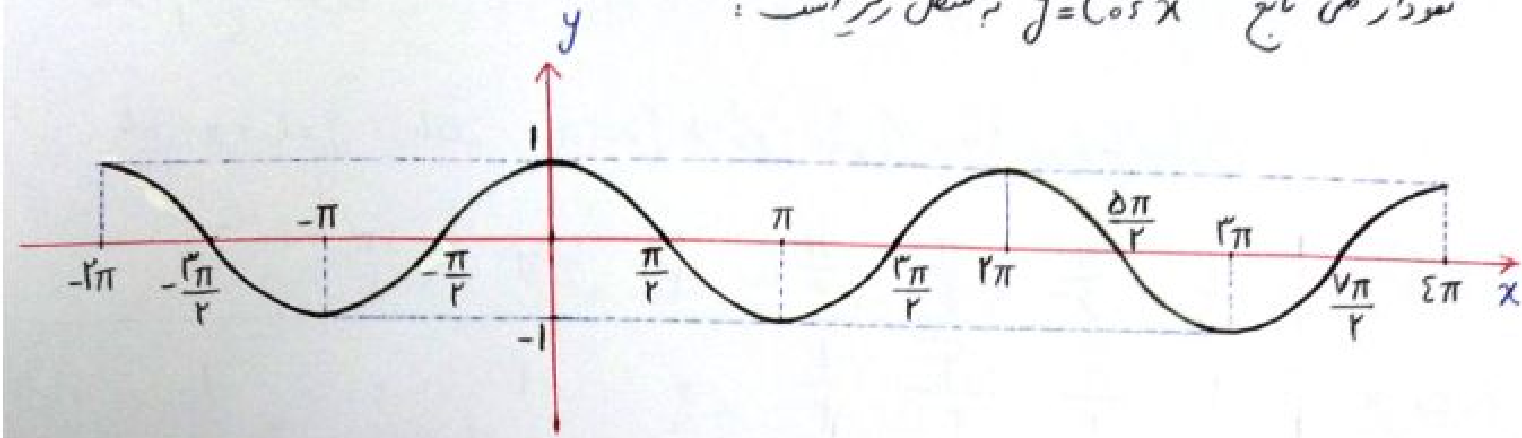
$\cos(x+2k\pi)=\cos x \quad , \quad k\in Z$

$\cos(x-2k\pi)=\cos x \quad , \quad k\in Z$

بنابراین تابع کسینوس ($y=\cos x$) دارای نمودار یکسانی در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ و ... می باشد.

نکته: نمودار تابع کسینوس مرتباً در بازه هایی به طول 2π تکرار می شود. در تابع $y=\cos x$ به مقدار 2π دورهٔ تناوب یا دورهٔ گردش می گویند.

نمودار کلی تابع $y=\cos x$ به شکل زیر است:



نکته: دامنهٔ تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-1,1]$ می‌باشد.

دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

برد: $R=[-1,1] \longrightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

تذکر: ۱) تابع $y=\cos x$ در مضارب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ $\left(x=k\pi+\frac{\pi}{2} \,,\, k\in \mathbb{Z}\right)$ مانند: $-\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و ... محور x ها را قطع می‌کند.

۲) در تابع $y=\cos x$، طول نقاط ماکزیمم برابر $x=2k\pi$ (مانند: -2π ، 0 ، 2π و ...) و طول نقاط مینیمم برابر $x=2k\pi+\pi$ (مانند: -3π ، $-\pi$ ، π ، 3π و ...) می‌باشد.

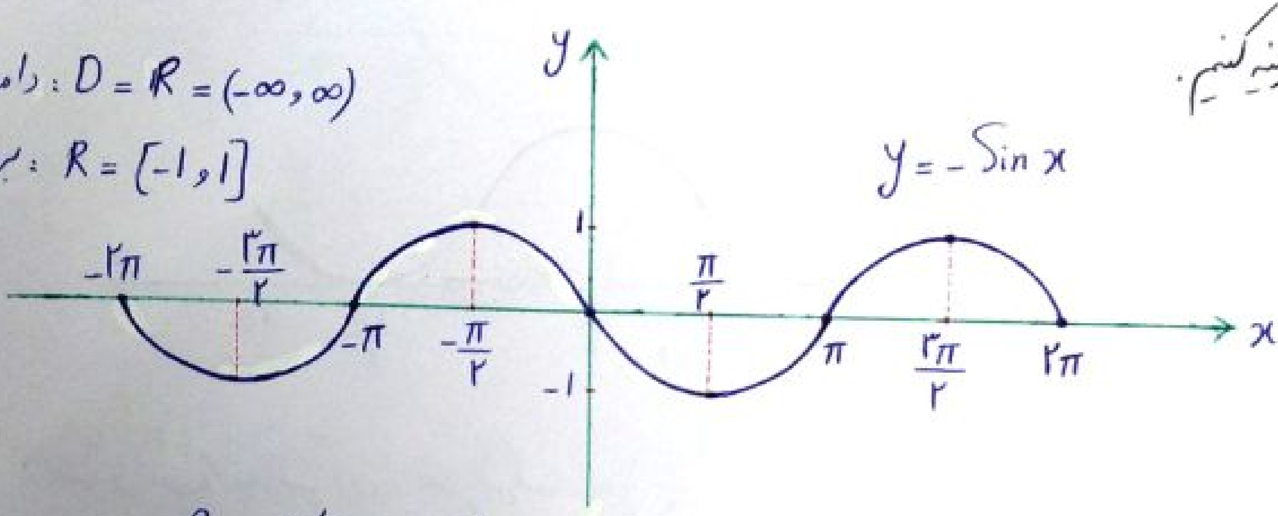
۳) تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کاهشی و در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ افزایشی است. اگر ابتدا و انتهای بازه‌ها را با مضارب صحیح 2π (یعنی $2k\pi$) جمع کنیم نیز این رفتار تکرار می‌شود.

نکته: می‌دانیم برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

(۱) پس برای رسم نمودار تابع $y=-\sin x$، کافی است نمودار $\sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

برد: $R=[-1,1]$

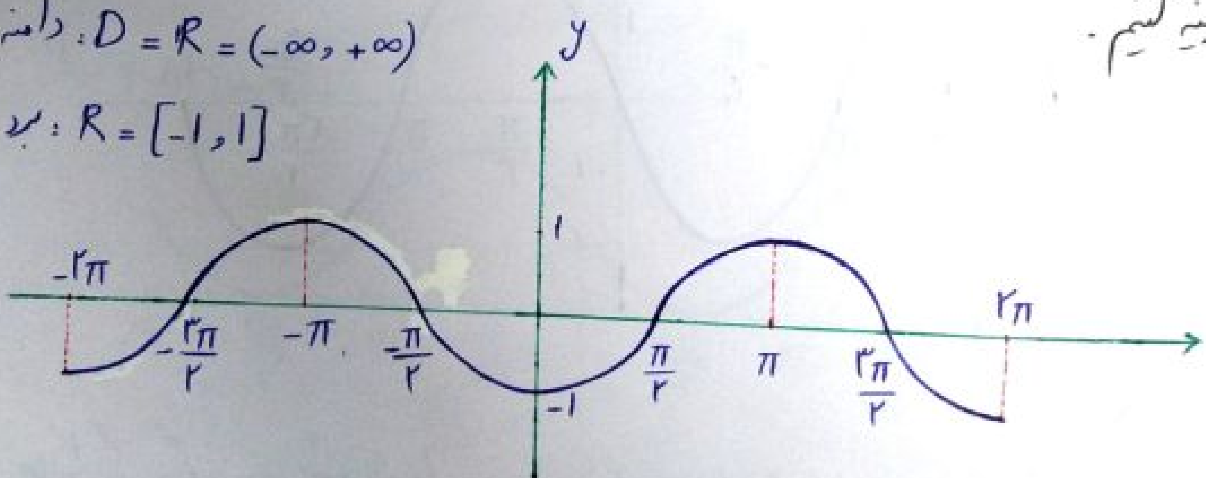


همانطور که مشاهده می‌شود، نمودار $y=-\sin x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود.

(۲) برای رسم نمودار تابع $y=-\cos x$ نیز کافی است نمودار $\cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

برد: $R=[-1,1]$



همانطور که مشاهده می‌شود، نمودار $y=-\cos x$ نیز در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود.

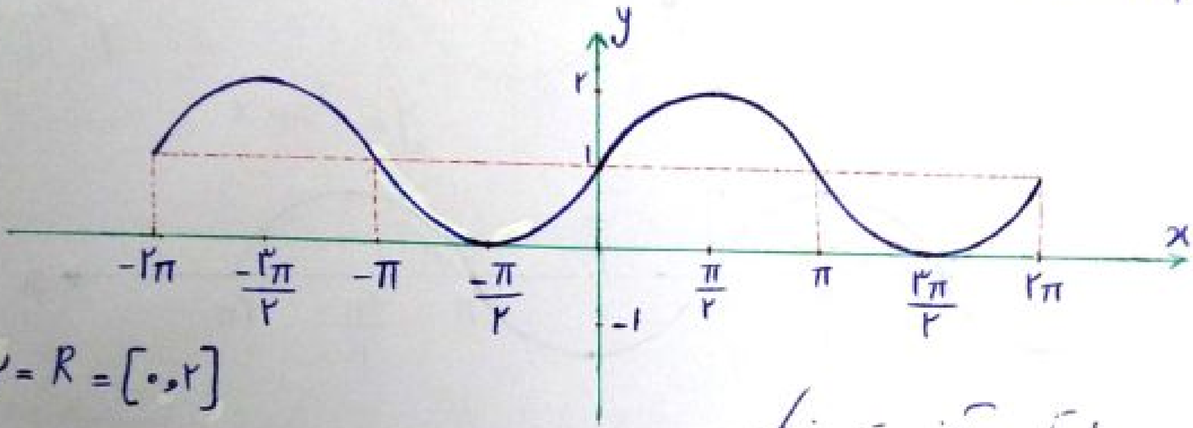
تهیه و تنظیم : دلبار
09010825258

* رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال :

مثال : نمودار توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید.

الف) $y = \sin x + 1$

برای رسم آن، نمودار $\sin x$ را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.

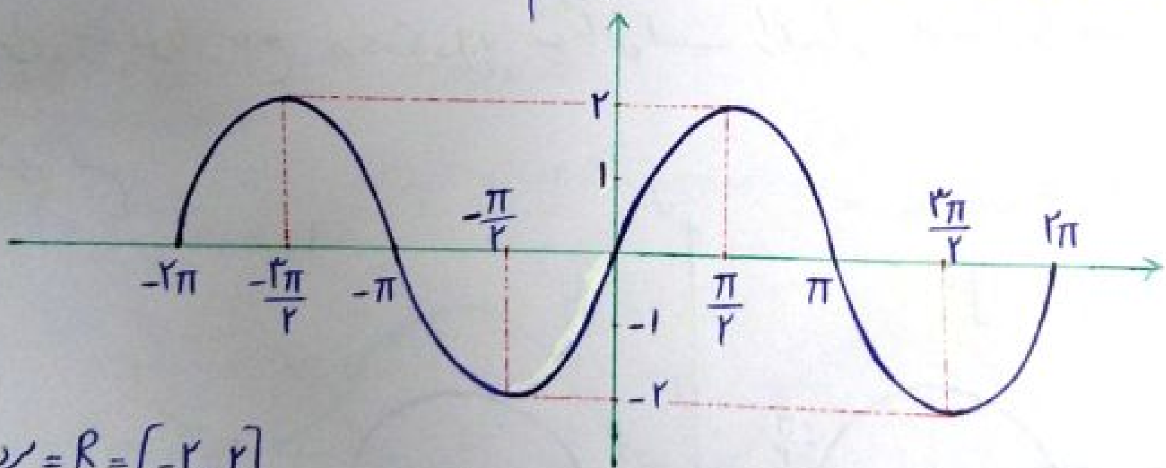


$R = [0, 2] =$ برد

دامنه و دورهٔ تناوب آن، تغییر نمی‌کند.

ب) $y = 2\sin x$ ⟶

کافی است عرض نقاط نمودار $\sin x$ را دو برابر کنیم.

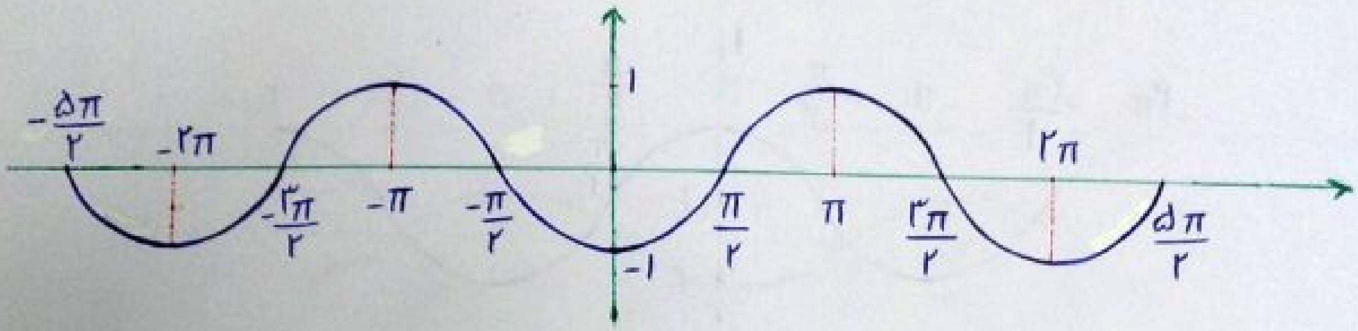


$R = [-2, 2] =$ برد

همانطور که مشاهده می‌شود نمودار $y = 2\sin x$ از انبساط عمودی نمودار $\sin x$ بدست می‌آید.

دامنهٔ آن همان $D = (-\infty, +\infty)$ و دورهٔ تناوب آن نیز همان $\underline{2\pi}$ می‌باشد.

ب) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ کافی است نمودار تابع $\sin x$ را $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم. پس چون این نمودار، از انتقال افقی $\sin x$ بدست می‌آید، برد آن همان $R=[-1,1]$ است.



دامنهٔ آن نیز $D=(-\infty,+\infty)$ و دورهٔ تناوب آن همان $\underline{2\pi}$ است.

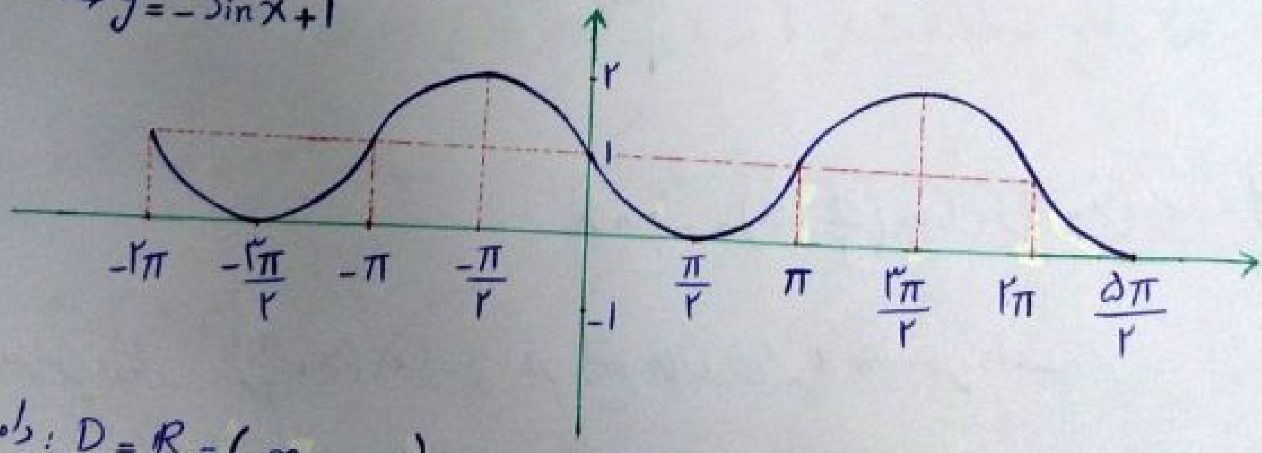
تذکر: $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$

بنابراین نمودار $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ در واقع همان نمودار تابع $y=-\cos x$ می‌باشد.

ت) $y=1-\sin x$

$\hookrightarrow y=-\sin x+1$

کافی است نمودار $y=-\sin x$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم:



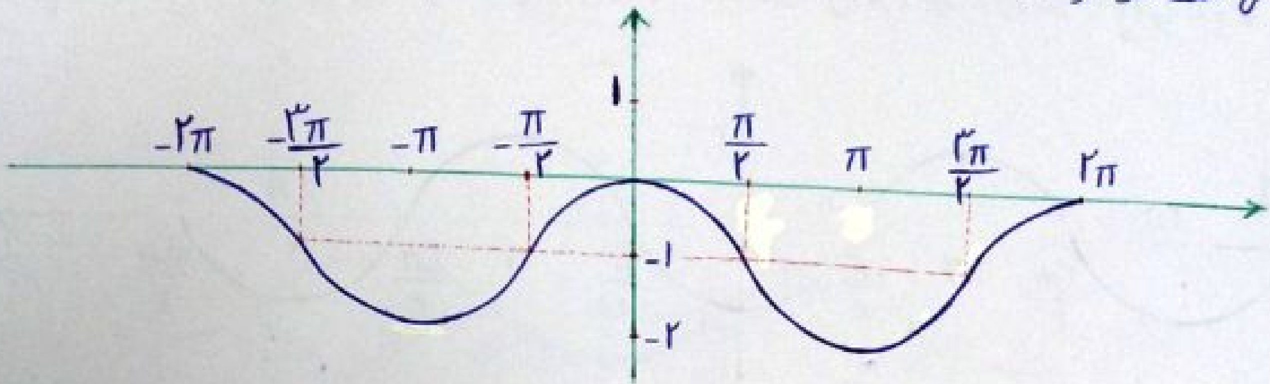
دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ و برد: $R=[0,2]$

دورهٔ تناوب: $T=2\pi$

ب) $y=-1+\cos x \longrightarrow y=\cos x - 1$

کافی است نمودار $\cos x$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، پس برد آن تغییر می‌کند: $R=[-2,0]$

برد



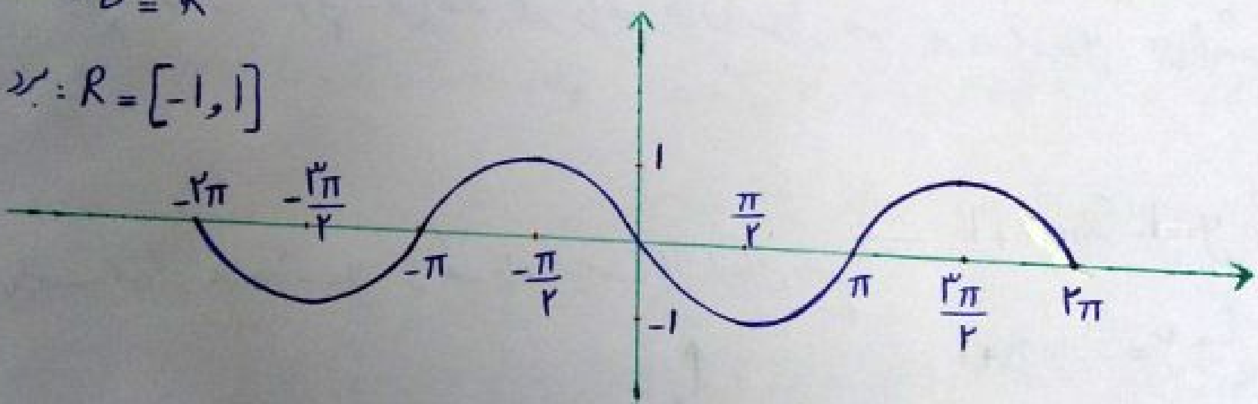
دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $D=\mathbb{R}$ و دورهٔ تناوب آن 2π می‌باشد.

ج) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

کافی است نمودار $\cos x$ را $\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت چپ منتقل کنیم:

دامنه: $D=\mathbb{R}$

برد: $R=[-1,1]$



نکته: $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

بنابراین نمودار $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ در واقع همان نمودار $y=-\sin x$ است.

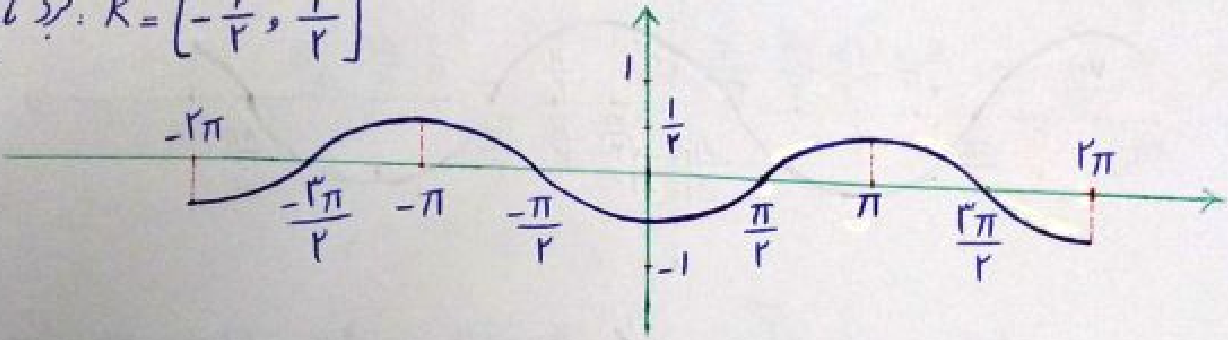
تهیه و تنظیم: دلبار

09010825258

ج) $y=-\frac{1}{2}\cos x$

برای رسم این نمودار، کافی است عرض نقاط نمودار $\cos x$ را $-\frac{1}{2}$ برابر کنیم، یا به عبارتی عرض نقاط نمودار $\cos x$ را $\frac{1}{2}$ برابر (نصف) کرده و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

برد تابع: $R=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



دامنه آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $D=\mathbb{R}$ و دورهٔ تناوب آن نیز $\underline{2\pi}$ می‌باشد.

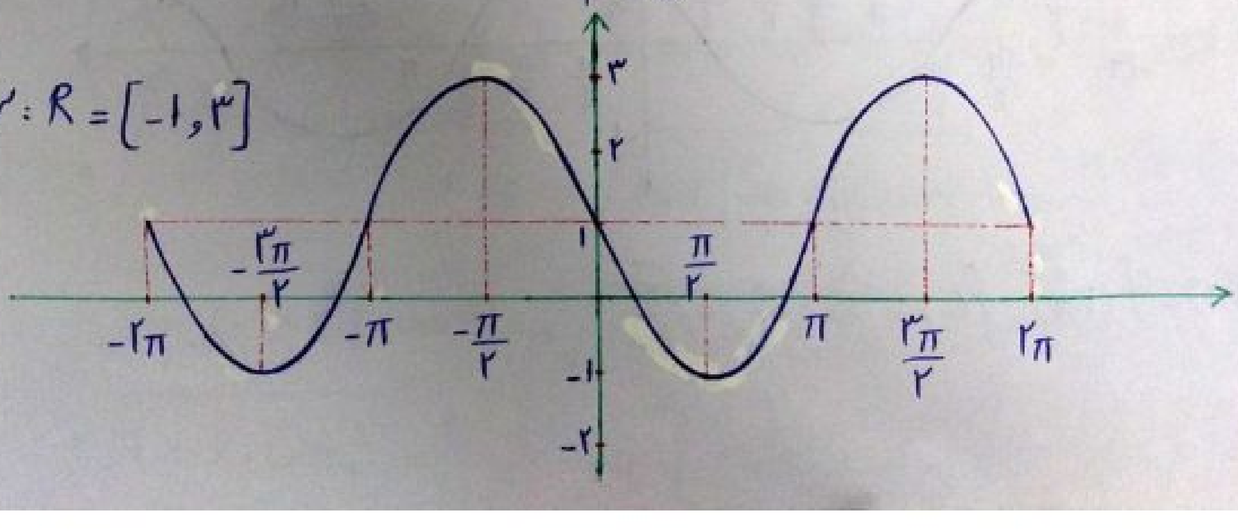
نکته: در هر تابع به فرم کلی $y=a\sin x+c$ و $y=a\cos x+c$ که a و c اعدادی حقیقی هستند، الف) دامنه برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی است: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

ب) دورهٔ تناوب تابع برابر $\underline{2\pi}$ می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $y=1-2\sin x$ را در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

نمودار $-2\sin x$ را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم: $y=1-2\sin x=-2\sin x+1$

برد: $R=[-1,3]$



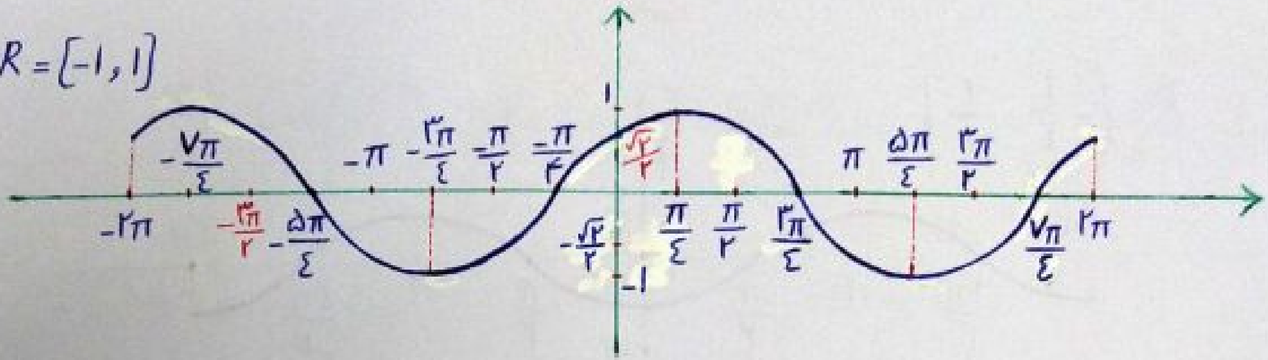
تهیه و تنظیم: دلیار

مثال: نمودار توابع زیر را در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

الف) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

کافی است نمودار $\cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم:

برد: $R = [-1, 1]$



مقدار تابع در نقاط $x = -2\pi, 0, 2\pi$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، زیرا:

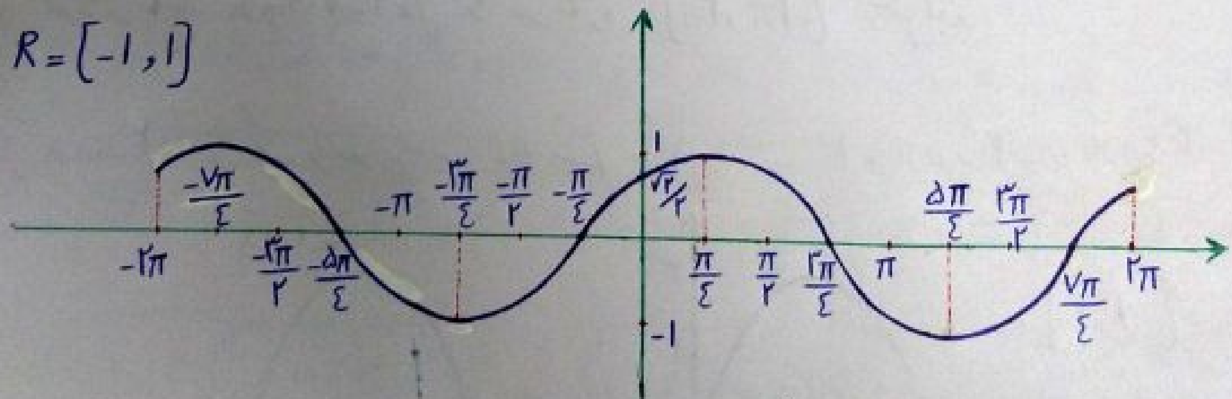
$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ماکزیمم تابع در نقاط $x = -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ و مینیمم تابع در نقاط $x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ قرار دارد.

ب) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

کافی است نمودار $\sin x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت چپ منتقل کنیم:

برد: $R = [-1, 1]$



$$f(-2\pi) = f(2\pi) = f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین ۱ صفحهٔ ۹۳ : آیا نمودارهای هر جفت از توابع زیر برهم منطبق اند یا خیر؟

الف) $y = \sin x \quad , \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \longrightarrow$ پس برهم منطبق اند

ب) $y = \cos x \quad , \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \longrightarrow$ برهم منطبق اند

پ) $y = \cos x \quad , \quad y = \cos(2\pi - x)$

$y = \cos(2\pi - x) = \cos x \longrightarrow$ برهم منطبق اند

ت) $y = \sin x \quad , \quad y = \sin(5\pi - x)$

$y = \sin(5\pi - x) = \sin\left(4\pi + (\pi - x)\right) = \sin(\pi - x) = \sin x \longrightarrow$ برهم منطبق اند

مثال: به ازای $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل $\sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)}}$ کدام است؟

حاصل عبارت $= \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 x\,(\cos^2 x)}} = \sqrt{1 + 2\,|\sin x|\,|\cos x|} \xrightarrow[\text{انتهای کمان } x \text{ در ربع سوم}]{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}$

$= \sqrt{1 + 2(-\sin x)(-\cos x)} = \sqrt{1 + 2\sin x \cos x}$

$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| = -\sin x - \cos x$

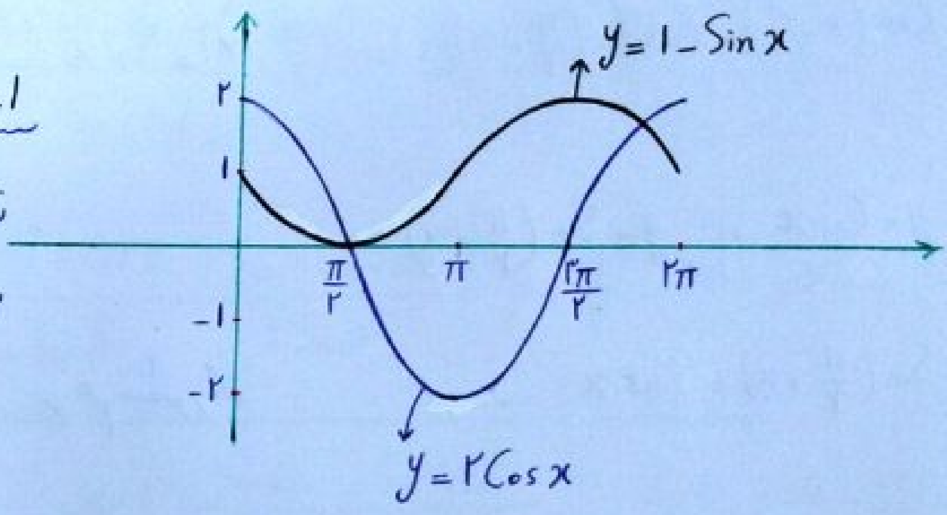
مثال: نمودار توابع $y=1-\sin x$ و $y=2\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند بار یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

روش اول: نمودار دو تابع را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم دو نقطهٔ برخورد دارند:

$y=1-\sin x = \underbrace{-\sin x+1}$

نمودار $-\sin x$ را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



روش دوم: ضابطهٔ دو تابع را برابر قرار می‌دهیم:

$$2\cos x = 1-\sin x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4\cos^2 x = 1-2\sin x+\sin^2 x$$

$$\longrightarrow 4(1-\sin^2 x) = 1-2\sin x+\sin^2 x \longrightarrow 4-4\sin^2 x = 1-2\sin x+\sin^2 x$$

$$\longrightarrow 5\sin^2 x-2\sin x-3=0 \longrightarrow (5\sin x+3)(\sin x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x-1=0 \longrightarrow \sin x=1 \longrightarrow x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos x=0 & \text{قابل قبول} \\ 5\sin x+3=0 \longrightarrow \sin x=-\frac{3}{5} \longrightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{4}{5} & \text{قابل قبول} \\ \cos x=-\frac{4}{5} \rightarrow & \text{در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند} \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ اولیه دارای دو جواب می‌باشد، بنابراین نمودار دو تابع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

ریاضی ۹۱ : اگر $\tan\theta = 0.2$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟

۱) ۳ ✓ ۲) ۱٫۲ ۳) ۲ ۴) ۲-

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right) - (-\cos\theta)}{\sin\theta - \sin(2\pi+\pi+\theta)} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \cos\theta}{\sin\theta - \sin(\pi+\theta)} =$$

$$= \frac{-(-\sin\theta) + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\theta = 0.5 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{2}\right) = 3$$

تجربی ۹۴ : حاصل عبارت $\dfrac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0.4$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ✓ ۴) $\frac{5}{8}$

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{\sin(270-20) + \sin(720-20)}{\cos(540+20) - \cos(90+20)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

از فرض: $\tan 20^\circ = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 0.4 \Rightarrow \sin 20^\circ = 0.4\cos 20^\circ$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{-\cos 20^\circ - 0.4\cos 20^\circ}{-\cos 20^\circ + 0.4\cos 20^\circ} = \frac{-1.4\,\cancel{\cos 20^\circ}}{-0.6\,\cancel{\cos 20^\circ}} = \frac{1.4}{0.6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

مثال: اگر $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ باشد، حاصل کسر $\dfrac{\sin 285^\circ + \cos 165^\circ}{2\sin 345^\circ - 3\cos 255^\circ}$ کدام است؟

گویا کردن مخرج

$$\text{حاصل} = \frac{\sin(270+15) + \cos(180-15)}{2\sin(360-15) - 3\cos(270-15)} = \frac{\dfrac{-\cos 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}}{\dfrac{-2\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ}} = \frac{-2\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{-2}{\tan 15^\circ} = \frac{-2}{2-\sqrt{3}} = -4-2\sqrt{3}$$