
ویژه امتحان نهایی
با بیست، بیست بگیرید
ریاضیات
۳
Sin
Tg
Cos
Lim Sin x / x = 1
آمپول ریاضی ۳
مهندس مجتبی لشینی

مقدمــــه:

تصور کنید بانکی دارید که در آن هر روز ۸۶۴۰۰ تومان به حسابتان واریز می شود و تا آخر شب فرصت دارید تا همه پول ها را خرج کنید، چون آخر وقت حساب خود به خود خالی می شود و در این صورت چه می خواهید کرد؟

البته سعی می کنید تا آخرین ریال را خرج کنید. هر کدام از ما یک چنین بانکی داریم: بانک زمان، هر روز صبح در بانک شما ۸۶۴۰۰ ثانیه اعتبار ریخته می شود و در آخر شب این اعتبار به پایان می رسد. هیچ برگشتی نیست و هیچ مقداری از این زمان به خود اضافه نمی شود هر چند گنج بزرگی است، گنجتان را مفت از دست ندهید. زمان به خاطر هیچ کس منتظر نمی ماند...

دیروز به تاریخ پیوست، فردا معماست و امروز هدیه است.

برگرفته از کتاب مکتوب

سالهاست که پس از برگزاری امتحانات نهایی، خیلی ها از معلوم بودن تیپ سؤالات ریاضی می‌گویند.در واقع مدت‌هاست که انقلاب عظیمی در سؤالات رخ نداده است. این بدان معناست که می توان با پیش‌بینی و حرکت صحیح تا حدودی روال سؤالات را حدس زد و با در پیش گرفتن یک استراتژی درست، نتیجه‌ی مطلوب را در این درس در کوتاه‌ترین زمان ممکن گرفت. این مجموعه یکی از بهترین منابع برای دوران امتحانات نهایی می‌باشد و بر اساس آخرین تغییرات کتاب درسی و روند سؤالات امتحانات نهایی می‌باشد و بر اساس آخرین تغییرات کتاب درسی و روند سؤالات امتحانات نهایی ۳ سال اخیر تألیف شده است.

یکی از مهم‌ترین و برجسته ترین ویژگی های این کتاب طبقه بندی بسیار دقیق سؤالات و خلاصه درسنامه‌های روان و ابتکاری آن می‌باشد و اغراق نیست اگر بگوییم این کار به اندازه تألیف کتاب وقت‌گیر بوده است. در پایان از همه‌ی عزیزانی که باحمایت خود مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند قدردانی می‌کنم.

به امید موفقیت و دیدار مجدد همه شما عزیزان

مهندس مجتبی لشینی

در سال ۱۳۹۶ این کتاب به صورت رایگان می باشد و امیدوارم با این کار خدمتی به دانش آموزان سرزمینم کرده باشم

برنامه مطالعاتی این کتاب کاری از گروه تیم کنکور:

جلسه اول	مطالعه پیش نیاز ها و احتمال ساده (صفحه ۳ تا ۱۰)
جلسه دوم	مطالعه فصل احتمال تا پایان فصل و مرور مباحث (صفحه ۳ تا ۱۳)
جلسه سوم	مطالعه فصل تابع تا سر مثلثات (صفحه ۱۳ تا ۱۶)
جلسه چهارم	مطالعه فصل تابع مبحث مثلثات (صفحه ۱۶ تا ۱۹)
جلسه پنجم	مطالعه فصل تابع تا پایان فصل (صفحه ۱۹ تا ۲۶)
جلسه ششم	مطالعه فصل حد تا آخر رفع ابهام صفر صفرم (صفحه ۲۷ تا ۲۹)
جلسه هفتم	مطالعه فصل حد تا پایان(صفحه ۲۹ تا ۳۱)
جلسه هشتم	مطالعه پیوستگی و تعریف مشتق (صفحه ۳۱ تا ۳۳)
جلسه نهم	مطالعه فصل مشتق فرمول ها (صفحه ۳۳ تا ۳۵)
جلسه دهم	مرور فرمول های مشتق و مطالعه باقی (دامنه مشتق و آهنگ تغییرات) تا پایان فصل (صفحه ۳۵ تا ۳۷)
جلسه یازدهم	مرور و حل نمونه سوالات نهایی ۹۵

فصل اول : پدیده‌های تصادفی و احتمال

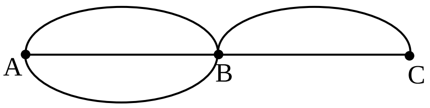
معمولاً بارم بندی این فصل در امتحانات نهایی ۴ نمره می باشد ((سوال ۱ تا ۴))

پیش نیاز ها : برای این فصل مطالب آنالیز ترکیبی و اصول شمارش از دوم دبیرستان بسیار ضروری است که چند مورد مهم را در زیر یادآوری کرده‌ایم:

اصل ضرب : اگر دو عمل مستقل A و B پشت سر هم، یکی به n طریق و دیگری به m طریق قابل انجام باشد آنگاه این دو عمل به $m\times n$ طریق مختلف قابل انجام هستند .

((هرگاه بین اعمال از ((و)) استفاده شود از ضرب و هرگاه از ((یا)) استفاده شود از جمع استفاده می کنیم .))

مثال ۱: تعداد مسر های مختلف رفتن از A به C کدام است .



ابتدا باید از شهر A به شهر B برویم که این کار به ۳ طریق امکان دارد و سپس به ۲ طریق از شهر B به شهر C برویم.

$(A\to C),(B\to C)$

۳ × ۲ = ۶

مثال ۲: تعداد اعداد ۳ رقمی ساخته شده با اعداد (۱،۲،۳،۴) به طوری که :

حل :

الف) تکرار ارقام مجاز باشد : ۶۴ = ۴ (یکان) × ۴ (دهگان) × ۴ (صدگان)

ب) تکرار ارقام مجاز نباشد : ۲۴ = ۲ (یکان) × ۳ (دهگان) × ۴ (صدگان)

نکته : در حل مسائل (بالاخص مسائل اعداد) برای استفاده از اصل ضرب ابتدا به سراغ خانه‌های شرط‌دار می رویم و سپس از سمت چپ خانه ها را پر می کنیم ، مثلاً اگر اعداد ساخته شده زوج باشند خانه یکسان شرط دار است و فقط اعداد زوج در خانه یکسان میان قرار می‌گیرند.

مثال ۳: تعداد اعداد ۳ رقمی فرد ساخته شده با اعداد $\{0,1,2,...,9\}$ به طوری که تعداد ارقام مجاز را بیابید.

حل : اگر بخواهیم اعداد ۳ رقمی فرد با اعداد $\{0,1,2,...,9\}$ را بیابیم به طوری که تعداد ارقام مجاز باشد خانه یکان (به خاطر فرد بودن) و صدگان (صفر نباید در این خانه باشد) شرط دار هستند .

صدگان	دهگان	یکان
۹	۱۰	۵
همه ارقام به‌جز (۰)	بدون شرط	یکی از ارقام $\{9,7,5,3,1\}$

نکته : سؤالات مربوط به پست و مقام (منشی، مدیر و ....) معمولاً با اصل ضرب حل می‌شوند و اگر بخواهیم از بین ۵ نفر (۴ حالت) کارمند را انتخاب کنیم به طوری که نفر اول مدیر (۵ حالت) و نفر دوم معاون شود تعداد کل حالات انتخاب $5\times4=20$ خواهد بود.

فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه فاکتوریل آن به صورت زیر تعریف می شود : $n!=n\times(n-1)!\times3\times...\times2\times1$

مثال ۴: حاصل !۴ و !۵ را بیابید.

حل :

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ $\qquad$ $4!=4\times3\times2\times1=24$

نکته : $(n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=...)$, $\boxed{۰!=۱!=۱}$

$۵!=۵\times۴!=۵\times۴\times۳!=...$

جایگشت: هرگاه بخواهیم n شی متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم تعداد حالات مختلف برابر است با :

$n!=n\times(n-۱)\times....\times۳\times۲\times۱$

مثال ۵: اگر بخواهیم ۵ نفر بر روی ۵ صندلی در یک ردیف قرار بگیرند تعداد کل حالات قرارگیری را بیابید:

حل : نفر اول ۵ انتخاب دارد و نفر بعدی ۴ انتخاب دارد« چون یک صندلی پر شده است» و .... و نفر آخر یک انتخاب دارد.

$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

ترکیب r تایی از n تایی $(r\leq n)$: انتخاب r عضو از بین n عضو به طوری که در انتخاب عضوها جابه جایی و ترتیب قرار گیری شان حالت جدیدی ایجاد نکند را ترکیب می گویند و برابر است با : $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

نکته : $\binom{n}{n}=۱,\binom{n}{۰}=n$ و $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

نکته : فرمول سریع محاسبه $\binom{n}{r}$: $\binom{n}{n}=\frac{n\times(n-۱)\times....\times(n-r+۱)}{r\times(r-۱)\times.....\times۱}$

مثال ۶: مقدار $\binom{۵}{۳}$ را بیابید.

حل : روش حل سریع : $\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳}}{\cancel{۳}\times۲\times۱}=۱۰$ *روش حل عادی :* $\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۲!)}=۱۰$

نکته : انتخاب گروهای انسانی و تیم ترکیب است .

مثال ۷: از بین ۱۰ نفر شاگرد یک کلاس می خواهیم ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم . تعداد کل حالات انتخاب را بیابید:

حل: چون ۳ نفر انتخاب شده در نهایت در یک تیم هستند و تعداد کل حالات برابر است با :

$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!\times۳\times۲\times۱}=۱۲۰$

آزمایش (پدیده قطعی): پدیده یا آزمایش که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش به طور قطع و یقین مشخص باشد ، پدیده یا آزمایش قطعی گوییم . به طور مثال اگر سنگی را در حوض آب بیاندازیم به طور قطع در آب فرو می رود .

آزمایش (پدیده تصادفی): به آزمایشی گفته می شود که نتیجه آن از قبل معلوم نیست . به طور مثال اگر تاسی را پرتاب کنیم معلوم نیست پس از افتادن کدام یک از اعداد ۱ تا ۶ نشان می دهد ولی به هر حال یکی از آنها خواهد بود .

فضای نمونه‌ای : به مجموعه همه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای آن آزمایش می گویند و آن را با نماد S نمایش می دهند.

تذکر فضای نمونه‌ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشند ، فضای نمونه‌ای گسسته می نامیم و اعضای آن را با n(S) نمایش می دهیم .

فضاهای نمونه‌ای مهم :

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: n(S)	فضای نمونه‌ای S	پدیده تصادفی
$n(S)=۲$ *	$S=$ {رو ، پشت}	انداختن یک سکه
$n(S)=۶$ **	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$	انداختن یک تاس
$n(S)=۲\times۲=۴$ ***	$S=$ {(د،د)(پ،د)(د،پ)(پ،پ)}	تولد دو فرزند در یک خانواده
$n(S)=۳!=۶$	$S=\{abc,acb,bac,bca,cab,cba\}$	کنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به طور تصادفی
$n(S)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$	$S=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$	انتخاب ۲ حرف از بین حروف a و b و c و d (بدون در نظر گرفتن ترتیب)
$n(S)=\underline{۲}\times\underline{۲}=۴$	$S=$ {(آ،آ)(ق،آ)(آ،ق)(ق،ق)}	انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی یکسان وجود دارد
$n(S)=\underline{۴}\times\underline{۳}=۱۲$	$S=\{۱۲,۲۱,۱۴,۴۱,۱۶,۶۱,۲۴,۴۲,۲۶,۶۲,۴۶,۶۴\}$	انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام ۶ و ۴ و ۲ و ۱ و ساختن عدد دو رقمی

* تعداد اعضای فضای نمونه انداختن **n** سکه با هم (**n** بار پرتاب یک سکه) برابر است با : ۲^n

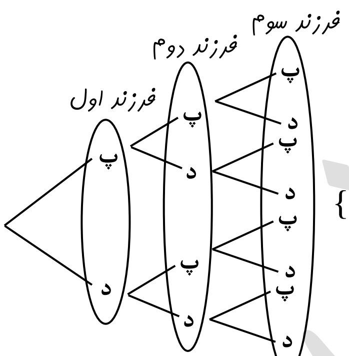
** تعداد اعضای فضای نمونه انداختن **n** تاس با هم (**n** بار پرتاب یک تاس) برابر است با : ۶^n

*** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای خانواده‌ای با **n** فرزند برابر است با : ۲^n

پیشامد: به هر زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه یک پیشامد می گویند و آن را با نماد A نشان می دهند و تعداد عضوهای پیشامد را با n(A) نمایش می دهند.[پیشامد حالت مطلوب و خواسته شده در مساله است]

مثال ۸: خانواده‌ای دارای سه فرزند است .

الف) فضای نمونه‌ای را بنویسید و تعداد عضوهای آن را مشخص کنید.



حل : به کمک نمودار درختی از روی شاخه‌ها حرکت می‌کنیم تا کلیه حالات را بنویسیم.
توجه کنیدکه نوشتن نمودار درختی به ما کمک می‌کند که هیچ حالتی را فراموش نکنیم.

{ ⇒S = (پ،پ،پ) (پ،پ،د) (پ،د،پ) (پ،د،د) } $\rightarrow n(A)=\binom{۳}{۲}=۳$

ب) پیشامد A که فقط ۲ پسر داشته باشد را بنویسید و تعداد عضوهای آن را مشخص کنید .

حل :
{A = (پ،پ،د)(پ،د،پ)(د،پ،پ)} $\Rightarrow n(A)=\binom{۳}{۲}=۳$

ج) پیشامد B که حداقل ۲ فرزند دختر باشد را بنویسید و تعداد عضوهای آن را مشخص کنید .

حل : حداقل ۲ دختر یعنی ۲ دختر یا ۳ دختر
{B = (د،د،پ)(د،پ،د)(پ،د،د)(د،د،د)} $\Rightarrow n(B)=۴$

مثال ۹: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید .

حل : چون با هم پرتاب کرده‌ایم ترتیب مهم نیست . S={ (پ،۱)(ر،۱) (پ،۲)(ر،۲) (پ،۳)(ر،۳) (پ،۴)(ر،۴) (پ،۵)(ر،۵) (پ،۶)(ر،۶) }

ب) پیشامد آنکه سکه ((رو)) یا تاس ۵ بیاید را مشخص کنید.

حل : چون با هم پرتاب کرده‌ایم ترتیب مهم نیست . A={ (ر،۱) (ر،۲) (ر،۳) (ر،۴) (ر،۵) (ر،۶) (پ،۵) }

مثال ۱۰: تاس را دو بار پرتاب می کنیم .

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

حل : طبق جدول گفته شده در صفحه قبل : $n(S)=۶\times۶=۶^{۲}=۳۶$

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده تاس اول ۳ باشد را مشخص کنید .

حل : صورت سؤال گفته است تاس اول ۳ باشد پس تکلیف آن معلوم است و تاس دوم چون سؤال شرطی در مورد آن نگذاشته است همه اعداد ۱تا۶ می‌تواند باشد و بهترین روش‌برای حل این سؤالات نوشتن تمامی زوج‌های مرتب است.

$A=\{(۳,۱)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶)\}$

ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد را مشخص کنید .

حل : تعداد کل حالات خواسته شده را می‌نویسیم . $B=\{(۱,۶)(۶,۱)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۴)(۴,۳)\}$

تعریف احتمال : فرض کنید که S فضای نمونه‌ای است . اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد آنگاه :

$$\text{احتمال رخ دادن A} = p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

مثال ۱۱: احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد زوج بیاید را بیابید :

حل : گام اول $\Leftarrow$ ابتدا تعداد حالات فضای نمونه‌ای $(n(s))$ را می نویسیم . $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(s)=۶$

گام دوم $\Leftarrow$ تعداد حالات شرط خواسته شده در مسئله (تعداد پیشامدهای مطلوب $(n(A))$) را محاسبه می‌کنیم.

گام سوم $\Leftarrow$ طبق فرمول احتمال $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم : $A=\{۲,۳,۶\}\to n(A)=۳$

$$p(A)=\frac{n(A)=۳}{n(S)=۶}=\frac{۱}{۲}$$

تذکر اگر احتمال حتمی باشد مقایسه $p(A)$ برابر با ۱ و اگر نشدنی باشد مقدار $p(A)$ برابر با صفر است و همیشه داریم :

$$۰\le p(A)\le ۱$$

مثال ۱۲: در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس پیشامد رو شدن عدد بزرگتر از ۶ یک پیشامد ..... است .

حل : غیر حتمی

مثال ۱۳: یک عدد دو رقمی که ارقام آن $\{۰,۱,۲\}$ وغیر تکراری باشند انتخاب می کنیم به کدام احتمال این عدد بر ۳ بخش پذیر است ؟

حل : گام اول $\Leftarrow$ تعداد کل حالات فضای نمونه‌ای $(n(s))$ را بنویسیم (ارقام دو رقمی با $\{۰,۱,۲\}$ و غیر تکراری)

$s=\{۱۲,۲۱,۱۰,۲۰\}\to n(s)=۴$

گام دوم $\Leftarrow$ تعداد کل حالات مطلوب مسئله $(n(A))$ را می‌نویسیم : $A:\{۱۲,۲۱\}\to n(A)=۲$

گام سوم $\Leftarrow$ طبق فرمول احتمال $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم : $p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

مثال ۱۴: از بین ۸ نفر رشته ریاضی و ۹ نفر رشته تجربی ۲ نفر به تصادف انتخاب می کنیم . به کدام احتمال هم رشته نمی باشند؟

حل : چون ترتیب مهم نیست پس به کمک ترکیب $n(A),n(s)$ و $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} n(S)&=\binom{۱۷}{۲}=\frac{۱۷\times۱۶}{۲\times۱}=۱۷\times۸\\ n(A)&=\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{۱ نفر ریاضی}}\times\underbrace{\binom{۹}{۱}}_{\text{۱ نفر تجربی}}=۸\times۹\end{aligned}\right\}\to p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸\times۹}{۸\times۱۷}=\frac{۹}{۱۷}$$

مثال ۱۵: سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می کنیم ، احتمال این که دقیقاً دوبار شیر بیاید چقدر است؟

حل : دقیقاً دوبار شیر یعنی ۲ بار شیر و ۴ بار دیگر خط است و اگر تعداد حالات انتخاب ۲ بار شیر معلوم شود خود به خود جای خطها معلوم می‌شود و نیازی به نوشتن ندارد .

$$n(S)=۲^{۶}$$

$$\left.\begin{array}{l} n(A)=n(\text{دقیقاً ۲ بار شیر بیاید})=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲\times ۱}=۱۵ \end{array}\right\}\to p(\text{دقیقاً ۲ بار شیر بیاید})=p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۱۵}{۲^{۶}}=\frac{۱۵}{۶۴}$$

مثال ۱۶: می خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن یک کمیته ۳ نفری انتخاب کنیم مطلوبست احتمال آن که :

الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود .   ب) هر سه مرد باشند .

حل: فضای نمونه‌ای انتخاب ۳نفر از $۸=۵+۳$ نفراست بنابراین :

$$n(S)=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۳\times ۲\times ۱\times ۵!}=۸\times ۷=۵۶$$

الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود یعنی یا یک مرد انتخاب شود یا هیچ مردی انتخاب نشود .

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ مرد}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{۲ زن}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۵}{۰}}_{\text{۰ مرد}}\overset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{۳ زن}}=(۵\times ۳)+(۱\times ۱)=۱۶\to p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۸\times ۷}=\frac{۲}{۷}$$

ب) هر سه مرد باشند یعنی تمام افراد را از مردها انتخاب کنیم.

$$n(B)=\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ مرد}}\times\underbrace{\binom{۳}{۰}}_{\text{۰ زن}}=۱۰\times ۱=۱۰\to p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۸\times ۷}=\frac{۵}{۲۸}$$

مثال ۱۷: از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی ، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم . مطلوبست محاسبه احتمال آن که :

الف) سه مهره همرنگ باشند .   ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشند.

حل: فضای نمونه‌ای انتخاب سه مهره از بین $۹=۵+۴$ است بنابراین :

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!(۹-۳)!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۳\times ۲\times ۱\times ۶!}=۳\times ۴\times ۷$$

الف) هر سه مهره قرمز یا هر سه مهره آبی باشند .

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{هر ۳ قرمز}}+\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر ۳ آبی}}=۱۰+۴=۱۴\to p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳\times ۴\times ۷}=\frac{۱}{۶}$$

ب)

$$n(B)=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲ آبی}}\times\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ قرمز}}=۶\times ۵\to p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶\times ۵}{۳\times ۴\times ۷}=\frac{۵}{۱۴}$$

مثال ۱۸: در کیسه‌ای ۵ مهره سفید ، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد ، از این کیسه ۴ مهره به تصادف خارج می کنیم . احتمال اینکه حداکثر ۲ مهره آبی باشد چقدر است ؟

حل: حداکثر ۲ مهره آبی یعنی یا ۲ مهره آبی یا ۱ مهره آبی و یا هیچ مهره آبی انتخاب شود .

فضای نمونه انتخاب ۴ مهره از $۱۲=۳+۴+۵$ مهره می باشد .

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=\binom{۱۲}{۴} \\ n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲ آبی}}\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{۲ بقیه}}+\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ آبی}}\underbrace{\binom{۸}{۳}}_{\text{۳ بقیه}}+\underbrace{\binom{۴}{۰}}_{\text{۰ آبی}}\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{\text{۴ بقیه}} \end{array}\right\}\to p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۶۲}{۴۹۵}$$

مثال ۱۹: از بین ۴ دانش آموز سال سوم و ۶ دانش آموز سال دوم ، سه نفر را به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال آن که حداکثر یک دانش آموز از سال سوم باشد چقدر است ؟

حل: حداکثر یک دانش آموز از سال سوم باشد یعنی یک دانش آموز از سال سوم و دو دانش آموز از سال دوم یا هیچ دانش آموز از سال سوم و هر سه دانش آموز از سال دوم باشند.

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{۱ نفر سوم}}\overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{۲ نفر دوم}}+\overbrace{\binom{۶}{۳}}^{\text{۳ نفر دوم}}\overbrace{\binom{۴}{۰}}^{\text{۰ نفر سوم}}}{\underbrace{\binom{۱۰}{۳}}_{\text{۳ نفر از کل}}}=\frac{(۴\times ۱۵)+۲۰}{۱۲۰}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲۰: از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند . احتمال آنکه ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند را محاسبه کنید .

حل:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۲}}^{\text{۲ نفر سال اول}}\times\overbrace{\binom{۵}{۴}}^{\text{۴ نفر سال دوم}}}{\binom{۹}{۶}}=\frac{۶\times ۵}{۸۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

مثال ۲۱: ۴ نفر را در نظر می گیریم ، چقدر احتمال دارد :

الف) هر ۴ نفر در یک روز هفته متولد شده باشند ؟

حل: تعداد حالات انتخاب‌های نفرات اول تا چهارم را می‌نویسیم و بعد طبق فرمول احتمال را می‌یابیم.

$$\left.\begin{aligned}n(S)&=\frac{۷}{\text{نفر اول}}\times\frac{۷}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۷}{\text{نفر سوم}}\times\frac{۷}{\text{نفر چهارم}}=۷^۴\\ n(A)&=\frac{۷}{\text{نفر اول}}\times\frac{۱}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۱}{\text{نفر سوم}}\times\frac{۱}{\text{نفر چهارم}}=۷\end{aligned}\right\}\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۷^۴}=\frac{۱}{۷^۳}=(\frac{۱}{۷})^۳=\frac{۱}{۳۴۳}$$

ب) هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده باشند .

حل:

$$\left.\begin{aligned}n(S)&=۷^۴\\ n(B)&=\frac{۷}{\text{نفر اول}}\times\frac{۶}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۵}{\text{نفر سوم}}\times\frac{۴}{\text{نفر چهارم}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴}{۷^۴}=\boxed{\frac{۱۲۰}{۷^۳}}$$

روش دوم :

$$\left.\begin{aligned}&\text{الف)}\quad p(A)=\frac{۷}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}=(\frac{۱}{۷})^۳\\ &\text{ب)}\quad p(B)=(\frac{۷}{۷})\times(\frac{۶}{۷})\times(\frac{۵}{۷})\times(\frac{۴}{۷})=\frac{۱۲۰}{۷^۳}\end{aligned}\right\}$$

مثال ۲۲: چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره :

الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند ؟

حل : احتمال تولد نفر اول در تیر ماه $\frac{۱}{۱۲}$ و احتمال تولد نفر دوم $\frac{۱}{۱۲}$ و احتمال تولد نفر سوم $\frac{۱}{۱۲}$ است، پس در هم ضرب می‌کنیم.

$$p(A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}=(\frac{۱}{۱۲})^۳$$

ب) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند ؟

حل : نفر اول در ۱۲ ماه سال می‌تواند متولد شود پس احتمال آن $\frac{۱۲}{۱۲}$ است و نفر دوم در ۱۱ ماه باقی مانده می‌توان متولد شود پس احتمال آن $\frac{۱۱}{۱۲}$ است ونفر سوم در ۱۰ ماه باقی مانده می‌توان متولد شود پس احتمال آن $\frac{۱۰}{۱۲}$ است.

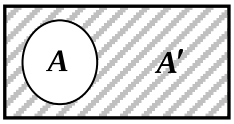
$$p(B)=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۱۱۰}{۱۴۴}$$

مثال ۲۳: اعداد ۹ و ... و ۲ و ۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است . به تصادف دو کارت از بین آنها هم زمان بیرون می آوریم . مطلوبست احتمال اینکه مجموع این دو کارت برابر ۱۱ شود ؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲\times۱}=۳۶ \\ A=\{(۲,۹)(۳,۸)(۴,۷)(۵,۶)\}\Rightarrow n(A)=۴\end{array}\right\}\rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

متمم پیشامد A : متمم پیشامد A را با A' نشان می دهیم که در واقع پیشامدی است که اگر رخ دهد A رخ نمی دهد.



$$A\cup A'=S\Rightarrow p(A)+p(A')=\overbrace{p(S)}^{۱}\rightarrow \boxed{p(A')=۱-p(A)}$$

مثال ۲۴: درست یا نادرست بودن جمله زیر را مشخص کنید .

اگر A' متمم پیشامد A باشد آنگاه A' زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد .

حل: درست

مثال ۲۵: نسبت احتمال رخ دادن یک پیشامد به احتمال رخ ندادن آن $\frac{۱}{۳}$ است . مطلوبست احتمال اینکه پیشامد رخ دهد .

حل:

$$\frac{p(A)}{p(A')}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{p(A)}{۱-p(A)}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳p(A)=۱-p(A)\Rightarrow ۴p(A)=۱\Rightarrow p(A)=\frac{۱}{۴}$$

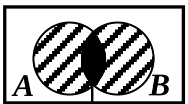
مثال ۲۶: در پرتاب یک تاس اگر احتمال فرد بودن $\frac{۱}{۲}$ باشد ، احتمال اینکه تاس زوج بیاید را محاسبه کنید .

حل: می‌دانیم که تاس ۲ حالت زوج و فرد دارد و این ۲ می‌توانند متمم یکدیگر باشند. $۱-p(\text{فرد بودن})=p(\text{زوج بودن})=\frac{۱}{۲}$

نکته : اگر کلمه حداقل یکی در تستی بود می توان از روش متمم استفاده کرد و وقتی محاسبه p(A) خیلی طولانی بود از روش متمم استفاده می کنیم.

اعمال روی پیشامدها و حالت های خاص مهم:

اگر A و B دو پیشامد باشند : احتمال اینکه دو پیشامد A و B با هم رخ دهند را با $p(A\cap B)$ نشان می‌دهیم و احتمال اینکه یکی از دو پیشامد A و B .



$p(A\cap B)$

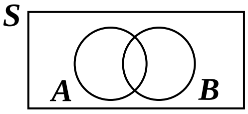
$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد

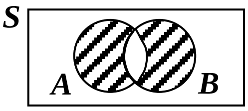
احتمال اینکه هردو پیشامد A و B رخ دهند

اکثر بچه‌ها نمی‌دانند چه زمانی از فرمول فوق بایداستفاده کنند. باید به آنها بگوییم یکی از نشانه‌ها این است که در صورت سؤال«یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف می‌آید. مثلاً «چقدر احتمال دارد علی یا حسن در کنکور قبول شوند؟ » هم‌چنین ، یکی دیگر از نشانه‌ها وجود عبارت «حداقل یکی از دو » در صورت مسأله است.

مثال ۲۷: با توجه به شکل مقابل ، پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ را هاشور بزنید.



حل: $(A-B)$ یعنی بخش‌هایی که در A باشند و در B نباشند و همچنین $B-A$ یعنی بخش هایی که در B باشند ولی در A نباشند.



مثال ۲۸: اگر $p(A')=۰/۳$ ، $p(B)=۰/۷$ ، $p(A\cup B)=۰/۹$ آنگاه حاصل $p(A\cap B)$ را بدست آورید .

حل:

$$p(A)=۱-p(A')=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\to ۰/۹=۰/۷+۰/۷-p(A\cap B)\to p(A\cap B)=۱/۴-۰/۹\Rightarrow p(A\cap B)=۰/۵$$

مثال ۲۹: عددی‌را به تصادف از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد.

حل:

$$\left\{\begin{array}{l} S=\{۱,۲,۳,...,۹\}\to n(S)=۹ \\ A=\underbrace{\{۲,۴,۶,۸\}}_{\text{زوج بودن}}\to n(A)=۴\to p(A)=\frac{۴}{۹} \\ B=\underbrace{\{۳,۶,۹\}}_{\text{مضرب ۳ بودن}}\to n(B)=۳\to p(B)=\frac{۳}{۹} \\ A\cap B=\underbrace{\{۶\}}_{\text{زوج و مضرب ۳ بودن}}\to n(A\cap B)=۱\to p(A\cap B)=\frac{۱}{۹} \end{array}\right\}\to p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{۴}{۹}+\frac{۳}{۹}-\frac{۱}{۹}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می نامند . هرگاه اگر یکی رخ دهد دیگری نتواند رخ دهد و یا $A\cap B=\varnothing$ یا $p(A\cap B)=۰$ و برای دو پیشامد ناسازگارداریم $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ زیرا:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-\cancel{P(A\cap B)}^{۰}\xrightarrow[\text{ناسازگارند}]{\text{دو پیشامد A و B}}\begin{cases} p(A\cap B)=۰ \\ p(A\cup B)=p(A)+p(B) \end{cases}$$

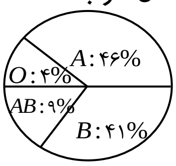
مثال ۳۰: اگر $p(A)=\frac{۱}{۳}$ ، $p(B')=\frac{۳}{۴}$ و B,A دو پیشامد ناسازگار باشند ، حاصل $p(A\cup B)$ را بدست آورید.

حل:

$$p(B)=۱-p(B')=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

A و B ناسازگارند $\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$

مثال ۳۱: با توجه با نمودار مقابل که گروه خونی افراد جامعه را نشان می دهد ، اگر شخص مجروحی به بیمارستان مراجعه کند مطلوبست احتمال اینکه گروه خونی او از نوع A یا B یا AB باشد.



حل :

راه اول : با توجه به اینکه گروه‌های خونی ناسازگارند و اشتراکی ندارند احتمالات آن‌ها را با هم جمع کنیم.

$$p(A\cup B\cup AB)=p(A)+p(B)+p(AB)=\frac{۴۶}{۱۰۰}+\frac{۴۱}{۱۰۰}+\frac{۹}{۱۰۰}=\frac{۹۶}{۱۰۰}$$

راه دوم : (متمم)

$$p(A\cup B\cup AB)=۱-p(O)=۱-\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۹۶}{۱۰۰}$$

مثال ۳۲: خانواده‌ای دارای سه فرزند است . اگر A پیشامد هم جنس بودن دو فرزند اول و B پیشامد وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .

ب) پیشامدهای A و B را مشخص کنید .

ج) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند ؟ چرا؟

حل :

الف) {(پ،پ،پ)(د،پ،پ)(پ،د،پ)(د،د،پ)(پ،پ،د)(د،پ،د)(پ،د،د)(د،د،د) } =S فضای نمونه‌ای

ب) {(پ،د،د)(د،پ،د)(د،د،پ)} =B یک پسر از ۳ فرزند   { (پ،د،د)(د،د،د)(د،پ،پ)(پ،پ،پ)} =A دو فرزند اول پسر یا دختر

ج) A و B سازگارند . $\Rightarrow A\bigcap B\neq\varnothing \Rightarrow$ {(پ،د،د)} $= A\bigcap B$

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل می نامند هرگاه وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد ، برای دو پیشامد مستقل احتمال وقوع A و B از رابطه‌ی زیر به دست می آید :

$$\xrightarrow[\text{مستقل}]{\text{دو پیشامد A و B}} \begin{cases} p(A\bigcap B)=p(A)\times p(B) \\ p(A\bigcup B)=p(A)+p(B)-p(A)\times p(B) \end{cases}$$

نکته : معمولاً احتمال‌هایی که ناسازگارند به راحتی قابل تشخیص است و در بخش‌هایی که نمی‌توانیم $P(A\bigcap B)$ را محاسبه کنیم کتاب درسی مطرح شده‌اند می‌توان به قبولی افراد در دانشگاه ، بهبود بیماری افراد ، تولد و وفات و پرتاب سکه و تاس اشاره کرد.

مثال ۳۳: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید .

ج) پیشامد B که در آن سکه ((رو)) و تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید .

د) آیا دو پیشامد A و B مستقل‌اند؟چرا؟

حل :

الف) $S=\{$ (ر،۱) (ر،۲) (ر،۳) (ر،۴) (ر،۵) (ر،۶)(پ،۱) (پ،۲) (پ،۳) (پ،۴) (پ،۵) (پ،۶) $\}\Rightarrow n(S)=۱۲$

ب) $A=\{$ (ر،۱) (ر،۳) (ر،۵) (پ،۱) (پ،۳) (پ،۵) $\}\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$

ج) $B=\{$ (ر،۱) (ر،۲) (ر،۳) (ر،۴) $\}\Rightarrow p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

د) $A\bigcap B=\{$ (ر،۱) (ر،۳) $\}\Rightarrow p(A\bigcap B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$

$p(A)\times p(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}=p(A\bigcap B)\Rightarrow$ A و B مستقل اند.

مثال ۳۴: تاس را دوبار پرتاب می کنیم.

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده تاس اول ۳ باشد را مشخص کنید .

ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد را مشخص کنید .

د) مستقل بودن یا نبودن دو پیشامد A و B را با دلیل مشخص بنویسید.

حل :

الف) $n(S)=۳۶$

ب) $A=\{(۳,۱)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶)\}$

ج) $B=\{(۱,۶)(۶,۱)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۴)(۴,۳)\}$

د) $p(A)=\frac{۱}{۶}$ $\quad p(B)=\frac{۱}{۶}$ $\quad p(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$

مفهوم مستقل بودن : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)\Rightarrow \frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$ پس A و B مستقل اند

مثال ۳۵: احتمال قبولی علی و محمد در المپیاد زیست شناسی به ترتیب ۸۰٪ و ۶۰٪ است . احتمال هر یک از پیشامد های زیر را بدست آورید :

الف) هر دوی آنها در المپیاد قبول شوند .

ب) حداقل یکی از آنها در المپیاد قبول شود.

حل :

الف : قبول شدن هر کدام ، مستقل از قبول شدن دیگری است بنابراین:

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$$

ب : حداقل یکی از آنها در المپیاد قبول شود یعنی $A\cup B$ بنابراین:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=۰/۶+۰/۸-۰/۴۸=۰/۹۲$$

خودکار یا مداد

هنگامی که ناسا برنامه فرستادن فضانوردان به فضا را آغاز کرد، با مشکل کوچکی روبرو شد. آنها دریافتند که خودکارهای موجود در فضای بدون جاذبه کار نمی کنند.

جوهر خودکار به سمت پایین جریان نمی یابد و روی سطح کاغذ نمی ریزد. برای حل این مشکل آنها شرکت مشاورین اندرسون را انتخاب کردند. تحقیقات بیش از یک دهه طول کشید، ۱۲ میلیون دلار صرف شده و در نهایت آنها خودکاری طراحی کردند که در محیط بدون جاذبه می نوشت، زیر آب کار می کرد، روی هر سطحی حتی کریستال می نوشت و از دمای زیر صفر تا ۳۰۰ درجه سانتیگراد کار می کرد.

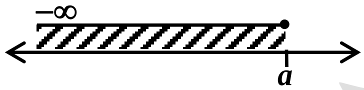
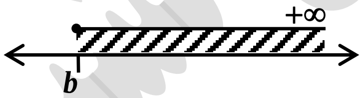
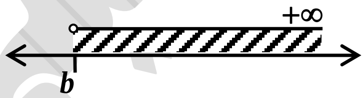
روس ها راه حل ساده تری داشتند: آنها از مداد استفاده کردند!

شما چه فکر می کنید کدام یک بهتر عمل کرده اند؟

فصل دوم : تابع

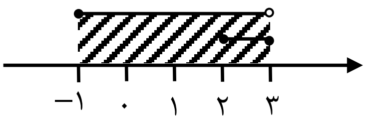
معمولاً بارم بندی این فصل در امتحانات نهایی ۷ نمره می باشد.((سوال ۵ تا ۹))

انواع بازه‌ها:

نام	نماد بازه	نماد مجموعه	نمودار روی بردار	نوع
بازه‌ی باز	(a,b)	$\{x: a<x<b\}$		**کران دار**
بازه‌ی بسته	$[a,b]$	$\{x: a\le x\le b\}$		
بازه‌ی نیمه باز	$[a,b)$	$\{x: a\le x<b\}$		
	$(a,b]$	$\{x: a<x\le b\}$		
بازه‌ی نامتناهی	$(-\infty,a]$	$\{x: x\le a\}$		**کران دار یک طرفه**
	$(-\infty,a)$	$\{x: x<a\}$		
	$[b,+\infty)$	$\{x: x\ge b\}$		
	$(b,+\infty)$	$\{x: x>b\}$		
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x:$ عددی حقیقی است $\}$		**بی کران**

تذکر جواب‌های نامعادلات به صورت بازه است پس حتماً بازه‌ها را به خوبی فرا بگیرید.

مثال ۱: اگر $B=[2,3]$ و $A=[-1,3)$ باشد آنگاه $A\cup B$ برابر است با ...



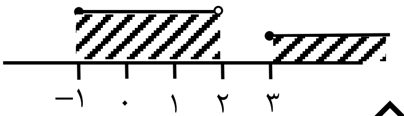
حل : $A\cup B=[-1,3]$

مثال ۲: اگر $B=(-1,2), A=\left\{x \middle| x\in R, \frac{2x}{3}\ge 2\right\}$ باشد :

الف) جواب مجموعه‌ی A را تعیین کنید . ب) مجموعه‌ی $A\cap B$ را به وسیله‌ی بازه نمایش دهید .

حل : الف) $\frac{2x}{3}\ge 2 \xrightarrow{\times 3} 2x\ge 6 \xrightarrow{\div 2} \boxed{x\ge 3}=[3,+\infty)$

ب) A و B رابه کمک جدول بازه‌ها روی بردار می‌کشیم و بعد اشتراک آنها را محاسبه کرده و می‌نویسیم. $A=[3,+\infty)$ $B=[-1,2)$

$\to A\cap B=$  $\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

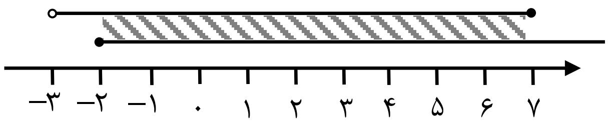
مثال ۳: اگر $A=\left\{x\in R \middle| ,\frac{۲x-۲}{۳}\geq -۲\right\}$, $B=\left\{x\in R \middle| ,-۳<x\leq ۷\right\}$ باشد،مجموعه های زیر رابه وسیله بازه نمایش دهید.

الف) A ب) B ج) A-B د) $A\cap B$

حل : الف) $\frac{۲x-۲}{۳}\geq -۲ \xrightarrow{\times ۳} ۲x-۲\geq -۶ \xrightarrow{+۲} ۲x\geq -۴ \xrightarrow{\div ۲} x\geq -۲ \Rightarrow A=[-۲,+\infty)$

ب) $B=(-۳,۷]$

ج) A-B ، یعنی عضوهایی که در A باشد و در B نباشد پس :
$A-B=[-۲,+\infty)-(-۳,۷]=(+۷,+\infty)$



د) $A\cap B=[-۲,۷]$

حل معادلات گویا: برای حل اینگونه معادلات کافیه معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسر ها (ک.م.م)ضرب کنیم تا مخرج‌های کسرها رو از بین ببریم سپس معادله‌ی ساده‌ی به دست آمده را حل می کنیم .

*دقت کنید ریشه هایی که به دست می آیند نباید مخرج کسرها را صفر کنند .

تذکر ۱ : اگر ۲ تا کسر داشتی واسه امتحان نهایی بهتره همه رو ببری یک طرف و مخرج مشترک بگیری . آخر سر صورت را مساوی صفر قرار می دهی .

تذکر ۲ : اگر ۳ تا کسر داشتی یکی از کسر ها رو که مخرج حاصل ضرب دوتا مخرج دیگر است را سمت چپ و دوتای دیگر را طرف راست ببر و مخرج مشترک بگیر سپس مخرج ها را با هم بزن.

مثال ۴: تعداد جواب‌های معادله $\frac{x+۱}{x+۳}=\frac{x-۲}{x-۴}$ کدام است ؟

حل:

$$\frac{x-۲}{x-۴}=\frac{x+۱}{x+۳}\Rightarrow \frac{x-۲}{x-۴}-\frac{x+۱}{x+۳}=۰\Rightarrow \frac{(x-۲)(x+۳)-(x+۱)(x-۴)}{(x-۴)(x+۳)}=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۳)-(x+۱)(x-۴)=۰\rightarrow$$

$$(x^۲+x-۶)-(x^۲-۳x-۴)=۰\Rightarrow x+۳x-۲=۰\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۵: تعداد جواب های معادله $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}$ کدام است ؟

حل:

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}\Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{x-۱}{x-۲}+\frac{۱+x}{x}\Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{\underbrace{x^۲-۲x}_{x(x-۲)}}=\frac{(x+۱)(x-۲)+x(x-۱)}{x(x-۲)}$$

$$x^۲-۲x+۲=x^۲-x-۲+x^۲-x\Rightarrow x^۲-۲x+۲=۲x^۲-۲x-۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow \begin{cases} x=+۲ & \text{(غ ق ق)چون مخرج را صفر می‌کند} \\ x=-۲ & \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

مثال ۶: تعداد جواب های معادله $\frac{۸}{x^۲-۴}=\frac{x}{x-۲}+\frac{x-۲}{x+۲}$ کدام است ؟

حل: طرفین را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم ؛ پس در $x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)$ ضرب می کنیم .

$$(x-۲)(x-۲)+x(x+۲)=۸\Rightarrow x^۲-۴x+۴+x^۲+۲x=۸\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۴=۰\xrightarrow{\div ۲} x^۲-x-۲=۰\rightarrow$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{ق ق} \\ x=۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته : در معادله $ax^۲+bc+c=۰$ اگر $a+b+c=۰$ باشد آنگاه $\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$ و اگر $a+c=b$ باشد آنگاه $\begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$ است.

مثال ۷: به ازای چه مقدار k معادله $\frac{۳x}{x+۲}=\frac{۸}{k}+\frac{۱}{x-۲}$ دارای جواب $x=۱$ است ؟

حل: وقتی $x=۱$ جواب معادله است پس در آن صدق می کند پس :

$$\frac{۱}{x-۲}+\frac{۸}{k}=\frac{۳x}{x+۲}\xrightarrow{x=۱}\frac{۱}{۱-۲}+\frac{۸}{k}=\frac{۳\times۱}{۱+۲}\Rightarrow -۱+\frac{۸}{k}=۱\Rightarrow\frac{۸}{k}=۲\Rightarrow\boxed{k=۴}$$

حل نا معادلات شامل عبارات گویا: تمام عبارات رو بیار یه طرف نا مساوی و بعد از مخرج مشترک و ساده کردن عبارت حاصل رو تعیین علامت کن و مجموعه جواب رو به صورت بازه بنویس . گاهی اونقدر آسونه که تعیین علامت هم نیازی نداره!

مثال ۸: نامعادلهی $۲<\frac{x}{۲}+۱<۴$ را حل کنید و مجموعهی جواب را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

حل: $۲<\frac{x}{۲}+۱<۴\xrightarrow{(-۱)}۱<\frac{x}{۲}<۳\xrightarrow{\times۲}۲<x<۶$

مثال ۹: نامعادلهی $-۱\le\frac{۲x+۱}{۳}<۳$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

حل: $-۱\le\frac{۲x+۱}{۳}<۳\xrightarrow{\times۳}-۳\le۲x+۱<۹\xrightarrow{-۱}-۴\le۲x<۸\xrightarrow{\div۲}-۲\le x<۴$

مثال ۱۰: نامعادلهی $\frac{۱}{x-۲}\le\frac{x+۲}{۲x-۱}$ را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید .

حل:

$$\frac{x+۲}{۲x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\le۰\rightarrow\frac{(x+۲)(x-۲)-(۲x-۱)}{(۲x-۱)(x-۲)}\rightarrow\frac{\overbrace{(x-۳)(x+۱)}^{x^۲-۲x-۳}}{(۲x-۱)(x-۲)}\le۰\rightarrow\begin{cases}(x-۲)(x+۱)=۰\rightarrow x=۳,x=-۱\\(۲x-۱)(x-۲)=۰\rightarrow x=\frac{۱}{۲},x=۲\end{cases}$$

x	$+\infty$		-۱		$\frac{۱}{۲}$		۲		۳		$+\infty$
$x^۲-۲x-۳$		+	0	−		−		−	0	+	
$(۲x-۱)(x-۲)$		+		+	0	−	0	+		+	
عبارات کل		+	0	−	ت ن	+	ت ن	−	0	+	

$$\text{مجموعه جواب}=[-۱,\frac{۱}{۲})\cup(۲,۳]$$

مثال ۱۱: نامعادلهی $\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}\ge۱$ را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

حل:

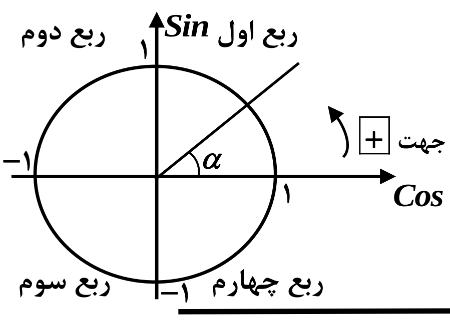
$$\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}\ge۱\Rightarrow\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}-۱\ge۰$$

$$\Rightarrow\frac{\overbrace{۴x-۴}^{۴(x-۱)}}{\underbrace{x^۲-۳x+۲}_{(x-۱)(x-۲)}}\ge۰$$

x	$+\infty$		۱		۲		$+\infty$
$۴x-۴$		−		+	0	+	
$x^۲-۳x+۲$		+	0	−	0	+	
$\frac{۴x-۴}{x^۲-۳x+۲}$		−	ت ن	−	ت ن	+	

$$\text{مجموعه جواب}=(۲,+\infty)$$

یادآوری و تکمیل از مثلثات: دایره مثلثاتی دایرهای به شعاع یک را دایره مثلثاتی می نامیم و جهت خلاف عقربههای ساعت را جهت مثبت در نظر می گیریم .



$$Tan\alpha=\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}$$

$$Cot\alpha=\frac{Cos\alpha}{Sin\alpha}$$

قانون هستک: برای علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع

ه : همه در ربع اول مثبت — س: سینوس در ربع دوم مثبت

ت: تانژانت در ربع سوم مثبت — ک: کسینوس در ربع چهارم مثبت

تذکر هستک برای sin و cos و tan است و cot همیشه مثل علامت tan است.

زاویه های معروف:

نسبت \ زاویه	$(۰)^\circ$ ۰	$(۳۰)^\circ$ $\frac{\pi}{۶}$	$(۴۵)^\circ$ $\frac{\pi}{۴}$	$(۶۰)^\circ$ $\frac{\pi}{۳}$	$(۹۰)^\circ$ $\frac{\pi}{۲}$	$(۱۸۰)^\circ$ π	$(۲۷۰)^\circ$ $\frac{۳\pi}{۲}$	$(۳۶۰)^\circ$ ۲π
Sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
Cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
Tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
Cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

فرمول های مهم:

$$۱)\ Sin^۲\alpha + Cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \begin{cases} Sin^۲\alpha = ۱ - Cos^۲\alpha & \boxed{I} \\ Cos^۲\alpha = ۱ - Sin^۲\alpha & \boxed{II} \end{cases}$$

$$۲)\ Tg\alpha \times Cot\alpha = ۱$$

$$۳)\ ۱ + Tg^۲\alpha = \frac{۱}{Cos^۲\alpha}$$

$$۴)\ ۱ + Cot^۲\alpha = \frac{۱}{Sin^۲\alpha}$$

$$۵)\ Sin(\alpha \pm \beta) = Sin\alpha Cos\beta \pm Sin\beta Cos\alpha \xrightarrow{\text{اگر } \alpha=\beta} Sin\underbrace{(۲\alpha)}_{\alpha+\alpha} = ۲Sin\alpha Cos\alpha \xrightarrow{\text{حالات کلی}}$$

$$Sin\square = ۲Sin\frac{\square}{۲}Cos\frac{\square}{۲}$$

$$۶)\ Cos(\alpha \pm \beta) = Cos\alpha Cos\beta \pm Sin\alpha Sin\beta \xrightarrow{\text{اگر } \alpha=\beta} Cos\underbrace{(۲\alpha)}_{\alpha+\alpha} = Cos^۲\alpha - Sin^۲\alpha \begin{cases} \text{I} & Cos۲\alpha = ۲Cos^۲\alpha - ۱ \rightarrow \\ \text{II} & Cos۲\alpha = ۱ - ۲Sin^۲\alpha \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow Cos۲\alpha = ۲Cos۲\alpha - ۱ \xrightarrow{+۱} ۱ + Cos^۲\alpha = ۲Cos^۲\alpha \Rightarrow \boxed{Cos^۲\alpha = \frac{۱+Cos۲\alpha}{۲}}$$

$$\rightarrow Cos۲\alpha = ۱ - ۲Sin^۲\alpha \longrightarrow ۱ - Cos۲\alpha = ۲Sin^۲\alpha \Rightarrow \boxed{Sin^۲\alpha = \frac{۱-Cos۲\alpha}{۲}}$$

فرمول های طلایی

$$۷)\ Tan(\alpha \pm \beta) = \frac{Tan\alpha \pm Tan\beta}{۱ \mp Tan\alpha Tan\beta} \xrightarrow{\alpha=\beta} Tan\underbrace{(۲\alpha)}_{\alpha+\beta} = \frac{۲Tan\alpha}{۱ - Tan^۲\alpha}$$

مثال ۱۲: اثبات‌های زیر را انجام دهید .

$$۱)\ \boldsymbol{Sin۲x = \frac{۲Tan\,x}{۱+Tan^۲ x}} \xrightarrow{\text{اثبات از طرف دوم}} \frac{۲Tan\,x}{۱+Tan^۲x} = \frac{۲\frac{Sinx}{Cosx}}{\frac{۱}{Cos^۲x}} \to \frac{۲Sinx \times \cancel{Cos^۲x}}{\cancel{Cos^۲x}} = ۲SinxCosx = Sin۲x$$

$$۲)\ \boldsymbol{Cos۲x = \frac{۱-Tan^۲x}{۱+Tan^۲x}} \xrightarrow{\text{اثبات از طرف دوم}} \frac{۱-Tan^۲x}{۱+Tan^۲x} = \frac{۱-Tan^۲x}{\frac{۱}{Cos^۲x}} = Cos^۲x\,(۱-Tan^۲x) = Cos^۲x\,(۱-\frac{Sin^۲x}{Cos^۲x})$$

$$= Cos^۲x(\frac{Cos^۲x-Sin^۲x}{Cos^۲x}) = Cos^۲x - Sin^۲x = Cos۲x$$

$$۳)\ \boldsymbol{Cot\,\alpha - Tan\,\alpha = ۲Cot\,۲\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات از طرف اول}} Cot\,\alpha - Tan\,\alpha = \frac{Cos\,\alpha}{Sin\alpha} - \frac{Sin\alpha}{Cos\,\alpha} = \frac{Cos^۲\alpha - Sin^۲\alpha}{Sin\alpha Cos\,\alpha}$$

$$= \frac{Cos۲\alpha}{Sin\alpha Cos\alpha} = \frac{۲Cos۲\alpha}{۲Sin\alpha Cos\alpha} = \frac{۲Cos۲\alpha}{Sin۲\alpha} = ۲Cot۲\alpha$$

تذکر فرمول ۳ سوال اثبات شده در مثال ۱۲ را حفظ کنید .

مثال ۱۳ : مقدار های زیر را بدست آورید .

حل :

$$\boldsymbol{Sin۷۵^\circ} = Sin(۳۰+۴۵) = Sin(۳۰)^\circ.Cos(۴۵)^\circ + Cos۳۰^\circ.Sin۴۵^\circ = \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

$$\boldsymbol{Sin۲۲/۵^\circ \Rightarrow}$$

حل :

$$۱-Cos۲x = ۲Sin^۲x \xrightarrow{\div ۲} Sin^۲x = \frac{۱-Cos۲x}{۲} \xrightarrow{x=۲۲/۵} Sin^۲۲۲/۵ = \frac{۱-Cos۴۵}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۴}$$

حل :

$$\boldsymbol{Sin۱۵^\circ} = Sin(۴۵-۳۰) \to Sin۴۵\times Cos۳۰ - Sin۳۰\times Cos۴۵ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - (\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\boldsymbol{Sin(۱۰۵)} = Sin(۶۰+۴۵) = Sin۶۰.Cos۴۵ + Sin۴۵.Cos۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال ۱۳ : اگر α زاویه‌ای‌در ربع اول و β زاویه‌ای‌در ربع سوم باشد که $\boldsymbol{Sin\alpha = \frac{۳}{۵}, Cos\beta = \frac{-۵}{۱۳}}$ ، مقدار $\boldsymbol{Sin(\alpha+\beta)}$ را بیابید.

حل :

$$Sin^۲\alpha + Cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow[\alpha\ \text{در ربع اول}]{Sin\alpha=\frac{۳}{۵}} Cos\alpha = \frac{۴}{۵} \qquad Sin^۲\beta + Cos^۲\beta = ۱ \xrightarrow[\alpha\ \text{در ربع سوم}]{Cos\beta=\frac{-۵}{۱۳}} Sin\beta = \frac{-۱۲}{۱۳}$$

$$Sin(\alpha+\beta) = Sin\alpha Cos\beta + Sin\beta Cos\alpha = (\frac{۳}{۵}\times\frac{-۵}{۱۳}) + (\frac{۴}{۵}\times\frac{-۱۲}{۱۳}) = \frac{-۱۵}{۶۵} + \frac{-۴۸}{۶۵} = \frac{-۶۳}{۶۵}$$

مثال ۱۴ : اگر $\boldsymbol{Sin\alpha = \frac{۴}{۵}}$, α زاویه حاده باشد $\boldsymbol{Cos۲\alpha}$ را بدست آورید .

حل :

$$Cos۲\alpha = ۱ - ۲Sin^۲\alpha = ۱ - ۲(\frac{۱۶}{۲۵}) = \frac{-۷}{۲۵}$$

مثال ۱۵ : اگر $\boldsymbol{Sin\alpha = \frac{۳}{۵}}$, α زاویه منفرجه باشد $\boldsymbol{Tan۲\alpha}$ را بدست آورید .

حل :

$$Sin^۲\alpha + Cos^۲\alpha = ۱ \to (\frac{۳}{۵})^۲ + Cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow{\alpha\ \text{منفرجه}} Cos\alpha = \frac{-۴}{۵} \to Tan\alpha = \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{-۴}{۵}} = \frac{-۳}{۴}$$

$$Tan۲\alpha = \frac{۲Tan\alpha}{۱-Tan^۲\alpha} = \frac{۲\times(\frac{-۳}{۴})}{۱-(\frac{-۳}{۴})^۲} = \frac{-۲۴}{۷}$$

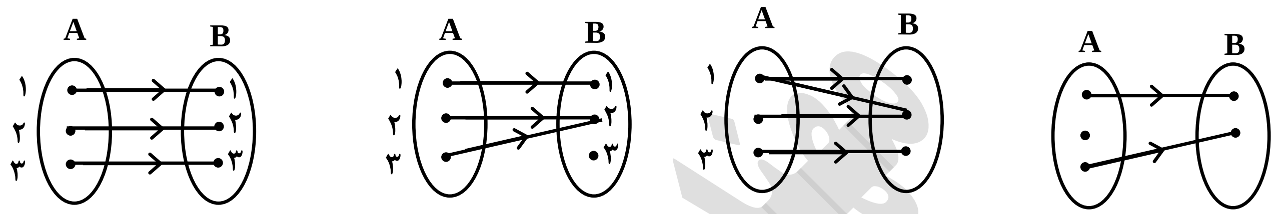
مثال ۱۶: عبارت $Sin(x+\frac{\pi}{4})$ را ساده کنید .

حل :
$$Sin(x+\frac{\pi}{4})=Sinx.Cos\frac{\pi}{4}+Cosx.Sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}Sinx+\frac{\sqrt{2}}{2}Cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}(Sinx+Cosx)$$

مثال ۱۷: درستی تساوی $\frac{Sinx}{1+Cosx}=Tan\frac{x}{2}$ را ثابت کنید .

حل :
$$=\frac{Sinx}{1+Cosx}=\frac{2Sin\frac{x}{2}Cos\frac{x}{2}}{2Cos^2\frac{x}{2}}=\frac{Sin\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}}=Tan\frac{x}{2}=$$

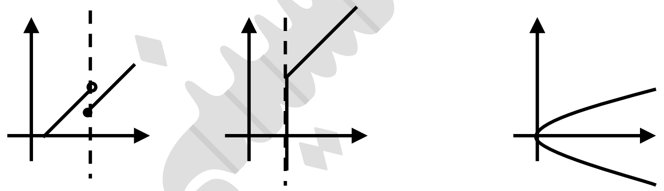
تعریف تابع : تابع f عملی است که روی عناصر یک مجموعه مانند A عمل کرده و به هر عضو A دقیقاً عضوی از یک مجموعه مانند B را نظیر می‌سازد که نمودار ون آن به صورت زیر است .



تابع نیست — تابع نیست — تابع است — تابع است

از نظر زوج مرتب: به مجموعه زوج مرتب های مرتبی که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه اول برابر نباشد مگر اینکه مؤلفه های دوم آن ها نیز برابر باشد تابع گوییم مثلاً رابطه‌ی $f=\{(1,2)(3,4)(7,7)\}$ تابع است ولی $g=\{(1,2)(1,7)\}$ تابع نیست زیرا مؤلفه های اول برابر ۱ است ولی مؤلفه دوم یکسان نیست.

از نظر نمودار هندسی: از نظر نمودار به نموداری تابع گوییم که اگر هر خط دلخواه به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند .



تابع نیست — تابع نیست — تابع است

مثال ۱۸: اگر رابطه‌ی $f=\{(1,a^2-5a)(1,-6)(a-1,7)\}$ تابع باشد مقدار a را بیابید .

حل :
$$a^2-5a=-6\Rightarrow a^2-5a+6=0\to(a-3)(a-2)=0\to a=3,a=2$$
$$\begin{cases}a=3\to f=\{(1,-6)(1,-6)(2,7)\} & \text{(تابع است)}\\ a=2\to f=\{(1,-6)(1,-6)(1,7)\} & \text{(تابع نیست غ.ق.ق)}\end{cases}$$

مثال ۱۹: مقادیر a,b را چنان بیابید که مجموعه $g=\{(-1,b+3)(7,1)(-1,4-a)(7,a)\}$ یک تابع باشد .

حل : مولفه اول زوج مرتب هایی که زیر آنها خط کشیده شده است برابرند پس مولفه دوم آنها نیز باید برابر باشد .

$$g=\{(\underline{-1},b+3)(\underline{7},1)(\underline{-1},4-a)(\underline{7},a)\}$$
$$\begin{cases}b+3=4-a\xrightarrow{\boxed{I}}b+3=4-1=3\to\boxed{b=0}\\ \boxed{a=1}\ \boxed{I}\end{cases}\to g=\{(-1,3)(7,1)(-1,3)(7,1)\}$$

نمایش ضابطه تابع: نمایش تابع به صورت $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ را نمایش ضابطه ای تابع گوییم که در آن A مجموعه ورودی (مولفه اول ، دامنه ، x) و B مجموعه خروجی‌ها (مؤلفه دوم، برد، y ، $f(x)$) می باشد .

نمایش هندسی تابع: اگر زوج مرتب هایی که عضو تابع هستند را به صورت نقاط در یک دستگاه رسم کنیم نمودار تابع به دست می آید .

نکات :

۱- در صورتی که نمودار تابع را داشته باشیم ، تصویر نمودار روی محور x ها دامنه تابع و تصویر آن روی محور y ها ، برد تابع خواهد بود .

۲- در صورتی که نقطه (a,b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، مختصات نقطه در ضابطه‌ی تابع صدق می کند یعنی $f(a)=b$

۳- اگر تابعی محور x ها را در نقطه‌ای به طول K قطع کند ، عرض آن نقطه صفر است . بنابراین نقطه $(K,0)$ روی نمودار بوده و $f(K)=0$

۴- اگر تابعی محور y ها را در نقطه ای به عرض C قطع کند ، طول آن نقطه صفر است بنابراین نقطه $(0,C)$ روی نمودار بوده و $f(0)=C$.

مثال ۱۹: اگر $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد حاصل $f(1)+f(4)$ را بیابید .

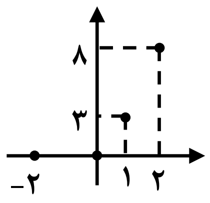
حل : $f(1)=(1+2\sqrt{1})=3 \quad , \quad f(4)=4+2\sqrt{4}=4+4=8 \quad \to f(1)+f(4)=3+8=11$

مثال ۲۰: تابع $f(x)=x^2+2x$ را با دامنه $\{0,1,2,-2\}$ در نظر بگیرید .

$x=0 \to f(0)=0^2+2(0)=0 \to (0,0) \quad , \quad x=1 \to f(1)=1^2+2(1)=3 \to (1,3)$

$x=2 \to f(2)=2^2+2(2)=8 \to (2,8) \quad , \quad x=-2 \to f(-2)=(-2)^2+2(-2)=0 \to (-2,0)$

$\to f(x)=\{(x,f(x)) \mid x \in D_f\}=\{(0,0)(1,3)(2,8)(-2,0)\}$



تذکر: اگر نقاط به دست آمده را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم نمودار تابع به دست می آید. چون تابع به صورت ۴ تا نقطه است پس نباید به هم وصل شود ولی اگر ضابطه بود به هم وصل می کردیم .

مثال ۲۱: در تابع خطی $f(x)=ax+b$ مقادیر b,a را طوری تعیین کنید که نمودار تابع، محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند و از نقطه $(-4,6)$ بگذرد.

حل : $(0,3) \to 3=a(0)+b \Rightarrow \boxed{b=3} \xrightarrow[b=3]{(-4,6)} 6=a(-4)+3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-3}{4}}$

مثال ۲۲: اگر $f(x)=ax^2+bx+c$ ، مقادیر c,b,a را طوری تعیین کنید که این سهمی محور x ها را در نقطه ای به طول ۱ ، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱- قطع کند و از نقطه $(-2,3)$ نیز بگذرد.

حل : $\xrightarrow{(0,-1)} -1=a(0)^2+b(0)+c \to c=-1 \ \boxed{\mathrm{I}} \qquad \xrightarrow[\boxed{\mathrm{I}}]{(1,0)} a+b+c=0 \to a+b=1$

$\xrightarrow[\boxed{\mathrm{I}}]{(-2,3)} 4a-2b+c=3 \to 4a-2b=4 \qquad \Rightarrow \boxed{b=0} \ , \ \boxed{a=1}$

مثال ۲۳: دو تابع $y=-x+b, y=x^2+ax-3b$ داده شده اند مقادیر b,a را چنان محاسبه کنید که نمودار های این دو تابع روی محور x ها در نقطه ای به طول ۱ همدیگر را قطع کند .

حل : در محور x ها مقدار y برابر با صفر است پس؛

$$\begin{cases} \xrightarrow{(1,0)} 0=-(1)+b \Rightarrow \boxed{b=1} \ \boxed{\mathrm{I}} \\ \xrightarrow{(1,0)} 0=(1)^2+a(1)-3b \xrightarrow{\boxed{\mathrm{I}}} 0=1+a-3 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

توابع چند ضابطه ای: هرگاه دامنه یک تابع را به چند مجموعه‌ی جدا از هم تقسیم کنیم، به طوریکه اجتماع آن مجموعه ها برابر با دامنه تابع باشد و روی هر مجموعه، ضابطه ای متمایز تعریف کنیم در این صورت تابع چند ضابطه ای بدست می‌آید مانند تابع ۳ ضابطه ای زیر :

$$f(x)=\begin{cases} f_{۱}(x) & x\le a \\ f_{۲}(x) & a<x<b \\ f_{۳}(x) & x\ge b \end{cases}$$

نکته ۱ : برای پیدا کردن مقدار توابع چند ضابطه ای در هر نقطه‌ی دلخواه ابتدا دقت کنیم آن نقطه در کدام یک از شرط‌ها قرار دارد سپس از ضابطه‌ی مربوط به آن شرط استفاده کنیم.

نکته ۲ : برای رسم توابع چند ضابطه ای نقطه‌ی شکستگی دامنه و چند نقطه دلخواه بیشتر یا کمتر از آن را می دهیم سپس نمودار را در دامنه رسم می کنیم. (در توابع عادی ۳ نقطه دلخواه می دهیم و رسم می کنیم)

نکته ۳ : شکل معادله درجه ۲ به صورت سهمی می باشد و شکل معادله درجه یک به صورت خط می باشد .

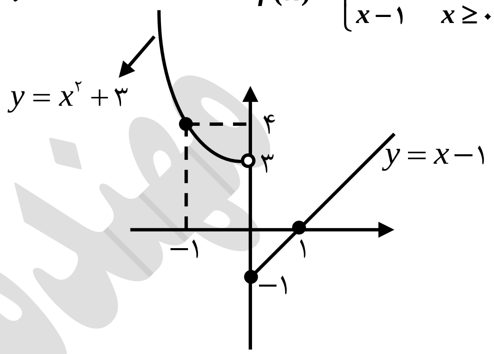
مثال ۲۴: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x<۰ \\ x-۱ & x\ge ۰ \end{cases}$ داده‌شده است، الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) حاصل $f(f(-۱))$ را بدست آورید.

حل : الف)

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x<۰\rightarrow \\ x-۱ & x\ge ۰\rightarrow \end{cases}$$

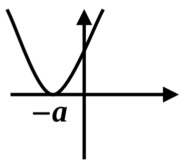
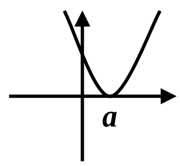
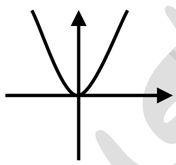
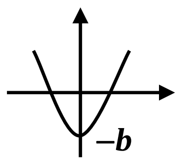
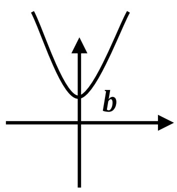
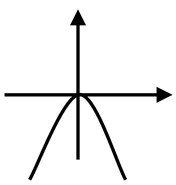
x	-۲	-۱	۰
y	۷	۴	۳

x	۰	۱	۲
y	-۱	۰	۱



ب) $f(-۱)=\xrightarrow[\text{ضابطه اول}]{-۱<۰} f(-۱)=(-۱)^{۲}+۳=۴\rightarrow f(\underbrace{f(-۱)}_{۴})=f(۴)\xrightarrow[\text{ضابطه دوم}]{۴\ge ۰} f(۴)=۴-۱=۳$

نکات انتقال تابع :

$f(x+a)=(x+a)^{۲}$	$f(x-a)=(x-a)^{۲}$	$f(x)=x^{۲}$
		
a واحد به چپ ← انتقال می‌دهیم	a واحد به راست → انتقال می‌دهیم	نمودار اصلی
$f(x)-b=x^{۲}-b$	$f(x)+b=x^{۲}+b$	$-f(x)=-x^{۲}$
		
b واحد به پایین ↓ انتقال می‌دهیم	b واحد به بالا ↑ انتقال می‌دهیم	نمودارنسبت به محور x ها قرینه شود

تذکر انتقال توابع در کتاب درسی سوم دبیرستان بیشتر برای توابع $y=n^2$ و $y=|x|$ به کار برده می‌شود.

به دست آوردن تابع $f(\bigcirc)$ به کمک تابع $f(x)$:

کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ هر کجا که x داریم $\bigcirc$ قرار دهیم .

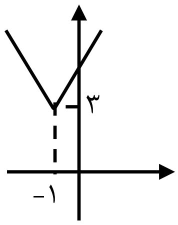
مثال ۲۵: اگر $f(x)=x^2+x$ باشد حاصل $f(1+x),\ f(\sqrt{x}),\ f(\frac{1}{x})$ را به دست آورید .

حل : $f(1+x)\to(1+x)^2+(1+x)$ $\qquad f(\sqrt{x})\to(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}$ $\qquad f(\frac{1}{x})\to(\frac{1}{x})^2+\frac{1}{x}$

رسم نمودار توابع قدرمطلقی :

نمودار $f(x)=|x|$ با دامنه $\mathbb{R}$ را تابع قدر مطلق می نامیم ، با توجه به آن که $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود و برد این تابع $[0,+\infty)$ است و برای رسم $f(x)=|x-a|+b$ از قوانین انتقال کمک می‌گیریم و سایر توابع قدر مطلق را با نقطه یابی (به کمک یافتن ریشه قدر مطلق) و تبدیل آن به تابع چند ضابطه ای رسم می کنیم .

مثال ۲۶: نمودار تابع زیر را رسم کنید .



الف) $f(x)=|x-1|+3$

حل : نمودار $|x|$ را یک واحد به چپ و سه واحد به سمت بالا انتقال می دهیم .

ب) $f(x)=|2x-1|$

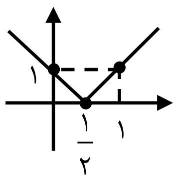
حل : $2x-1=0$ پس $x=\frac{1}{2}$ ، حال که ریشه قدر مطلق پیدا شد یک نقطه بزرگتر و یک نقطه کوچکتر از ریشه قرار می دهیم در بخش هایی که عبارت داخل قدر مطلق مثبت است بدون تغییر قدر مطلق را برمی داریم و در بخش هایی که عبارت داخل قدر مطلق منفی است کل عبارت داخل قدرمطلق را در یک منفی ضرب می کنیم .

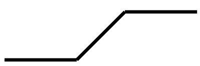
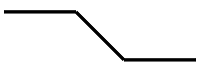
$$|2x-1|\begin{cases}x=1\to 2(1)-1=1 & \boxed{+}\to 2x-1\\ x=0\to 2(0)-1=-1 & \boxed{-}\to -(2x-1)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geq\frac{1}{2}\\ -(2x-1) & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

x	$\frac{1}{2}$	1
y	0	1

x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	0



نکته : نمودار توابع $y=|x-a|+|x-b|$ به صورت (گلدانی)  و نمودار توابع $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت (شکل Z)  یا  می باشد .

مثال ۲۷: تابع $f(x)=|x-1|-|x+1|$ را به صورت چند ضابطه ای نوشته و آن را رسم کنید .

$$\left.\begin{array}{l}x+1=0\to x=-1\\ x-1=0\to x=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

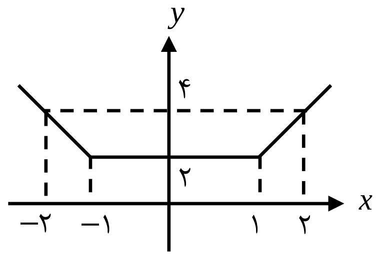
x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

$$\to f(x)=\begin{cases}-(x-1)-(x+1)=-2x & x<-1\\ -(x-1)+(x+1)=2 & -1\le x\le 1\\ (x-1)+(x+1)=2x & x>1\end{cases}$$

x	-2	-1
y	4	2

x	-1	$+1$
y	2	2

x	$+1$	$+2$
y	2	4



پیدا کردن دامنه تعریف تابع از روی ضابطه:

۱- دامنه تعریف توابع چند جمله ای به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+...+k$ برابر مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌باشد .

۲- دامنه توابع کسری به فرم $y=\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+...+k}{a'x^m+b'x^{m-1}+...+k'}$ مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج است یعنی : $\boxed{D_f : R-\{\text{ریشه های مخرج}\}}$

۳- دامنه توابع $y=Cotx , y=Tanx$ به صورت زیر است :

$$\begin{cases} y=Tanx \to y=\dfrac{Sinx}{Cosx}\xrightarrow[Cosx\neq 0,\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}]{} D_{Tanx}=\left\{x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}\\ y=Cotx \to y=\dfrac{Cosx}{Sinx}\xrightarrow[Sinx\neq 0,\,x\neq k\pi]{} D_{Cotx}=\{x\neq k\pi\}\end{cases}$$

۴- برای پیدا کردن دامنه تعریف تابع $y=\sqrt[2k]{g(x)}$ (رادیکال با فرجه زوج) از شرط $g(x)\ge 0$ استفاده می کنیم .

۵- برای پیدا کردن دامنه تعریف تابع لگاریتمی به صورت $f(x)=Log_{h(x)}^{g(x)}$ از دستور زیر استفاده می کنیم .

$$\checkmark\begin{cases}g(x)>0\\ h(x)>0\\ h(x)\neq 1\end{cases}\xrightarrow[\text{اشتراک می‌گیریم}]{\text{از هر سه شرط}} D_f :$$

۶- دامنه یک تابع چند ضابطه ای برابر است با اجتماع بازه هایی که هر یک از ضابطه های تابع روی آن بازه‌ها تعریف شده اند .

۷- دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد همان دامنه‌ی تابع زیر رادیکال است.

مثال ۲۸: دامنه توابع زیر را به دست آورید .

$1)\ f(x)=x^2-3x+2$ حل: $D_f=\mathbb{R}$

$2)\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ حل: ریشه مخرج $\{x=0\} \to D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$3)\ f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ حل: ریشه مخرج $\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1 \quad D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$4)\ f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ حل: $x^2-1=0\to x=\pm1\xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

$5)\ \dfrac{x-1}{x+1}$ حل: $x+1=0\Rightarrow \boxed{x=-1}$ ریشه مخرج $\to D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$6)\ \dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ حل: $x^2-6x+5=0\to(x-1)(x-5)=0\to x=1, x=5$ ریشه مخرج $\to D_f=\mathbb{R}-\{1,5\}$

$7)\ \sqrt[2]{2x-1}$ حل: $\to 2x-1\ge 0\Rightarrow 2x\ge 1\Rightarrow x\ge\dfrac{1}{2}\to D_f=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

۸) $\sqrt{\frac{1}{x}}$ حل: $\frac{1}{x}\geq 0 \Rightarrow x>0 \rightarrow D_f=(0,+\infty)$

۹) $\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ حل: $x+1>0 \rightarrow x>-1 \rightarrow D_f=(-1,+\infty)$

۱۰) $\sqrt[3]{\frac{1}{x+3}}$ حل: $x+3=0 \rightarrow x=-3$ **ریشه مخرج** $\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

۱۱) $\sqrt[3]{x^2+2x}$ حل: $\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۲) $f(x)=Tanx$ حل: $D_f=\left\{x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

۱۳) $f(x)=\log_{\frac{x}{2}}^{x^2-1}$ حل: $x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{جذر}} |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases} \boxed{\text{I}} \quad \frac{x}{2}>0 \ \boxed{\text{II}} \quad \frac{x}{2}\neq 1 \Rightarrow x\neq 2 \ \boxed{\text{III}}$

$\rightarrow D_f=\boxed{\text{I}}\cap\boxed{\text{II}}\cap\boxed{\text{III}}=\{x>1\}-\{2\}=(1,+\infty)-\{2\}$

مثال ۲۹: دامنه تابع $Tan(3x-\frac{\pi}{6})$ را بیابید .

$$Tan(3x-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 3x-\frac{\pi}{6}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow 3x=k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{9} \ (k\in\mathbb{Z}) \rightarrow D_f=\left\{x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}\right\}$$

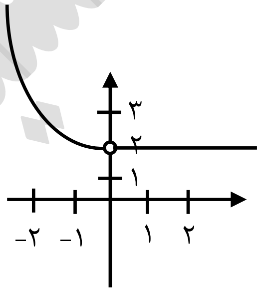
مثال ۳۰: دامنه $\begin{cases} x+3 & x<-1 \\ x^2 & x\geq -1 \end{cases}$ را مشخص کنید .

حل : برای پیدا کردن دامنه توابع چند ضابطه ای کافیه اجتماع شرط ها را بگیریم . $D_f=(x<-1)\cup(x\geq -1)\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

مثال ۳۱: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار تابع f را رسم کنید.ب) دامنه تابع f را بدست آورید.

حل : الف)

$\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ 2 & x>0 \end{cases} \rightarrow$



حل : ب) از روی نمودار همانگونه که معلوم است،
فقط نقطه‌ی صفر در آن نیست، پس : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

مثال ۳۲: دامنه $y=\sqrt{\frac{(x+1)(2x-5)}{x-1}}$ راتعیین و آن را به صورت بازه نمایش دهید.

$$\frac{(x+1)(2x-5)}{x-1}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

x		-1		1		$\frac{5}{2}$	
$(2x-5)$	−		−		−	0	+
$(x+1)$	−	0	+		+		+
$(x-1)$	−		−	0	+		+
کل عبارت	−	0	+	ت.ن	−	0	+

$D_f=[-1,1)\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

جبر دو تابع (چهار عمل اصلی روی توابع):

اگر تابعی به صورت مجموع، تفاضل و حاصلضرب دو یا چند تابع باشد دامنه آن برابر است با اشتراک دامنه های هر یک از توابع تشکیل دهنده آن ولی اگر تابع به صورت تقسیم دو تابع دیگر باشد باید از اشتراک دامنه های صورت و مخرج ، ریشه های مخرج را برداریم .

$D_{f\pm g \atop \times} = D_f \cap D_g \qquad , D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x)=۰\}$

مثال ۳۳: دامنه تابع $\sqrt{x+۲}+(x-۱)$ را به دست آورید .

$$f(x)=\sqrt{x+۲} \to D_f = x+۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ = [-۲,+\infty) \ \boxed{I} \qquad g(x)=x-۱ \quad D_g=\mathbb{R} \ \boxed{II}$$

$$\to D_{f+g} = \boxed{I} \cap \boxed{II} = [-۲,+\infty)$$

مثال ۳۴: دامنه $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۵}}+\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{x-۸}}$ را تعیین کنید.

گام ۱:

$$\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۵} \geq ۰ \to \begin{cases} \underbrace{x^۲-۳x+۲}_{(x-۱)(x-۲)}=۰ \Rightarrow x=۱,۲ \\ x-۵=۰ \Rightarrow x=۵ \end{cases}$$

x		۱		۲		۵	
$x^۲-۳x+۲$	+	۰	−	۰	+		+
$(x-۵)$	−		−		−	۰	+
کل عبارت	−	۰	+	۰	−	ت ن	+

مطلوب — مطلوب

$D_۱=[۱,۲]\cup(۵,+\infty)$

گام ۲: $\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{x-۸}} \to x-۸=۰ \Rightarrow x=۸$ ریشه مخرج $\to D_۲=\mathbb{R}-\{۸\}$

گام ۳: کافیه $D_۱, D_۲$ را اشتراک بگذاریم

$$D_f=D_۱\cap D_۲=([۱,۲]\cup(۵,+\infty))\cap(\mathbb{R}-\{۸\})=[۱,۲]\cup(۵,۸)\cup(۸,+\infty)$$

مثال ۳۵: توابع $f(x)=x+۵$, $g(x)=\dfrac{۴x}{x^۲-۷x}$ داده شده اند.

الف) دامنه تابع $\dfrac{g}{f}$ را به دست آورید. ب) حاصل $(f.g)(۱)$ را تعیین کنید .

حل : الف) ابتدا دامنه هر کدام را به دست آوریم.

$$f(x)=x+۵ \to D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{۴x}{x^۲-۷x} \to x(x-۷)=۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۷ \end{cases} \to D_g=\mathbb{R}-\{۰,۷\}$$

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x \mid f(x)=۰\}=\overbrace{\mathbb{R}-\{۰,۷\}\cap\mathbb{R}}^{\mathbb{R}-\{۰,۷\}}-\{x+۵=۰\}=\mathbb{R}-\{۰,۷\}-\{-۵\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}}=\mathbb{R}-\{۰,۷,-۵\}$$

حل : ب)

$$f.g(۱)=f(۱)\times g(۱)=(۱+۵)\times\frac{۴+۱}{۱^۲-۷\times۱}=۶\times\frac{۴}{-۶}=-۴$$

ترکیب دو تابع:

$$\boxed{x} \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} \boxed{f(g(x))} = fog(x)$$

ورودی — خروجی

در بخشهایی که برد $g(x)$ با دامنه $f(x)$ برابر است.

ترکیب دو تابع f, g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می دهیم. دامنه این تابع $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ و ضابطه آن به صورت $fog(x)=f(g(x))$ تعریف می شود .

توضیح بیشتر : اول ورودی‌ها وارد g میشن. g باید بتونه ورودی‌ها رو بپذیره پس اولین شرط اینه که $x\in D_g$ ، حالا x وارد ماشین g می‌شه و خروجی $g(x)$ به دست می آد. $g(x)$ می‌خواد وارد ماشین f بشه. f باید بتونه اون رو بپذیره یعنی شرط دوم اینه که $g(x)\in D_f$. در مسائل باید این دو شرط رو بنویسی و بین اون‌ها اشتراک بگیری و معنی $f(g(x))$ هم اینه که به جای x ها تو f ، تابع $g(x)$ را قرار بدی .

مثال ۳۶: اگر $f(x)=x+a$ ، $g(x)=x^{۲}+bx$ باشد، b,a را طوری تعیین کنید که $fog(x)=x^{۲}+۴x+۱$.

حل :

$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(x^{۲}+bx)=(x^{۲}+bx)+a=x^{۲}+bx+a \\ fog(x)=x^{۲}+۴x+۱ \end{cases} \to x^{۲}+bx+a=x^{۲}+۴x+۱ \Rightarrow \boxed{b=۴},\boxed{a=۱}$$

مثال ۳۷: توابع g,f با ضابطه های $f(x)=۲x-۴$ ، $g(x)=\sqrt{x-۶}$ داده شده اند : الف) ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید .

حل : الف) $gof(x)=g(f(x))=g(۲x-۴)=\sqrt{۲x-۴-۶}=\sqrt{۲x-۱۰}$

حل : ب) ابتدا دامنه هر یک از تابع های g,f را به دست می آوریم .

$$D_f=\mathbb{R} \qquad x-۶\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۶ \Rightarrow D_g=[۶,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲x-۴\geq ۶\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۵\}=[۵,+\infty)$$

مثال ۳۸: توابع $f(x)=\frac{۳x}{x-۱}$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ داده شده اند. الف) تابع fog را تشکیل دهید .

ب) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید . پ) $(\frac{f-g}{۲g})(۴)$ را محاسبه کنید .

حل : الف) $fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

حل : ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۱\} \quad ,D_g=[۰,+\infty) \quad D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۰ \mid \sqrt{x}\neq ۱\}=[۰,+\infty)-\{۱\}$

حل : پ) $(\frac{f-g}{۲g})(۴)=\frac{f(۴)-g(۴)}{۲g(۴)}=\frac{۴-۲}{۲(۲)}=\frac{۱}{۲}$

مثال ۳۹: اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ ، $g(x)=\sqrt{x-۳}$ دو تابع باشند .

الف) مقدار $۳(f-g)(۴)$ را به دست آورید . ب) دامنه‌ی تابع fog را بیابید.

حل : الف) $۳(f-g)(۴)=۳(f(۴)-g(۴))=۳(\frac{۱}{۴-۱}-\sqrt{۴-۳})=۳(\frac{۱}{۳}-۱)=۳\times(\frac{-۲}{۳})=-۲$

حل : ب) ابتدا دامنه g,f را به دست می آوریم : $x-۱=۰\Rightarrow x=۱\to D_f=\mathbb{R}-\{۱\} \qquad x-۳\geq ۰\Rightarrow D_g=x\geq ۳$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۳ \mid \underbrace{\sqrt{x-۳}\neq ۱}_{x\neq ۴}\}\Rightarrow D_{fog}=[+۳,+\infty)-[۴]=[۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$

مثال ۴۰: دو تابع $f(x)=x-۱$ ، $g(x)=\sqrt{x+۲}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع $gof(x)$ را بدون محاسبه‌ی $gof(x)$ به دست آورید. ب) ضابطه $gof(x)$ را به دست آورید.

پ) مقدار $(\frac{f}{g})(۲)$ رامحاسبه کنید.

حل : الف) $D_f=\mathbb{R} \ , \ D_g=[-۲,+\infty)$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-۱\geq -۲\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq -۱\}\Rightarrow D_{gof}=[-۱,+\infty)$$

حل : ب) $g(f(x))=g(x-۱)=\sqrt{x-۱+۲}=\sqrt{x+۱}$

حل : ج) $(\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۱}{۲}$

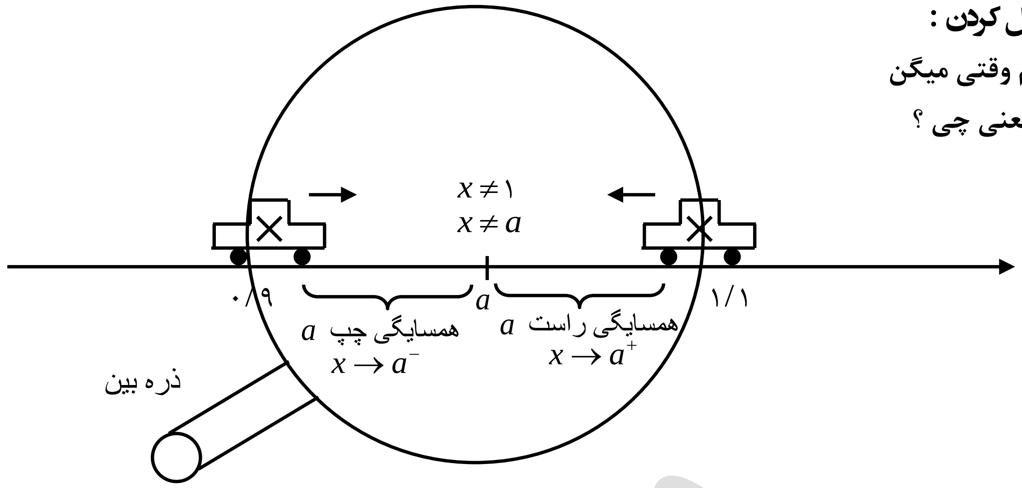
فصل سوم : حد و پیوستگی

معمولاً بارم بندی این فصل در امتحانات ۵ نمره می باشد . ((سوال ۱۰ تا ۱۲))

مفهوم میل کردن :

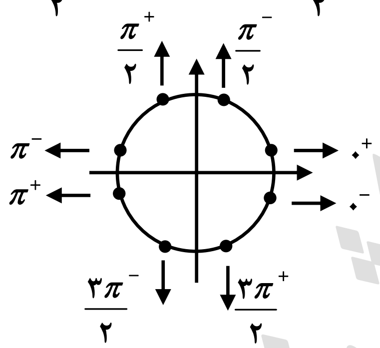
خب ببینم وقتی میگن

$x \to a$ یعنی چی ؟



$x \to a$ یعنی به متغیر x دستور بدهیم به سمت a حرکت کند ولی هیچگاه به آن نمی رسد .

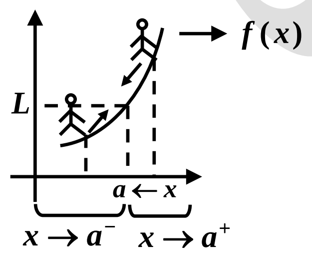
نکته : در دایره مثلثاتی میل کردن ها به صورت زیر است ، مثلاً وقتی می نویسیم $x \to (\frac{\pi}{2})^+$ یعنی کمی از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر است پس باید در خلاف جهت عقربه ساعت $\frac{\pi}{2}$ را رد کرده و بعد بایستیم .



مفهوم حد تابع : اگر تابعی در نقطه‌ای حد های راست و چپ متفاوت داشته باشد در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست در نقطه ای دو عدد برابر باشند تابع در آن نقطه حد دارد و حد همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است و می نویسیم : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

نکته : برای محاسبه حد راست در نقطه $x = a$ از روی نمودار کافیه y های سمت راست a رو از روی شکل بخونیم و برای محاسبه حد چپ در نقطه $x = a$ از روی نمودار کافیه y های سمت چپ a را از روی شکل بخونیم .

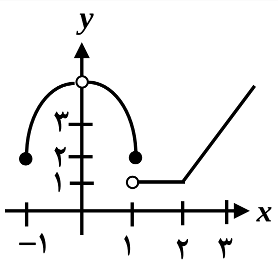
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$



تذکر ما همواره حد را در دامنه تابع مورد بررسی قرار می دهیم. مثلاً اگر مبحث حد تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ در نقطه $x = 1$ باشد در واقع منظور حد چپ تابع f است (اگر در خارج دامنه حد بگیریم گناه کبیره است)

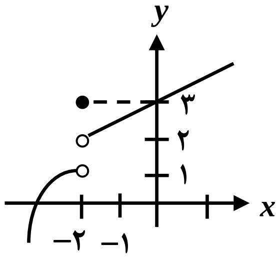
مثال ۱: با استفاده از نمودار تابع f حاصل حد های زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



حل : الف) ۱ ب) ۲ ج) حد ندارد

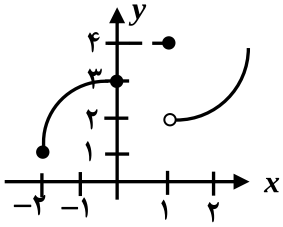
مثال ۲: با استفاده از نمودار زیر عبارت های خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ د) $f(-2)$

حل : الف) ۲+ ب) ۱+ ج) وجود ندارد(چون مقدار حد چپ و راست برابر نیست) د) ۳

مثال ۳: با استفاده از نمودار مقابل ، عبارت خواسته شده را محاسبه کنید.



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - 3\lim_{x\to 0^+} f(x) + f(1)$$

حل : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) - 3\lim\limits_{x\to 0^+} + f(1) = 2 - 3(3) + 4 = -3$

نکته : وقتی که در حدی $x \to a^{\pm}$ میل می‌کرد و عبارت قدرمطلق و چند ضابطه ای نبود برای محاسبه حد یک ضابطه یا عبارت با خیال راحت عدد a را به جای x آن قرار می دهیم و همسایگی راست و چپ را لحاظ نمی کنیم .

مثال ۴: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x+a & x<1 \\ x^2+2x & x\geq 1 \end{cases}$ باشد و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ باشد مقدار a را بیابید.

حل :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \to \lim_{x\to 1^+}(x^2+2x) - \lim_{x\to 1^-}(x+a) = 2 \Rightarrow \left((1)^2+2(1)\right) - (1+a) = 2 \to \boxed{a=0}$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$:

تیپ۱: اگر توی توابع کسری صورت و مخرج، هر دو چند جمله ای بودند برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ابتدا با استفاده از اتحاد ها یا تقسیم عامل ابهام (وقتی $x \to a$ میل می کند منظور از عامل ابهام عبارت $x-a$ می باشد) رو از صورت و مخرج حذف کرده و حد رو محاسبه می کنیم .

تیپ۲: اگر توی توابع کسری صورت و مخرج یا هر دو عبارت رادیکالی بودند در مزدوج شون ضرب و تقسیم می کنیم .

تیپ۳: برای توابع Sin, Tan وقتی کمانشون صفر می شه از دو تا هم ارزی زیر استفاده می کنیم .

$$\lim_{u\to 0}\frac{Sinu}{u}=1 \quad , \quad \lim_{u\to 0}\frac{Tanu}{u}=1$$

چند یادآوری :

$1)(x\mp y)^2 = x^2 \mp 2xy + y^2 \xrightarrow{\text{مثال}} (x\mp 1)^2 = x^2 \mp 2x + 1$

$2)(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y) \xrightarrow{\text{مثال}} x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$3)(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow{\text{مثال}} (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

$4) Cos2x = (Cosx - Sinx)(Cosx + Sinx)$

$5) 1 - Cos2x = 2Sin^2 x$

مثال ۵: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x^2-x-6)}$ ب) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ ت) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{Cos2x}{Cosx - Sinx}$ چ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}$ ح) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-3Cos2x}{x^2}$

خ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sinx.Sin2x.Sin3x}{x^3}$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin4x}{Tan8x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to a}\frac{Sin(x-a)}{x^2-a^2}$

حل :

الف) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x^2-x-6)}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+2)}=\frac{3+3}{3+2}=\frac{6}{5}$$

ب) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{x}=\frac{3+3}{3}=2$$

پ) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x+1-4)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{24}$$

ت) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{1+1+2}{-1-1}=\frac{4}{-2}=-2$$

ث) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ج) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{Cos2x}{Cosx-Sinx}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(Cosx-Sinx)}(Cosx+Sinx)}{\cancel{(Cosx-Sinx)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}Cosx+Sinx=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

چ) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}=\lim_{x\to 0}\frac{2Sin^2x}{xSinx}=\lim_{x\to 0}\frac{2Sinx}{x}=2\times 1=2$$

ح) $$\lim_{x\to 0}\frac{3-3Cos2x}{x^2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{3(1-Cos2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3(2Sin^2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6Sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}6\times\frac{Sinx}{x}\times\frac{Sinx}{x}=6\times 1\times 1=6$$

خ) $$\lim_{x\to 0}\frac{Sinx.Sin2x.Sin3x}{x^3}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}\times\frac{2Sin2x}{2x}\times\frac{3Sin3x}{3x}=1\times 2\times 3=6$$

د) $$\lim_{x\to 0}\frac{Sin4x}{Tan8x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{Sin4x}{4x}\times\frac{8x}{Tan8x}\times\frac{1}{2}=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ذ) $$\lim_{x\to a}\frac{Sin(x-a)}{x^2-a^2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to a}\frac{Sin(x-a)}{x-a}\times\frac{1}{x+a}=1\times\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}$$

حدهای بی‌نهایت: اگر با نزدیک شدن $x\to a$ ، مقدار $f(x)$ به بی نهایت میل کند می نویسیم $\lim_{x\to a}=\infty$ و می توان گفت اگر صورت حد غیر صفر و مخرج صفر (0^+ یا 0^-) باشد حاصل $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد بود .

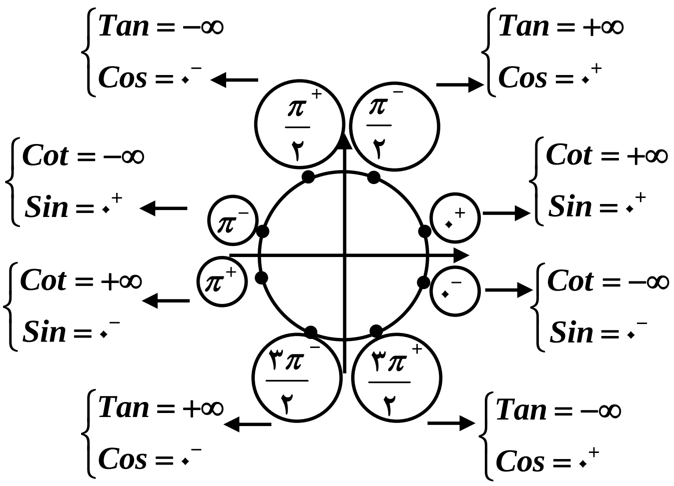
$$\frac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty\ ,\quad \frac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty\ ,\quad \frac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty\ ,\quad \frac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$$

مثال ۶: حدهای راست و چپ تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید.

یادت باشه وقتی $x\to a^+$ بود توی ذهنت (۰/۱) به آن اضافه کنی و وقتی $x\to a^-$ بود توی ذهنت (۰/۱) از آن کم کنی و در پایان اگر حاصل (۰/۱) شد به جای آن 0^+ می‌نویسیم و اگر حاصل (۰/۱−) شد به جای ان 0^- می‌نویسیم مثلاً وقتی $x\to 1^+$ بود و حاصل حد (۰/۱−) را بخواهیم کافیه به جای X عدد ۱/۱ را بگذاریم $\frac{1}{1/1-1}=\frac{1}{0/1}$ و در پایان به جای (۰/۱) عدد 0^+ را می‌گذاریم و حاصل $\frac{1}{0^+}$ خواهد بود.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty\qquad\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

نکته : در دایره مثلثاتی :



مثال ۷ : حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2}{Cosx}$ ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{Sinx}{Cos^2x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{|x-2|}$ ت) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{(3-x)^2}$

حل : الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2}{Cosx}=\frac{2}{0^-}=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{Sinx}{Cos^2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{|x-2|}=\frac{5}{|0^-|}=\frac{5}{0^+}=+\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{(3-x)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

حد در بی‌نهایت: وقتی دو یا چند جمله به صورت جمع و تفریق هستند و همگی ∞ می شوند جمله ای که توان بزرگتری دارد قوی ترین است پس آن را نگه می‌داریم و باقی را حذف می کنیم .

$$a)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+c}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots+c'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & m>n\end{cases}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\sim\sqrt{a}\,|x|$$

تذکر اگر $x\to+\infty$ می رفت در جذر گیری قدر مطلق نیاز نیست ولی اگر $x\to-\infty$ می رفت در جذر گیری بعد از برداشتن قدرمطلق x را در یک منفی ضرب می کنیم .

مثال ۸ : حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^2+7}$ ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{6x+2}}{4x^2+5x}$ پ) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x-\sqrt{x-1})$

ت) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+1}-3\sqrt{x-1})$ ث) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x+1}}{7+5x}$

حل:

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^2+7x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{4x^2}=\frac{3}{4}$

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{6x+2}}{4x^2+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{4x^2}=\frac{3}{4}$

پ) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x-\sqrt{x-1})\sim\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2)=\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+1}-3\sqrt{x-1})=\lim\limits_{x\to\infty}(2\sqrt{x}-3\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}-\sqrt{x}=-\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x+1}}{7+5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+|x|}{5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-x}{5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

مثال ۹: حاصل هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(Sin۲x)Tan(۳x)}{x^۲}$ الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۳x^۲+\sqrt{۴x^۲+۷}}{-۴x^۲+۱۱}$ پ) $\lim\limits_{x\to ۶^-}\dfrac{۴}{(x-۶)^۲}$

حل:

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\underbrace{x^۲-۱۶}_{(x-۴)(x+۴)}}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{(۴+۴)(۲+۲)}=\dfrac{۱}{۳۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(Sin۲x)Tan(۳x)}{x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰}۲\times\dfrac{Sin۲x}{۲x}\times\lim\limits_{x\to ۰}۳\times\dfrac{Tan۳x}{۳x}=۲\times۱\times۳\times۱=۶$

پ) $\lim\limits_{x\to ۶^-}\dfrac{۴}{(x-۶)^۲}=\dfrac{۴}{(۶^- -۶)^۲}=\dfrac{۴}{(۰^-)^۲}=\dfrac{۴}{۰^+}=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۳x^۲+\sqrt{۴x^۲+۷}}{-۴x^۲+۱۱}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۳x^۲}{-۴x^۲}=\dfrac{-۳}{۴}$

قضیه‌ی فشردگی:

اگر تابع f در همسایگی $x=a$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$\left.\begin{cases} g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L\end{cases}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=L$$

مثال ۱۰: اگر به ازای هر x داشته باشیم $۲-x^۲\le g(x)\le ۲Cosx$ ، حد تابع $g(x)$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

حل:

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰}(۲-x^۲)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰}۲Cosx=۲\end{cases}\right\}\xrightarrow{\text{بنا به قضیه‌ی فشردگی}}\lim\limits_{x\to ۰}g(x)=۲$$

مثال ۱۱: اگر $|f(x)|\le ۱-Cosx$ باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to ۰$ را به‌دست آورید.

حل:

$$|f(x)|\le ۱-Cosx\to -(۱-Cosx)\le f(x)\le ۱-Cosx\to \left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰}(۱-Cosx)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰}(Cosx-۱)=۰\end{cases}\right\}\xrightarrow{\text{بنا به قضیه‌ی فشردگی}}\lim\limits_{x\to ۰}f(x)=۰$$

پیوستگی:

اگر تابع f در همسایگی $x=a$ و در یک همسایگی چپ یا راست و یا هر دو طرف آن تعریف شده باشد در صورتی که حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد یعنی : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ در این صورت تابع f در $x=a$ پیوسته است.

تذکر برای حل سؤالات پیوستگی در نقطه‌ای که سؤال گفته‌است حد چپ، حد راست ومقدار تابع را به‌دست آورید و هر ۳ را با هم برابر می‌گذاریم.

مثال ۱۲: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-ax+۱ & x\le ۱\\ x+۲ & x>۱\end{cases}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته نباشد.

حل:

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}x^۲-ax+۱=۱-a+۱=۲-a=f(۱)\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}x+۲=۳\end{cases}\right\}۲-a=۳\Rightarrow \boxed{a=-۱}$$

مثال ۱۳: مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}-4x+a & x>-1\\ -6x & x=-1\\ x^2-5x & x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ پیوسته باشد.

حل:

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-4(-1)+a=4+a\\ f(-1)=-6(-1)=6\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=(-1)^2-5(-1)=6\end{cases}\right\}\to 4+a=6\Rightarrow \boxed{a\neq 2}$$

مثال ۱۴: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2} & x<2\\ -1 & x=2\\ 3-x^2 & x>2\end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ بررسی کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 3-x^2=3-4=-1\\ f(-1)=-1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=-1$$

تابع f در $x=2$ پیوسته است

مثال ۱۵: عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-1$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}ax^2+2 & x>-1\\ 5 & x=-1\\ -3x+b & x<-1\end{cases}$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -3x+b=3+b\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} ax^2+2=a+2\\ f(-1)=5\end{array}\right\}\to 3+b=5\Rightarrow \boxed{b=2},\ a+2=5\Rightarrow \boxed{a=3}$$

کوه بلندی بود که لانه عقابی با چهار تخم، بر بلندای آن قرار داشت. یک روز زلزله ای کوه را به لرزه درآورد و باعث شد که یکی از تخم ها از دامنه کوه به پایین بلغزد. برحسب اتفاق آن تخم به مزرعه ای رسید که پر از مرغ و خروس بود. مرغ و خروس ها می دانستند که باید از این تخم مراقبت کنند و بالاخره هم مرغ پیری داوطلب شد تا روی آن بنشیند و آن را گرم نگهدارد تا جوجه به دنیا بیاید. یک روز تخم شکست و جوجه عقاب از آن بیرون آمد. جوجه عقاب مانند سایر جوجه ها پرورش یافت و طولی نکشید که جوجه عقاب باور کرد که چیزی جز یک جوجه خروس نیست.

او زندگی و خانواده اش را دوست داشت اما چیزی از درون او فریاد می زد که تو بیش از این هستی. تا این که یک روز که داشت در مزرعه بازی می کرد متوجه چند عقاب شد که در آسمان اوج می گرفتند و پرواز می کردند. عقاب آهی کشید و گفت: ای کاش من هم می توانستم مانند آنها پرواز کنم. مرغ و خروس ها شروع کردند به خندیدن و گفتند: تو خروسی و یک خروس هرگز نمی تواند بپرد. اما عقاب همچنان به خانواده واقعی اش که در آسمان پرواز می کردند خیره شده بود و در آرزوی پرواز به سر می برد. اما هر موقع که عقاب از رویایش سخن می گفت به او می گفتند: که رویای تو به حقیقت نمی پیوندد و عقاب هم کم کم باور کرد. بعد از مدتی او دیگر به پرواز فکر نکرد و مانند یک خروس به زندگی ادامه داد و بعد از سالها زندگی خروسی، از دنیا رفت .

نتیجه : تو همانی که می اندیشی، هرگاه به این اندیشیدی که تو یک عقابی، به دنبال رویا هایت برو و به یاوه های مرغ و خروسهای اطرافت فکر نکن.

فصل چهارم : مشتق

معمولاً بارم بندی این فصل در امتحانات نهایی ۴ نمره می‌باشد. ((سؤال ۱۳ تا ۱۵))

فرمول‌های تعریف مشتق دریک نگاه :

اگر بخواهیم با استفاده از تعریف مشتق، مشتق یک تابع را در یک نقطه‌ی مشخص پیدا کنیم، فرمول شماره‌ی (I) مناسب است ولی اگر بخواهیم با استفاده از تعریف مشتق، ضابطه‌ی مشتق تابع را اثبات کنیم فرمول (II) مناسب‌تر است.

$$\text{شیب خط مماس بر تابع } f \text{ در نقطه‌ی } x=a = f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (I)$$

$$\text{شیب خط مماس بر تابع } f \text{ در نقطه‌ی } x=a = f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (II)$$

نکته : اگر در استفاده از تعریف مشتق به حد $\frac{۰}{۰}$ رسیدیم باید آن را با روش‌های گفته شده رفع ابهام کنیم.

مثال ۱: با استفاده از تعریف مشتق (به وسیله‌ی فرایند حد)، مشتق هریک از توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

الف) $f(x)=x^۲ \qquad (x=۵)$

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۲۵}{x-۵}=\frac{۰}{۰}\to \lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{(x-۵)}(x+۵)}{\cancel{(x-۵)}}=(۵+۵)=۱۰\Rightarrow f'(۵)=۱۰$$

ب) $f(x)=\sqrt{x} \qquad (x=۹)$

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(۹)=\lim_{x\to ۹}\frac{f(x)-f(۹)}{x-۹}\to \lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۹}}{x-۹}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\times\ \text{مزدوج}}\left(\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}\right)$$

$$\to \lim_{x\to ۹}\frac{\cancel{x-۹}}{\cancel{(x-۹)}(\sqrt{x}+۳)}=\lim_{x\to ۹}\frac{۱}{(\sqrt{x}+۳)}=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow f'(۹)=\frac{۱}{۶}$$

پ) $f(x)=۳x^۲+۴x$

حل:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\to f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to \lim_{h\to ۰}\frac{(۳(x+h)^۲+۴(x+h))-(۳x^۲+۴x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{۳x^۲}+۶xh+۳h^۲+\cancel{۴x}+۴h-\cancel{۳x^۲}-\cancel{۴x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۶x+۳h+۴)}{\cancel{h}}=۶x+۴$$

قواعد مشتق گیری: (u,v,w... توابعی از x هستند و a,b عدد ثابت است)

۱
$$\begin{cases} y=a \longrightarrow y'=0 \\ y=5 \longrightarrow y'=0 \\ y=ax+b \longrightarrow y'=a \\ y=3x+7 \longrightarrow y'=3 \\ y=x^n \longrightarrow y'=nx^{n-1} \\ y=x^7 \longrightarrow y'=7x^6 \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} y=u\times v \longrightarrow y'=(u'\times v)+(v'\times u) \\ y(x^2+1)(x^3) \longrightarrow y'=(2x)(x^3)+(3x^2)(x^2+1) \\ y=\dfrac{u}{v} \longrightarrow y'=\dfrac{(u'\times v)-(v'\times u)}{v^2} \\ y=\dfrac{2x^2}{(4x+7)'} \longrightarrow y'=\dfrac{((4x)(4x+7)-((4)(4x))}{(4x+7)^2} \end{cases}$$

۴
$$\begin{cases} y=\sqrt[n]{u} \longrightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y=\sqrt[7]{(x^2+1)} \longrightarrow y'=\dfrac{2x}{7\sqrt[7]{(x^2+1)^6}} \\ y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \\ y=\sqrt{(x^3+1)} \longrightarrow y'=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{(x^3+1)}} \end{cases}$$

۵
$$\begin{cases} y=aSinu \longrightarrow y'=au'\times Cosu \\ y=2Sin(x^3+1) \longrightarrow (2\times 3x^2)\times Cos(x^3+1) \\ y=aCosu \longrightarrow y'=-au'\times Sinu \\ y=7Cos(x^3+1) \longrightarrow y'=-7(3x^2)\times Sin(x^3+1) \\ y=aTanu \longrightarrow y'=+au'\times(1+Tan^2u) \\ y=9Tan(x^3+1) \longrightarrow y'=9\times(3x^2)(1+Tan^2(x^3+1)) \\ y=aCotu \longrightarrow y'=-au'(1+Cot^2u) \\ y=4Cot(x^3+1) \longrightarrow y'=-4(3x^2)(1+Cot^2(x^3+1)) \end{cases}$$

۶
$$\begin{cases} y=aSin^mu \longrightarrow y'=ma\times(u'Cosu)\times Sin^{m-1}u \\ y=7Sin^4(x^2+1) \longrightarrow y'=(4\times 7)\times(2xCos(x^2+1))\times Sin^3(x^2+1) \\ y=aCos^mu \longrightarrow y'=ma\times(-u'Sinu)\times Cos^{m-1}u \\ y=9Cos^7(x^2+1) \longrightarrow y'=(7\times 9)\times(-(2xSin(x^2+1))\times Cos^6(x^2+1) \\ y=aTan^mu \longrightarrow y'=ma\times u'(1+Tan^2u)\times(Tan^{m-1}u) \\ y=7Tan^4(x^2+1) \longrightarrow y'=(4\times 7)\times((2x)(1+Tan^2(x^2+1))\times Tan^3(x^2+1)) \\ y=aCot^mu \longrightarrow y'=ma\times(-u'\times(1+Cot^2u))\times Cot^{m-1}u \\ y=7Cot^4(x^2+1) \longrightarrow y'=(4\times 7)\times(-2x\times(1+Cot^2(x^2+1))\times Cot^3(x^2+1) \end{cases}$$

نکته : $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

مثال ۲: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید : (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=(2x-1)^6+\sqrt{x}$

حل: $f'(x)=(6\times 2)(2x-1)^5+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ب) $f(x)=Sin(3x-5)-2\sqrt{x+2}+(3x+2)^4$

حل: $f'(x)=((3\times Cos(3x-5))-\left(2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)+\left(4\times 3\times(3x+2)^3\right)$

پ) $f(x)=3\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[5]{x}$

حل: $f'(x)=۳\times x^{\frac{۳}{۴}}-۲\times x^{\frac{۱}{۵}}\rightarrow f'(x)=\left((۳\times\frac{۳}{۴})x^{-\frac{۱}{۴}}\right)-\left(۲\times\frac{۱}{۵}\times x^{-\frac{۴}{۵}}\right)=\frac{۹}{۴}x^{-\frac{۱}{۴}}-\frac{۲}{۵}x^{-\frac{۴}{۵}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۹}{۴}\times\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}}-\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۴}}$

ت) $f(x)=(۳x^۴-۲x+۱)(x^۳+۱)$

حل: $f'(x)=\left((۱۲x^۳-۲)(x^۳+۱)\right)+(۳x^۲)\left((۳x^۴-۲x+۱)\right)$

ث) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲+۳x}$

حل: $g'(x)=\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(x^۲+۳x)-(۲x+۳)(\sqrt{x}-۱)}{(x^۲+۳x)^۲}$

چ) $f(x)=\dfrac{۳}{x^۲+۴x}$

حل: $f'(x)=\dfrac{۰\times(x^۲+۴x)-(۲x+۴)(۳)}{(x^۲+۴x)^۲}=\dfrac{-۳(۲x+۴)}{(x^۲+۴x)^۲}$

ح) $f(x)=\sqrt{x+۱}+\left(\dfrac{۱}{x+۱}\right)$

حل: $f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}+\dfrac{۰\times(x+۱)-(۱)(۱)}{(x+۱)^۲}$

خ) $f(x)=\left(\sqrt{۵-۷x}\right)\left(۴-\dfrac{x}{۳}\right)$

حل: $f'(x)=\dfrac{-۷}{۲\sqrt{۵-۷x}}\times\left(۴-\frac{x}{۳}\right)+\left(-\frac{۱}{۳}\times\sqrt{۵-۷x}\right)$

د) $f(x)=Tanx-۲Cos^۳(۲x)$

حل: $f'(x)=(۱+Tan^۲x)-(-۲\times۳\times۲\times Sin(۲x)\times Cos^۲(۲x))=(۱+Tan^۲x)+(۱۲Sin(۲x)\times Cos^۲(۲x))$

ذ) $f(x)=Sin^۳(۲x)-Cos(x^۲)$

حل: $f'(x)=۳\times۲\times Cos(۲x)\times Sin^۲(۲x)-(-۲x)\times(Sinx^۲)\rightarrow f'(x)=۶Cos(۲x)\times Sin^۲(۲x)+۲x(Sinx^۲)$

ر) $f(x)=Tan^۳(۲x)-۲Cotx$

حل: $f'(x)=\left(۳\times۲\times(۱+Tan^۲(۲x))\times Tan^۲۲x\right)-۲\left(-(۱+Cot^۲x)\right)\rightarrow f'(x)=\left(۶\times(۱+Tan^۲۲x)\times Tan^۲۲x\right)+۲\left(۱+Cot^۲x\right)$

ز) $f(x)=Cot(۶x)\times Sinx$

حل: $f'(x)=-۶\times\left(۱+Cot^۲x\right)\times Sinx+Cosx\times Cot(۶x)$

نکته ۱: اگر در سؤالی شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی $x=a$ را خواستند یعنی اول از تابع مشتق بگیریم و در مشتق به جای x مقدار a را قرار دهیم.

نکته۲: اگردامنه مشتق‌پذیری را از ما خواستند (معمولاً در توابع رادیکالی) کافیست دامنه‌ی مشتق تابع را به‌دست آوریم.

مثال ۴: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۲-x$ را در نقطه‌ی $x=۵$ به‌دست آورید.

حل: مشتق به ازای طول نقطه‌ی تماس برابر است با شیب خط مماس یعنی $f'(x)=۲x-۱\xrightarrow{x=۵}m=f'(۵)=(۲\times۵)-۱=۹$

مثال ۵: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۳-x+۵$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به‌دست آورید.

حل: $y'=۳x^۲-۱\xrightarrow{x=۱}m=y'(۱)=۳(۱)-۱=۲$

مثال ۶: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=x^۳-۲x$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به‌دست آورید.

حل: $y'=۳x^۲-۲\xrightarrow{x=۱}m=y'(۱)=۳-۲=۱$

مثال ۷: شیب خط مماس بر نمودار تابع $\dfrac{۱}{x}$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به‌دست آورید.

حل: شیب خط مماس برابر با -1 است $y=\frac{1}{x} \to y'=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow m=y'(1)=\frac{-1}{1}=-1$

مثال ۸: دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ را به‌دست آورید.

حل: پس دامنه‌ی مشتق‌پذیری $x-2>0$ می‌باشد $D_{f'}=(2,+\infty)$ $\quad f(x)=\sqrt{x-2} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

مثال ۹: دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را به‌دست آورید.

حل: $\longleftarrow$ دامنه‌ی مشتق‌پذیری $x>0$ می‌باشد یعنی $(0,+\infty)$ $\quad f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال ۱۰: اگر $y=Sin^3u$ و $u=\frac{\pi}{x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ وقتی $x=3$ باشد را محاسبه کنید.

حل: دقت کن که اول باید توی تابع $y=Sin^3u$ به جای u مقدار $u=\frac{\pi}{x}$ رو قرار بدی بعد مشتق بگیری $\frac{dy}{dx}$ همون y' می‌باشد:

$$y=Sin^3u \xrightarrow{u=\frac{\pi}{x}} y=Sin^3\left(\frac{\pi}{x}\right) \to y'=3\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)Cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\times Sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow{x=3} y'=3\times\frac{-\pi}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-\pi}{8}$$

آهنگ متوسط ولحظه‌ای:

اگر تابع f در بازه‌ی $[t_1,t_2]$ تعریف شده باشد آنگاه $\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ را آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی $[t_1,t_2]$ می‌گویند. اگر تابع f در $t=t_0$ تعریف شده باشد و مشتق آن موجود باشد آنگاه $f'(t_0)$ را آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر تابع f در $t=t_0$ می‌گویند.

هرگاه تابع $f(x)$ و ۲ نقطه $x_1=a$ و $x_2=b$ را به ما دادند ، آهنگ متوسط تغییر را خواستند از فرمول $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۱: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را وقتی متغیر از $x_1=3$ به $x_2=8$ تغییر می‌کند بیابید.

حل: هر گاه آهنگ آنی را در یک نقطه خواستند از تابع مشتق می‌گیریم و بعد نقطه را در مشتق قرار می‌دهیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(8)-f(3)}{8-3}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

مثال ۱۲: معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=\frac{1}{2}t^2-3t+1$ می‌باشد :

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=4$ به‌دست آورید.

حل:
$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)+1\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2-3(0)+1\right)}{4}=\frac{(8-12+1)}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

ب) آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t=7$ بیابید.

حل:
$$f(t)=\frac{1}{2}t^2-3t+1 \to f'(t)=t-3 \xrightarrow{t=7} f'(7)=4$$

پ) در چه لحظه‌ای متحرک متوقف می‌شود؟

حل: در لحظه‌ی $t=3$ متوقف می‌شود $\quad f(t)=\frac{1}{2}t^2-3t+1 \to f'(t)=t-3 \xrightarrow{f'(t)=0} t-3=0 \Rightarrow \boxed{t=3}$

مثال ۱۳: اگر $p(t)=3000+100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت)

الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از $t_0=2$ به‌دست آورید.

حل: لحظه‌ی شروع ۲ است و ۵ ساعت بعد ۷

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{p(۷)-p(۲)}{۷-۲}=\frac{۷۹۰۰-۳۴۰۰}{۵}=\frac{۴۵۰۰}{۵}=۹۰۰$$

ب) آهنگ لحظه‌ای جمعیت را در $t=۳$ به‌دست آورید.

حل:

$$p'(t)=۲۰۰t\xrightarrow{t=۳}p'(۳)=۶۰۰$$

این تمام چیزی بود که می‌خواستیم بگیم، نه تمام آنچه که می تونستیم بگیم.

پادشاهی دیدکه خدمتکاری بسیار شاد است، از او علت شاد بودنش را پرسید. خدمتکار گفت: قربان همسر و فرزندی دارم و غذایی برای خوردن و لباسی برای پوشیدن و بدین سبب من راضی و شادم. پادشاه موضوع را به وزیر گفت. وزیر هم گفت:

قربان چون او عضو گروه نودونه نیست بدان جهت شاد است،

پادشاه پرسید گروه نودونه دیگر چیست؟

وزیر گفت: قربان یک کیسه برنج را با نودونه سکه طلاجلو خانه وی قرار دهید، و چنین هم شد. خدمتکار وقتی به خانه برگشت با دیدن کیسه وسکه ها بسیار شادشد و شروع به شمردن کرد، نودونه سکه ؟ و بارها شمرد و تعجب کرد که چرا صد تا نیست، همه جا را زیر و رو کرد ولی اثری از یک سکه نبود.

او ناراحت شد و تصمیم گرفت از فردا بیشتر کار کند تا یک سکه طلای دیگر پس انداز کند، او از صبح تا شب سخت کار میکرد، و دیگر خوشحال نبود. وزیر هم که با پادشاه او را زیر نظر داشت گفت : قربان او اکنون عضو گروه نودونه است و اعضای این گروکسانیند که زیاد دارند اما شاد و راضی نیستند.

خوشبختی در سه جمله است: تجربه از دیروز ، استفاده از امروز، امید به فردا. ولی ما با سه جمله دیگر زندگی را تباه میکنیم: حسرت دیروز ، اتلاف امروز ، ترس از فردا.

اطلاع از کلاس های رایگان شب امتحان :

تطابق ۲۰ نمره ی سوالات امتحانات نهایی و تطابق ۱۰۰ درصدی سوالات کنکور ۹۵ با کتاب و جزوات تالیفی مهندس مجتبی لشینی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضی۳**	رشته : **علوم تجربی**	ساعت شروع: **۸صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
نام و نام خانوادگی :	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۳/۳	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۵**			مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
	توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلا مانع است	
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) اگر اعضای S قابل شمارش باشد، آن را یک فضای نمونه ای گسسته می نامیم. ب) در پرتاب دو سکه با هم، پیشامد آن که دقیقاً یک بار " رو " بیاید برابر است با $A=\{(P,R),(R,P)\}$ ج) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A\cap B\neq \phi$ در این صورت آن ها را دو پیشامد ناسازگار می نامیم. د) اگر $A=(0,1)$ و $B=(-1,1]$ آن گاه $A\cup B=(-1,1)$	۱
۲	اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A)=\frac{2}{5}$ و $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ آن گاه $P(B')$ را به دست آورید.	۱
۳	از بین ۶ دانش آموز سال دوم و ۵ دانش آموز سال سوم می خواهیم یک تیم ۳ نفره تشکیل دهیم. احتمال هر یک از پیشامد های زیر را به دست آورید. الف) فقط دو دانش آموز از سال دوم باشند. ب) حداقل دو دانش آموز از سال سوم باشند.	۱/۵
۴	در یک تیم والیبال ۶ نفره، چقدر احتمال دارد که هیچ دو نفری در یک روز از سال متولد نشده باشند؟ (سال را ۳۶۵ روز بگیرید.)	۰/۷۵
۵	اگر $x=2$ یک جواب معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{2x^2}{a+x}$ باشد، الف) a را تعیین کنید. ب) به ازای $a=0$ ریشهٔ دیگر این معادله را در صورت وجود به دست آورید.	۱/۲۵
۶	فرض کنید $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ و α زاویه ای منفرجه باشد، عبارت $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۷	اگر $f(x)=\begin{cases} ax-3 & x<0 \\ 2bx^2+5 & x\geq 0\end{cases}$، a و b را طوری بیابید که نمودار تابع f از نقطهٔ $A(2,-3)$ بگذرد و داشته باشیم : $f(-2)=3$	۱
۸	نمودار تابع $y=-2\|x-3\|$ را رسم کنید.	۱
۹	دو تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنهٔ gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) تابع $P(x)=f(x)+g(x)$ را به دست آورید.	۲/۲۵
۱۰	در صورتی که $f(x-3)=\frac{x+5}{x-1}$، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را حساب کنید.	۰/۷۵
۱۱	هر یک از حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}+x}{x^2-4}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-2}{\sin x}$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-6x+\sqrt{x+1}}{3x-\sqrt{4x^2-1}}$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\cos 4x\sin 2x}$	۳
۱۲	عدد های a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\|x\|+ax}{x} & x<0 \\ 2 & x=0 \\ x^3+4b & x\geq 0\end{cases}$ در نقطهٔ $x_0=0$ پیوسته باشد.	۱/۲۵
۱۳	اگر $P(t)=2000+500t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت)، الف) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۴ ساعت اول پس از زمان $t_0=1$ به دست آورید. ب) آهنگ لحظه ای افزایش جمعیت را در $t=2$ به دست آورید.	۱/۲۵
۱۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=\sqrt{\frac{2x-4}{x+5}}$ ب) $g(x)=(1+\sin 3x)^4\times\tan(\frac{1}{x})$	۲/۲۵
۱۵	دامنهٔ مشتق پذیری تابع $f(x)=2x+\sqrt{x}$ را مشخص کنید.	۰/۵
	" موفق باشید " جمع نمره	۲۰

تطابق ۲۰ نمره ای سوالات امتحان نهایی خرداد ۹۵ با کتاب آمپول ریاضی ۳ تالیف مهندس لشینی

ردیف	سؤال و نکته مطابق در کتاب آمپول	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) عینا در درسنامه صفحه ۸ کتاب آمپول ریاضی ۳ و مشابه جزوه تمرینات ب) عینا در درسنامه صفحه ۸ کتاب آمپول ریاضی ۳ و مشابه جزوه تمرینات ج) عینا در درسنامه صفحه ۱۳ کتاب آمپول ریاضی ۳ و مشابه جزوه تمرینات د) مشابه مثال ۱ در صفحه ۱۷ کتاب آمپول ریاضی ۳	۰/۵
۲	مشابه مثال ۳۰ در صفحه ۱۳ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱/۲۵
۳	مشابه مثال ۱۹ و ۲۰ در صفحه ۱۱ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱
۴	مشابه مثال ۲۱ در صفحه ۱۱ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱/۲۵
۵	مشابه مثال ۷ در صفحه ۱۹ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱/۲۵
۶	مشابه مثال ۱۴ در صفحه ۲۲ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱
۷	مشابه مثال ۳۱ در صفحه ۲۸ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱
۸	مشابه مثال ۲۶ در صفحه ۲۶ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱/۵
۹	مشابه مثال ۳۷ در صفحه ۲۹ کتاب آمپول ریاضی ۳	۲/۲۵
۱۰	مشابه نکته موجود در درسنامه صفحه ۳۲	۱
۱۱	تمامی چهار بخش در کتاب آمپول ریاضی ۳ موجود است الف) مثال ۵ صفحه ۳۳ بخش پ ب) صفحه ۳۵ نکته و دایره کشیده شده ج)مثال ۸ صفحه ۳۵ بخش ب ت) مثال ۵ صفحهه ۳۳ بخش د	۳
۱۲	مشابه مثال ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ در صفحه ۳۷ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱
۱۳	مشابه مثال ۱۳ در صفحه ۴۳ کتاب آمپول ریاضی ۳	۱/۲۵
۱۴	هر دو بخش مشابه مثال ۲ و مثال های داخل درسنامه در صفحه ۴۰ و ۴۱ کتاب آمپول می باشند.	۲/۲۵
۱۵	مشابه مثال ۹ در صفحه ۴۲ کتاب آمپول ریاضی ۳ می باشد.	۰/۵
		۲۰

جهت ثبت نام در کلاس ها ،دریافت کتاب و مشاهده فایل تطابق کنکور به آموزشگاه مراجعه کنید.

کلمه استاد لشینی را در گوگل جستجو کنید.

جهت اطلاع و شرکت در کلاس های رایگان شب امتحان و دریافت لوح های فشرده رایگان این کتاب در کانال تلگرام مهندس لشینی عضو شوید.

مهندس مجتبی لشینی

مدرس ریاضیات تجربی کنکور

یکی از برترین و نتیجه گرا ترین اساتید ریاض تجربی کنکور کل کشور

رتبه ۷۰ کشوری کارشناسی ارشد در گرایش هوش مصنوعی

مدرس مدارس تیزهوشان علامه حلی و فرزانگان و دارای درصد ۱۰۰ در کنکور سراسری ۹۵

مدرس آموزشگاه های بزرگ تهران و استاد پروازی شهرستانهای بزرگ کشور از جمله خبرگان .اندیشه ها(سعادت آباد) . سرای علم (شرق) ، همگامان (شهریار) ، قلم چی، خواجه نصیر، ابوریحان اراك(تخته سیاه سابق)، فروغ علم قم. آبادان (آموزشگاه جهانیان) ، امیدیه (گزینه ۲) ، سمنان (گنجینه دانش) و ....

طراح آزمون های آزمایشی قلم چی ،تراز،خبرگان و ..

مدرس لوح های فشرده موسسه پرش

مدرس شبکه آموزش

دارای ۵۰ رتبه زیر ۱۰۰۰ در سه سال اخیر کنکور سراسری(۹۵-۹۳)

مولف پرفروش ترین جزوات کنکوری

مولف کتاب سوت پایان کنکور تجربی انتشارات بیست

مولف کتاب آمپول ریاضی ۳ انتشارات بیست (با تطابق ۲۰ نمره ای)

مولف کتاب ریاضیات دهم انتشارات بیست

مولف کتابچه های جمع بندی انتشارات پرش

برگزار کننده برترین همایش های پایه و کنکور در سراسر کشور

دارای برترین تکنیکی ترین جزوات کنکوری با تطابق ۱۰۰ درصدی با سوالات کنکور سراسری

کلمه " استاد لشینی" را در گوگل جستجو کنید.