به نام خدا

درسنامه ریاضی۲ پایه یازدهم رشته تجربی به همراه سوالات آزمون های سراسری

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

فصل دوم: هندسه

فصل سوم: تابع

فصل چهارم: مثلثات

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ششم: حد و پیوستگی

فصل هفتم: آمار و احتمال

تهیه و تنظیم: مهندس رسول دلیار

کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی تهران

دبیر ریاضیات مدارس استان قم و مدرس کنکور

۰۹۰۱۰۸۲۵۲۵۸ : شماره تماس دارای واتساپ و تلگرام

Telegram:@Rasouldelyar

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

توان های حقیقی: قوانین توان های گویا، برای توان های حقیقی نیز برقرار است.

بر این اساس اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف با یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x} = a^x$

$a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\qquad$ $(ab)^x = a^x . b^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

پاییز1400/تهران-دانشگاه شهید بهشتی

نکته: اگر عددی بزرگتر از یک باشد، هرچه به توانِ بزرگتری برسد، بزرگتر می‌شود.

مثال: عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$2^{-1} \text{ و } 2^{-0.4} \text{ و } 2^{5} \text{ و } 2^{0.3} \text{ و } 2^{\frac{5}{2}} \text{ و } 2^{\frac{3}{2}} \text{ و } 2^{\sqrt{5}} \text{ و } 2^{0} \text{ و } 2^{-\sqrt{3}}$$

با توجه به اینکه پایهٔ این اعداد توان‌دار برابر 2 می‌باشد و $1<2$ است، لذا هرچه توان بزرگتر باشد، آن عدد هم بزرگتر است، پس داریم:

$$2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1} < 2^{-0.4} < 2^{0} < 2^{0.3} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{\frac{5}{2}} < 2^{5}$$

مثال: مقایسهٔ اعداد توان‌دار مقابل:

$$4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}} \qquad\qquad 3^{2.5} > 3^{\frac{7}{3}}$$

مثال: اگر $x<y$ ، مقایسهٔ اعداد توان‌دار زیر:

$$4^{x} < 4^{y} \qquad\qquad 3^{x} < 3^{y} \qquad\qquad 2^{x} < 2^{y}$$

نکته: اگر عددی بین صفر و یک باشد، هرچه به توان بزرگتری برسد، کوچکتر می‌شود، بعنوان مثال:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \qquad\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \qquad\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{0.5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}$$

مثال: اگر $x<y$ ، مقایسهٔ اعداد توان‌دار زیر:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \qquad\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{y} \qquad\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

تعریف: تابع نمایی:

هر تابع به صورت $y=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود. توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ ، $y=3^x$ ، $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ نمونه‌هایی از توابع نمایی هستند.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است، تابع نمایی f را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(x) = a^x \quad (a>0 \,,\, a\neq 1) \end{cases}$$

پس در تابع نمایی، متغیر در توان قرار دارد.

منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه $\{x \mid x\in\mathbb{R} \,,\, x>0\}$ می‌باشد یعنی اعداد حقیقی مثبت.

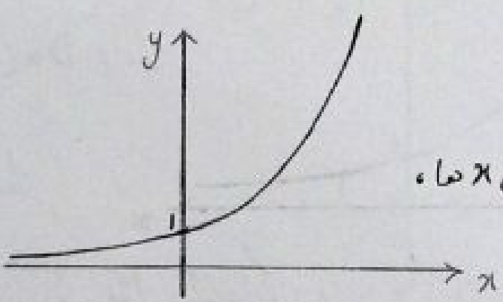
نکته: در تابع نمایی $y=f(x)=a^x$:

$$\begin{cases} \text{دامنه} = D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \\ \text{برد} = R_f = (0, +\infty) \end{cases}$$

* نمودار تابع نمایی:

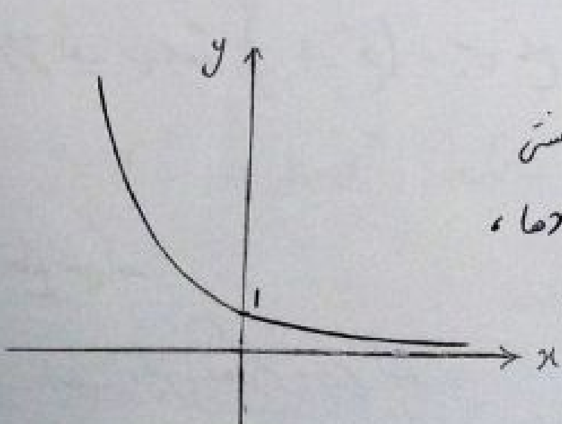
$$y=a^x \quad (a>0 \,,\, a\neq 1)$$

اگر: $a>1 \xrightarrow{\text{نمودار}}$



در این حالت، تابع نمایی افزایشی است چون با افزایش x ها، y ها نیز افزایش می‌یابد. (رشد نمایی)

اگر: $0<a<1 \xrightarrow{\text{نمودار}}$



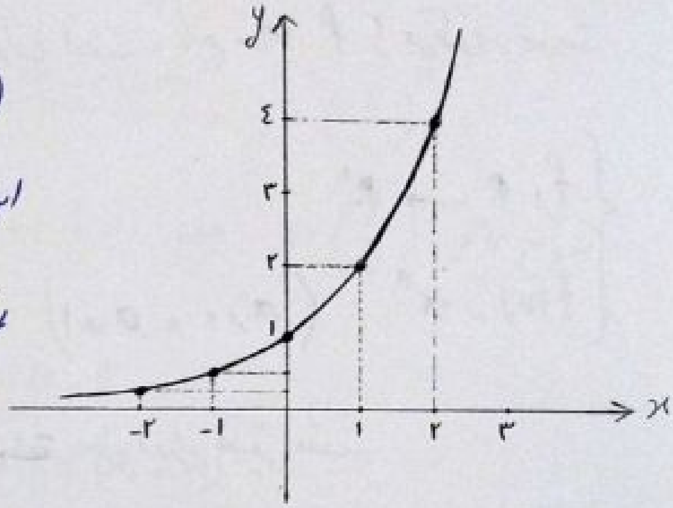
در این حالت تابع نمایی کاهشی است، چون با افزایش x ها، مقدار y ها کاهش می‌یابد. (زوال نمایی)

مثال: نمودار تابع $y=2^x$ را رسم کنید.

در تابع نمائی $y=2^x$ پایه برابر ۲ و بزرگتر از یک می‌باشد،

در نتیجه نمودار آن به شکل زیر است:

x	-2	-1	0	1	2
$y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

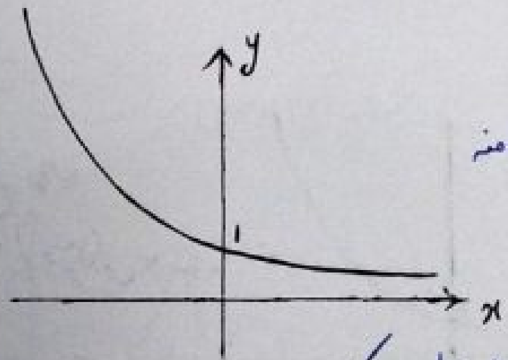


دامنه: $D=(-\infty,+\infty)$ برد: $R=(0,+\infty)$

این تابع یک به یک است، چون هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال: نمودار تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

در تابع نمائی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، پایه برابر $\frac{1}{2}$ و بین صفر و یک است $(0<a<1)$، پس نمودار آن به شکل زیر خواهد بود:



دامنه: $D=(-\infty,+\infty)$ برد: $R=(0,+\infty)$

این تابع یک به یک است، چون هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

تذکر: چون هر عدد به توان صفر همواره برابر یک می‌باشد $(a^0=1)$، پس تابع نمائی همواره محور yها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع می‌کند.

تذکر: تابع نمائی، هیچ‌گاه محور xها را قطع نمی‌کند.

تذکر: تابع نمائی، همواره تابعی یک به یک است، پس معکوس پذیر است.

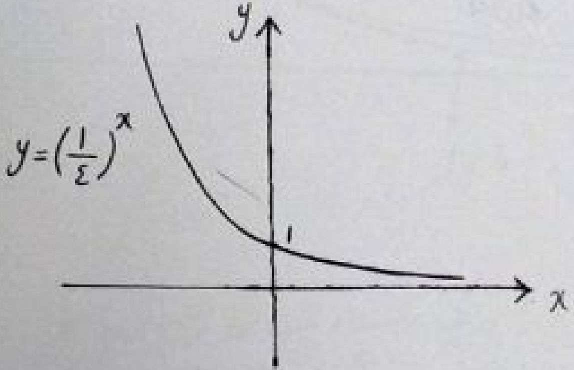
نکته: برای رسم توابع نمایی به صورت $y = a^{-x}$ ابتدا با معکوس کردن پایه، آن را به صورت توان مثبت نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 4^{-x}$

$$y = 4^{-x} \xrightarrow{\text{معکوس کردن پایه}} y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$$

در تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ چون $0 < \frac{1}{4} < 1$ می‌باشد، پس نمودار آن به شکل زیر می‌باشد:



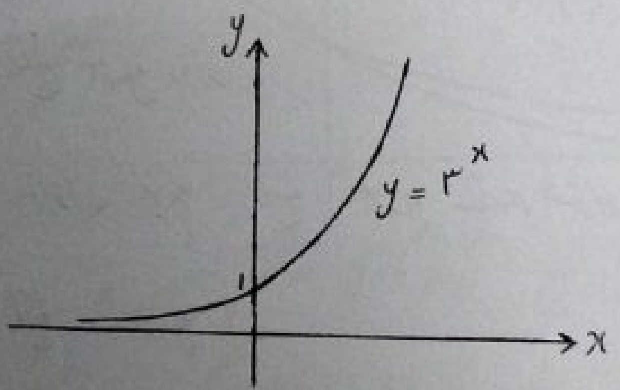
دامنه: $D = \mathbb{R}$

برد: $R = (0, +\infty)$

ب) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \xrightarrow{\text{معکوس کردن پایه}} y = 3^{x}$$

در تابع نمایی $y = 3^{x}$ چون $3 > 1$ می‌باشد، پس نمودار آن به شکل زیر است:



دامنه: $D = \mathbb{R}$

برد: $R = (0, +\infty)$

نکته: نمودار توابع با ضابطه‌های $y = a^{x}$ و $y = a^{-x}$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

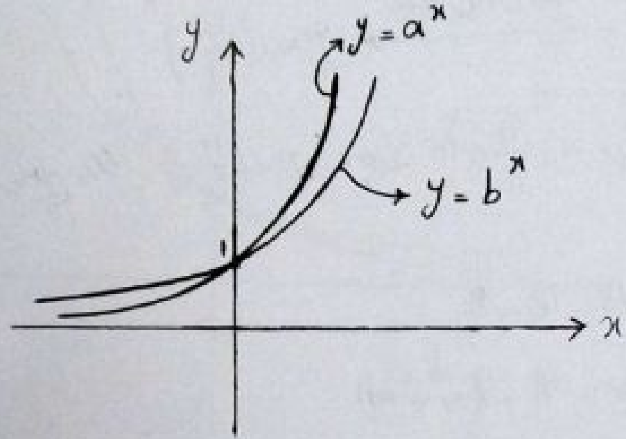
تهیه و تنظیم: دلبازی

مقایسه‌ی توابع نمایی:

الف) مقایسه‌ی دو تابع نمایی با پایه‌های بزرگتر از یک:

فرض کنیم $y=a^x$ و $y=b^x$ دو تابع نمایی با پایه‌ی بزرگتر از یک باشند ($a>1$ و $b>1$)

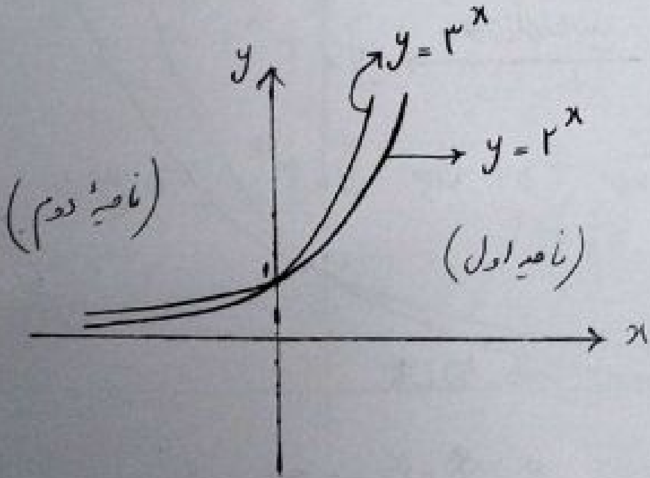
در این صورت اگر $a>b$ باشد، نمودار آن‌ها به صورت زیر خواهد بود.



$a>1$, $b>1$

$a>b$

مثال: دو تابع نمایی $y=2^x$ و $y=3^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و این دو تابع را با هم مقایسه کنید.



به ازای $x>0$: تابع $y=3^x$ مقادیر بزرگتری از تابع $y=2^x$ دارد.

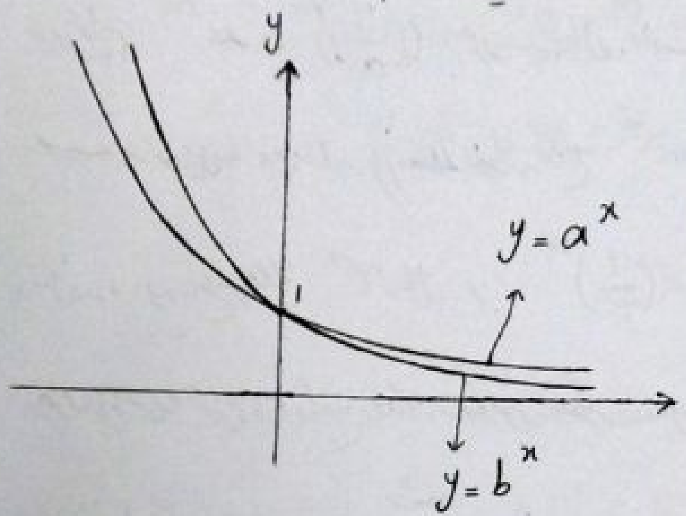
به ازای $x<0$: تابع $y=3^x$ مقادیر کمتری از تابع $y=2^x$ دارد.

به عبارت دیگر در ناحیه‌ی اول مختصات، تابع $y=3^x$ بالای تابع $y=2^x$ قرار می‌گیرد و در ناحیه‌ی دوم مختصات، تابع $y=3^x$ پایین تابع $y=2^x$ قرار می‌گیرد.

ب) مقایسه‌ی دو تابع نمایی با پایه‌های بین صفر و یک:

فرض کنیم $y=a^x$ و $y=b^x$ دو تابع نمایی با پایه‌های بین صفر و یک باشند ($0<a,b<1$)

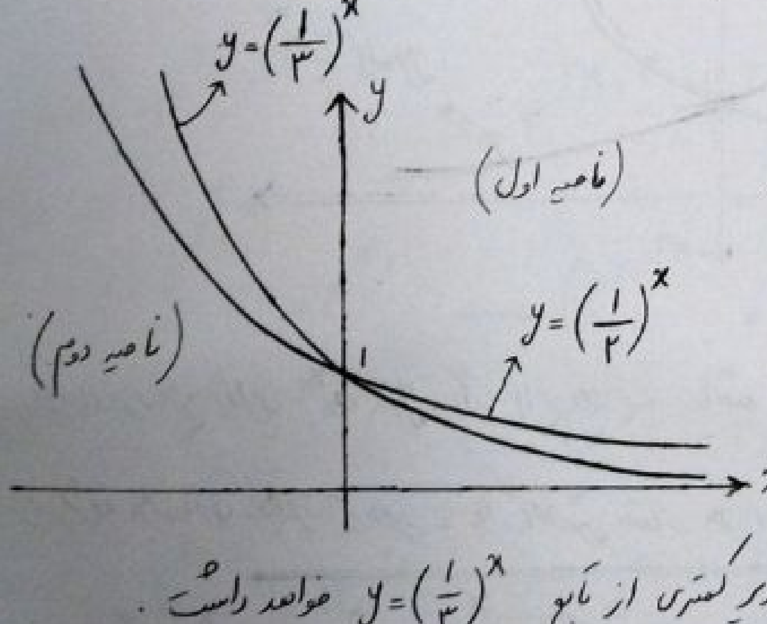
در این صورت اگر $a>b$ باشد، نمودار آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:



$0<a,b<1$

$a>b$

مثال: دو تابع نمایی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.



$0<\frac{1}{2},\frac{1}{3}<1$ ، $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

به ازای $x>0$: تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، مقادیر بزرگتری از تابع $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ دارد.

به ازای $x<0$: تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ مقادیر کمتری از تابع $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ خواهد داشت.

در واقع، در ناحیه‌ی اول مختصات، تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بالای تابع $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ قرار می‌گیرد و در ناحیه‌ی دوم مختصات، تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ پایینِ نمودار تابع $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ قرار می‌گیرد.

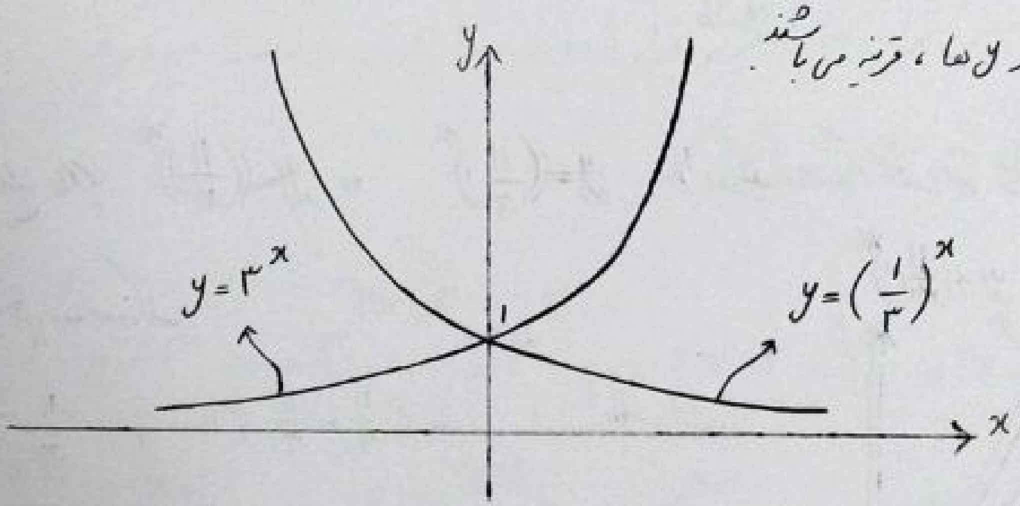
نکته: دو تابع نمایی که پایه‌های آن‌ها معکوس یکدیگر باشد، نسبت به محور y ها قرینه‌اند. یعنی دو تابع نمایی

$y=a^x$ و $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ نسبت به محور y ها، قرینه یکدیگر هستند.

می‌دانیم $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$، پس می‌توان گفت نمودار توابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ نیز نسبت به محور y ها قرینه‌اند. (مثلاً نمودار توابع $y=4^x$ و $y=4^{-x}$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند)

مثال: دو تابع نمایی $y=3^x$ و $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک نمودار مختصاتی نمایش دهید.

چون پایه‌های این دو تابع نمایی، معکوس یکدیگرند، پس نمودار آن‌ها نسبت به محور y ها، قرینه می‌باشند.



نکته: در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $0<a<1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچکتر از صفر، با کاهش مقدار x، مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

مثال: اگر $f(x)=3^x$ و $g(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ و $h(x)=10^x$، مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $f(3)=3^3=27$

ب) $g(-1)=\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=8^1=8$

ج) $h(-2)=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$

د) $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=3+\frac{1}{8}=\frac{25}{8}$

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

معادلات نمایی:

معادله‌ای که در آن، متغیر در توان قرار گرفته باشد را معادلهٔ نمایی می‌نامیم.

برای حل معادلات نمایی، از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$، آنگاه $x = y$ و برعکس.

به عبارت دیگر، برای حل معادلات نمایی، کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم پایه ایجاد کنیم، سپس توان ها را برابر قرار داده و مقدار مجهول را بدست می‌آوریم.

مثال: معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳} = ۸۱ \longrightarrow ۳^{۲x-۳} = ۳^{٤} \longrightarrow ۲x-۳ = ٤ \Rightarrow ۲x = ۷ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۷}{۲}}$

ب) $٤^{۲x-۱} = ۸^{x+۱} \longrightarrow (۲^{۲})^{۲x-۱} = (۲^{۳})^{x+۱} \longrightarrow ۲^{٤x-۲} = ۲^{۳x+۳}$

$\longrightarrow ٤x-۲ = ۳x+۳ \longrightarrow \boxed{x = ۵}$

پ) $۵^{۳n-۱} = ۱۲۵^{۲n+۱} \longrightarrow ۵^{۳n-۱} = (۵^{۳})^{۲n+۱} \longrightarrow ۵^{۳n-۱} = ۵^{۶n+۳}$

$\longrightarrow ۳n-۱ = ۶n+۳ \longrightarrow -۳n = ٤ \Rightarrow \boxed{n = -\frac{٤}{۳}}$

ت) $۹^{۳y-۳} = ۲۷^{y+۱} \longrightarrow (۳^{۲})^{۳y-۳} = (۳^{۳})^{y+۱} \longrightarrow ۳^{۶y-۶} = ۳^{۳y+۳}$

$\longrightarrow ۶y-۶ = ۳y+۳ \longrightarrow ۳y = ۹ \Rightarrow \boxed{y = ۳}$

ث) $2^{3n+2} = \frac{1}{32^2} \longrightarrow 2^{3n+2} = 32^{-2} \longrightarrow 2^{3n+2} = (2^5)^{-2}$

$\longrightarrow 2^{3n+2} = 2^{-10} \longrightarrow 3n+2 = -10 \Rightarrow \boxed{n=-4}$

ج) $4^{1-2x} = \frac{1}{64^3} \longrightarrow 4^{1-2x} = 64^{-3} \longrightarrow 4^{1-2x} = (4^3)^{-3}$

$\longrightarrow 4^{1-2x} = 4^{-9} \longrightarrow 1-2x = -9 \Rightarrow \boxed{x=5}$

چ) $9^x = 3^{x^2-4x} \longrightarrow (3^2)^x = 3^{x^2-4x} \longrightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x}$

$\longrightarrow 2x = x^2-4x \longrightarrow x^2-6x=0 \longrightarrow x(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$

ح) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

$\longrightarrow x+1 = -2 \longrightarrow \boxed{x=-3}$

خ) $4 \times 2^{x+1} = (0/5)^x \longrightarrow 2^2 \times 2^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow 2^{2+x+1} = 2^{-x}$

$\longrightarrow 2^{x+3} = 2^{-x} \longrightarrow x+3 = -x \longrightarrow 2x = -3 \longrightarrow \boxed{x = \frac{-3}{2}}$

د) $4^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 72 \longrightarrow (2^2)^{1-x} + (2^{-1})^{2x+1} = 72$

$\longrightarrow 2^{2-2x} + 2^{-2x-1} = 72 \longrightarrow 2^{-2x-1}(2^3+1) = 72$

$\longrightarrow 2^{-2x-1} \times 9 = 72 \xrightarrow{\div 9} 2^{-2x-1} = 8 = 2^3 \longrightarrow -2x-1 = 3 \longrightarrow \boxed{x=-2}$

تهیه و تنظیم: دلدار
09010825258

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

* تابع لگاریتمی:

تابع نمایی $f(x)=a^x$ را در نظر بگیرید. می دانیم تابع نمایی، تابعی یک به یک و معکوس پذیر است. معکوس (وارون) تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم و آن را به صورت $f^{-1}(x)=\log_a x \quad , a>0 , a\neq 1$ نشان می دهیم.

$$f(x)=a^x \Longleftrightarrow f^{-1}(x)=\log_a x \qquad (a>0 , a\neq 1)$$

تذکر: در این تعریف، a را پایه (مبنای) لگاریتم می نامیم و با توجه به تعریف تابع نمایی، می دانیم a عددی مثبت و مخالف یک است.

به عنوان مثال: $f(x)=\log_{0/5} x$ یا $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$ توابعی لگاریتمی محسوب می شوند ولی $f(x)=\log_{-2} x$ تابعی لگاریتمی نیست.

نکته: اگر پایه (مبنای) لگاریتم، عدد 10 باشد، گاهی نوشته نمی شود، یعنی: $\log_{10} x=\log x$

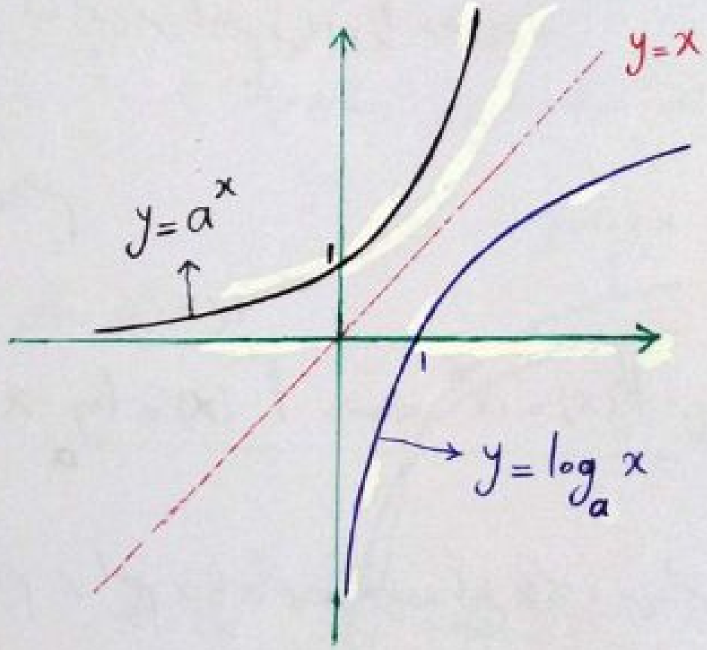
جمع بندی: وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به صورت $f^{-1}(x)=\log_a x$ نشان می دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می نامیم.

09010825258

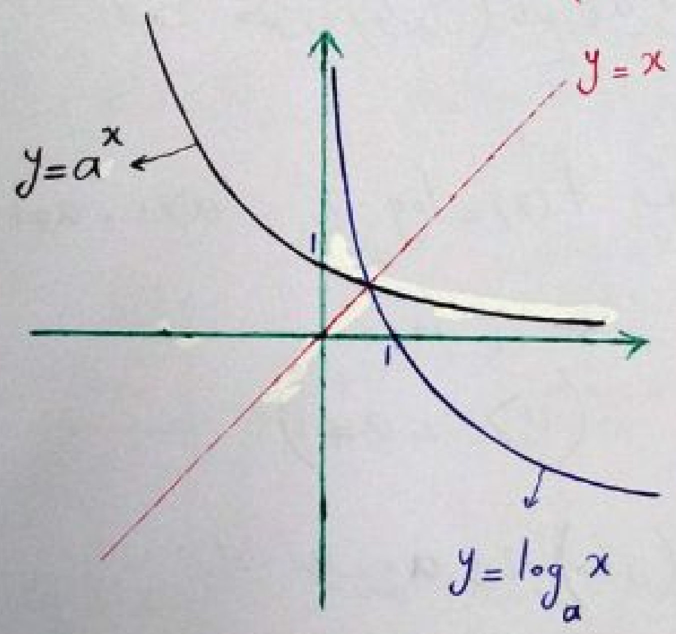
* رسم تابع لگاریتمی :

چون تابع لگاریتمی، وارون تابع نمایی است، نمودار تابع لگاریتمی از قرینه کردن نمودار $y=a^x$ نسبت به خط $y=x$ بدست می آید.

1) اگر $1<a$ باشد :



2) اگر $0<a<1$ باشد :



در این حالت $(a>1)$، تابع لگاریتمی نیز مانند تابع نمایی، روی دامنه اش همواره افزایشی است.
صعودی

در این حالت $(0<a<1)$، تابع لگاریتمی نیز مانند تابع نمایی، روی دامنه اش همواره کاهشی است.
نزولی

* نکات تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a x$:

1) دامنه تابع لگاریتمی همواره برابر $D=(0,+\infty)$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی $R=\mathbb{R}$ می باشد.

2) تابع لگاریتمی همواره محور x ها را در نقطه ای به طول 1 قطع می کند ولی هیچ گاه محور y را قطع نمی کند.

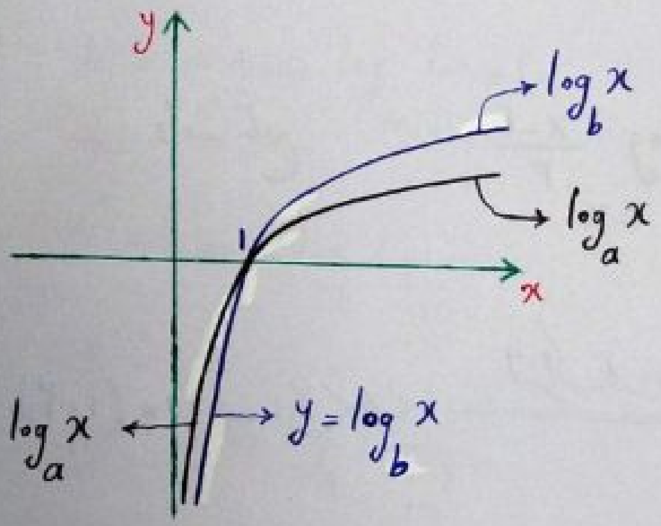
3) در حالتی که $1<a$ باشد، نمودار توابع لگاریتمی و نمایی، نقطه برخوردی ندارند ولی اگر $0<a<1$ باشد، این دو نمودار، یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می کنند.

۴) تابع لگاریتمی روی دامنهٔ خود، تابعی یک به یک است، زیرا هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

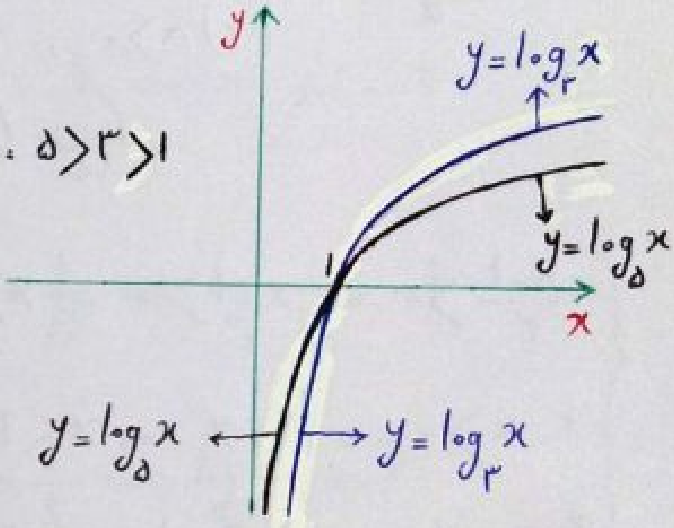
۵) وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است و وارون تابع لگاریتمی، تابع نمایی است.

* مقایسهٔ نمودار توابع لگاریتمی: (با توجه به این نکته که نمودار لگاریتمی، قرینهٔ نمودار نمایی نسبت به خط $y=x$ است)

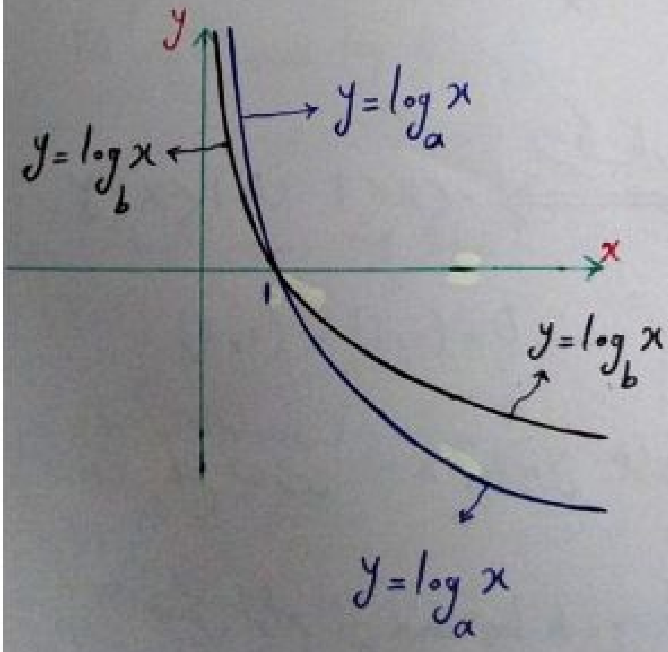
الف) دو تابع لگاریتمی با مبنای بزرگتر از یک: اگر $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$ و $a>b>1$:



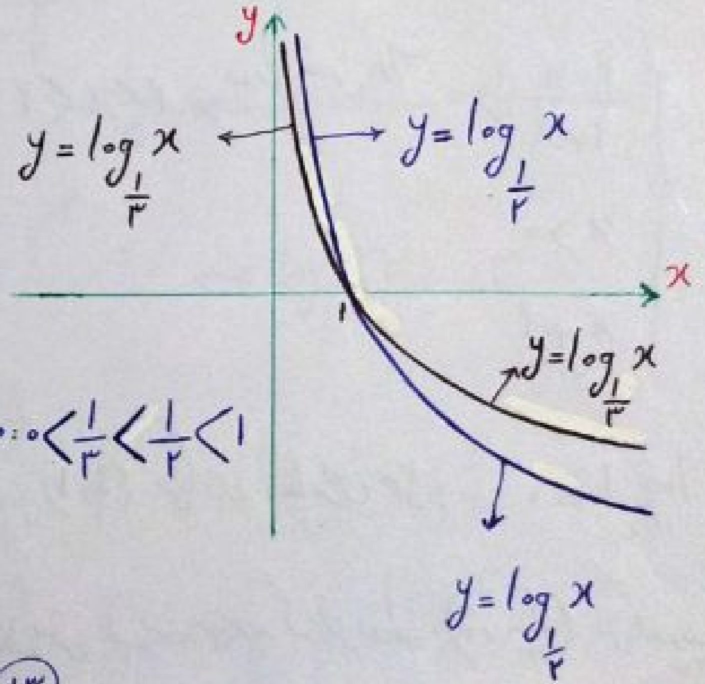
مثال: $5>3>1$



ب) دو تابع لگاریتمی با مبنای بین صفر و یک: اگر $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$ و $0<b<a<1$:



مثال: $0<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$



تهیه و تنظیم: دلبار

* تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی:

برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی، از دو نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

۱) لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود و لگاریتم صفر و اعداد منفی، تعریف نشده است.

۲) مبنای لگاریتم همواره عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می‌باشد.

$$y=\log_a x \Rightarrow x>0 \;,\; a>0 \;,\; a\neq 1$$

مثال: دامنهٔ تابع $y=\log_{2-x}\frac{x-1}{3}$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases}\frac{x-1}{3}>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1\\ 2-x>0 \Rightarrow 2>x \Rightarrow x<2\\ 2-x\neq 1 \Rightarrow -x\neq -1 \Rightarrow x\neq 1\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}} 1<x<2 \Rightarrow D=(1,2)$$

مثال: دامنهٔ تابع $y=\log_x \frac{2-x}{2+x}$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases}\frac{2-x}{2+x}>0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -2<x<2\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک بازه‌ها}} 0<x<1 \;\cup\; 1<x<2$$

$$\Rightarrow D=(0,1)\cup(1,2)$$

نکته: تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ همواره از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرد، بنابراین همواره: $\log_a 1=0$

همچنین توابع $y=k\log_a mx$ نیز تابع لگاریتمی محسوب می‌شوند که از نقطهٔ $(\frac{1}{m},0)$ می‌گذرند.

* هرگاه تساوی $x=a^y$ برقرار باشد $(x>0 \ , \ a>0 \ , \ a\neq 1)$ ، آنگاه y را لگاریتم x در پایه (مبنای) a می‌نامیم و داریم:

$$\boxed{x=a^y \iff \log_a x = y}$$

بسیار مهم

بعنوان مثال:

$2^3=8 \iff \log_2 8=3$

$2^{-1}=\frac{1}{2} \iff \log_2 \frac{1}{2}=-1$

$10^2=100 \iff \log_{10} 100=2$

$10^{-2}=\frac{1}{100} \iff \log_{10} 0/01=-2$

$8^0=1 \iff \log_8 1=0$

$2^{-4}=\frac{1}{16} \iff \log_2 \frac{1}{16}=-4$

$9^{\frac{1}{2}}=3 \iff \log_9 3=\frac{1}{2}$

$3^{-2}=\frac{1}{9} \iff \log_3 \frac{1}{9}=-2$

$5^3=125 \iff \log_5 125=3$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=125 \iff \log_{\frac{1}{5}} 125=-3$

$25^{\frac{1}{2}}=5 \iff \log_{25} 5=\frac{1}{2}$

$25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5} \iff \log_{25} \frac{1}{5}=-\frac{1}{2}$

$3^4=81 \iff \log_3 81=4$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27 \iff \log_{\frac{1}{3}} 27=-3$

$27^{\frac{1}{3}}=3 \iff \log_{27} 3=\frac{1}{3}$

$9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \iff \log_9 \frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$

$a^1=a \iff \log_a a=1$

$64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4} \rightarrow \log_{64} \frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$

نکته: لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی:

$$\log_{10} x = \log x$$

مثال: اگر $\log_{16} x = \frac{3}{2}$ باشد، x را بدست آورید.

$$\log_{16} x = \frac{3}{2} \Rightarrow 16^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{16^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$$

مثال: اگر $\log_4 a = 1/25$ باشد، مقدار a را بیابید.

$$\log_4 a = 1/25 = \frac{5}{4} \Rightarrow 4^{\frac{5}{4}} = a \Rightarrow a = 4^{\frac{5}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$$

تجربی - خارج ۸۶: اگر $\log_2 12 = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۶   ۳) ۹ ✓   ۴) ۱۸

$$\log_2 12 = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = 12 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4^\alpha = 144 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 4^2} \frac{4^\alpha}{4^2} = \frac{144}{4^2}$$

$$\Rightarrow 4^{\alpha-2} = \frac{144}{16} = 9$$

مثال: معادلهٔ $\log_{0/3} x = \left(\frac{3}{10}\right)^x$ چند ریشه دارد؟ ۱) صفر   ۲) ۱ ✓   ۳) ۲   ۴) بی‌شمار

می‌دانیم توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ وارون یکدیگر و نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند.

اگر $a > 1$ باشد، نمودار آن‌ها هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند و اگر $0 < a < 1$ باشد، دو نمودار، یکدیگر را در یک نقطه روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. لذا معادلهٔ فوق یک ریشه دارد.

تهیه و تنظیم: دلیار

* ویژگی های لگاریتم:

۱) لگاریتم ۱ در هر مبنایی برابر صفر است. $(a>0 , a\neq 1)$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

۲) لگاریتم هر عدد در مبنای خودش، برابر ۱ است.

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

۳) اگر a عددی حقیقی و مثبت $(a\neq 1)$ باشد، همواره داریم:

$$\log_a \frac{1}{a} = -1 \quad , \quad \log_{\frac{1}{a}} a = -1$$

۴) برای اعداد حقیقی و مثبت x و y و a $(a\neq 1)$، داریم:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

اثبات: $m = \log_a x \Rightarrow x = a^m \quad , \quad n = \log_a y \Rightarrow y = a^n$

$$\Rightarrow xy = a^m \times a^n = a^{m+n} \Rightarrow xy = a^{m+n} \Rightarrow \log_a (xy) = m+n$$

$$\Rightarrow \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

مثال: فرض کنید $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ ، مقدار $\log 6$ را حساب کنید.

$$\log 6 = \log (3 \times 2) = \log 3 + \log 2 = 0/48 + 0/3 = 0/78$$

۵) برای اعداد حقیقی و مثبت x و y و a $(a \neq 1)$ ، داریم:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

اثبات: $m = \log_a x \Rightarrow x = a^m$ ، $n = \log_a y \Rightarrow y = a^n$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = m - n \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

مثال: اگر $\log 2 = 0/3$ باشد، مقدار $\log 5$ را حساب کنید.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0/3 = 0/7$$

نکته: $\log 5 = 1 - \log 2$

۶) اگر x و a اعدادی حقیقی و مثبت $(a \neq 1)$ باشد، داریم:

الف) به ازای هر عدد طبیعی n :

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

اثبات: $\log_a x^n = \log_a (\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ بار}}) = \underbrace{\log_a x + \cdots + \log_a x}_{n \text{ بار}} = n \log_a x$

ب) فرمول تغییر مبنا:

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\log_a x$$

اثبات: $y=\log_{a^m} x \Rightarrow x=(a^m)^y = a^{my} \Rightarrow my=\log_a x$

$$\Rightarrow y=\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\log_a x$$

پ) از تعمیم (الف) و (ب) نتیجه می‌گیریم:

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x \quad , \quad \log_a \sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m}\log_a x \qquad \sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$$

مثال: حاصل عبارت‌های لگاریتمی زیر را بدست آورید.

الف) $\log(۰/۱)^{۱۰} = ۱۰\log ۰/۱ = ۱۰\log\frac{۱}{۱۰} = ۱۰(-۱) = -۱۰$

ب) $\log_{۴} ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲}(۱) = \frac{۳}{۲}$

پ) $\log_{۱۲۵} ۲۵ = \log_{۵^۳} ۵^۲ = \frac{۲}{۳}\log_۵ ۵ = \frac{۲}{۳}(۱) = \frac{۲}{۳}$

ت) $\log_{\frac{۱}{۹}} ۲۷ = \log_{۳^{-۲}} ۳^۳ = \frac{۳}{-۲}\log_۳ ۳ = -\frac{۳}{۲}(۱) = -\frac{۳}{۲}$

ث) $\log_{\frac{۱}{۳۲}} \frac{۱}{۶۴} = \log_{۲^{-۵}} ۲^{-۶} = \frac{-۶}{-۵}\log_۲ ۲ = \frac{۶}{۵}(۱) = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$

مثال: اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 \simeq 0/48$ باشد، مقادیر تقریبی اعداد زیر را بدست آورید.

الف) $\log 12 = \log(3\times 4) = \log 3 + \log 4 = 0/48 + \log 2^2 = 0/48 + 2\log 2$

$= 0/48 + 2(0/3) = 0/48 + 0/6 = 1/08$

ب) $\log 0/75 = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = 0/48 - \log 2^2 = 0/48 - 2(0/3) = -0/12$

پ) $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 5 = \frac{1}{2}\log\frac{10}{2} = \frac{1}{2}(\log 10 - \log 2) = \frac{1}{2}(1 - 0/3) = 0/35$

ت) $\log \frac{25}{18} = \log 25 - \log 18 = \log 5^2 - \log(2\times 3^2) = 2\log 5 - \log 2 - 2\log 3$

$= 2(1 - \log 2) - 0/3 - 2(0/48) = 2(0/7) - 0/3 - 0/96 = 0/14$

ث) $\log \sqrt[3]{6} = \log 6^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log(2\times 3) = \frac{1}{3}(\log 2 + \log 3) = \frac{1}{3}(0/3 + 0/48) = 0/26$

ج) $\log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}} = \log 27^{\frac{1}{2}} - \log 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\log 3^3 - \frac{1}{4}\log 5$

$= \frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{4}(1 - \log 2) = \frac{3}{2}(0/48) - \frac{1}{4}(1 - 0/3) = 0/545$

تهیه و تنظیم: دلیار 09010825258

تجربی ۹۰: اگر $\log_{10} 2 = k$ باشد، حاصل $\log_{10}(6-2\sqrt{5}) + 2\log_{10}(1+\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $4k$ ✓ ۳) $1+k$ ۴) $2+4k$

$$\text{حاصل عبارت} = \log_{10}(6-2\sqrt{5}) + \log_{10}(1+\sqrt{5})^2 = \log_{10}(6-2\sqrt{5})\underbrace{(1+\sqrt{5})^2}_{1+2\sqrt{5}+5}$$

$$= \log_{10}\underbrace{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \log_{10}\underbrace{(36-20)}_{16} = \log_{10} 2^4 = 4\log_{10} 2 = 4k$$

تجربی - خارج ۹۰: اگر $\log_{10} 5 = 3k$ باشد، $\log_{10}\sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

۱) $1-4k$ ✓ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

$$\log_{10}\left(\frac{16}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log\frac{16}{10} = \frac{1}{3}\left(\log 2^4 - \log 10\right) = \frac{4\log 2 - 1}{3} = \frac{4(1-\log 5)-1}{3}$$

$$= \frac{4(1-3k)-1}{3} = \frac{4-12k-1}{3} = \frac{3-12k}{3} = 1-4k$$

نکته: $\log 5 = 1-\log 2$ $\quad\quad$ $\log 2 = 1-\log 5$

تجربی ۸۷: اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، لگاریتم (a^3+7) در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ✓ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a^3 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 3^2$$

$$\Rightarrow \log_8(a^3+7) = \log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3}(1) = \frac{4}{3}$$

تهیه و تنظیم: دلیار

ادامهٔ ویژگی های لگاریتم: (تمام لگاریتم ها و کسرها تعریف شده اند)

۷) $\log_a a^x = x$ اثبات: $\log_a a^x = x\log_a a = x(1) = x$

۸) $a^{\log_a x} = x$, $a^{k\log_a x} = x^k$

اثبات: $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y = a^{\log_a x}$

۹) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$, $a^{k\log_b x} = x^{k\log_b a}$

مثال:

$۳^{\log_۳ ۱۰} = ۱۰$ $۵^{\log_۵ ۷} = ۷$

$۲^{۲\log_۲ ۳} = ۳^۲ = ۹$ $۶^{۳\log_۶ ۱۰} = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$

اثبات: تمرین ص ۱۱۳

۱۰) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (فرمول تغییر مبنا) $\xrightarrow{\text{مثال}}$ $\log_۳ ۵ = \dfrac{\log_{۱۰} ۵}{\log_{۱۰} ۳} = \dfrac{\log ۵}{\log ۳}$

از طرفین وسطین کردن رابطهٔ فوق، داریم:

۱۱) $\log_b a \times \log_c b = \log_c a$

و از تعمیم آن خواهیم داشت:

$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$

اگر در رابطهٔ ۱۱ ، $a=c$ باشد، آنگاه :

$$۱۲)\ \log_b a \times \log_a b = ۱ \Rightarrow \log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$$

مثال: اگر $\log_b a = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\log_a \sqrt{b}$ را بیابید.

$$\log_a \sqrt{b} = \frac{۱}{۲}\log_a b = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\log_b a} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

ریاضی ۸۵ : اگر $\log_{۲۰} ۴ = k$ باشد، حاصل $\log_۴ ۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۱+k}{k}$ ۲) $\frac{k}{۱-k}$ ۳) $\frac{k-۱}{k}$ ۴) $\frac{۱-k}{k}$ ✓

$$\Rightarrow \log_۴ ۲۰ = \frac{۱}{k} \Rightarrow \log_۴ (۵\times۴) = \log_۴ ۵ + \log_۴ ۴ = \log_۴ ۵ + ۱ = \frac{۱}{k}$$

$$\Rightarrow \log_۴ ۵ = \frac{۱}{k} - ۱ = \frac{۱-k}{k}$$

ریاضی ۸۱ : اگر $\log_۲ \sqrt[۵]{e^۲} = A$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{e}} ۳۲$ کدام است؟

۱) $\frac{A}{۴}$

۲) $\frac{A}{۲}$

۳) $\frac{۲}{A}$

۴) $\frac{۴}{A}$ ✓

$$\log_۲ \sqrt[۵]{e^۲} = \frac{۲}{۵}\log_۲ e = A \Rightarrow \log_۲ e = \frac{۵A}{۲} \Rightarrow \log_e ۲ = \frac{۲}{۵A} \quad (*)$$

$$\log_{\sqrt{e}} ۳۲ = \log_{e^{\frac{۱}{۲}}} ۲^۵ = \frac{۵}{\frac{۱}{۲}}\log_e ۲ \overset{(*)}{=\!=} ۱۰ \times \frac{۲}{۵A} = \frac{۴}{A}$$

مثال: حاصل را بدست آورید.

الف) $$۵^{(\log_۵ ۳ + \log_۵ ۲)} = ۵^{\log_۵ (۳\times ۲)} = ۵^{\log_۵ ۶} = ۶$$

ب) $$۳^{(۲\log_۳ ۵ - \log_۳ ۸)} = ۳^{(\log_۳ ۵^۲ - \log_۳ ۸)} = ۳^{\log_۳ \frac{۲۵}{۸}} = \frac{۲۵}{۸}$$

مثال: اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ باشد، آنگاه $\log_{۳۰} ۱۲$ کدام است؟

$$\log_{۳۰} ۱۲ = \frac{\log ۱۲}{\log ۳۰} = \frac{\log(۲^۲ \times ۳)}{\log(۳\times ۱۰)} = \frac{۲\log ۲ + \log ۳}{\log ۳ + \log ۱۰} = \frac{۲a+b}{b+۱}$$

مثال: اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۴)$ عبور کند، مقدار a چقدر است؟

مختصات نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۴)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$-۴ = \log_a \frac{۱}{۲} \Rightarrow a^{-۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a^۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a^۴ = ۲ \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[۴]{۲}}$$

مثال: اگر $\log_{۵۰} A = \frac{۱}{۲}$ و $\log_{۳۲} B = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\frac{A+B}{A-B}$ کدام است؟

$$A = ۵۰^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

$$B = ۳۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{A-B} = \frac{۵\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲}} = \frac{۹\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۹$$

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

تهیه و تنظیم : دلیار

* معادلات لگاریتمی :

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی بدست می‌آید.

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a \neq 1)$ باشد، آنگاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، می‌توان نوشت:

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y \qquad (x, y > 0)$$

مثال: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_5 x = 2 \Rightarrow x = 5^2 = 25$

ب) $\log_2 (4x+1) = 3 \Rightarrow 4x+1 = 2^3 \Rightarrow 4x+1 = 8 \Rightarrow 4x = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{4}}$

پ) $\log_3 (x+6) = \log_3 (2x-3) \Rightarrow x+6 = 2x-3 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

ت) $2\log_4 (x-1) = 3 \xrightarrow{\div 2} \log_4 (x-1) = \frac{3}{2} \Rightarrow x-1 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

$\Rightarrow x-1 = 8 \Rightarrow \boxed{x = 9}$ قابل قبول

روش دوم: $\log_4 (x-1)^2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 4^3 = 64 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-1| = 8 \xrightarrow{x>1} x-1 = 8 \rightarrow \underline{x=9}$

ت) $\log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1 \Rightarrow \log_5 \left[(x+6)(x+2)\right] = \log_5 5$

$\Rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \Rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$

$x=-1$ قابل قبول

$x=-7$ غیر قابل قبول ← چون لگاریتم ها به ازای آن تعریف نشده اند

ج) $3\log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25 \Rightarrow \log_4 a^3 - \log_4 5 = \log_4 25$

$\Rightarrow \log_4 \frac{a^3}{5} = \log_4 25 \Rightarrow \frac{a^3}{5} = 25 \Rightarrow a^3 = 125 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125} = 5$ قابل قبول

چ) $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 21) = -2 \Rightarrow (x^2 - 21) = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 21 = 100$

$\Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \checkmark \\ x = -11 \checkmark \end{cases}$ هر دو جواب، قابل قبول است

مثال: اگر به عددی ۳ واحد اضافه کنیم، به لگاریتم آن در مبنای ۲، یک واحد اضافه می‌شود، آن عدد کدام است؟

$\log_2 (x+3) = \log_2 x + 1 \Rightarrow \log_2 (x+3) - \log_2 x = 1$

$\Rightarrow \log_2 \frac{x+3}{x} = \log_2 2 \Rightarrow \frac{x+3}{x} = 2 \Rightarrow x + 3 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 3}$

ریاضی ۸۴ : از معادلهٔ $\log(2x-1)+\log(x+3)=\log 30-\log 2$ ، مقدار $\log_{8} x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$ ✓
۴) $\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \log\left[(2x-1)(x+3)\right]=\log\frac{30}{2} \Rightarrow (2x-1)(x+3)=15$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x-x-3=15 \Rightarrow 2x^2+5x-18=0 \Rightarrow (2x+9)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{قابل قبول} \Rightarrow \log_{8} 2=\log_{2^3} 2=\frac{1}{3}\log_{2} 2=\frac{1}{3} \\ x=-\frac{9}{2} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ریاضی ۸۵ : اگر $2\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+10)$ ، آنگاه $\log_{4}(x+2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$ ✓

$$\log_{10}(x-2)^2=\log_{10}(x+10) \Rightarrow (x-2)^2=x+10 \Rightarrow x^2-4x+4=x+10$$

$$\Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-6)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 & \text{قابل قبول} \\ x=-1 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{4}(x+2)=\log_{4} 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_{2} 2=\frac{3}{2}$$

تجربی ۹۵ : از معادلهٔ لگاریتمی $\log_{3}(2x^2+1)-\log_{3}(x+2)=1$ ، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$ ✓

$$\log_{3}\frac{2x^2+1}{x+2}=\log_{3} 3 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2}=3$$

$$\Rightarrow 2x^2+1=3x+6 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0 \Rightarrow (2x-5)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} & \text{قابل قبول} \Rightarrow \log_{8}(2x-1)=\log_{8} 4=\frac{2}{3} \\ x=-1 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

ولی در ادامهٔ حل، نمی‌توان از آن استفاده کرد ←

تهیه و تنظیم: دلیار

* معادلات خاص و دستگاه معادلات شامل لگاریتم:

مثال: مقدار x را از معادلهٔ لگاریتمی $\log_5 x + \log_x 5 = 2$ بدست آورید.

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2 \xrightarrow{t=\log_5 x} t + \frac{1}{t} = 2 \longrightarrow \frac{t^2+1}{t} = 2$$

$$\Rightarrow t^2+1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_5 x = 1 \Rightarrow \underline{x=5}$$

مثال: مقدار x را از معادلهٔ $2^x = 3$ محاسبه کنید.

$$2^x = 3 \xrightarrow[\text{مبنای ۲ می‌گیریم}]{\text{از طرفین، لگاریتم در}} \log_2 2^x = \log_2 3 \Rightarrow x \cancel{\log_2 2}^{1} = \log_2 3 \Rightarrow x = \log_2 3$$

تمرین ۸۴: از معادلات $2^x \times 2^y = 4$ و $\log_{10} x = \log_{10} 2 + \log_{10} y$ ،

مقدار x کدام است؟

$$2^x \times 2^y = 4 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^2 \Rightarrow x+y = 2 \quad (\mathrm{I})$$

$$\log x - \log y = \log 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})} 2y + y = 2 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \xrightarrow{(\mathrm{II})} \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

۱) $\frac{2}{5}$

۲) $\frac{4}{3}$ ✓

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{5}$

مثال: اگر $\log \sin x - \log \cos x + 1 = 0$ باشد، مقدار $\tan x$ را بیابید.

$$\log \sin x - \log \cos x = -1 \Rightarrow \log \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \log_{10}(\tan x) = -1 \Rightarrow \tan x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

تجربی ۹۶: از معادلهٔ دو مجهول $۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲\log ۳ + \log x$، مقدار y کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$۲^{x-۷} \times ۲^{۲(x+y)} = ۱ \Rightarrow ۲^{x-۷} \times ۲^{۲x+۲y} = ۲^{۰} \Rightarrow ۲^{x-۷+۲x+۲y} = ۲^{۰}$$

$$\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰ \Rightarrow ۳x+۲y=۷ \quad (\mathrm{I})$$

$$\log y - \log x = \log ۳^{۲} \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log ۹ \Rightarrow \frac{y}{x} = ۹ \Rightarrow y = ۹x \Rightarrow x = \frac{y}{۹} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})} ۳\left(\frac{y}{۹}\right) + ۲y = ۷ \Rightarrow \frac{y}{۳} + ۲y = ۷ \Rightarrow \frac{۷y}{۳} = ۷ \Rightarrow \boxed{y=۳} \quad و \quad x = \frac{۱}{۳}$$

تجربی ۸۵: اگر $۴^{x} = ۴\sqrt{۲}$ و $۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y$، مقدار y کدام است؟

۱) ۷٫۵
۲) ۱۲٫۵
۳) ۱۵
۴) ۲۵

معادلهٔ نمایی $\rightarrow ۲^{۲} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{۲})^{x} \Rightarrow ۲^{۲+\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲+\frac{۱}{۲} = ۲x$

$\Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴} \longrightarrow$ اکنون مقدار x را در معادلهٔ لگاریتمی قرار می‌دهیم

$$۱ + \log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱} = \log y \Rightarrow ۱ + \log \frac{۳}{۲} = \log y \Rightarrow \log ۱۰ + \log \frac{۳}{۲} = \log y$$

$$\log\left(۱۰ \times \frac{۳}{۲}\right) = \log y \Rightarrow \log y = \log ۱۵ \Rightarrow \boxed{y = ۱۵}$$

تجربی - خارج ۸۷: از دو معادلهٔ $\log_{۱۰}(y+۲) = ۱$ و $\log(y-x) + \log(۴x+y) = ۲$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\log_{۱۰}(y+۲) = ۱ \Rightarrow y+۲ = ۱۰ \Rightarrow y = ۸$$

اکنون $y=۸$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \log(۸-x)(۴x+۸) = ۲ \Rightarrow \log(-۴x^{۲}+۲۴x+۶۴) = \log ۱۰۰ \Rightarrow -۴x^{۲}+۲۴x+۶۴ = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۶x+۹=۰ \Rightarrow (x-۳)^{۲}=۰ \Rightarrow \boxed{x=۳}$$ قابل قبول

تجربی ۸۹: از دو معادلهٔ $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2+y^2=46$ ، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) ۱٫۵ ✓ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \rightarrow \log_3 (xy) = 2 \Rightarrow xy = 3^2 \rightarrow xy = 9 \quad , \quad x^2+y^2 = 46$$

از طرفی می دانیم: $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow 46 = (x+y)^2 - 2(9)$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 46+18 = 64 \longrightarrow (x+y)^2 = 64 \xrightarrow{x,y>0} x+y = 8$$

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

تجربی-خارج ۹۲: از دو معادلهٔ $4^x + 2^x = 72$ و $\log_{10}(x+1) + \log_{10}(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ✓ ۴) ۹

معادلهٔ توانی: $(2^2)^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x = 72$

$$\xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{t=2^x} t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \\ t = -9 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

اکنون $x=3$ را در معادلهٔ لگاریتمی قرار می دهیم:

$$\log 4 + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log[4(2y+9)] = 2 \Rightarrow \log(8y+36) = \log 100 \Rightarrow 8y+36 = 100 \Rightarrow \boxed{y = 8}$$

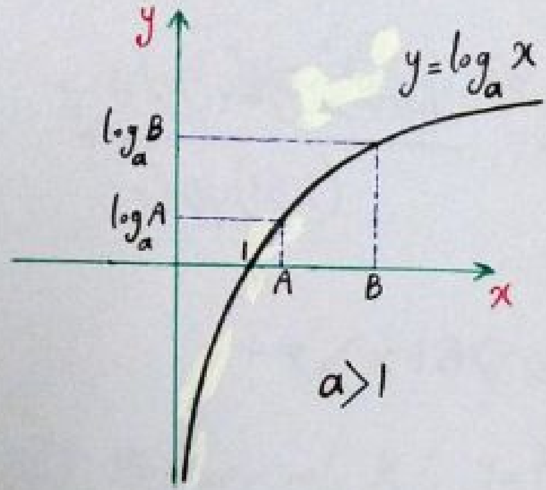
تذکر: $t = 2^x = -9$ به این دلیل غیرممکن است که حاصل هر تابع نمایی (مانند 2^x)، همواره مثبت است.

تهیه و تنظیم: دلیار 09010825258

تهیه و تنظیم: دلیار

* نامساوی ها و نامعادلات لگاریتمی:

الف) اگر مبنا (پایه) بزرگتر از یک باشد $(a>1)$، نمودار تابع لگاریتمی، افزایشی (صعودی) است.

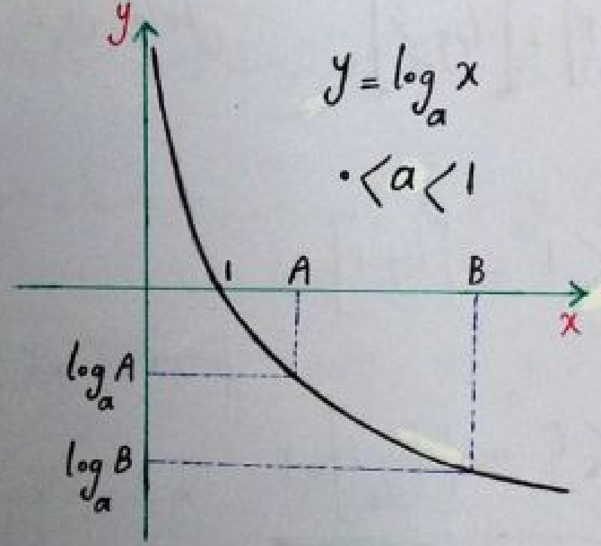


پس می‌توان نوشت:

$$A\leqslant B \Rightarrow \log_a A\leqslant \log_a B$$

در این حالت، اگر $0<x<1$ باشد، $\log_a x$ مقداری منفی و اگر $x>1$ باشد، $\log_a x$ مقداری مثبت خواهد بود.

ب) اگر پایه (مبنا) بین صفر و یک باشد $(0<a<1)$، نمودار تابع لگاریتمی، کاهشی (نزولی) است.



$$A\leqslant B \Rightarrow \log_a A\geq \log_a B$$

در این حالت، اگر $0<x<1$ باشد، $\log_a x$ مقداری مثبت و اگر $x>1$ باشد، $\log_a x$ مقداری منفی خواهد بود.

تجربی - خارج ۸۶: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-\log_{10}(x-1)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(1,2]$

۲) $[2,10]$

۳) $[1,11)$

۴) $(1,11]$ ✓

$$1-\log_{10}(x-1)\geq 0 \Rightarrow \log_{10}(x-1)\leq 1 \Rightarrow \log_{10}(x-1)\leqslant \log_{10}10$$

مبنا

$$\xrightarrow{10>1} x-1\leq 10 \Rightarrow x\leq 11 \quad (\mathrm{I})$$

از طرفی: $x-1>0 \Rightarrow x>1 \quad (\mathrm{II})$

$$\xRightarrow{\cap} D_f=(1,11]$$

تجربی - خارج ۸۴: اگر $2^{-x} < 0/00001$ و $\log_{10} 2 = 0/301$ باشد، کوچکترین عدد x با دو رقم اعشار کدام است؟

۱) ۱۹/۸۹ ۲) ۱۹/۹۱ ۳) ۱۹/۹۴ ✓ ۴) ۱۹/۹۷

$$2^{-x} < 10^{-6} \xrightarrow[\text{معکوس می‌کنیم}]{\text{دو طرف نامساوی را}} 2^{x} > 10^{6} \xrightarrow[\text{می‌گیریم: } (10>1)]{\text{از طرفین، لگاریتم در مبنای ۱۰}}$$

$$\log_{10} 2^{x} > \log_{10} 10^{6} \Rightarrow x\log_{10} 2 > 6\,\overset{1}{\cancel{\log_{10} 10}} \Rightarrow 0/301\,x > 6$$

$$\Rightarrow x > \frac{6}{0/301} \Rightarrow x > 19/93 \longrightarrow Min(x) = \underline{19/94}$$

مثال: حاصل $[\log_2 6] + [\log_6 2]$ را بیابید. ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

$$\overset{\text{مبنا}}{\uparrow}\ 6>1:\ \log_6 1 < \log_6 2 < \log_6 6 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0$$

$$\overset{\text{مبنا}}{\uparrow}\ 2>1:\ \log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2$$

$$\Rightarrow 0 + 2 = 2$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $\log_{0/5} x - \log_2 (x-1) > -1$ کدام بازه است؟

دامنه لگاریتم‌ها: $x > 0 \cap x > 1 = x > 1$ (*)

$$\log_{\frac{1}{2}} x - \log_2 (x-1) > -1 \longrightarrow \log_{2^{-1}} x - \log_2 (x-1) > -1 \longrightarrow -\log_2 x - \log_2 (x-1) > -1$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در منفی}} \log_2 x + \log_2 (x-1) < 1 \Rightarrow \log_2 x(x-1) < \log_2 2 \xrightarrow[]{\overset{\text{مبنا}}{2>1}} x^2 - x < 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \xrightarrow{*} \text{جواب} = (1,2)$$

تهیه و تنظیم: دلبار
09010825258

درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی:

انتقال توابع نمایی و لگاریتمی:

نمودار بسیاری از توابع نمایی و لگاریتمی را می‌توان به کمک قوانین انتقال نمودارها که قبلاً آموخته‌ایم، رسم کرد.

یادآوری: انتقال‌های افقی و عمودی نمودار توابع با فرض $k>0$ به صورت زیر است:

۱) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)-k$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار $y=f(x-k)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

نکته: وضعیت نمودار توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$ نیز به صورت زیر است:

الف) برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

ب) برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

بعنوان مثال: اگر نمودار تابع نمایی $y=a^x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار $y=-a^x$ بدست می‌آید و اگر نمودار $y=a^x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، نمودار $y=a^{-x}$ بدست می‌آید.

تذکر: نمودار $y=a^{-x}$ همان نمودار $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ می‌باشد.

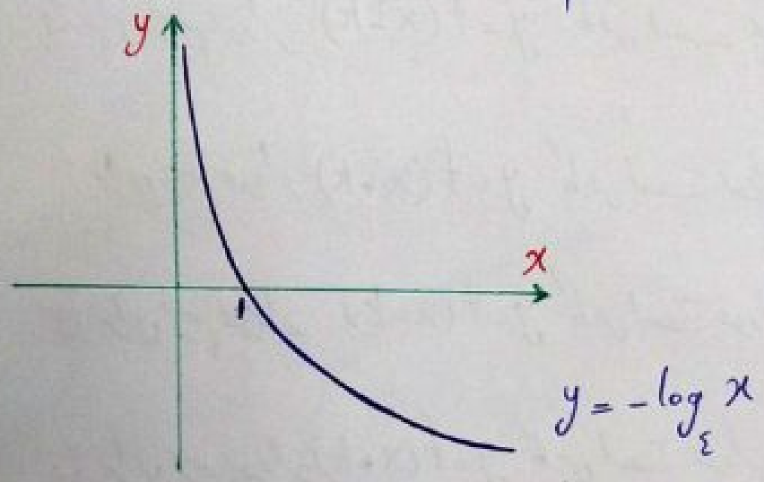
همچنین اگر تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار $y=-\log_a x$ بدست می آید و اگر نمودار $y=\log_a x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، نمودار $y=\log_a(-x)$ بدست می آید.

تذکر: نمودار $y=-\log_a x$ همان نمودار $y=\log_a\left(\frac{1}{x}\right)$ و نمودار $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ می باشد.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=-\log_4 x$

کافی است نمودار $y=\log_4 x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



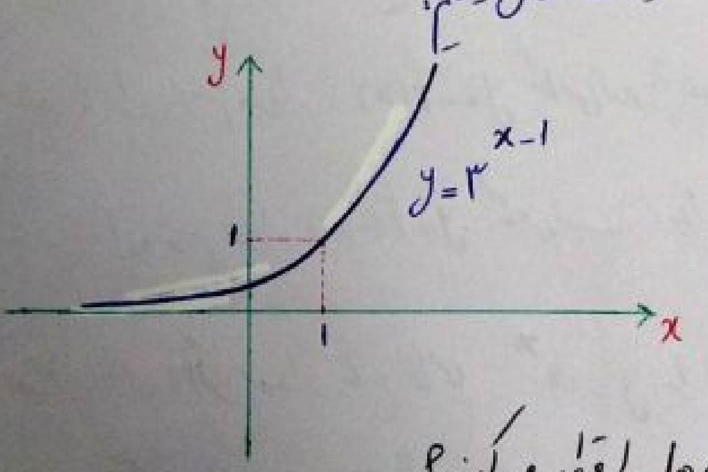
همچنین می دانیم $-\log_4 x=\log_{\frac{1}{4}} x$

دامنه: $D=(0,+\infty)$

برد: $R=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

ب) $y=3^{x-1}$

کافی است نمودار نمایی $y=3^x$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم.



دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

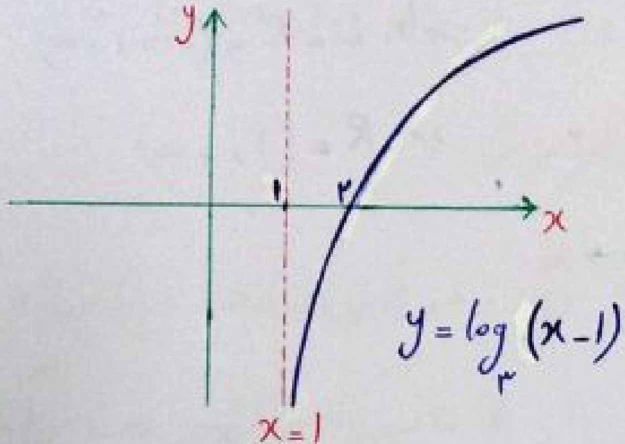
برد: $R=(0,+\infty)$

سوال: تابع $y=3^{x-1}$ در چه نقطه ای محور عرض ها را قطع می کند؟

$x=0 \Rightarrow y=3^{0-1}=3^{-1}=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(0,\frac{1}{3}\right)$

پ) $y=\log_3 (x-1)$

کافی است نمودار $y=\log_3 x$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.



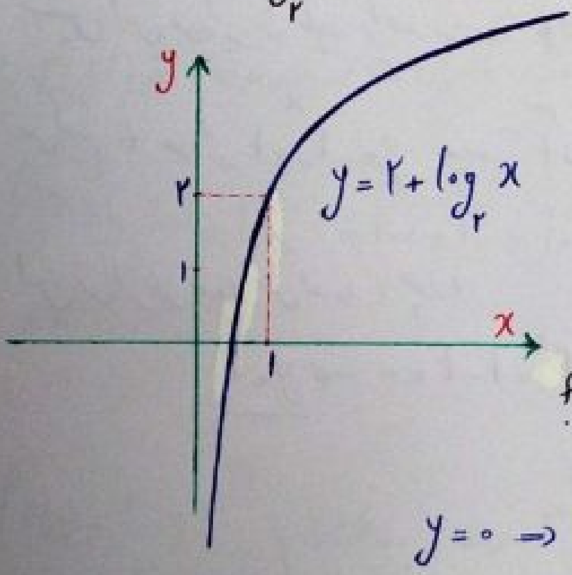
دامنه: $D=(1,+\infty)$

برد: $R=\mathbb{R}$

همانطور که مشاهده می‌شود، نمودار این تابع، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند.

ت) $y=2+\log_2 x$

کافی است نمودار تابع $y=\log_2 x$ را ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:



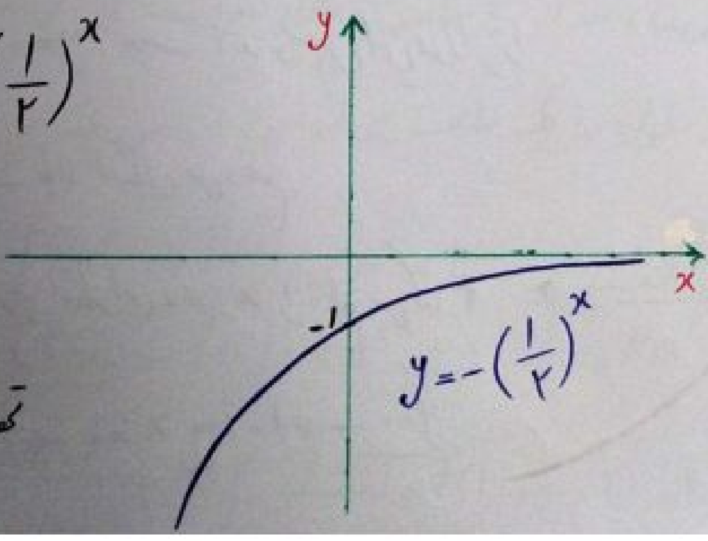
دامنه: $D=(0,+\infty)$

برد: $R=\mathbb{R}$

سؤال: نمودار این تابع در چه نقطه‌ای، محور x را قطع می‌کند؟

$$y=0 \Rightarrow 2+\log_2 x=0 \Rightarrow \log_2 x=-2 \Rightarrow x=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

ث) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$



کافی است نمودار $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم:

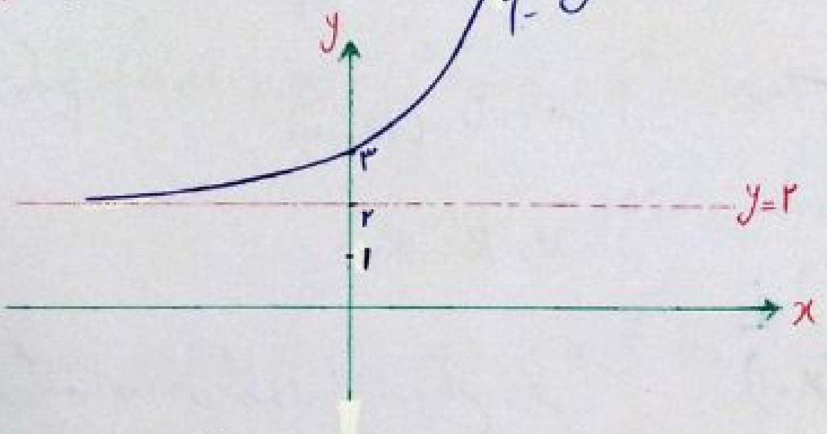
دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

برد: $R=(-\infty,0)$

تهیه و تنظیم: دلیار

ج) $y=3^x+2$

کافی است نمودار $y=3^x$ را دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

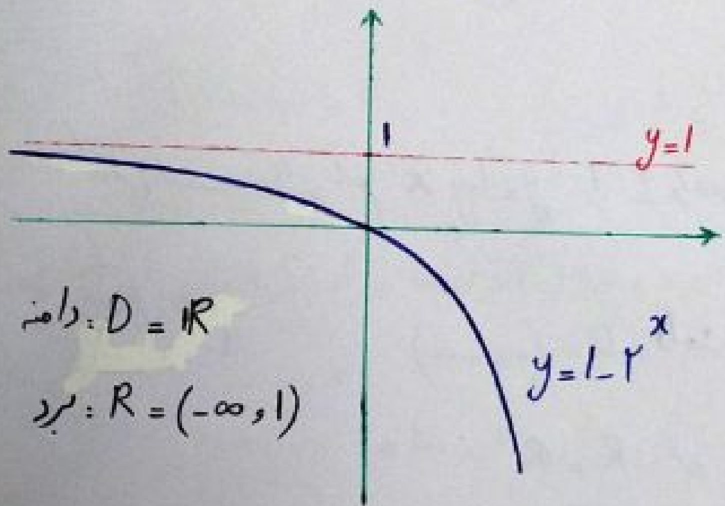


دامنه: $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

برد: $R=(2,+\infty)$

چ) $y=1-2^x \longrightarrow y=-2^x+1$

ابتدا نمودار $y=2^x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-2^x$ بدست آید و سپس این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=-2^x+1$ بدست آید.



دامنه: $D=\mathbb{R}$

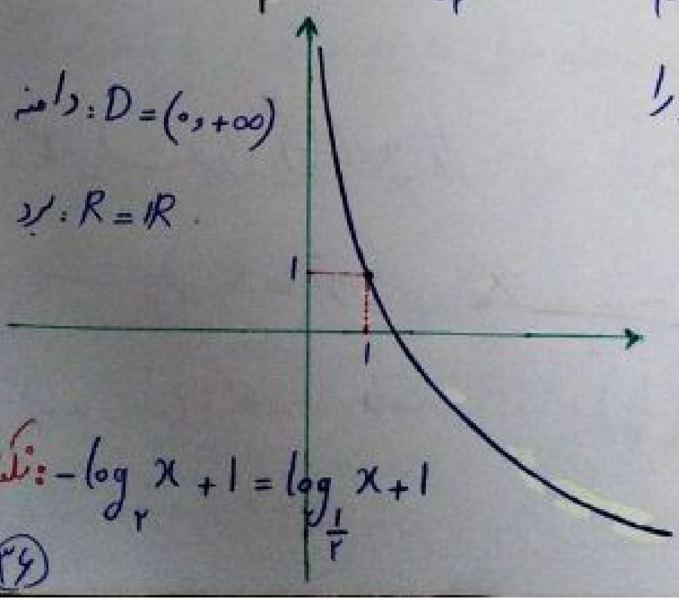
برد: $R=(-\infty,1)$

این نمودار از مبدأ می‌گذرد، چون:

$x=0 \longrightarrow y=1-2^0=1-1=0 \Rightarrow y=0$

ح) $y=1-\log_2 x=-\log_2 x+1$

ابتدا نمودار $\log_2 x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-\log_2 x$ بدست آید و سپس این نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



دامنه: $D=(0,+\infty)$

برد: $R=\mathbb{R}$.

سؤال: این تابع در چه نقطه‌ای، محور x را قطع می‌کند؟

$y=0 \longrightarrow 1-\log_2 x=0 \Rightarrow \log_2 x=1 \Rightarrow x=2$

نکته: $-\log_2 x+1=\log_{\frac{1}{2}} x+1$

تهیه و تنظیم: دلبازی

* کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی:

تابع نمایی: در حالت کلی یک تابع به صورت $f(x)=ka^x$ $(a>0 \ , \ a\neq 1)$، رفتار نمایی دارد که در بسیاری مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و ..... ظاهر می‌شود.

بعنوان مثال: نوع خاصی از یک بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود، در نتیجه اندازهٔ هر توده باکتری، پس از t ساعت از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$f(t)=100\times 2^{2t} \qquad (0\leq t\leq 16)$$

سوال: - با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده، پس از ۳ ساعت چقدر است؟

$$f(3)=100\times 2^{2(3)}=100\times 2^6=100\times 64=6400$$

- پس از چند ساعت تعداد باکتری ها ۲۵۶۰۰ می‌شود؟

$$f(t)=100\times 2^{2t}=25600 \Rightarrow 2^{2t}=256=2^8 \rightarrow 2t=8 \Rightarrow t=4$$

مثال: در یک آزمایش تکثیر سلول ها، بعد از ۲ ساعت، تعداد سلول ها ۱۲ و بعد از ۴ ساعت، تعداد سلول ها ۴۸ می باشد، تعداد سلول ها یک ساعت پس از شروع آزمایش چقدر بوده است؟

۱) ۴

۲) ۶ ✓

۳) ۸

۴) ۹

$$f(t)=ka^t \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow f(2)=ka^2=12 \\ t=4 \Rightarrow f(4)=ka^4=48 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cancel{k}a^4}{\cancel{k}a^2}=\frac{48}{12} \Rightarrow \boxed{a^2=4}$$

$$\xrightarrow{a>0} a=2 \xrightarrow{ka^2=12} k=3 \xrightarrow{t=1} f(1)=3\times 2^1=3\times 2=6$$

09010825258

تابع لگاریتمی:

توابع لگاریتمی نیز دارای کاربردهای بسیار در مسائل مختلف هستند.

بعنوان مثال در مسائل مربوط به زلزله، اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) می‌باشد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5\,M$$

مثال: زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، چه مقدار انرژی می‌تواند آزاد کند؟

$$\log E = 11/8 + 1/5(6/6) = 11/8 + 9/9 = 21/7 \Rightarrow \log_{10} E = 21/7 \Rightarrow E = 10^{21/7}\ (Erg)$$

مثال: انرژی یک زلزله ۲۵ برابر زلزلهٔ دیگر است، با توجه به فرمول $\log E = 11/8 + 1/5\,M$ دو زلزله چند ریشتر اختلاف دارند؟ $(\log 2 = 0/3)$

۱) $\frac{14}{15}$ ✓

۲) $\frac{15}{14}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/8 + 1/5\,M_1 \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5\,M_2 \end{cases} \Rightarrow \log E_2 - \log E_1 = 1/5\,M_2 - 1/5\,M_1$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5(M_2 - M_1) \xrightarrow{\frac{E_2}{E_1} = 25} \log 25 = 1/5(M_2 - M_1)$$

$$\Rightarrow 2\log 5 = \frac{3}{2}(M_2 - M_1) \Rightarrow M_2 - M_1 = \frac{4}{3}\log 5 = \frac{4}{3}(1 - \log 2)$$

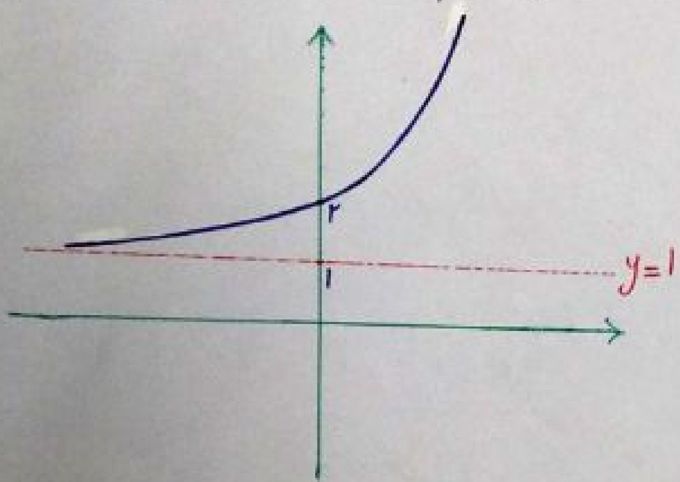
$$\Rightarrow M_2 - M_1 = \frac{4}{3}(1 - 0/3) = \frac{4}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

مثال: در تجزیهٔ یک مادهٔ شیمیایی، وزن ماده در هر لحظه از رابطهٔ $A_t = A_0 a^t$ بدست می‌آید که در آن A_0 وزن اولیهٔ ماده و A_t وزن آن پس از t ساعت می‌باشد. اگر بدانیم وزن آن پس از ۴ ساعت $\frac{1}{16}$ وزن اولیه شده است، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ✓ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

$$\frac{A_4}{A_0} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{\cancel{A_0} a^4}{\cancel{A_0}} = \frac{1}{16} \rightarrow a^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{2}$$

مثال: در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. مقادیر a و b را بدست آورید.



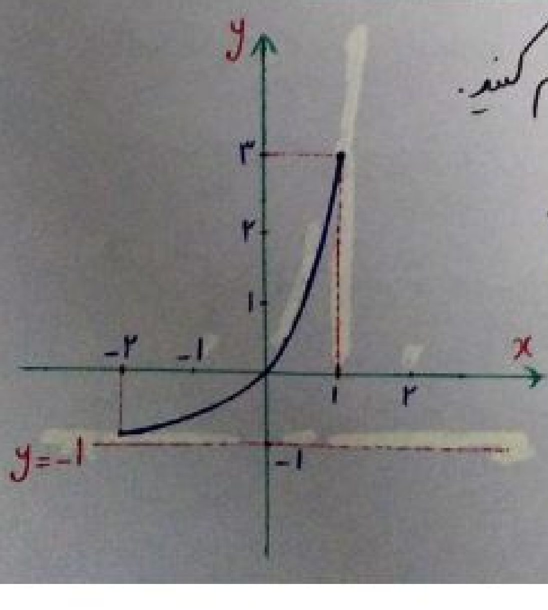
چون این شکل، نمودار تابع نمایی است که یک واحد به سمت بالا انتقال یافته، پس $a=1$ و داریم:

$y = 1 + 2^{(x-b)}$

از طرفی چون نمودار تابع، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کرده، پس (۲و۰) در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$2 = 1 + 2^{0-b} \Rightarrow 2-1 = 2^{-b} \Rightarrow 2^{-b} = 1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

مثال: نمودار تابع $y = 4^x - 1$ را در بازهٔ [-۲و۱] رسم کنید.



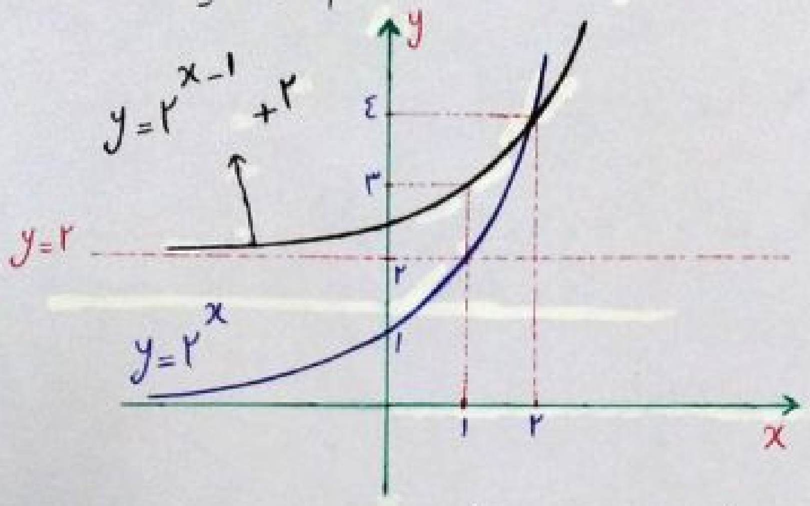
کافی است نمودار $y = 4^x$ را یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم.

مقادیر تابع به ازای نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف:

$x = 1 \longrightarrow y = 4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$

$x = -2 \longrightarrow y = 4^{-2} - 1 = \frac{1}{16} - 1 = \frac{-15}{16}$

مثال: نمودار توابع $y=2^x$ و $y=2^{x-1}+2$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. این دو نمودار، در چه نقطه‌ای، یکدیگر را قطع می‌کنند؟



برای رسم نمودار $y=2^{x-1}+2$: ابتدا نمودار $y=2^x$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=2^{x-1}$ بدست آید و سپس این نمودار را ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

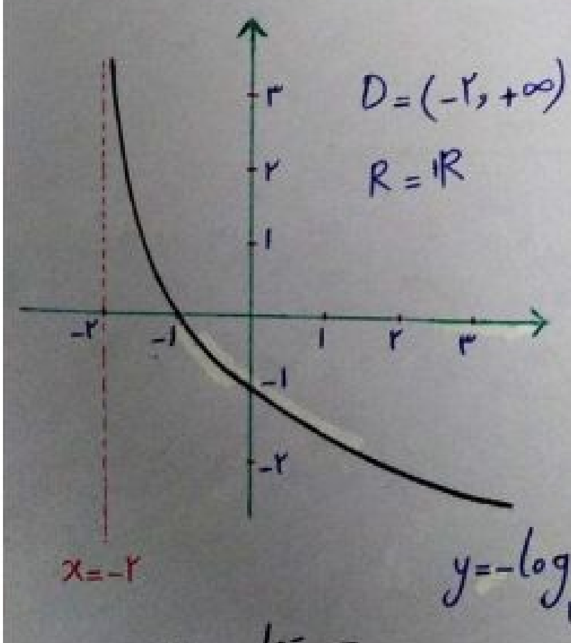
تذکر: نمودار $y=2^{x-1}+2$ ، محور y را در $\frac{5}{2}$ قطع می‌کند، چون: $x=0 \longrightarrow y=2^{-1}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

* برای آنکه مختصات نقطهٔ برخورد این دو نمودار را بیابیم، باید معادلهٔ نمایی زیر را حل کنیم:

$$2^{x-1}+2=2^x \longrightarrow 2^x-2^{x-1}=2 \Rightarrow 2^{x-1}(\overbrace{2-1}^{1})=2 \Rightarrow 2^{x-1}=2^1$$

$$\Rightarrow x-1=1 \Rightarrow \underline{x=2} \xrightarrow[y=2^{x-1}+2]{y=2^x} \underline{y=4} \Rightarrow$$ نقطهٔ برخورد: $(2,4)$

مثال: نمودار تابع $y=-\log_2(x+2)$ را رسم کنید.



برای رسم این نمودار، ابتدا نمودار $y=\log_2 x$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=\log_2(x+2)$ بدست آید و سپس این نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

تذکر: با توجه به خواص لگاریتم، می‌دانیم: $y=-\log_2(x+2)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

تهیه و تنظیم: دلیار 09010825258