فصل ۱

احتمال

تیپ‌بندی سؤالات فصل اول (از سؤال ۱ تا ۴ امتحان نهایی) [۴ نمره]

طراحان محترم از بین تیپ‌های زیر چهار تا رو انتخاب می‌کنن و سؤال می‌دن!

تیپ ۱ : فضای نمونه‌ای

فضای نمونه‌ای یعنی مجموعه‌ای که شامل همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش باشه و با S *بزرگ نشونش می‌دیم. اگه اعضای* S *قابل‌شمارش باشن بهش می‌گن فضای نمونه‌ای گسسته. حالا می‌خوام فضای نمونه‌ای‌های مهم و معروف که نیازتون رو برطرف کنه بهتون بگم؛ فضای نمونه ایه ؛*

الف) n *بار پرتاب یک سکه یا یک بار پرتاب* n *سکه؛* $n(S)=۲^n$ *ب)* n *بار پرتاب یک تاس یا یک بار پرتاب* n *تاس؛* $n(S)=۶^n$

ج) پرتاب n *تاس و* m *سکه؛* $n(S)=۶^n\times ۲^m$ *د) خانواده‌ی* n *فرزندی؛* $n(S)=۲^n$

یه فرزندی؛ $S=\{b,g\}\ ,(boy\ \&\ girl)\Rightarrow n(S)=۲^۱=۲$

دو فرزندی: $S=\{(bb),(bg),(gb),(gg)\}\Rightarrow n(S)=۲^۲=۴$

سه فرزندی:

یک حالت سه حالت سه حالت یک حالت

$$S=\{(g,g,g)\ ,\ (g,g,b)\ ,\ (g,b,b)\ ,\ (b,b,b)\}\quad\Rightarrow\quad n(s)=۲^۳=۸$$

چهار فرزندی:

$$S=\{\underbrace{(bbbb)}\ ,\ \underbrace{(bbbg)}\ ,\ \underbrace{(bbgg)}\ ,\ \underbrace{(gggb)}\ ,\ \underbrace{(gggg)}\}\quad\Rightarrow\quad n(s)=۲^۴=۱۶$$

یک حالت $\boxed{\frac{۴!}{۳!}=۴}$, $\boxed{\frac{۴!}{۲!\,۲!}=۶}$, $\boxed{\frac{۴!}{۳!}=۴}$ یک حالت

۱. **خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است:** **(نهایی هماهنگ کشوری دی ماه ۸۹)**

الف) فضای نمونه‌ای فرزندان این خانواده را مشخص کنید.

ب) پیشامد آن‌که حداقل دو فرزند این خانواده پسر باشد را نوشته و احتمال آن را محاسبه کنید.

ببینیم فضای نمونه‌ای چی‌می‌شه؟ خانواده ۴ فرزندست پس داریم: $n(S)=۲^۴=۱۶$

پیشامد این‌که حداقل ۲ تا از فرزندها پسر باشن می‌شه یا دو تا پسر،یا سه تا پسر و یا هر چهار تا پسر یعنی اینجوری :

$\{\underbrace{(bbgg)}\ ,\ \underbrace{(bbbg)}\ ,\ \underbrace{(bbbb)}\}=S$ که بر اساس درسی که همین الان بهت دادم میشه ۱۱ حالت و احتمالشم میشه :

$$n(A)=۱۱\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

تیپ ۲ : تعریف پیشامد تصادفی و انواع آن

به زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای پیشامد می‌گن. پیشامدها رو هم با حروف بزرگ نشون می‌دن.مثلاً تو پرتاب یه سکه پیشامدها، زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌هستن یعنی زیر مجموعه‌ی $\{ر،پ\}$*.پس مجموعه‌ی پیشامدها رو با هم ببینیم؛* $\{\{ر،پ\}\text{و}\{ر\}\text{و}\{پ\}\ \text{و}\ \{\}\}$

تعداد پیشامدها می‌شه؛ $۲^{n(s)}$*. اگه پیشامدهای مثال بالا رو از* $A_۱$ *تا* $A_۴$ *نامگذاری کنیم به پیشامد* $A_۱=\{\}$*، نشدنی و به پیشامد* $A_۴=S=\{ر،پ\}$*، متمی می‌گن ! زمانی می‌گیم یه پیشامد رخ داده که نتیجه‌ی آزمایش یکی از اعضای اون باشه. پیشامد نشدنی احتمال وقوعش صفره و پیشامد متمی همون فضای نمونه‌ایه که احتمال وقوعش صددرصده!*

۲. **دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم:** **(نهایی هماهنگ کشوری دی ماه ۸۹)**

الف) فضای نمونه‌ای مناسب را بنویسید. **ب) پیشامد A که فقط دو بار رو بیاید.**

الف) فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تا سکه می‌شه $n(S)=۲^۲=۴$، پس اعضای فضای نمونه‌ای رو هم مشخص می‌کنیم:

$$S=\{(ر،پ),(ر،ر),(ر،ر),(پ،پ)\}$$

ب) پیشامد این‌که هر دو سکه رو بیاد هم می‌شه:

$$A=\{(ر،ر)\}$$

تیپ ۳ : خود احتمال!

اگه A *یه پیشامد از فضای نمونه‌ای* S *باشه، احتمال وقوع پیشامد* A *رو با* $P(A)$ *نشون می‌دیم.*

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد }A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای }S}=\frac{\text{تعداد مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

از اون‌جایی که هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ایه پس داریم؛

$$A\subset S\ \Rightarrow\ ۰\le n(A)\le n(S)\ \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{طرفین را بر }n(S)}\ \frac{۰}{n(S)}\le\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(s)}{n(s)}\ \Rightarrow\ ۰\le P(A)\le ۱$$

متمم پیشامد A

متمم پیشامد $\mathbf{A}$ را با A' و یا $\bar{A}$ نشون می‌دیم. این پیشامد در صورتی رخ می‌ده که $\mathbf{A}$ رخ نده!

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

در احتمالات بین پیشامد $\mathbf{A}$ و A' رابطه‌ی روبرو برقراره:

از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد سؤال زیاد باشه. در این صورت متمم پیشامد را نوشته، احتمال وقوع آن‌را محاسبه می‌کنیم و حاصل رو از ۱ کم می‌کنیم.

تیپک ۱ : احتمال و خانواده:

مسئله‌های خانوادگی تو احتمال زیاد مطرح می‌شه. خواست به فضای نمونه‌ای تولد بچه‌ها باشه.

اگه حالت خاص ازت خواست حتماً پیشامد رو به طور کامل بنویس. مثلاً اگه گفت تو خانواده‌ی ۵ فرزندی احتمال سه تا پسر و دو تا دختر سریع بنویس:

$$\begin{cases} \text{صورت}: (bbbgg) = \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۰ \\ \text{مخرج}: n(S) = ۲^۵ \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۲^۵}$$

۳. **در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی احتمال آن‌که تعداد پسرها بیش‌تر از تعداد دخترها باشد، کدام است؟**

اول فضای نمونه‌ی ۴ تا بچه: $۱۶ = ۲^۴$ ، حالا گفته پسرا بیش‌تر باشن یعنی:

$$\left.\begin{array}{ll} ۳ \text{ تا پسر، یه دختر}: bbbg & \frac{۴!}{۳!} = ۴ \\ \text{یا } (+) & \\ \text{هر ۴ تا پسر}: bbbb & ۱ \text{ حالت} \end{array}\right\} \Rightarrow ۵ \text{ حالت} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۶}$$

۴. **احتمال آن‌که در یک خانواده‌ی ۴ فرزندی ۲ فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس و دو فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف داشته باشند چقدر است؟**

اول فضای نمونه‌ی کل خانواده: $۱۶ = ۲^۴$ ، حالا میگه ۲ تا بزرگ‌ترا هم‌جنس و ۲ تا کوچیک‌ترا مختلف‌الجنس (!)،

۲ تا حالت پیش میاد:

$$\left.\begin{array}{ll} ۲ \text{ تا بزرگا پسر باشن}: \begin{cases} bb & bg \\ bb & gb \end{cases} & \Rightarrow ۲ \text{ حالت} \\ ۲ \text{ تا بزرگا دختر باشن}: \begin{cases} gg & bg \\ gg & gb \end{cases} & \Rightarrow ۲ \text{ حالت} \end{array}\right\} \Rightarrow ۴ \text{ حالت} \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

۵. **خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، احتمال آن‌که فرزندان، به صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند چقدر است؟**

فضای نمونه‌ی ۳ تا بچه که میشه: $۸ = ۲^۳$

حالا اگه بچه‌ها یکی در میون پسر و دختر باشن این‌جوری میشه: $(bgb)(gbg) \Rightarrow$ ۲ حالت

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

تیپک ۲ : احتمال و سکه ومهره

اگه گفت مهره‌ها رو با هم انتخاب می‌کنیم تو مخرج سریع می‌ری سراغ ترکیب یعنی مثلا وقتی می که تو یه کیسه ۸ تا مهره داریم و ۳ تا رو انتخاب می کنیم سریع می کی :

$n(S) = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!۵!} = \frac{۵!\times ۶\times ۷\times ۸}{۳!۵!} = ۵۶$ *ولی اگه گفت متوالی و بدون جای‌گذاری فضای نمونه‌ای داره تغییر می‌کنه.*

۶. **از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، ۳ مهره خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال این‌که:**

الف) هر سه مهره سبز باشند؟

فضای نمونه یعنی ۳ تا مهره از ۱۱ تا مهره‌ی موجود تو جعبه که تو قسمت‌های (الف تا هـ) همینه!

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳!۸!} = \frac{۸!\times ۹\times ۱۰\times ۱۱}{۸!\,۳!} = ۱۶۵$$

حالا گفته هر ۳ تا مهره سبز باشن، یعنی شانس بیاری دستت بخوره به سه تا سبزا :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۳}}{۱۶۵} = \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۲}{۳۳}$$

ب) هر سه مهره همرنگ باشند؟

یعنی یا هر ۳ تا سبز یا (+) هر ۳ تا آبی، ولی زرد نمیتونن باشن چون کلاً ۲ تا مهره‌ی زرد بیش‌تر نداریم، پس:

$$n(A) = \binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} = ۱۰ + ۴ = ۱۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ج) فقط ۲ مهره آبی باشد؟

۲ تا آبی و یه دونه غیرآبی: $\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۱}=۴۲$ که احتمالش میشه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۲}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۵۵}$

د) حداقل ۱ مهره آبی باشد ؟

راه اول: این‌جا گفته حداقل ۱ مهره آبی، یعنی یا یه مهره‌ی آبی **و** ۲ تا غیر آبی **یا** دو تا مهره‌ی آبی و یکی غیرآبی یا هر سه تا مهره آبی:

$$n(A)=\binom{۴}{۱}\binom{۷}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۴}{۳}\Rightarrow\quad n(A)=۴\times۲۱+۶\times۷+۴=۱۳۰\quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳۰}{۱۶۵}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

راه دوم: بهتره از متمم استفاده کنیم، متممِ پیشامدِ «حداقل ۱ مهره‌ی آبی» میشه پیشامد «هیچ مهره‌ی آبی» . یعنی:

$$n(A')=\binom{۷}{۳}=۳۵\quad\Rightarrow\quad P(A)=۱-\frac{۳۵}{۱۶۵}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

هـ) حداکثر ۲ مهره‌ی سبز باشد ؟

متمم پیشامد «حداکثر دو مهره‌ی سبز» میشه پیشامد «هر ۳ تا مهره سبز» . $n(A')=\binom{۵}{۳}=۱۰$ که احتمالش میشه:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\frac{۲}{۳۳}}{\frac{۱۰}{۱۶۵}}=\frac{۳۱}{۳۳}$$

۷. **در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد، ۳ مهره پی در پی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم.**

الف) چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی قرمز باشد؟

چون با جایگذاری گفته، پس مخرج کسرمون تغییر نمی‌کنه یعنی کم نمیشه.

احتمال آبی بودن میشه $\frac{۴}{۹}$ ، احتمال سبز بودن میشه $\frac{۳}{۹}$ و احتمال قرمز بودن هم که میشه $\frac{۲}{۹}$ پس داریم: $\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۹}=\frac{۸}{۲۴۳}$

ب) اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی و دومی سبز و سومی قرمز باشد؟

حالا گفته بدون جایگذاری! اول که می‌خوایم آبی برداریم میشه $\frac{۴}{۹}$. بعدی که سبزِ میشه $\frac{۳}{۸}$. چون یه دونه از آبی کم شده بود و فضای نمونه‌ای تغییر کرد.

حالا می‌ریم سراغ آخری که این دفه قرمزه! باز هم از فضای نمونه کم میشه. پس داریم : $\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۱}{۲۱}$

۸. **از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم، احتمال آن‌که تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیش‌تر باشد چقدر است؟**

فضای نمونه میشه انتخاب ۳ سیب از ۱۷ تا سیب موجود. یعنی: $n(S)=\binom{۱۷}{۳}=\frac{۱۷!}{۳!\,۱۴!}=\frac{۱۴!\times۱۵\times۱۶\times۱۷}{۳!\,۱۴!}=۶۸۰$

حالا گفته سیبای سالمت بیش‌تر باشن. ۲ حالت میشه:

$$\left.\begin{array}{l}\text{دو تا سیب سالم و یه خراب}:\ \binom{۱۲}{۲}\times\binom{۵}{۱}=۶۶\times۵=۳۳۰\\ \text{هر سه تا سیب سالم}:\ \binom{۱۲}{۳}=۲۲۰\end{array}\right\}\Rightarrow ۳۳۰+۲۲۰=۵۵۰\quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۵۰}{۶۸۰}=\frac{۵۵}{۶۸}$$

۹. **در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب موجود است. ۳ لامپ به تصادف و هم‌زمان خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید.**

اول ببینیم فضای نمونه‌ای چی می‌شه: $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$

سه تا لامپ از یک نوع باشن یعنی این‌که یا هر سه تا سالم **یا** هر سه تا معیوب. تو احتمال اگه «**یا**» داشتی جمع می‌کردی دیگه!

$$P\ (\text{از یک نوع})=\frac{n\ (\text{از یک نوع})}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}+\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

تیپک ۳ : احتمال و تاس و مجموعه‌های اعداد:

تو سؤالای تاسی حتماً فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس رو تو ذهنت داشته باش. یعنی حالت‌های مورد نظر رو دستی حساب کن که معمولاً بهتره.

مجموع دو تاس چند می‌شه؟ خیلی مهمه. مثلاً اگه گفت مجموع ۴، سریع حالت‌ها رو بنویس: $\{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)\}$ *اگه گفت مجموع بیشتر از ۴ حتماً مواست به متمم باشه. احتمال مجموع ۷، تو تاس از همه بیشتره* $(\frac{۱}{۶})$*، چون تو تمام سطرا ایجاد می‌شه!*

$\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

مواست به مجموعه اعداد زوج، فرد و اعداد اول باشه. زوج و فرد که در حد بَن بِن بُنِ! مجموعه اعداد اول رو برات می‌نویسم:

$P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,...\}$

مجموع دو عدد زمانی زوج می‌شه که هر دو زوج یا هر دو فرد باشن. مجموع دو عدد زمانی فرد می‌شه که یکیشون فرد باشه.

۱۰. یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم، احتمال آن‌که تاس عدد اول و سکه پشت بیاید چقدر است؟

می‌دونیم فضای نمونه‌ای پرتاب یه سکه و یه تاس میشه $۶\times۲=۱۲$ و حالت‌های مطلوبمون هم فقط همین سه‌تان:

$\{(۲,پ)(۳,پ)(۵,پ)\}$ پس احتمال برابره با: $P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

۱۱. دو تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) هر دو تاس زوج باشند ؟

فضای نمونه‌ی ۲ تاس: $n(S)=۶^۲=۳۶$

هر دو تاس زوج باشن: $\begin{Bmatrix}(۲,۲) & (۴,۲) & (۶,۲)\\ (۲,۴) & (۴,۴) & (۶,۴)\\ (۲,۶) & (۴,۶) & (۶,۶)\end{Bmatrix}\Rightarrow n(A)=۹ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

ب) هر دو تاس مثل هم باشند ؟ (همون جفت خودمون!)

$n(S)=۶^۲=۳۶$

مثل هم باشن: $\{(۱,۱)(۲,۲)...(۶,۶)\}\rightarrow n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

ج) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس زوج باشند کدام است؟

که سه عضو $(۲,۶)(۶,۲)(۴,۴)$ مشترکن $\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{مجموع دو تاس ۸ بشه}: \{(۲,۶)(۶,۲)(۳,۵)(۵,۳)(۴,۴)\}\\ (\cup)\text{ یا }(+)\\ \text{هر دو تاس زوج باشن}: \{(۶,۶)(۶,۴)(۴,۶)(۴,۴)(۶,۲)(۲,۶)(۴,۲)(۲,۴)(۲,۲)\}\end{cases}$

پس: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cup B)=۵+۹-۳=۱۱$

احتمالش میشه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$

د) مجموع دو تاس کم‌تر از ۱۰ باشد ؟

تعداد حالت‌های پیشامد زیاده. پس می‌ریم سراغ شمارش حالت‌های متمم:

مجموع دو تاس مساوی یا بیش‌تر از ۱۰: $\{(۶,۶),(۶,۵),(۶,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۴,۶)\}\Rightarrow n(A')=۶$

احتمالش میشه: $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

یادت نره اینی که ما به دست آوردیم متمم بود، حتماً بایداز یک کم بشه، یعنی: $۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$

هـ) حاصل‌ضرب دو تاس مضرب ۴ باشد ؟

مضارب ۴ یعنی اعدادی که به ۴ بخش‌پذیر باشن که می‌شه همه‌ی پیشامدهایی که ۴ دارن به اضافه‌ی $\{(۶,۶),(۶,۲),(۲,۶),(۲,۲)\}$

$n(S)=۳۶$

$$\begin{Bmatrix}(۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\\ (۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۶,۴)\end{Bmatrix} \Rightarrow n(A)=۱۵\Rightarrow P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}$$

$+\ \{(۲,۲),(۲,۶),(۶,۲),(۶,۶)\}$

و) حاصل‌ضرب دو تاس مضرب ۵ باشد ؟

خب حداقل باید یه ۵ داشته باشه دیگه: ۶ تا ۵ داره، تو ردیف خودش یعنی $\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$
۵ تا تو ردیفای دیگه یعنی $\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$

$$\text{حاصل‌ضرب مضرب ۵ باشد} \Rightarrow n(A)=11 \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{11}{36}$$

ز) هر دو عدد رو شده مضرب ۳ نباشند ؟

تعداد اعضای پیشامد زیاده پس چی کارش کنیم؟ می‌ریم سراغ متمم دیگه!

$$\text{مضرب ۳ باشن}: \{(3,3),(3,6),(6,6),(6,3)\} \Rightarrow n(A)=4$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \text{احتمال این‌که مضرب ۳ نباشن}: 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

ح) مجموع دو تاس ۷، یا هر دو فرد باشند ؟

مجموع ۲ تاس ۷ بشه: $\{(1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)\}$

یا

هر دو فرد باشن: $\{(1,1),(3,1),(5,1),(1,3),(3,5),(5,3),(1,5),(3,3),(5,5)\}$

$$\Rightarrow n(A)=6+9=15 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{36} \quad \text{اشتراکم که ندارن پس احتمالش میشه:}$$

ت) مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد، ؟

یعنی جمع دو تا عدد به ۳ بخش‌پذیر باشه!

$$A=\{(1,2),(1,5),(2,4),(3,3),(3,6),(5,4),(6,6),(2,1),(5,1),(4,2),(6,3),(4,5)\} \quad \Rightarrow \quad n(A)=12$$

مجموع مضرب ۳ باشه: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

۱۲. تاسی را سه بار می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند؟

$$A=\{(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(6,6,6)\} \Rightarrow n(A)=6 \text{ و } n(S)=6^3=216 \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند (یعنی هیچ دو عددی مثل هم نباشند.) ؟

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$$

ج) مجموع سه تاس، بزرگ‌تر از ۱۶ باشد؟

اصلاً فکرشم نکن که متمم بری چون همین حالت مسئله خیلی بهتره. مجبوری دستی حالت‌ها رو بنویسی.

مجموع ۱۷ می‌شه $(6,6,5)$ که ۳ حالت داره و مجموع ۱۸ هم که یه حالته! $(6,6,6)$ پس کلا چهار تا حالت داریم یعنی $n(A)=4$

حالا احتمالش چند می‌شه؟!

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$$

۱۳. عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $\{1,2,3,\ldots,10\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که عدد انتخاب‌شده فرد یا کم‌تر از ۶ باشد.

مجموعه ۱۰ تا عضو داره پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ۱۰ تا میشه: $n(S)=10$

اعداد کوچک‌تر از b هم که می‌شه: $B=\{1,2,3,4,5\} \quad n(B)=5$

اعدادی که هم فرد و هم کوچک‌تر از ۶ باشن می‌شه: $A\cap B=\{1,3,5\} \quad n(A\cap B)=3$

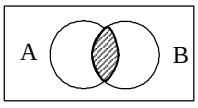
از قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

تیپک ۴ : اعمال روی پیشامد ها و حالت های خاص مهم

اشتراک دو پیشامد (A و B – هم A و هم B)

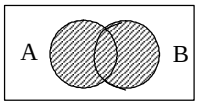
اگر A *و* B *دو پیشامد باشن،* $A\cap B$ *زمانی رخ می‌ده که هر دو پیشامد* A *و* B *رخ داده باشن.*



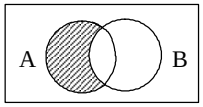
اجتماع دو پیشامد (A یا Bحداقل یکی از دو پیشامد A و B)

$A\cup B$ *زمانی رخ می‌ده که یکی از پیشامدهای* A *و* B *و یا هر دو رخ داده باشن؛*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



تفاضل دو پیشامد



اگر **A** و **B** دو پیشامد باشند $A-B$ زمانی رخ می‌ده که پیشامد **A**رخ بده ولی پیشامد **B**رخ نده پس داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap B')$$

دو پیشامد ناسازگار

اگر $A\cap B=\varnothing$ (دو پیشامد**A** و **B** نتوانند با هم رخ دهند) دو پیشامد را ناسازگار می‌نامیم. در این حالت احتمال وقوع پیشامد **A** یا **B** از رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست میاد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد **A** و **B** را مستقل گوییم هرگاه وقوع یکی از این دو در احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد. اگر دو پیشامد **A** و **B** مستقل باشند احتمال وقوع پیشامد **A** و **B** از رابطه‌ی زیر بدست میاد :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

تذکر: اگر دو پیشامد **A** و **B** مستقل باشند، احتمال وقوع حداقل یکی از دو پیشامد **A** یا **B** را می‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

چون دو پیشامد مستقل هستند داریم: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ پس رابطه‌ی فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$

یه نکته‌ی منحصر به فرد:

هر وقت عکس‌العملت بعد از شنیدن صورت سؤال این طوری‌بود که: «چه ربطی داره؟!» یعنی مستقلن.

می‌که { A: احتمال قبولی بهرام در کنکور. / B: احتمال این‌که هفته دیگه برف بیاد. } ← چه ربطی داره؟! ⇐ **A** و **B** مستقل

می‌که { A: احتمال این که رنگ چشم، خال‌خالی یشمی باشه! / B: احتمال این که گروه خونی A باشه. } ← چه ربطی داره؟! ⇐ **A** و **B** مستقل

حواست باشه با ناسازگار اشتباهی نگیری. ناسازگار یعنی محاله که بتونن با هم اتفاق بیافتن. مثلاً

می‌که { A: اکبر دندون بهشتی قبول شد! / B: اکبر زیست و ریاضی رو منفی زد. } ← به این می‌گن ناسازگار، گرفتی؟

۱۴. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) اگر A **و** B **دو پیشامد از فضای نمونه‌ی** S **باشند و** $A\cap B=\varnothing$**، در این‌صورت** A **و** B **را دو پیشامد ..... گوییم.**

ب) اگر $A\subseteq S$ **و** A' **متمم** A **باشد، آن‌گاه** $A\cap A'=$ ..... **و** $A\cup A'=$ .....

الف) ناسازگار (اشتباه نکنی بگی مستقل، فرق مستقل و ناسازگار رو تو درس‌نامه بهت گفتم.)

ب) $A\cup A'=S \quad , \quad A\cap A'=\varnothing$

۱۵. عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد، چقدر احتمال دارد عقربه، عددی اول یا فرد را نشان دهد؟

خب! اول بگو ببینم اعداد اول چیا بودن؟ $2,3,5,7,11,13,17,...$

کل فضای نمونه میشه انتخابِ ۱ ناحیه از ۸ ناحیه یعنی: $\binom{8}{1}=8$

دقت کن اون ارقامی رو که بالاش تیک زدیم بین دو حالت مشترکن.

عقربه عدد اول باشه: ۲, ۳, ۵, ۷ ✓ ✓ ✓ — $\binom{4}{1}=4$

یا

عقربه فرد باشه: ۱, ۳, ۵, ۷ ✓ ✓ ✓ — $\binom{4}{1}=4$

$\overset{(+)}{\Longrightarrow} 4+4=8$

حالا اشتراکشونو باید کم کنیم، یعنی $\{3,5,7\}$: $5=3-8$، احتمالش میشه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}$$

۱۶. روی ۹ کارت اعداد ۱ تا ۹ را نوشته و آن‌ها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم، اگر دو کارت را به تصادف و یکی‌یکی، بدون جایگـذاری از ایـن جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو کارت، عددی زوج باشد؟

جمعشون زوج شده، پس یا هر دو تا زوج بودن یا هر دو تا فرد بودن. $\{۲,۴,۶,۸\}$ زوج و $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ فرد

$$\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱۲}{۷۲}+\frac{۲۰}{۷۲}=\frac{۳۲}{۷۲}=\frac{۴}{۹}$$

۱۷. چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم ۶ نفره)، همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟

احتماله این‌که یه نفر تو یه ماهِ خاص به دنیا بیاد $\frac{۱}{۱۲}$ میشه و چون تولد افراد تو ماه‌های سال، پیشامد مستقله.

پس داریم: $P(A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}=(\frac{۱}{۱۲})^{۶}$

۱۸. احتمال این‌که روز تولد سه نفر در روزهای مختلف هفته باشد چقدر است؟

وقتی اولی میاد می‌تونه ۷ روز رو واسه به دنیا اومدن انتخاب کنه، امّا واسه نفر دوم! دیگه اون روزی که اولی به دنیا اومده از انتخاباش حذف میشه. واسه نفر سوم به همین صورت! یعنی روزی که اولی و دومی به دنیا اومدن دیگه نمی‌تونه انتخاب کنه.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷\times۶\times۵}{۷\times۷\times۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

۱۹. چقدر احتمال دارد در یک کلاس ۲۵ نفری روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

تبدیل: $P(n,r)=\frac{\cancel{n!}}{(n-r)!}$

$$\underbrace{\frac{۳۶۵}{۳۶۵}\times\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\times\cdots\times\frac{۳۴۱}{۳۶۵}}_{\text{۲۵ تا}}=\frac{\boxed{P(۳۶۵,۲۵)}}{(۳۶۵)^{۲۵}}$$

۲۰. ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یک‌دیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند.

الف) چقدر احتمال دارد دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند؟

فضای نمونه میشه کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌تونن کنار هم وایسن یعنی: $۶!=۷۲$

دو برادر رو می‌ذاریم کنار هم و فرض می‌کنیم که به هم چسبیدن و شدن ۱ نفر. $\boxed{bb'}\square\square\square\square$

البته دو تا داداش می‌تونن جابجا بشن $\boxed{۲!}$ جایگشت دارن جابه‌جاییِ دو تا داداش $۵!\times\boxed{۲!}$

احتمالش میشه: $\frac{۵!۲!}{۶!}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ب) چقدر احتمال دارد دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند؟

اگه ۶ تا جایگشت برای این ۶ نفر در نظر بگیریم، تو جایگاه اول از سمت چپ هر کدوم از ۲ تا برادر می‌تونن قرار بگیرن و تو جایگاه ششم اون یکی برادر قرار می‌گیره و ۴ تا جایگشت دیگه بین این دو تا داداش، توسط ۴ نفر دیگه به $۴!$ طریق می‌تونه جابه‌جا بشه.

جابه‌جایی ۲ تا داداش

$$\boxed{b}\square\square\square\square\boxed{b'} \quad\Rightarrow\quad \frac{۴!\times\boxed{۲!}}{۶!}=\frac{۱}{۱۵}$$

۲۱. از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمـال دو نفـر معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟

از ۵ تا ریاضیا می‌خوام ۲تاشونو انتخاب کنم، حالا چند تا از تجربیا می‌تونم بردارم؟ یه دونه. چون کلاً ۳ نفر می‌خواد،

۲ تا که از ریاضیا رفتن پس یکی هم باید از تجربیا بره. یعنی: $\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۱}=۳۰$

خب! حالا کل حالت‌ها چی میشه؟ کل حالت‌ها یعنی بدون در نظر گرفتن ریاضی و تجربی بودن داوطلب باید ۳ نفر از ۸ نفری که داریم انتخاب بشن پس:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=۵۶ \quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

تیپک آخر: قانون جمع احتمالات و پیشامدهای مستقل (احتمال کل)

تو بعضی مسائل تو دل هر احتمال یه احتمال دیگه هم هست. می‌گه احتمال انتقال بیماری به فرزند پسر ۱۰٪ و دختر ۲۰٪. احتمال این که بچه‌ای که به دنیا میاد سالم باشه. تو می‌گی یا پسرِ سالم یا دخترِ سالم. اصلاً، مهم اینه که سالم باشه!

$$\begin{cases} \text{پسر بودن } \frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}=\frac{۴۵}{۱۰۰} \\ \text{دختر بودن } \frac{۱}{۲}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۱۰۰} \end{cases} \Rightarrow \text{حالا جمع کن} \rightarrow \frac{۸۵}{۱۰۰}$$

حمی‌گه تو کیسه‌ی اول ۵ تا آبی ۳ تا قرمز و تو کیسه‌ی دوم ۷ تا آبی و یه دونه قرمز . حالا می خوایم یکی از کیسه ها رو انتخاب کنیم و یه دونه مهره از توش در بیاریم.احتمال اینکه آبی باشه چقدره ؟

$$\begin{cases} \text{کیسه اول } \frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۱۶} \\ \text{کیسه دوم } \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۸}=\frac{۷}{۱۶} \end{cases} \Rightarrow \text{حالا جمع کن} \rightarrow \frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخص B پس از این عمل، ۶۰٪ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال این‌که:

الف) هر دو نفر سلامتی خود را به دست آورند؟

هر دو نفر سلامتیشونو به دست بیارن یعنی هم A خوب بشه هم B که میشه اشتراکشون. چون این دو تا پیشامد از هم مستقل هستن یعنی ربطی به هم ندارن پس اشتراکشون میشه ضرب احتمالشون.

$$\frac{۸۰}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲}{۲۵}=۴۸٪$$

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد؟

حداقل یکیشون خوب بشه یعنی اجتماع: (هم A خوب بشه هم B) − (B خوب بشه) + (A خوب بشه)

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰} - \frac{۴۸}{۱۰۰} = \frac{۹۲}{۱۰۰}$$

می‌تونستی از متمم هم بری: $۱-P$ (هیچکی خوب نشه) $=۱-\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}=۰/۹۲$

۲۲. احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود ۰/۵۵ و در شیمی قبول شود ۰/۶ است. اگر احتمال آن‌که حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۰/۷۵ باشد با کدام احتمال در هر ۲ درس قبول می‌شود؟

$$P(A)=۰/۵۵ \quad , \quad P(B)=۰/۶ \quad , \quad P(A\cup B)=۰/۷۵ \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۷۵=۰/۵۵+۰/۶-P(A\cap B)$$

۲۳. در جعبه‌ی A ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی B، ۲ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

خب! این‌جا می‌تونیم از نمودار درختی استفاده کنیم:

احتمال انتخاب جعبه‌ی B $\frac{۱}{۲}$ ← قرمز $\frac{۲}{۵}$ ، آبی $\frac{۳}{۵}$

احتمال انتخاب جعبه‌ی A $\frac{۱}{۲}$ ← قرمز $\frac{۳}{۷}$ ، آبی $\frac{۴}{۷}$

به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبه‌ی A انتخاب می‌شه و مهره‌ی انتخاب شده به احتمال $\frac{۴}{۷}$ آبیه یا به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبه‌ی B انتخاب می‌شه و مهره‌ی انتخابی به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبیه.

$$P(\text{آبی})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۴۱}{۷۰}$$

فصل ۲

تابـع

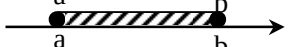
تیپ‌بندی سؤالات فصل دوم (حدوداً از سؤال ۵ تا ۸ امتحان نهایی) [۶ نمره]

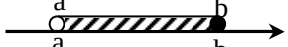
طراحان محترم از بین تیپ‌های زیر ۴ تا رو انتخاب می‌کنن و سؤال می‌دن بهتون!

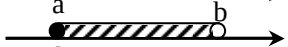
تیپ ۱: اجتماع و اشتراک بازه‌ها

*جواب‌های یک معادله برحسب درجه‌ی اون چند تا عدده ولی جواب‌های یک نامعادله معمولاً یک بازه است یعنی مجموعه‌ای از اعداد. پس لازمه قبل از شروع روش‌های حل نامعادله، توضیحاتی در مورد انواع بازه خدمت عزیزان تقدیم کنم. این بازه (a,b) یک بازه‌ی بازه. یعنی خود **a** و **b** در مجموعه‌حضور ندارن (البته با اجازه‌ی شما)، اما این بازه $[a,b]$ یک بازه‌ی بسته است. یعنی چون خود **a** هست باید بازه رو بست! در این حالت خود **a** و **b** در بازه حضور دارن. بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ نیمه بازن. با هم این بازه‌ها را روی محور اعداد حقیقی می‌بینیم تا اگر احیاناً مشکلی هست برطرف بشه:*

۱) (a,b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

۲) $[a,b]$  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$

۳) $(a,b]$  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$

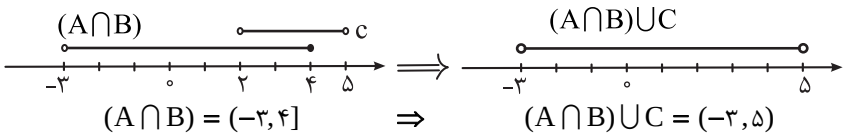
۴) $[a,b)$  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$

اجتماع و اشتراک بازه‌ها

اگه اجتماع $(\cup)$ دو بازه خواسته شد، جواب باید هر دو تا رو پوشش بده و اگه اشتراک $(\cap)$ خواسته شد فقط جاهایی که تو هر دو بازه هستن قبوله!

۱ـ اگر $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 4\}$ و $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ و $C=\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ باشند، حاصل $(A \cap B) \cup C$ به‌دست آورید؟

تو این سؤال‌ها که باید چند بازه با هم درنظر گرفته بشه، بهترین روش، رسم اونها روی محوره:



$(A \cap B) = (-3,4]$ $\Rightarrow$ $(A \cap B) \cup C = (-3,5)$

تیپ ۲: معادلات گویا

حل معادلات گویا:

۱ـ اگه دو تا کسر داشتی واسه امتحان نهایی بهتره همه‌رو ببری یه طرف و یه مخرج مشترک بگیری. آخر سر صورت رو مساوی صفر قرار می‌دی چون از کودکستان یادمونه کسری که صفره حتماً صورتش صفر بوده.

۲ـ اگه سه تا کسر داشتی یکی از کسرها رو که مخرجش حاصل‌ضرب دو تا مخرج دیگست سمت چپ و دو تای دیگه رو طرف راست تساوی نگه‌دار. بعدش سمت راست مخرج مشترک بگیر و مخرج‌ها رو با هم بزن. بریم دو تا مثال خوب حل کنیم:

تذکر بسیار مهم: در معادلات گویا جواب‌های نهایی رو باید بررسی کنیم تا مخرج‌ها رو صفر نکنن.

مثال حالت ۱:

$$\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{x-2}{x-4}-\frac{x+1}{x+3}=0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)-(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)}=0$$

$$\Rightarrow x^2+x-6-x^2+3x+4=0 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$ چون مخرج رو صفر نمی‌کنه جواب معادلست.

مثال حالت ۲:

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\frac{1+x}{x}=\frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}=\frac{(1+x)(x-2)+x(x-1)}{x(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2=x^2-x-2+x^2-x \Rightarrow x^2-2x+2=2x^2-2x-2$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow \text{(غ‌ق‌ق) مخرج رو صفر می‌کنه پس قبول نیست.} \\ x=-2 \Rightarrow \text{Ok!} \end{cases}$$

۲ـ مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3x(1-\frac{x-1}{x+1})$ رو تعیین کنید؟

با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن عبارت‌ها تو هر طرف فقط یه کسر باقی می‌مونه:

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)}=3x(\frac{x+1-x+1}{x+1})\Rightarrow\frac{4x}{(x-1)(x+1)}=\frac{6x}{(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف عامل های مشترک}}\frac{2}{x-1}=3\Rightarrow 2=3x-3\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=\frac{5}{3}}$$

اما هواستون باشه اگه در طرفین یک تساوی که شامل ضرب و تقسیم چند عبارته، خواستیم عبارت‌های یکسان رو حذف کنیم، باید دقت کنیم که عبارت‌های مخرج به راحتی حذف می‌شن،اما با حذف عبارت‌های یکسان تو صورت، باید ریشه‌ی اون عبارت‌ها به مجموعه جواب اضافه بشه.

پس با حذف xها تو صورت باید $\boxed{x=0}$ به مجموعه جواب‌ها اضافه بشه، ولی $x=-1$ چون مخرج رو بی‌معنی می‌کنه، به مجموعه جواب اضافه نمیشه.

۳ـ به ازای کدام مقادیر a معادله $\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

خُب چون $x=2$ جواب معادلست پس تو معادله صدق می‌کنه دیگه! یعنی به جای xها؛ ۲ بذار: قسمت مربوط به تغییر متغیر

$$\frac{2}{a-2}+\frac{a-2}{2}=\frac{a}{2}\rightarrow\boxed{\frac{a-2}{2}=t\Rightarrow\frac{a}{2}=t+1}$$

$$\text{تغییر متغیر}\Rightarrow\quad\frac{1}{t}+t=t+1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{t}=1\quad\Rightarrow\quad t=1\quad\Rightarrow\quad\frac{a-2}{2}=1\quad\Rightarrow\quad a-2=2\quad\Rightarrow\quad a=4$$

تیپ ۳: نامعادلات گویا

اول همه رو ببر یه طرف (سمت چپ نامساوی)، بعد برو تو کار مخرج مشترک و ساده‌سازی و ...

۴ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{6-x^2}{x}>5$ رو تعیین کنید؟

تو حل نامعادله‌ها باید بدونیم که:

۱ـ همه‌ی عبارت‌ها رو یه طرف جمع می‌کنیم و طرف دیگه صفر باقی میمونه، حالا عبارت به‌دست اومده رو تعیین علامت می‌کنیم.

۲ـ حق حذف کردن هیچ عبارتی از صورت و مخرج‌دو طرف‌رو نداریم، مگه اینکه علامت اون‌ها رو بدونیم.

$$\frac{6-x^2}{x}-5>0\Rightarrow\frac{6-x^2-5x}{x}>0\xrightarrow{\text{مرتب سازی}}\frac{-x^2-5x+6}{x}>0\xrightarrow{\times\text{منفی}}\frac{x^2+5x-6}{x}<0$$

$$x^2+5x-6=0\quad\Rightarrow\quad(x+6)(x-1)=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=-6\\x=1\end{cases}$$

	$-\infty$		-6		0		1		$+\infty$
x^2+5x-6	+	○	−		−	○	+		
x	−		−	○	+		+		
P	−		+		−		+		

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(0,1)$$

۵ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x+1}{x-1}<\frac{x}{x+1}$ را به دست آورید.

حق نداریم طرفین وسطین کنیم چون علامتشون رو نمی‌دونیم، بهتره بیاریمشون یه طرف:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x+1}<0$$

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+x}{x^2-1}<0\Rightarrow\frac{3x+1}{x^2-1}<0\xrightarrow{\text{ریشه های صورت و مخرج}}x=-\frac{1}{3},\ x=1,\ x=-1$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$	−		−	○	+		+		
x^2-1	+	○	−		−	○	+		
همون!	− (ج)		+		− (ج)		+		

$$\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},1)$$

۶ـ حدود x برای این‌که نامساوی $\frac{۱}{۲x^۲+x+۱} \geq \frac{۱}{x^۲+۱}$ برقرار باشد، را بیابید.

درسته که گفتیم حق نداریم طرفین وسطین کنیم، اما نه تو این سؤال. این‌جا هر دو مخرج همواره مثبته پس طرفین وسطین واجبه!

$$\begin{cases} x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲+۱ \geq ۱ \\ ۲x^۲+x+۱ \xrightarrow{\text{تشکیل } \Delta} \Delta = -۷ < ۰ \end{cases}$$ چون ضریب $x^۲$ مثبت و دلتا منفیه، پس این عبارت درجه ۲ همواره مثبته

$$x^۲+۱ \geq ۲x^۲+x+۱ \Rightarrow x^۲+x \leq ۰ \Rightarrow x(x+۱) \leq ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & +\infty \\ \hline x^۲+x & & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \Rightarrow x \in [-۱, ۰]$$

روش دوم: می‌تونستی این‌طوری هم بگی: چون دو طرف $(+)$ هستن (یا اگه هر دو طرف هم‌علامت بودن) وقتی معکوس می‌کنیم، جهت عوض می‌شه: مثلاً:

$$\begin{cases} ۵ < ۷ \\ \frac{۱}{۵} < \frac{۱}{۷} \end{cases}$$

تیپ ۴: اصول نامساوی‌ها و معادلات و نامعادلات معمولی

اینا دیگه خیلی سادست، صحبتی ندارم! فقط قدم به قدم مراحل حل نامعادله رو پیگری کن که ذهنت آماده بشه.

(مثال ۱) $-۱ \leq ۲x-۱ < ۳ \Rightarrow ۰ \leq ۲x < ۴ \Rightarrow ۰ \leq x < ۲$

(مثال ۲) $۳ < \frac{x-۱}{۲} \leq ۵ \Rightarrow ۶ < x-۱ \leq ۱۰ \Rightarrow ۷ < x \leq ۱۱$

(مثال ۳) $۴ \leq ۲-x < ۶ \Rightarrow ۲ \leq -x < ۴ \Rightarrow -۴ < x \leq -۲$

(مثال ۴) $-۱ < \frac{x}{۲}+۱ \leq ۴ \Rightarrow -۲ < \frac{x}{۲} \leq ۳ \Rightarrow -۴ < x \leq ۶$

(مثال ۵) $\frac{x+۱}{۲} > ۲x-۱ \xrightarrow{\text{در ۲ ضرب می کنیم}} x+۱ > ۴x-۲ \Rightarrow ۱+۲ > ۴x-x \Rightarrow ۳ > ۳x \Rightarrow x < ۱$

(مثال ۶) $|\frac{۲x-۱}{۲}| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq \frac{۲x-۱}{۲} \leq ۳ \Rightarrow -۶ \leq ۲x-۱ \leq ۶ \Rightarrow -۵ \leq ۲x \leq ۷ \Rightarrow -\frac{۵}{۲} \leq x \leq \frac{۷}{۲}$

(مثال ۷) $-۳ \leq x^۲-۱ < ۸ \Rightarrow -۲ \leq x^۲ < ۹ \Rightarrow \cancel{-۲ \leq} x^۲ < ۹ \Rightarrow x^۲ < ۹ \Rightarrow$

توضیح این‌که $\boxed{-۲ \leq x^۲}$ *یه چیز تابلوئه و روایت شده تو ریاضی تابلونویسی ممنوعه! باید بنویسیم:* $\boxed{x^۲ \geq ۰}$ *اینم یه جورایی تابلوئه آخه!*

$$x^۲ < ۹ \xrightarrow{x^۲<b^۲ \Rightarrow |x|<b \Rightarrow -b<x<b} -۳ < x < ۳ \Rightarrow x \in (-۳, ۳)$$

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{|x-۲|}{۳} \leq \frac{۱}{۲}\}$ و $B = [۰, ۳)$ حاصل $A \cap B$ را به‌صورت بازه بنویسید.

اول نامعادله‌ی A *را حل می‌کنیم و به‌صورت بازه نشون می‌دیم؛*

$$|x-۲| \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \leq x-۲ \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲}+۲ \leq x \leq \frac{۳}{۲}+۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۷}{۲} \Rightarrow A = [\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}]$$

$$A \cap B = [\frac{۱}{۲}, ۳)$$

تیپ ۵: تلاقی منحنی با محورها و یافتن ضرایب مجهول

تلاقی با محور **x**ها: $y = ۰$ *تلاقی با محور* **y**ها: $x = ۰$

مختصات هر نقطه از منحنی توی ضابطش صدق می‌کنه.

نقطه تقاطع دو منحنی توی ضابطه هر دو صدق می‌کنه.

۷ـ اگر $f(x) = ax^۲+bx+c$ باشد، a ، b و c را طوری بیابید که سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ ، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده و از نقطه $(-۱, ۲)$ نیز بگذرد.

همون‌طور که بالا گفتم هر وقت محور xها رو قطع کرد $(y = ۰)$ و هر وقت محور yها رو قطع کرد $(x = ۰)$

همیشه از صفر شروع کن. C زوده زود به دست می‌یاد! $f(۰) = ۳ \Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c = ۳ \Rightarrow c = ۳$

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = ۰ \Rightarrow a(۱)^۲+b(۱)+۳ = ۰ \Rightarrow a+b = -۳ \\ f(-۱) = ۲ \Rightarrow a(-۱)^۲+b(-۱)+۳ = ۲ \Rightarrow a-b = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a = -۴ \Rightarrow a = -۲ , b = -۱$$

۸ـ دو تابع $\overbrace{y=x^۲+ax-۳b}^{(II)}$ و $\overbrace{y=-x+b}^{(I)}$ داده شده‌اند. b و a را طوری محاسبه کنید که نمودارهای دو تابع روی محور xها در نقطه‌ای به طول یک یکدیگر را قطع کنند.

$$(۱,۰)\begin{cases}\nearrow I: -۱+b=۰ \Rightarrow \boxed{b=۱} \xrightarrow{\text{in II}} y=x^۲+ax-۳\\ \searrow II: (۱)^۲+a(۱)-۳=۰ \Rightarrow a-۲=۰ \Rightarrow \boxed{a=۲}\end{cases}$$

ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}ax-۳ & x<۰\\ ۲bx^۲+۵ & x\geq ۰\end{cases}$ می‌باشد. مقادیر a و b را طوری بیابید که $f(-۲)=۳$ و نمودار تابع از نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ بگذرد.

مختصات دو تا نقطه‌رو داده که تو ضابطه‌ی تابع صدق می‌کنه. نقطه‌ی اول $x=-۲<۰$ که تو دامنه‌ی ضابطه‌ی بالایی صدق می‌کنه و نقطه‌ی دومی که $x=۲>۰$ تو دامنه‌ی ضابطه‌ی پایینی، پس داریم:

$$a(-۲)-۳=۳ \Rightarrow \boxed{a=-\frac{۶}{۲}=-۳} \quad , \quad ۲b(۲)^۲+۵=-۳ \Rightarrow ۸b=-۸ \Rightarrow \boxed{b=-۱}$$

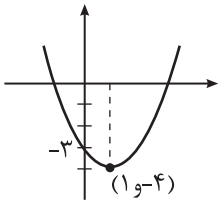
تیپ ۶ : رسم تابع دو ضابطه‌ای و یافتن مقادیر موردنظر

۹ـ نمودار تابع $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^۲-۲x-۳\end{cases}$ را رسم کنید.

باید مختصات رأس و عرض از مبدأ رو داشته باشیم:

مختصات عرض از مبدأ: $f(۰)=-۳$

مختصات رأس سهمی: $\begin{cases}x_S=\frac{-b}{۲a}=-\frac{(-۲)}{۲(۱)}=۱\\ y_S=f(۱)=۱-۲-۳=-۴\end{cases}$



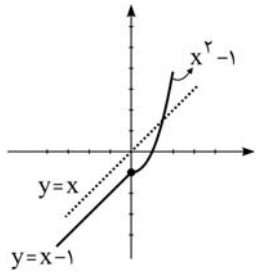
چون ضریب $x^۲$، مثبت بود سهمی رو، رو به بالا رسم کردیم.

۱۰ـ تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\geq ۰\\ x-۱ & x<۰\end{cases}$ داده شده است:

الف) نمودار $f(x)$ را رسم کنید.

ب) مقدار $f(f(۰))$ را بیابید.

الف) رسم با استفاده از انتقال، اول نمودار $x^۲$ رو می‌کشیم. یک واحد اگه پایین بیاد می‌شه $x^۲-۱$، حالا نمودار رو واسه x های مثبت مشخص می‌کنیم. $x-۱$ رو هم از انتقال $y=x$ رسم می‌کنیم و برای x های کوچک‌تر از صفر مشخص می‌کنیم:



ب) اول از ضابطه‌ی بالایی $f(۰)$ رو حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=-۱$$

پس حالا با استفاده از ضابطه‌ی پایینی $f(f(۰))$ یعنی $f(-۱)$ رو به‌دست میاریم:

$$f(-۱)=-۱-۱=-۲$$

۱۱ـ معادله خطی را بیابید که محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۳}{۲}$ قطع کند و از نقطه‌ی $(۱,۵)$ بگذرد.

$$\left.\begin{matrix}(-\frac{۳}{۲},۰)\\ (۱,۵)\end{matrix}\right\} \to m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۵-۰}{۱-(-\frac{۳}{۲})}=\frac{۵}{\frac{۵}{۲}}=۲ \Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۵=۲(x-۱) \Rightarrow y=۲x+۳$$

تیپ ۷: آموزش قدم به قدم واسه تعیین دامنه

فقط حواست باشه تو دامنه دو تا ورود ممنوع بزرگ داریم
۱) مخرج صفر بشه!
۲) زیر رادیکال با فرجه زوج منفی بشه!

با مثال‌های خیلی ساده شروع می‌کنم که خوب یاد بگیری.

چند جمله‌ای‌ها همگی بر $\mathbb{R}$ پیوسته‌ان و دامنه $\mathbb{R}$ می‌شه.

مخرج رو مساوی صفر قرار بده و ریشه‌ی مخرج رو از $\mathbb{R}$ خارج کن؛ (حتی اگه ریشه‌ی مشترک با صورت داشت)

۱) $f(x)=x^{۳}-۳x+۲$

۲) $f(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow x=۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

۳) $f(x)=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$

۴) $f(x)=\frac{۲}{x^{۲}-۱} \Rightarrow x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

۵) $f(x)=\frac{x-۲}{x^{۲}-۶x+۸} \Rightarrow x^{۲}-۶x+۸=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۴ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲,۴\}$

۶) $f(x)=\frac{x-۱}{x^{۲}+۱} \Rightarrow x^{۲}+۱=۰ \Rightarrow x^{۲}=-۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

پس دامنه $\mathbb{R}$ می‌شه. (مخرج هیچ‌وقت صفر نمیشه) چون معادله‌ی $(x^{۲}=-۱)$ ریشه نداره

۷) $f(x)=\frac{x-۱}{x^{۲}+۲x-۳}$

$x^{۲}+۲x-۳=۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$

۸) $f(x)=\sqrt[۳]{۲x^{۲}-۱}$

چون فرجه فرده پس دامنه می‌شه دامنه‌ی زیر رادیکال. زیر رادیکال هم که مشکلی نداره. پس دامنه آره! آره؟! منظورم این $\mathbb{R}$!

۹) $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}}$

$f(x)=\sqrt[\text{فرد}]{\text{هرچی}} \Rightarrow D_f=D_{\text{هرچی}} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

۱۰) $f(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{\text{هرچی}} \Rightarrow \text{هرچی} \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۰ \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$

۱۱) $f(x)=\sqrt{x-۲} \Rightarrow x-۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$

۱۲) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۲}} \Rightarrow x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \Rightarrow D_f=(۲,+\infty)$

هم زیر رادیکاله و هم تو مخرج. حواست باشه دیگه نمی‌تونه صفر بشه بخاطر همین $x=۲$ رو حذف کردیم.

۱۳) $f(x)=\sqrt{-x^{۲}-x+۲}$

$-x^{۲}-x+۲ \geq ۰$

به این می‌گن یه نامعادله‌ی درجه ۲ که باید تعیین علامت بشه. (بین دو ریشه مخالف علامت **a** رو یادته؟!)

$-x^{۲}-x+۲=۰ \Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۲		۱	$+\infty$
P	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow D_f=[-۲,۱]$

۱۴) $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۱}$

$$\left.\begin{array}{l} x=۰ \\ x-۱=۰ \quad \Rightarrow \quad x=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

۱۵) $f(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$

$x-۳=۰ \quad \Rightarrow \quad x=۳ \quad \Rightarrow \quad D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

جو نگیردت یهو عامل‌های مشترک صورت و مخرج رو با هم ساده کنی!!

۱۶) $f(x)=x\sqrt{x-۳} \quad \Rightarrow \quad x-۳\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\geq ۳ \quad \Rightarrow \quad D_f=[۳,+\infty)$

۱۷) $f(x)=\frac{|x|}{x} \quad \Rightarrow \quad x=۰ \quad \Rightarrow \quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

۱۸) $f(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x+۲}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x-۲\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\geq ۲ \\ x+۲>۰ \quad \Rightarrow \quad x>-۲ \end{array} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq ۲ \quad \Rightarrow \quad D_f=[۲,+\infty)$

۱۹) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۲}{x+۲}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-۲}{x+۲}\geq ۰ \quad \Rightarrow$

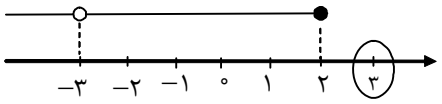
x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$		
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$		
$f(x)$	$+$	∞	$-$	۰	$+$		

$\Rightarrow \quad D_f=(-\infty,-۲)\cup[۲,+\infty)$

۲۰) $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x+۲}}{\sqrt[۳]{x}}$

$$\begin{array}{l} x+۲\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\geq -۲ \\ x\neq ۰ \end{array} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[-۲,+\infty)-\{۰\}$$

۲۱) $f(x)=\frac{\sqrt{۲-x}}{x^۲-۹}$



نمودار اشتراک‌شون؛

$$\begin{array}{l} ۲-x\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\leq ۲ \\ x^۲-۹\neq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm ۳ \end{array} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(-\infty,۲]-\{-۳\}$$

۳ خودش بیرونه عزیزم. شما خودشو ناراحت نکن!!!

۲۲) $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{|x|}$

$$\left.\begin{array}{l} ۴-x^۲\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲\leq ۴ \overset{|x|<۲}{\Rightarrow} \quad -۲\leq x\leq ۲ \\ |x|\neq ۰ \quad \Rightarrow \quad x\neq ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[-۲,۲]-\{۰\}$$

۲۳) $h(x)=\begin{cases} x & , \quad x<۰ \\ \frac{۱}{x-۴} & , \quad x\geq ۲ \end{cases}$

دامنه چند ضابطه‌ای می‌شه اجتماع دامنه‌ها به جز جاهایی که تابع مشکل داره. مثلاً تو این تابع دامنه می‌شه $x<۰$ و $x\geq ۲$ به جز $x=۴$ چون مخرج رو صفر می‌کنه.

$D_h=(-\infty,۰)\cup[۲,+\infty)-\{۴\}$

۲۴) $g(x)=\begin{cases} x+۱ & , \quad -۳<x\leq ۲ \\ ۳x-۴ & , \quad ۲<x\leq ۴ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D_g=(-۳,۴]$

۲۵) $y=\log x$

جفت ضابطه‌ها بچه‌های خوبی هستن و هیچ دردسری ندارن. نه مخرج و نه رادیکال فرجه زوج!

$x>0 \Rightarrow D_y=(0,+\infty)$ $\qquad \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$ قرار شد جلوی لگاریتم مثبت باشه و مبنا هم بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک !

مبنای نانوشته هم که ۱۰ بود دیگه! خودش حلّه! باشه؟!

۲۶) $y=\log(x-2)^2$

$(x-2)^2>0 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{2\}$

۲۷) $y=\log_3(x^2-1)$

$x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \xrightarrow{\text{می جذریم!}} |x|>1 \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \text{or} \\ x<-1 \end{cases}$

۲۸) $y=\log(x^2-4x+3)$

$x^2-4x+3>0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$D_y=(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ خارج دو ریشه موافق علامت **a** میشه یعنی همونی که ما می‌خوایم. پس:

۲۹) $y=\log_x(4-x^2) \Rightarrow \begin{cases} 4-x^2>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2 & (I) \\ x>0 & (II) \\ x\neq 1 & (III) \end{cases} \xrightarrow{I\cap II\cap III} D_y=(0,2)-\{1\}$

$(0,1)\cup(1,2)$ راستی بعضیا دلشون نمی‌یاد اینجوری ۱ بدبخت رو با لگد بندازن بیرون و دامنه رو اینجوری نمایش می‌دن:

بعضی‌ها هم این‌طوری: $\boxed{0<|x-1|<1}$ به این می‌گن همسایگی محذوف متقارن!

تیپ ۸: اعمال روی توابع

مثل یه تغییر فیزیکی می‌مونه که خواص توابع سازنده حفظ می‌شه. دامنه‌ی محصول هم می‌شه اشتراک دامنه‌ها فقط مواست باشه مخرج صفر نشه!

۱۲ـ اگر $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ باشد،مطلوب است:

$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=((3^2)-2)+\sqrt{3+1}=7+2=9$

$(f-2g)(-1)=f(-1)-2(g(-1))=((-1)^2-2)-2(\sqrt{-1+1})=-1$

$\left.\begin{matrix} D_f:\mathbb{R} \\ D_g:x\geq -1 \end{matrix}\right\}$ دامنه‌ی همه‌ی محصولات $D_f\cap D_g=[-1,+\infty)$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

$D_{\frac{f}{g}}=[-1,+\infty)-\{-1\}=(-1,+\infty)$

۱۳ـ اگر $f(x)=3x+5$ و $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

$\frac{f}{g}(x)$ همون $\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌شه: $\qquad \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{\frac{x}{x^2-4}}=\frac{(x^2-4)(3x+5)}{x}$

ضابطه‌اش رو به‌دست آوردیم. می‌ریم سراغ دامنه،دامنه‌اش می‌شه اشتراک دامنه‌ی دو تابع، فقط مخرج که $g(x)$ هست نباید صفر بشه:

$\left.\begin{matrix} D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\} \\ D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\mathbb{R}-\{\pm 2\} \\ g(x)=0\Rightarrow \frac{x}{x^2-4}=0\Rightarrow x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_{f/g}=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

۱۴ـ اگر $f(x)=\begin{cases}۶x^۲-۲ & , x\geq ۲\\ ۵ & , x<۲\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}۲ & , x\geq ۲\\ x-۵ & , x<۲\end{cases}$ **آن‌گاه:**

$$f+g=\begin{cases}۶x^۲ & , x\geq ۲\\ x & , x<۲\end{cases} \qquad f.g=\begin{cases}۲(۶x^۲-۲) & , x\geq ۲\\ ۵(x-۵) & , x<۲\end{cases}=\begin{cases}۱۲x^۲-۴ & , x\geq ۲\\ ۵x-۲۵ & , x<۲\end{cases}$$

تیپ ۹ : ترکیب توابع

از f و g می‌تونی ۴ تا محصول شیمیایی هم بدست بیاری.محصول شیمیایی حاصل یه تغییر شیمیاییه. پس لزوماً خواص توابع اولیه حفظ نمیشه. یه مثال می‌زنم تو تخصص خودتون که بهتر متوجه بشین؛

هورمون رشد $\rightarrow$ هیپوفیز $\xrightarrow{\text{هورمون آزادکننده}}$ هیپوتالاموس $\rightarrow$ *عواملی محیطی و شرایط درونی بدن*

$$x\rightarrow \boxed{g} \longrightarrow \boxed{f}\rightarrow f(g(x))$$

تو این ترکیب یعنی (fog) به g می‌گن تابع درونی و به f می‌گن تابع بیرونی.

یکی از قالب‌های سؤالات ترکیب توابع تو امتحانات نهایی معلوم بودن دو مورد از **$f(x)$** *و* **$g(x)$** *و* **$f(g(x))$** *و مجهول بودن یکی از این ۳ مورده که خودش تو ۳ تیپ دسته‌بندی میشه.*

تیپ (۱) $\begin{cases}f(x),g(x) & \text{معلوم}\\ fog=? & \text{مجهول}\end{cases}$

۱۵ـ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ **و** $g(x)=\frac{۲-x}{۱+x}$ **مطلوب است:** $gof(x)$.

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

۱۶ـ اگر $f(x)=x^۲-۲x$ **مطلوب است:** $f(۲x+۱)$.

$$f(۲x+۱)=(۲x+۱)^۲-۲(۲x+۱)=۴x^۲+\cancel{۴x}+۱\cancel{-۴x}-۲=۴x^۲-۱$$

۱۷ـ اگر $f(x)=x+a$ **و** $g(x)=ax^۲+bx+c$ **، و** b **و** c **را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:** $fog(x)=x^۲-۳x+۴$

$$f(g(x))=ax^۲+bx+c+a=x^۲-۳x+۴ \overset{\text{مقایسه ضرایب}}{\Rightarrow} \begin{cases}a=۱\\ b=-۳\\ c=۳\end{cases}$$

۱۸ـ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ **آن‌گاه** $fof(x)$ **و** $(fof)(۳)$ **را محاسبه کنید.**

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x \quad\Rightarrow\quad fof(۳)=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳$$

۱۹ـ اگر $f(x)=\tan x$ **و** $g(x)=\sqrt{\frac{۲x}{۱+x^۲}}$ **باشد** gof **را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.**

$$g(f(x))=\sqrt{\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}}=\sqrt{\frac{۲(\frac{\sin x}{\cos x})}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}=\sqrt{۲\sin x\cos x}=\sqrt{\sin ۲x}$$

۲۰ـ اگر $f(x)=\cos x$ **و** $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ **مطلوب است:** $gof(x)$.

$$g(f(x))=\sqrt{۱-\cos^۲ x}=\sqrt{\sin^۲ x}=|\sin x|$$

تیپ (۲) $\begin{cases}f(x),fog & \text{معلوم}\\ g(x)=? & \text{مجهول}\end{cases}$

۲۱ـ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ **و** $f(g(x))=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$ **، آن‌گاه** $g(x)$ **را بیابید.**

$$f(g(x))=\frac{g+۱}{g-۱}=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}\Rightarrow g.x^۲+g+x^۲+۱=g.x^۲+۲g-x^۲-۲ \quad\Rightarrow\quad g(x)=۲x^۲+۳$$

تیپ (۳) $\begin{cases}fog,g(x) & \text{معلوم}\\ f(x)=? & \text{مجهول}\end{cases}$

۲۲ ـ اگر $fog(x)=x+1$ و $g(x)=2x+1$ ، آن‌گاه $f(x)$ را بیابید.

$$f(g(x))=x+1 \xrightarrow{g(x)=2x+1} f(2x+1)=x+1$$

$$\underbrace{2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}}_{\text{قسمت مربوط به تغییر متغیر}} \Rightarrow f(t)=\frac{t-1}{2}+1 \Rightarrow f(t)=\frac{t+1}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{2}$$

تیپ ۱۰ : تعیین دامنه‌ی توابع مرکب

واسه تعیین دامنه تابع مرکب باید از روابط زیر استفاده کنی:

$$D_{fog(x)}=D_{f(g(x))}=\{x \mid x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$D_{gof(x)}=D_{g(f(x))}=\{x \mid x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$D_{fof(x)}=D_{f(f(x))}=\{x \mid x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

مثلاً واسه تعیین دامنه $f(g(x))$ اولاً x ها باید اجازه‌ی ورود به g رو داشته باشن $(x\in D_g)$ و ثانیاً $g(x)$ اجازه‌ی ورود به f رو داشته باشه یعنی؛ $g(x)\in D_f$.

حواست باشه تابع‌سازی نکنی که تو خیلی از موارد جوابت غلط میشه. مثلاً این مثال کلاسیک رو با هم ببینیم؛

اگه با تابع‌سازی جواب بری دامنه $\mathbb{R}$ میشه؛

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow fog(x)=x+1$$

ولی اگه از روابط بالا استفاده کنی؛

$$D_{fog}=D_{(f(g(x)))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq 0 \mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$$

چرا اینجوری شد؟ چون $\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ خودش برقراره. هممون عضو $\mathbb{R}$ هستیم دیگه عزیزم! ولی همیشه که اینجوری نیست که! بعضی وقتا باید تو دل ان سوال بری یه نامعادله حل کنی مثل این ؛

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow D_f: x\geq 1 \\ g(x)=\frac{x-2}{x+2} \Rightarrow D_g: x\neq -2 \end{cases}$$

حالا باید نامعادله رو حل کنیم؛

$$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq -2 \mid \frac{x-2}{x+2}\geq 1\}$$

طرفین وسطین که اینجا هرومه چون علامتشون رو نمی‌دونیم.

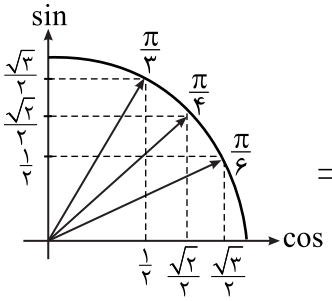
$$\frac{x-2}{x+2}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{x-2-x-2}{x+2}\geq 0 \Rightarrow \frac{-4}{x+2}\geq 0 \xrightarrow{\text{صورت منفیه}} x+2<0 \Rightarrow x<-2$$

که اشتراکش با $(x\neq -2)$ می‌شه همین $\boxed{x<-2}$!

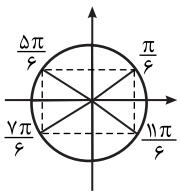
تیپ ۱۱ : مثلثات

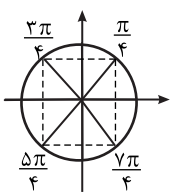
مقادیر نسبت‌های مثلثاتی

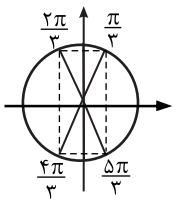
واسه این که نسبت‌های مثلثاتی رو کاملاً یاد بگیری از این روش که بهت می‌گم استفاده کن؛



$\Rightarrow$







بچه‌های $\frac{\pi}{6}$ اُمی	بچه‌های $\frac{\pi}{4}$ اُمی	بچه‌های $\frac{\pi}{3}$ اُمی
$\lvert\sin x\rvert=\frac{1}{2}$ و $\lvert\cos x\rvert=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\sin x\rvert=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\lvert\cos x\rvert=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\lvert\sin x\rvert=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\lvert\cos x\rvert=\frac{1}{2}$
مثلاً: $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ، $\cos\frac{7\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$	مثلاً: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	مثلاً: $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

اتحادهای مثلثاتی مقدّماتی و نتایج مهم آن‌ها: (همینا رو یاد بگیری بسه. لازم نیست ۲۰۰۰ تا فرمول حفظ کنی!)

اول بریم ۶ اتحاد اصلی رو با هم ببینیم؛

۱) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ ۲) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ۳) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
۵) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
۶) $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$
} فرمول‌های مجموع و تفاضل دو کمان

این همون ۶ تا رابطه‌ی اصلیه که بهت گفتم حالا بریم سراغ نتایجش!

خب اتحاد اول که ۴ تا نتیجه اصلی داره. اگه $\cos^۲\alpha$ بره پیش ۱ می‌شه $\boxed{\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha}$ و اگه $\cos^۲\alpha$ سر جاش بشینه و $\sin^۲\alpha$ بره پیش ۱ می‌شه $\boxed{\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha}$.

اگه طرفین اتحاد اول رو به $\cos^۲\alpha$ تقسیم کنیم داریم؛

$$\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\boxed{۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}$$

و اگه طرفین اتحاد اول رو به $\sin^۲\alpha$ تقسیم کنیم داریم؛

$$\frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\boxed{۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}$$

حالا واسه جمع‌بندی خوبه که اتحاد اول رو با نتایجش یه جا با هم ببینیم همراه با شماره‌گذاری اتحادها از شماره‌ی ۱ تا ۶ که رزرو شده و مال ۶ تا اتحاد اصلیه. پس بقیه رو از ۷ شماره‌گذاری می‌کنیم.

$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow$ (شماره ۱)
- $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ (شماره ۷)
- $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$ (شماره ۸)
- $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ (شماره ۹)
- $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ (شماره ۱۰)

حالا می‌ریم سراغ روابط ۲ و ۳.

اولاً مشخصه که tan و cat معکوس هم هستن پس داریم؛

$\boxed{\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}}$ و $\boxed{\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}}$ و ثانیاً چون معکوس هم هستن ضربشون یک می‌شه. چه جوری؟ اینجوری!

$$\tan\alpha.\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=۱\Rightarrow\boxed{\tan\alpha.\cot\alpha=۱}$$

پس مثل ۵ تای قبلی خوبه که این ۵ تا رو هم یه جا کنار هم ببینیمشون!

$\tan\alpha.\cot\alpha=۱\Rightarrow$ (شماره ۱۱)
- $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$ (شماره ۱۲)
- $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$ (شماره ۱۳)
- $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (شماره ۲)
- $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (شماره ۳)

و در نهایت می‌رسیم به نتایج روابط مجموع و تفاضل دو کمان یعنی روابط مثلثاتی ۲α.

کافیه تو روابط اصلی ۴ و ۵ و ۶ بجای βها α بذاریم. ok؟!

اول رابطه شماره ۴؛

$$۴)\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{if }\beta=\alpha}\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\Rightarrow\sin۲\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\boxed{\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha}$$ (شماره ۱۴)

حالا رابطه شماره ۵ و نتایج طلاییش:

$$۵)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\xrightarrow{\text{if } \beta=\alpha}\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}$$ شماره (۱۵)

حالا نتایج این رابطه خیلی مهمه بچه‌های عزیز.

اگه بجای $\sin^۲\alpha$، $۱-\cos^۲\alpha$ رو جاگذاری کنیم اینجوری می‌شه!

$$\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-(۱-\cos^۲\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱}$$ *شماره (۱۶)*

حالا می‌تونیم این رابطه رو به فرم تقلیل توان بنویسیم یعنی $\cos^۲\alpha$ رو یه طرف نگه داریم و عدد یک رو ببریم اون ور،

$$۲\cos^۲\alpha=۱+\cos۲\alpha\Rightarrow \boxed{\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos۲\alpha}{۲}}$$ * شماره (۱۷)

حالا اگه بجای $\cos^۲\alpha$، $۱-\sin^۲\alpha$ رو جاگذاری کنیم اینجوری می‌شه!

$$\cos۲\alpha=(۱-\sin^۲\alpha)-\sin^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha}$$ *شماره (۱۸)*

حالا می‌تونیم این رابطه رو به فرم تقلیل توان بنویسیم یعنی $\sin^۲\alpha$ رو یه طرف نگه داریم و عدد ۱ رو ببریم اون ور.

$$۲\sin^۲\alpha=۱-\cos۲\alpha\Rightarrow \boxed{\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos۲\alpha}{۲}}$$ * شماره (۱۹)

به شماره‌های ۱۷ و ۱۹ بدلیل استفاده‌های زیاد و تأثیر بسزایی که در حل مسائل مربوط به حساب دیفرانسیل دارن روابط تقلیل توان گفته می‌شه.

حالا می‌رسیم به آخر راه یعنی نتیجه رابطه شماره ۶ که آخرین اتحاد مثلثاتی اصلیه. کافیه دوباره α رو بجای β جایگزین کنیم.

$$۶)\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\xrightarrow{\text{if } \beta=\alpha}\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha\tan\alpha}\Rightarrow \boxed{\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}}$$ *شماره (۲۰)*

حالا ۲۰ تا اتحاد مثلثاتی داریم که همه رو یه جا می‌خوایم در کنار هم ببینیم.

$$۴)\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\quad ۳)\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad ۲)\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad ۱)\ \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$۵)\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\quad ۶)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}\quad ۷)\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$$

$$۸)\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$$

$$۹)۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$۱۰)۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$۱۱)\tan\alpha.\cot\alpha=۱$$

$$۱۲)\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$$

$$۱۳)\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$$

$$۱۴)\ \sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$۱۵)\ \cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$$

$$۱۶)\ \cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$$

۱۷) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

۱۸) $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

۱۹) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

۲۰) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۲۳ـ اگر $\sin^2\alpha\cot\alpha<0$ در این صورت کمان α در کدام ناحیه دایره‌ی مثلثاتی واقع است؟

خب کافیه بجای $\cot\alpha$ از معادلش استفاده کنیم یعنی $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ *(شماره ۳)*

پس داریم: $\sin^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha < 0$

حالا چون صورت مسأله گفته که ضرب sin و cos منفیه یعنی این دو تا نسبت مثلثاتی مختلف العلامتن یعنی کمان α یـا بایـد تـو ناحیـه دوم باشه و یا ناحیه چهارم.

۲۴ـ اگر $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ و $\tan\beta=\frac{3}{4}$ و α و β دو زاویه‌ی حاده باشند. عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin(\alpha+\beta)$ **ب)** $\tan 2\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{5}{13} \xrightarrow{\sin\alpha=\frac{y}{r}} \begin{cases} y=5 \\ r=13 \end{cases} \xrightarrow{\text{اعـــداد فیثـــاغورثی}} x=12$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{12}{13}\ ,\ \tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{5}{12}\ ,\ \cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{12}{5}$$

$$\tan\beta=\frac{3}{4} \xrightarrow{\tan\beta=\frac{y}{x}} \begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اعـــداد فیثـــاغورثی}} r=5 \Rightarrow \sin\beta=\frac{y}{r}=\frac{3}{5}\ ,\ \cos\beta=\frac{x}{r}=\frac{4}{5}\ ,\ \cot\beta=\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$$

حالا بریم تو کار الف و ب. اول الف دوم ب!

الف) $\sin(\alpha+\beta) \xrightarrow{\text{رابطـــه ۴}} \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \xrightarrow{\text{جاگـذاری از بـالا}} \frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{56}{65}$

ب) $\tan(2\alpha) \xrightarrow{\text{رابطـــه ۲۰}} \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{5}{12})}{1-(\frac{5}{12})^2}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}=\frac{120}{119}$

تیپ ۱: تعیین نسبت‌های مثلثاتی زوایای غریبه با استفاده از روابط مجموع و تفاضل دو کمان

۱) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

۲) $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-(\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1)}=\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$

۳) $\cos 15^\circ=\cos(45-30)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

تیپ ۲: تعیین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $22/5^\circ$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ=\frac{1+\cos(2\times 22/5)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 22/5^\circ=\frac{1+\cos 45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

می‌دونم باید $(\pm)$ بذاریم ولی چون $۲۲/۵^\circ$ تو ربع اوله فقط $(+)$ رو قبول می‌کنیم.

$$\tan ۲۲/۵^\circ = \frac{\sin ۲۲/۵^\circ}{\cos ۲۲/۵^\circ} \ , \ \cot ۲۲/۵^\circ = \frac{\cos ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ}$$

تیپ ۳ : اثبات کنید.

درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $\sin(x - \frac{\pi}{۶}) + \cos(x + \frac{\pi}{۳}) = ۰$

خب همونطور که حتماً خودت متوجه شدی این نسبت‌ها جزء کمان‌های متمم و مکمل و قرینه نیستن مثل $\sin(\pi + x)$ که سریع بتونی بگی می‌شه $(-\sin x)$ بلکه باید از روابط ۴ و ۵ استفاده کنی وبسط‌هاش رو بنویسی.

$$\sin(x - \frac{\pi}{۶}) = \sin x \cos\frac{\pi}{۶} - \cos x \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x - \frac{۱}{۲}\cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{۳}) = \cos x \cos\frac{\pi}{۳} - \sin x \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x$$

چون این دو تا عبارت دقیقاً قرینه‌ی همدیگه هستن جمعشون صفر می‌شه!

۲) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = ۲\sin a \cos b$

اولاً یه موقع . . . نشی بشینی این روابط رو حفظ کنی!!!

فقط همون ۲۰ تای خودمونو بلد باش عزیزم. اینجا هم فقط شماره ۴ کفایت می‌کنه.

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = ۲\sin a \cos b$$

۳) $\sin ۲x \cos x - \cos ۲x \sin x = \sin x$

$\sin(۲x - x) = \sin x$ خب سمت چپ تساوی باید شمارو یاد رابطه شماره ۴ بندازه. آخرین. $\sin(۲x-x)$ بوده که اینطوری شده.

۴) $\frac{\sin ۲\alpha}{۱ + \cos ۲\alpha} = ?$

کافیه از رابطه ۱۴ و فرم طرفین وسطین شده‌ی رابطه ۱۷ استفاده کنیم.

۱۴) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

۱۷) $\cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow ۱ + \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha$

پس داریم: $\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^۲\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

۵) $\frac{\sin x}{۱ + \cos^۲ x} = ?$

خب این هم همون الفه دیگه. تنها تفاوتش اینه که اونجا کمان‌ها دو برابره و کار راحت‌تر!

اینجا هم از همون ۱۴ و ۱۷ استفاده می‌کنیم.

۱۴) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$

۱۷) $۱ + \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha \Rightarrow ۱ + \cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$

پس داریم: $\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}} = \tan\frac{\alpha}{۲}$

۶) $\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$

$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ خب تو رابطه شماره ۱۴ داشتیم

حالا اگه همه α ها رو تبدیل $\frac{\alpha}{۲}$ کنیم می‌رسیم به الف

توضیح بدم که بجای α ها هر متغیر دیگه‌ای هم می‌تونه قرار بگیره! ok ؛)

۷) $\cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - ۱$

خب ما رابطه $\cos ۲\alpha$ رو که بلدیم (شماره ۱۵) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$ چون اینجا همه‌ی نسبت‌ها cos هستن کافیه بجای $\sin^۲$ بذاریم $۱-\cos^۲$ پس داریم: (شماره ۱۶) $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - (۱-\cos^۲\alpha) = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ حالا اگه بجای α ها $\frac{\alpha}{۲}$ بذاریم رابطه (ب) بدست میاد. ok ؛)

۸) $۱-\cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$

خب ما رابطه شماره ۱۹ رو که بلدیم:

$$\sin^۲\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

کافیه طرفین وسطین کنیم:

$$۱-\cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha$$

و در آخرین مرحله بجای α ها $\frac{\alpha}{۲}$ می‌ذاریم: $۱-\cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ درست شد دیگه. ok ؛)

۹) $\tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}$

بابا چون این همون رابطه‌ی شماره‌ی بیسته که بجای α ها $\frac{\alpha}{۲}$ گذاشتن. باور نداری دوباره ببین!

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \xrightarrow{\text{if } \alpha = \frac{\alpha}{۲}} \tan\alpha = \frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

۱۰) $\frac{۲}{\tan\alpha - \cot\alpha} = \sin ۲\alpha$

اول رابطه رو معکوس می‌کنم چون می‌خوام از شماره‌های ۲ و ۳ استفاده کنم.

$$\frac{\tan\alpha + \cot\alpha}{۲} = \frac{۱}{\sin ۲\alpha} \Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

حالا از سمت چپ شروع می‌کنم به باز کردن tan و cot

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

(شماره ۱ — شماره ۱۴)

۱۱) $\cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = ۲\cot x$

از سمت چپ راه می‌افتیم ولی اول بجای $\frac{x}{۲}$ ها می‌ذاریم α.

$$\cot\alpha - \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

حله دیگه!

$$= \frac{\cos ۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = ۲\cot ۲\alpha$$

فصل ۳

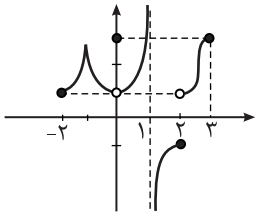
حد و پیوستگی

تیپ‌بندی سؤالات فصل سوم (حدوداً از سؤال ۹ تا ۱۱ امتحان نهایی) [۶ نمره]

طراحان محترم از بین تیپ‌های زیر ۳ تا رو انتخاب می‌کنن و سؤال می‌دن!

تیپ ۱: حد از روی نمودار

شرایط وجود حد از روی نمودار
۱ـ داشتن همسایگی در حداقل یک طرف نقطه‌ی مورد نظر.
۲ـ برابری حدود چپ و راست.



حد تابع در صورت وجود یکتاست.
با توجه به شکل:

$x=-۲$: فقط حد راست وجود داره و برابر یکه! بنابراین کلاً حد تو نقطه‌ی $x=-۲$ برابر یک میشه!
$$\lim_{x\to -۲} f(x)=۱$$

$x=۳$: تو نقطه‌ی $x=۳$ فقط حد چپ وجود داره و ۳ میشه. بنابراین حد تو نقطه‌ی $x=۳$ برابر ۳ میشه!
$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۳$$

$x=۰$: تو نقطه‌ی صفر حد وجود داره ولی با مقدار برابر نیست.
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱\\ f(۰)=۳\end{cases}$$

$x=۱,۲$: تو نقطه‌ی ۱ و ۲ هم که حد وجود نداره چون شاخه‌ها به هم نرسیدن.
$$\lim_{x\to ۱} f(x)\begin{cases}۱^+:-\infty\\ ۱^-:+\infty\end{cases}\quad,\quad \lim_{x\to ۲} f(x)\begin{cases}۲^+:۱\\ ۲^-:-۱\end{cases}$$

حد در توابع قدرمطلقی

ضب قدر مطلق که همیشه ازمون علامت می‌خواست اگه مثبت باشه خودش میار بیرون، اگه منفی باشه قرینه‌ش. فقط زمانی چپ و راستش می‌کنیم که x به سمت ریشه عبارت داخل قدر بره.
سه تا مثال زیر رو با هم مقایسه کن:

x به سمت ریشه داخل قدر نرفته!
$$\lim_{x\to ۰}\frac{|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱$$
$$\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۱}{x-۱}=۱$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|}{x-۱}\begin{cases}۱^+:\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x-۱}=۱\\ ۱^-:\lim\limits_{x\to ۱}\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱\end{cases}$$

تیپ ۲: بررسی شرایط وجود حد در توابع چندضابطه‌ای، رادیکالی و مرکب

۱. آیا تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۳x-۱}{x} & x<۱\\ x^۲+۱ & x>۱\end{cases}$ **در** $x=۱$ **حد دارد؟ چرا؟**

چون حد چپ و راست برابره ← تابع در این نقطه حد داره!
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{۳(۱)-۱}{۱}=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱^۲+۱=۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

۲. a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+1 & x<4 \\ -bx+2 & x\geq 4 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=4$ دارای حدی برابر (-2) باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-b(4)+2=-2\Rightarrow -4b=-4\Rightarrow b=+1 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=a\sqrt{4}+1=-2\Rightarrow 2a+1=-2\Rightarrow a=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

۳. آیا تابع $f(x)=\sqrt{x-3}$ وقتی $x\to 3$ دارای حد است؟ چرا؟

چون فقط در سمت راست ۳ تعریف شده، فقط از راست بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$$

۴. در صورتی که $f(x+2)=\frac{x+4}{x}$ باشد، $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ را حساب کنید.

$$x+2=3 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1} f(x+2)=\frac{1+4}{1}=5$$

تیپ ۳: محاسبه‌ی انواع حد

۱) $\frac{\text{عدد}}{\text{حدی}0}$ ⟵ $\frac{\text{عدد}(-)}{0^-}=+\infty$ و $\frac{\text{عدد}(-)}{0^+}=-\infty$ و $\frac{\text{عدد}(+)}{0^-}=-\infty$ و $\frac{\text{عدد}(+)}{0^+}=+\infty$

۲) $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⟵ صورت و مخرج چندجمله‌ای: حذف عامل ابهام در صورت و مخرج.
⟵ صورت یا مخرج یا هر دو رادیکالی: ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی.

۳) $\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ صورت و مخرج چندجمله‌ای: استفاده از قاعده‌ی پرتوان.
⟵ صورت یا مخرج یا هر دو رادیکالی: فاکتورگیری از پرتوان زیر رادیکال.

۴) مثلثاتی ⟵ حالت غیر مبهم: کافیست جاگذاری کنیم.
⟵ $\frac{\text{عدد}}{\text{حدی}0}$: از دایره‌ی مثلثاتی برای تشخیص نوع صفر استفاده می‌کنیم.
⟵ $\frac{0}{0}:\ \frac{\sin u}{u}\ ,\ \frac{\tan u}{u}$ رو می‌سازیم.

۱) $\frac{\text{عدد}}{\text{حدی}0}$:

۱) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x+3}{(x-2)^2}=\frac{-2+3}{(2^--2)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

این‌جا چون مخرج به توان ۲ می‌رسه، صفر مثبت میشه.

۲) $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}=\frac{\sqrt{4}+1}{4^--4}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

تو صورت که 4^- با 4^+ فرقی نمی‌کنه. پس همون ۴ رو می‌ذاریم.

فقط زمانی مد چپ و راست فرق می‌کنه که x بره به سمت ریشه مخرج یا قدرمطلق.

۳) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x+5}{x^2-4}=\frac{3(2)+5}{(2^+)^2-4}=\frac{11}{4^+-4}=\frac{11}{0^+}=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{9-x^2}=\frac{3+1}{9-9^+}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

۲) $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2+x-6}{9x^2+3x-12}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x+6)}{(x-1)(9x+12)}=\frac{11}{21}$

وقتی جاگذاری می‌کنی $\frac{0}{0}$ میشه. چون x به سمت یک رفته پس حتماً هم صورت و هم مخرج $(x-1)$ دارن. اصلاً وقتی $(x\to a)$ می‌ره و $(\frac{0}{0})$ می‌شه حتماً عامل ابهام $(x-a)$ بوده!

۲) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۲)}{(x-۱)}=۴$

برای پیدا کردن عامل درجه دوم لازمه تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^۳+x-۲ & x-۱ \\ \hline x^۳-x^۲ & x^۲+x+۲ \\ \hline x^۲+x & \\ x^۲-x & \\ \hline ۲x-۲ & \\ ۲x-۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

واسه امتحان درستی جواب حدت از این روش که بهت می‌گم استفاده کن و حالشو ببر! $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

یعنی از صورت جدا و از مخرج جدا مشتق بگیر و به هم تقسیم کن! مثلاً جواب دو تا مد قبلی رو با این روش امتحان می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۵x^۲+x-۶}{۹x^۲+۳x-۱۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱۰x+۱}{۱۸x+۳}=\frac{۱۱}{۲۱}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+۱}{۱}=۴$$

به این روش می‌گن هوپیتال! فقط حواست باشه تو امتحان نهایی نمره نداره‌ها! جو گیر نشی هر چی دیدی هوپیتال بزنی!!!

۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۱}{\sqrt{x+۱}+۱}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x}=\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}$

ازدواج

عدد رو جاگذاری کن بذارش پشت حد

۴) $\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\times\text{ مزدوج}}\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲+\sqrt{x}}{\underbrace{۲+\sqrt{x}}_{\text{عدد}}}\times\frac{\overbrace{۳+\sqrt{۲x+۱}}^{\text{عدد}}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}=\frac{۶}{۴}\lim_{x\to ۴}\frac{۴-x}{۹-(۲x+۱)}=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۴}\frac{۴-x}{۲(۴-x)}=\frac{۳}{۴}$

تیپ ۴: حدود مثلثاتی

رفع ابهام $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ مثلثاتی

دو تا قضیه مهم داریم:

۱) $\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱$ و ۲) $\lim_{u\to ۰}\frac{\tan u}{u}=۱$

حواست باشه کمان باید به سمت صفر بره. کمان، کمان، کمان!

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$

۲) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\infty}{\infty}=\frac{\text{عددی بین }-۱\text{ و }۱}{\infty}=۰$

دقت کن وقتی $x\to\infty$، $\frac{۱}{x}\to ۰$ پس متغیر رو تغییر دادیم.

۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}=\frac{\sin\infty}{\infty}=\frac{\text{عدد}}{\infty}=۰$

۴) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=۱$

۵) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=۱$

حواست باشه تو (۵) کمان به سمت صفر می‌ره که از قضیه استفاده کردیم ولی تو (۶)، x به سمت صفر می‌ره که دیگه کمان به صفر نمی‌ره و قضیه نداریم!

۶) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\frac{\sin(-\frac{\pi}{۶})}{-\frac{\pi}{۶}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\pi}{۶}}=\frac{۳}{\pi}$

$$\begin{cases} ۱)\ \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin mx}{x}=m \\ ۲)\ \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan mx}{x}=m \end{cases}$$

* کتاب بهمون اجازه داده از این دو تا هم استفاده کنیم:

$$۷)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin ۲(x-\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۲t}{t}=۲$$

$$۸)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}=۳$$

$$۹)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۳x}=\frac{۱}{۳}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{x}=\frac{۱}{۳}\times ۵=\frac{۵}{۳}$$

$$۱۰)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۳x}\sin\frac{۳}{۲}x=\frac{۲}{۳}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{۳}{۲}x}{x}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۱$$

$$۱۱)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^۲-a^۲}=\frac{۱}{x+a}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\frac{۱}{a+a}\times ۱=\frac{۱}{۲a}$$

$$۱۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x\tan ۳x}{۳x^۲}=\frac{۱}{۳}\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x}{x}=\frac{۱}{۳}\times ۱\times ۳=۱$$

$$۱۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}=۱\times ۲\times ۳=۶$$

$$۱۴)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{۴x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۴(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱}{۴}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{۴})(۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴})}{x-\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\frac{۱}{۴}\times(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{۴})}{x-\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}{۴(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{۴(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}}{۴\cos x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

($\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$)

می‌پرسی از کجا آوردی اون صورت کسر رو؟! ببین بهت بگم:

$$\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}\quad\Rightarrow\quad\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}=\tan(x-\frac{\pi}{۴})(۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴})$$

آخرین مدلی که بهت سؤال می‌دن بازی با $\cos x$، تو صورت سؤال مده! تو چهار مدل $\cos x$ رو وارد می‌کنن!

مدل اول: کسینوس تنها: وقتی $x\to ۰$ کمان و $\cos$ رو تنها گیر آوردی بیاش ۱ بذار. مثال گفته (k) رو پیدا کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan kx}{\cos kx.\sin ۲x}=۲\quad\Rightarrow\quad\frac{۱}{\cos ۰}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\tan kx}{x}}{\frac{\sin ۲x}{x}}=\frac{k}{۲}=۲\quad\Rightarrow\quad k=۴$$

مدل دوم: $\cos^۲ x-۱$ **که بجاش** $\sin^۲ x$ **می‌ذاری.**

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x^۲}=(\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x})^۲=۱$$

مدل سوم: $1-\cos 2x$ که بجاش از فرمول طلایی $2\sin^2 x$ می‌ذاری! یعنی از این تبدیل استفاده می‌کنی که:

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \xrightarrow{\text{پس}} 1-\cos(\text{هر چی}) = 2\sin^2(\frac{\text{هر چی}}{2})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2 = 2$$

مدل چهارم: $1-\cos x$ که حتماً در مزدوج ضرب می‌کنی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos x}^{\text{ازدواج}}}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos 0)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

یا روش دوم عین مدل سوم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2}{\frac{x^2}{(\frac{x}{2})^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

و حالا خفن‌ترین حد کتابتون:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

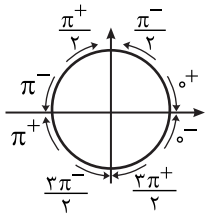
حالا یه cos تنها تو مخرج داریم که بجاش یک می‌ذاریم و یه $1-\cos x$ تو صورت که ضربدر مزدوج می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\overbrace{(1-\cos x)}^{\text{ازدواج}}}{x^3}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin^2 x)}{x^3\times 2} = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^3 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

بعداً تو کتاب بانکمون حل تستی این مثال رو به شکل زیر می‌بینی:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

رفع ابهام حالت $\frac{\text{عدد}}{\text{حدی }0}$ زمانی که مخرج مثلثاتی باشه.



اولاً باید این دایره رو خوب بلد باشی؛

حالا مثلاً می‌گه $\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\frac{1}{\cos x}$ ؛

طبق دایره‌ی بالا $\frac{\pi^+}{2}$ *تو ناحیه‌ی دومه و* cos *تو این ناحیه منفیه! پس جواب میشه* $\frac{1}{0^-}$ *یعنی* $-\infty$.

اگه بگه $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}$ *اینجا دیگه* 0^+ *با* 0^- *فرقی نداره چون* cos *در هر صورت* 1^- *میشه. مگه* cos *می‌تونه از یک بیش‌تر بشه؟! بنابراین* $1-1^- = 0^+$.

پس داریم؛ $\frac{1}{0^+} = +\infty$

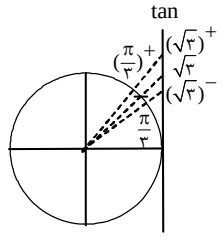
0^- یعنی ناحیه‌ی چهارم و **Sin** *تو این ناحیه منفیه.*

۱) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \tan^۲ x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} (\frac{\sin x}{\cos x})^۲ = (\frac{۱}{-۰}) = (-\infty)^۲ = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to۰^+} \cot^۳ x = \lim\limits_{x\to۰^+} (\frac{\cos x}{\sin x})^۳ = (\frac{۱}{+۰})^۳ = (+\infty)^۳ = +\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}^-} \frac{\tan x + \sqrt{۳}}{\tan x - \sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{(\sqrt{۳})^- - \sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{-۰} = -\infty$

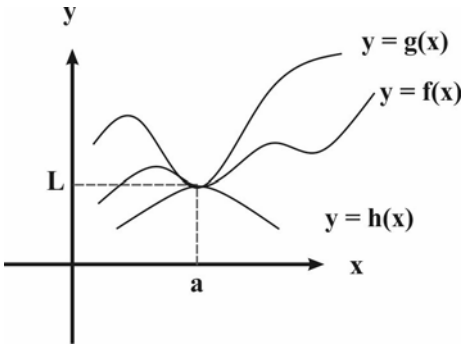


واسه آخری هم برات شکل می‌کشم؛

تو ربع اول (tan) *یه تابع صعودیه، پس هر چی توان کم‌تر، زندگی بهتر!!!*

نه ببینید هر چی توان کم‌تر، جواب (tan) *هم کم‌تر!*

تیپ ۵: قضیه فشردگی (ساندویچ)



هر وقت یه تابعی بین دو تابع دیگه قرار بگیره (ساندویچ بشه!) و حد دو عبارت کناری زمانی که x به سمت عدد a می‌ره با هم برابر باشن، عبارت وسطی هم حدش همون می‌شه. به زبون ریاضی این‌جوری می‌گیم که:

$$h(x) \le f(x) \le g(x) \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$$

با استفاده از همین قضیه است که ثابت می‌شه $\lim\limits_{x\to۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$

همون‌طوری که کتاب بهت می‌گه که حوالی صفر ریشه رابطه‌ی روبه‌رو برقراره: $\sin x < x < \tan x$

حالا واسه این‌که $\frac{\sin x}{x}$ رو بسازیم اول هر سه طرف رو به یه $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

پس داریم:

$$۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{۱}} \Rightarrow ۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{۱}{\cos x}$$

حالا کافیه طرفین رو معکوس کنیم. حواست باشه که جهت نامساوی عوض می‌شه.

$$۱ > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

حالا واسه این‌که جهت‌ها استاندارد باشه؛ جای طرفین رو عوض می‌کنیم:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to۰} \cos x = ۱ \\ \lim\limits_{x\to۰} ۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

مثال: اگر به ازای هر x داشته باشیم $۲ - x^۲ \le g(x) \le ۲\cos x$، حد تابع $g(x)$ را در $x = ۰$ تعیین کنید.

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to۰} ۲ - x^۲ = ۲ \\ \lim\limits_{x\to۰} ۲\cos x = ۲\times ۱ = ۱ \end{matrix} \xrightarrow{\text{طبق قضیه فشردگی}} \lim\limits_{x\to۰} g(x) = ۲$$

مثال : فرض کنید به ازای هر $-۱\le x\le ۱$ داشته باشیم: $\sqrt{۳-۲x^۲}\le f(x)\le\sqrt{۳+x^۲}$ در ایـن‌صـورت حاصـل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}$ را به‌دست آورید.

از قضیه‌ی فشردگی (ساندویچ) استفاده می‌کنیم و $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ رو به‌دست میاریم:

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۳-۲x^۲}=\sqrt{۳}\\ \lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۳+x^۲}=\sqrt{۳}\end{matrix}\xrightarrow{\text{طبـق قضـیه فشـردگی}}\lim_{x\to ۰} f(x)=\sqrt{۳}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال : اگر $|f(x)|\le ۱-\cos x$ باشد، حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to ۰$ را به‌دست آورید.

$$|f(x)|\le ۱-\cos x\Rightarrow \cos x-۱\le f(x)\le ۱-\cos x$$

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to ۰}\cos x-۱=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰}۱-\cos x=۰\end{matrix}\xrightarrow{\text{طبـق قضـیه فشـردگی}}\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$

تیپ ۶ حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$:

حد در بینهایت: *(قواعد در بینهایت، هم‌ارزی‌ها و رابطه رشد)*

در بسیاری از مدل‌های ریاضی لازمه حد تابع رو برای مقادیر بسیار بزرگ x بررسی کنیم.

حالا برای بررسی حد تابع در بینهایت کافیه قاعده‌ی زیر رو بلد باشی!

به جای هر عبارت می‌توان جمله پرتوان اون‌رو قرار داد.

حالت کلی : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-۱}+c'x^{m-۲}+\cdots}\Rightarrow\begin{cases}n>m:\infty\\ n=m:\frac{a}{a'}\\ n<m:\text{صـفر}\end{cases}$

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲+۵x-۶}{(۵x+۷)^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲}{۲۵x^۲}=\frac{۳}{۲۵}$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)}{x^۳-۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۳+۳x^۲-x-۱}{x^۳-۲}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۳}{x^۳}=۳$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳x^۲+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{\sqrt{۳}|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{\sqrt{۳}x}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x+۱}{۳x+\sqrt{x^۲-۱}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x}{۳x+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x}{۳x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x}{۴x}=\frac{۵}{۴}$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲+\sqrt{x-۱}}{۵x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲(۳+\sqrt{\frac{۱}{x^۳}-\frac{۱}{x^۴}})}{x(۵-\sqrt{\frac{۱}{x}})}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۳}{۵}x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۳}{۵}x)=-\infty\end{cases}$

زیر رادیکال چه جوری فاکتور گرفتیم؟!

$$\sqrt{x-۱}=\sqrt{x^۴(\frac{۱}{x^۳}-\frac{۱}{x^۴})}=x^۲\sqrt{\frac{۱}{x^۳}-\frac{۱}{x^۴}}$$

مثال: a و b **را طوری بیابید که** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^۳+x^۲+۱}{۶x^b-x}=-\frac{۲}{۳}$ **باشد.**

حد در بی‌نهایته. پس از قاعده‌ی پرتوان استفاده می‌کنیم و به جای هر عبارت فقط جمله‌ی پرتوان اون عبارت رو قرار می‌دیم:

صورت و مخرج هم توان بودن که جواب عدد به‌دست اومده دیگه

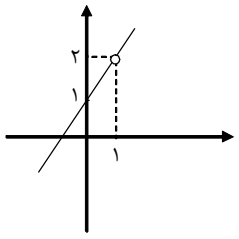
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۳}{۶x^b}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}b=۳\\ \frac{a}{۶}=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=-۴\end{cases}$$

تیپ ۷: پیوستگی

تعیین بازه یا فاصله‌ی پیوستگی و یا نقاط ناپیوستگی: *واسه تعیین بازه‌ی پیوستگی تو توابع کسری و رادیکالی کافیه تعیین دامنه کنی!*

* *توابع کسری در ریشه‌های مخرج ناپیوسته‌اند. اگه* $(x=a)$ *هم ریشه‌ی صورت و هم ریشه‌ی مخرج بود، باز هم ناپیوسته‌اس!*

$$۱)\ f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\begin{cases}x+۱ & x\neq ۱\\ \text{ت ن} & x=۱\end{cases}$$



شکلشو ببین؛

الان $(x=۱)$ *هم ریشه‌ی صورته هم ریشه‌ی مخرج*

$$۲)\ f(x)=\frac{۳x+۲}{x^۲+x-۲}\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=۱\Rightarrow$$

تابع در نقاط به طول ۱ و ۲- ناپیوسته‌است.

$$۳)\ f(x)=\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}\quad\Rightarrow\quad\frac{x+۱}{x-۱}\geq ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$		
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$		
P	$+$	۰	$-$	∞	$+$		

ریشه‌های صورت و مخرج $\begin{cases}\text{ریشه صورت}: x=-۱\\ \text{ریشه مخرج}: x=+۱\end{cases}$

$(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$: بازه پیوستگی

ابتدا باید تعیین دامنه کنیم؛

$$۴)\ f(x)=\sqrt{\frac{-۲}{x+۱}}\quad\Rightarrow\quad\frac{-۲}{x+۱}\geq ۰\quad\Rightarrow\quad x+۱<۰\quad\Rightarrow\quad x<-۱\quad\Rightarrow\quad D_f=(-\infty,-۱)$$

$$۵)\ f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۳-۲x^۲}\quad\Rightarrow\quad x^۳-۲x^۲=۰\quad\Rightarrow\quad x^۲(x-۲)=۰\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=۰\\ x=۲\end{cases}$$

فاصله پیوستگی: $(-\infty,۰)\cup(۰,۲)\cup(۲,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

۵. فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ **را بنویسید.**

گفتیم که تابع تو دامنه‌ی خودش پیوسته‌س، پس می‌ریم سراغ تعیین دامنه.

زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نباید منفی بشه:

$$۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow -x^۲\geq -۴\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$

$[-۲,۲]$: بازه‌ی پیوستگی

۶. طول نقاط ناپیوستگی $f(x)=\frac{x}{(x^۲-۳)(x^۲+x+۱)}$ **را تعیین کنید.**

نقاطی که تو دامنه‌ی تابع نباشن، نقاط ناپیوستگی تابع‌ان، پس ریشه‌های مخرج طول نقاط ناپیوستگی می‌شن.

$$x^۲-۳=۰\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$x^۲+x+۱=۰\ ,\ \Delta=۱^۲-۴(۱)(۱)=-۳<۰\Rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی نداره

$x=\pm\sqrt{۳}$: طول نقاط ناپیوستگی

تیپ ۱: بررسی پیوستگی

پیوستگی { یا میگن پیوستگی رو بررسی کن!
یا میگن **a** و **b** را چنان تعیین کن که تابع پیوسته باشه!

۱) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}+۳x^{۲}-۲۰}{x^{۲}-۴} & , \quad x<۲\\ ۲x+۲ & , \quad x>۲\\ ۶ & , \quad x=۲\end{cases}$

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=f(۲)$

$f(۲)=۶ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} (۲x+۲)=(۲\times ۲)+۲=۶$

$\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۳}+۳x^{۲}-۲۰}{x^{۲}-۴}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)(x^{۲}+۵x+۱۰)}{(x-۲)(x+۲)}=\dfrac{۲۴}{۴}=۶$

پس این تابع تو $x=۲$ پیوسته‌س.

۲) $f(x)=\begin{cases}۳x+\dfrac{|۲x|}{x} & , \quad x\neq ۰\\ ۲ & , \quad x=۰\end{cases}$

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=f(۰)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^{-}}(۳x+\dfrac{-۲x}{x})=\lim\limits_{x\to ۰^{-}} ۳x-۲=-۲ \xrightarrow{f(۰)=۲} \lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)\neq f(۰)\\ \lim\limits_{x\to ۰^{+}}(۳x+\dfrac{۲x}{x})=\lim\limits_{x\to ۰^{+}} ۳x+۲=۲ \xrightarrow{f(۰)=۲} \lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=f(۰)\end{cases}$$

فقط حد راست تابع با مقدار تابع برابره، پس این تابع از راست پیوسته‌س.

تیپ ۲: تعیین a و b:

۱) $f(x)=\begin{cases}۳-۲ax^{۲} & , \quad x<-۱\\ x+۱ & , \quad x=-۱\\ b|x|+۱ & , \quad x>-۱\end{cases}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^{-}} ۳-۲ax^{۲}=۳-۲a(-۱)^{۲}=۳-۲a\\ \lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^{+}} b|x|+۱=b(+۱)+۱=b+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳-۲a=۰\to a=\dfrac{۳}{۲}\\ b+۱=۰\to b=-۱\end{cases}$$

حد چپ و راست رو مساوی $f(-۱)$ قرار دادیم.

$f(-۱)=-۱+۱=۰$

۲) $f(x)=\begin{cases}۲ax^{۲}+bx+۱ & , \quad x<۱\\ |x| & , \quad x=۱\\ a\sin(x-۱)+۲b, & x>۱\end{cases}$

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=f(۱)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(a\sin(x-۱)+۲b)=۲b\\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(۲ax^{۲}+bx+۱)=۲a+b+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲b=۱ \quad\Rightarrow\quad b=\dfrac{۱}{۲}\\ ۲a+b+۱=۱ \quad\Rightarrow\quad ۲a+\dfrac{۱}{۲}+۱=۱ \quad\Rightarrow\quad a=-\dfrac{۱}{۴}\end{cases}$$

$f(۱)=|۱|=۱$

فصل ۴

مشتق‌گیـــری

تیپ‌بندی سؤالات فصل چهارم (حدوداً از سؤال ۱۲ تا ۱۵ امتحان نهایی) [۴ نمره]

طراحان محترم از بین تیپ‌های زیر چهار تا رو انتخاب می‌کنن و سؤال می‌دن!

تیپ ۱: مشتق‌گیری

فرمول‌ها و قوانین محاسبه‌ی مشتق

۱) $y=c \Rightarrow y'=0$ ۲) $y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$ ۳) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

۴) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$ ۵) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$ ۶) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

۷) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ۸) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ۹) $y=\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

تذکر : تو فرمول‌ها u و v توابعی از x هستند.

فرمول‌ها و قوانین مشتق توابع مثلثاتی

۱) $y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$ ۲) $y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$

۳) $y=\tan u \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$ ۴) $y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

از شماره ۱ تا ۴ مشتق توابع مثلثاتی رو دیدیم که توانشون (۱) بود، حال اگر توان بیش‌تر از ۱ باشد به طریق زیر عمل می‌کنیم.

مثلاً اگه بخوایم از تابع $y=\sin^n(u)$ *مشتق بگیریم با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع مرکب؛*

$$y'=nu'\cos u\ \sin^{n-1}u$$

توان ← مشتق کمان ↓ مشتق تابع → خود تابع با یه توان کم‌تر

مشتق تابع مرکب

اگه تابع **g** *تو نقطه‌ی* **a** *و تابع* **f** *تو نقطه‌ی* $g(a)$ *مشتق‌پذیر باشن، تابع* $F=fog$ *هم تو* **a** *مشتق‌پذیره و داریم؛*

$$F'(a)=(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

به بیان ساده تر؛

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

بیان قضیه به فرم دیفرانسیلی:

$$y'_x=y'_u\times u'_x \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

تیپ ۲: مثال‌های قدم به قدم واسه آموزش مشتق‌گیری

$y=c \Rightarrow y'=0$

۱) $y=۱۳۹۱ \Rightarrow y'=0$

$y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

۱) $y=x^7 \Rightarrow y'=7x^6$

$y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۱) $y=3x^5-5x^2 \Rightarrow y'=15x^4-10x$

$y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

۱) $y=(x^4-x^3+x^2-1)^5 \Rightarrow y'=5(4x^3-3x^2+2x)(x^4-x^3+x^2-1)^4$

$y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۱) $y=(3x-2)(x^2+1) \Rightarrow y'=3(x^2+1)+2x(3x-2)$

۲) $y=(x^5-3x)(x+1)^4 \Rightarrow y'=(5x^4-3)(x+1)^4+4(x+1)^3(x^5-3x)$

$$y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$$

۱) $y=\frac{۲x-۳}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{۲(۳x+۵)-۳(۲x-۳)}{(۳x+۵)^{۲}}=\frac{۱۹}{(۳x+۵)^{۲}}$

۲) $y=\frac{۳(۲x+۵)^{۲}}{x^{۳}+۱}\Rightarrow y'=\frac{(۳)(۲)(۲)(۲x+۵)(x^{۳}+۱)-(۳x^{۲})(۳(۲x+۵)^{۲})}{(x^{۳}+۱)^{۲}}=\frac{۱۲(۲x+۵)(x^{۳}+۱)-۹x^{۲}(۲x+۵)^{۲}}{(x^{۳}+۱)^{۲}}$

۳) $y=\frac{۱}{x^{۲}+x-۲}\Rightarrow y'=\frac{-(۲x+۱)}{(x^{۲}+x-۲)^{۲}}$

۴) $y=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{\frac{x+۱}{x}}=\frac{x}{۱+x}\Rightarrow y'=\frac{(۱+x)-x}{(۱+x)^{۲}}=\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}$

$$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

۱) $y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۲) $y=\sqrt{۷x+۳}\Rightarrow y'=\frac{۷}{۲\sqrt{۷x+۳}}$

۳) $y=\sqrt{۴-x^{۲}}\Rightarrow y'=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^{۲}}}$

۵) $y=(\frac{۱}{x}-\sqrt{x})^{۵}\Rightarrow y'=۵(\frac{-۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\frac{۱}{x}-\sqrt{x})^{۴}$

۶) $y=\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}})(۳x+۵)-۳\sqrt{x^{۲}-۱}}{(۳x+۵)^{۲}}$

۸) $y=\frac{x}{x+\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{(۱)(x+\sqrt{x})-(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})x}{(x+\sqrt{x})^{۲}}$

۱۰) $y=\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}\Rightarrow y'=\frac{\frac{۲(۳x-۱)-۳(۲x+۵)}{(۳x-۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}}\Rightarrow y'=\frac{-۱۷}{۲\sqrt{\frac{(۳x-۱)^{۴}(۲x+۵)}{(۳x-۱)}}}\Rightarrow y'=\frac{-۱۷}{۲\sqrt{(۲x+۵)(۳x-۱)^{۳}}}$

$$y=\sqrt[m]{u^{n}}\Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

۱) $y=\sqrt[۳]{x^{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۲(۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$

بیخود نگو صورت میشه $۲x$! اشتباه نکن! زیر توان رو u بگیری، u' میشه (۱)!

۲) $y=\sqrt[۳]{x^{۲}-۴x}\Rightarrow y'=\frac{(۲x-۴)}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}-۴x)^{۲}}}$

$$y=\sin u\Rightarrow y'=u'\cos u$$

۱) $y=\sin(۳x-۴)\Rightarrow y'=۳\cos(۳x-۴)$

$$y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$$

۲) $y=\cos(۵x^۲-۴) \Rightarrow y'=-(۱۰x)\sin(۵x^۲-۴)$

۳) $y=۳\cos x\sin ۲x \Rightarrow y'=(-۳\sin x)(\sin ۲x)+(۲\cos ۲x)(۳\cos x)$

۴) $y=(\sin ۲x+\cos(x-۱))^۲ \Rightarrow y'=۲(\sin ۲x+\cos(x-۱))(۲\cos ۲x-\sin(x-۱))$

۵) $y=\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۳}) \Rightarrow y'=۲\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۳})\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۳})(\frac{-۱}{۳})$

۶) $y=(\sin\sqrt{x})(\cos ۲x) \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\cos ۲x-۲\sin ۲x\sin\sqrt{x}$

۷) $y=\sqrt{۱+\sin x} \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{۱+\sin x}}$

$y=\frac{۱}{\sin x+\cos x} \Rightarrow y'=\frac{-\cos x+\sin x}{(\sin x+\cos x)^۲}$

۸) $y=\frac{\sin x}{۱+x} \Rightarrow y'=\frac{\cos x(۱+x)-\sin x}{(۱+x)^۲}$

۹) $y=\sin^۳\sqrt{x} \Rightarrow y'=۳(\sin^۲\sqrt{x})\,(\cos\sqrt{x})\,(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$

$y=\sin wt+\cos wt \Rightarrow y'=w\cos wt-w\sin wt$

$$y=\tan u \Rightarrow y'=u'(۱+\tan^۲ u)$$

$y=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x \Rightarrow y'=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x$

۱۰) $y=\tan(\frac{\pi}{۷}-\frac{x}{۵}) \Rightarrow y'=-\frac{۱}{۵}(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۷}-\frac{x}{۵}))$

$$y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(۱+\cot^۲ u)$$

۱۱) $y=\cot(۱-x^۲) \Rightarrow y'=-(-۲x)(۱+\cot^۲(۱-x^۲))$

۱۲) $y=\tan^۲ x-۲\cot x \Rightarrow y'=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)+۲(۱+\cot^۲ x)$

۱۳) $y=\sin x\tan x \Rightarrow y'=\cos x\tan x+(۱+\tan^۲ x)(\sin x)$

۱۴) $y=\tan(x^۲-۳x)+\sin ۵x \Rightarrow y'=(۲x-۳)(۱+\tan^۲(x^۲-۳x))+۵\cos ۵x$

۱۵) $y=\sqrt{\sin ۵x}+۴\tan^۳ ۲x \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۵\cos ۵x}{۲\sqrt{\sin ۵x}}+(۴)(۳)(۲)\tan^۲ ۲x(۱+\tan^۲ ۲x)$

مشتق تابع مرکب:

$$\begin{cases} y=u^۲+u \\ u=x^۲-۱ \end{cases} \Rightarrow y'_x=? \Rightarrow \begin{cases} y'_u=۲u+۱ \\ u'_x=۲x \end{cases}$$

$$y'_x=y'_u.u'_x=(۲u+۱)(۲x)=(۲(x^۲-۱)+۱)(۲x)=۴x^۳-۲x$$

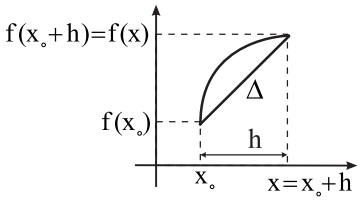
تیپ ۳: آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای و تعریف مشتق

می‌دونیم که از دو پدیده که تغییر یکی باعث تغییر اون یکی میشه مثل گذشت زمان و رشد یک باکتری یکی رو به عنوان متغیر (متغیر مستقل) و اون یکی رو به عنوان تابع (متغیر وابسته) انتخاب و همون‌طور که در بخش تابع دیده شد متغیر رو با x *و تابع رو با* y *مشخص می‌کنن. وابستگی بین این دو تا رو با* f *نشون می‌دن و می‌نویسن:* $y=f(x)$
حالا تغییرات x *رو همون‌طوری که تو فیزیک دیدین با* Δx *و تغییرات* y *رو با* Δy *نشون می‌دیم:*

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تعریف مشتق

برخلاف تعریفهای قبلی که شیب خط واصل Δ رو مشخص می‌کرد (آهنگ متوسط) مشتق، آهنگ لحظه‌ای و در واقع حد آهنگ متوسطه، زمانی که x به سمت x_0 و یا h به سمت صفر میل می‌کنه.



تعریف اول: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **تعریف دوم:** $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

۱. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=2x-1$ را به ازای $x=2$ و $\Delta x=0/1$ به‌دست آورید.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+0/1)-f(2)}{0/1}=\frac{2(2/1)-1-2(2)-1}{0/1}=\frac{4/2-4}{0/1}=2$$

۲. معادله حرکت متحرکی به صورت $x=t^2-5t+6$ است. اولاً، سرعت متوسط متحرک را در فاصله ی زمانی $t=3$ تا $t=5$ به دست آورید و ثانیاً آهنگ آنی تغییرات x را در $t=2$ به دست آورید.

سرعت متوسط در $t_1=3$ تا $t_2=5$: $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(5)-x(3)}{5-3}=\dfrac{(5^2-25+6)-(3^2-15+6)}{5-3}=\dfrac{6}{2}=3$

آهنگ آنی تغییرات x یا آهنگ لحظه‌ای (همون مشتق) در نقطه $t=2$: $x'_t=2t-5\xrightarrow{t=2}x'_{(2)}=-1$

۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر می‌کند، به دست آورید.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(25)-f(4)}{25-4}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{21}=\frac{5-2}{21}=\frac{1}{7}$$

۴. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ را وقتی x از ۱ به ۱/۲ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1/2)-f(1)}{1/2-1}\xrightarrow{1/2=\frac{6}{5}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{\frac{6}{5}+1}-\frac{2}{1+1}}{\frac{6}{5}-1}=\frac{\frac{10}{11}-1}{\frac{1}{5}}=\frac{-\frac{1}{11}}{\frac{1}{5}}=-\frac{5}{11}$$

۵. اگر $P(t)=3000+100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t برحسب ساعت) آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t=2$ به دست آورید.
آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t=3$ حساب کنید.

آهنگ متوسط در بازه $[2,7]$: $\dfrac{\Delta P}{\Delta t}=\dfrac{3000+100(7)^2-(3000+100(2)^2)}{7-2}=\dfrac{100(49-4)}{5}=900$

آهنگ لحظه‌ای (همون مشتق) در لحظه‌ی $t=3$: $P'_t=200t\xrightarrow{t=3}P'_t=600$

۶. رابطه‌ی بین درجه‌ی فارنهایت (F) و درجه‌ی سانتی‌گراد (C) به‌صورت $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$ است. حاصل $\left(\dfrac{\Delta C}{\Delta F}\right)$ آهنگ متوسط تغییرات (F) نسبت به (C) چند برابر $\left(\dfrac{dC}{dF}\right)$ آهنگ لحظه‌ای تغییرات (F) نسبت به (C) می‌باشد؟

جدا جدا حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta C}{\Delta F}=\dfrac{C_2-C_1}{F_2-F_1}=\dfrac{\frac{5}{9}(F_2-32)-\frac{5}{9}(F_1-32)}{F_2-F_1}=\dfrac{\frac{5}{9}(F_2-\cancel{32}-F_1+\cancel{32})}{(F_2-F_1)}=\dfrac{5}{9}\\ \dfrac{dC}{dF}=\dfrac{5}{9}\end{cases}$$

پس با هم برابرند! راستی یادت نره واسه هر دو پارامتری که به‌صورت خطی به هم وابسته‌ان این اتفاق می‌افته!

۷. آهنگ لحظه‌ای تغییر سطح یک کره به تغییر حجم آن چه کسری از $(\frac{۱}{r})$ است؟

$$\begin{cases} V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow \frac{dV}{dr}=۴\pi r^۲ \\ S=۴\pi r^۲ \Rightarrow \frac{dS}{dr}=۸\pi r \end{cases} \Rightarrow \frac{dS}{dV}=\frac{\frac{dS}{dr}}{\frac{dV}{dr}}=\frac{۸\pi r}{۴\pi r^۲}=\frac{۲}{r}=۲(\frac{۱}{r})$$

(S و V مستقیم به هم ربطی ندارن! ولی هر دو به شعاع وابستن!)

پس ۲ برابر $(\frac{۱}{r})$ می‌شه! سؤال از ما $(\frac{dS}{dV})$ رو می‌خواست! اما ما رَکَب زدیم و $(\frac{\frac{dS}{dr}}{\frac{dV}{dr}})$ رو به‌دست آوردیم که همون می‌شه! کیف کردی؟

۸. ظرفی حاوی ۱۰۰lit آب است. در لحظه‌ی $(t=۰)$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم آب باقی‌مانده در ظرف بعد از (t) ثانیه از رابطه‌ی $V(t)=۱۰۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به‌دست آید، در چه زمانی آهنگ آنی تغییر (V) با آهنگ متوسط آن از $t=۰$ تا $t=۱۰۰$ برابر است؟

باید : $\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰} = V'(t)$

(آهنگ متوسط روی [۰,۱۰۰] — آهنگ لحظه‌ای تو لحظه (t))

$$\Rightarrow \frac{۶-۱۰۰}{۱۰۰}=۱۰۰(۲(۱-\frac{t}{۱۰۰})(\frac{-۱}{۱۰۰})) \Rightarrow ۱=۲(۱-\frac{t}{۱۰۰}) \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{t}{۱۰۰} \Rightarrow (t=۵۰)$$

نکته: همیشه اگه تابع درجه ۲ باشه،این اتفاق تو وسط بازه می‌افته!

۹. معادله‌ی حرکت یک (yoyo) از رابطه‌ی $x=t^۳-\frac{۳۹}{۲}t^۲+۹۰t+۱۰$ پیروی می‌کند. مدت زمانی که این (yoyo) در خلاف جهتی که آزاد می‌شود، حرکت می‌کند چه‌قدر است؟

مدت زمان خلاف جهت (دنده عقب خودمون) وقتیه که سرعت $(-)$ بشه!

$$x'_t=V_t=۳t^۲-۳۹t+۹۰<۰ \Rightarrow t^۲-۱۳t+۳۰<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۳<t<۱۰$$

یعنی ۷ ثانیه

۱۰. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

توجه: اگه نقطه رو داد از تعریف اول برو و اگه مشتق رو تو حالت کلی خواست از تعریف دوم استفاده کن:

$$f(x)=۳x-۱ \quad , \quad x=۲$$

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x-۱-۵}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳(x-۲)}{x-۲}=۳$$

$$f(x)=x^۲+۴x \quad , \quad x=۲$$

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۴x-۱۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۶)}{x-۲}=۸$$

$$f(x)=\frac{x}{x-۱} \quad , \quad x=۲$$

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{x}{x-۱}-\frac{۲}{۲-۱}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{x-۲(x-۱)}{x-۱}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)}=-۱$$

۱۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را به‌دست آورید.

توجه: چون نقطه نداده از تعریف دوم می‌رم:

$f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۱۲. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=2-x^2$ را به‌دست آورید.

از تعریف دوم استفاده می‌کنیم و مشتقشو حساب می‌کنیم:

تعریف دوم مشتق : $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-(x+h)^2+x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x^2+2xh+h^2)+x^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2xh-h^2+x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x-h)}{h}=-2x$$

تیپ ۴: شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس

هر وقت شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس رو خواست اول مشتق بگیر و بعدش نقطه‌ی تماس رو تو مشتق جاگذاری کن!
اگه شیب قائمو خواست، قرینه و معکوسش کن!

۱۳. شیب خط مماس بر منحنی تابعی به معادله‌ی $y=3x^2-3x$ را در نقطه‌ی $x=3$ بیابید.

$$y=3x^2-3x\to y'=6x-3\xrightarrow{x=3}y'=m=15 \qquad \text{قائم } m=\frac{-1}{5}$$

۱۴. شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=\sin x+\cos 2x$ را در نقطه‌ای به طول π واقع بر منحنی بنویسید.

$$y=\sin x+\cos 2x\to y'=\cos x-2\sin 2x\xrightarrow{x=\pi}y'=\cos\pi-2\sin 2\pi=-1-2(0)=-1$$

اگه شیب خط قائم رو خواست شیب مماس رو قرینه و معکوش کن. مثلاً تو سؤال ۷ شیب خط قائم می‌شه $-\frac{1}{15}$

معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=\sqrt{x+1}$ را در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر منحنی به‌دست آورید.

مختصات نقطه‌ی تماس: $x_0=3\Rightarrow y_0=\sqrt{3+1}=2$

می‌بینم که می‌خوای اول شیب خط مماس تو نقطه‌ی تماس رو به‌دست بیاری. آفرین، کارت درسته! پس اول مشتق بگیر و بعدش نقطه‌ی تماس رو تو مشتق جاگذاری کن.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\xrightarrow{x=3}m=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{4}$$

حالا اگه شیب خط مماس رو قرینه و معکوس کنیم، شیب خط قائم به‌دست میاد.

$$m'=\frac{-1}{m}=-4 \quad , \quad x_0=3\Rightarrow y_0=2$$

معادله‌ی خط قائم : $y-y_0=m'(x-x_0)\Rightarrow y-2=-4(x-3)\Rightarrow y=-4x+14$