

کاردهای حقیقی



وَأَخْبَرُوا بِالْحَمْدِ وَأَخْلَسُوا نَسَبَهُمْ
 ... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد
 شمارش کرده است.
 (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دینور اسلام و از بزرگ‌ترین
 مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط
 چندضلعی‌های محاطی و محیطی نوشت عدد π که عددی حقیقی و گنگ است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار
 محاسبه کرد که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در
 ابتدای رساله‌ی محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند
 «چه نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است»

فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش های مختلف مجموعه های اعداد آشنا شدید. عبارت های زیر را مانند

نمونه کامل کنید :

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچکتر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین ۲ و -۳	$\{x \in \mathbb{Z} -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگتر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ 3 و 4 و 5

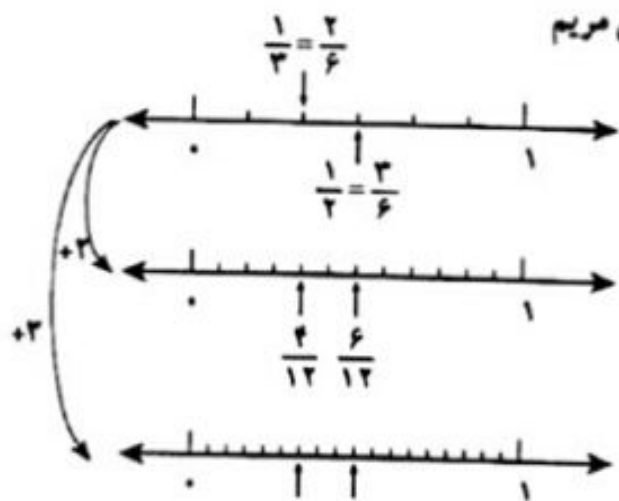
۱، ۲، ۳، ۴، ۵

۲- می خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ چند کسر بنویسیم. روش های مختلفی را که چهار دانش آموز نوشته اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &< ? < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} &< ? < \frac{3}{6} \\ \frac{4}{12} &< \frac{5}{12} < \frac{6}{12} \\ \frac{6}{18} &< \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18} \end{aligned}$$

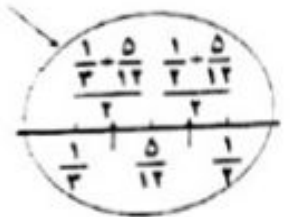
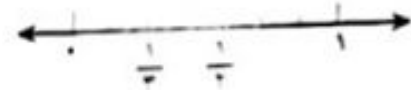
روش مریم



$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بی‌شمار کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن اعضا نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

کار در کلاس

$$\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \left(\frac{9}{20} \right) > \left(\frac{10}{20} \right) > \left(\frac{11}{20} \right) > \frac{2 \times 5}{4 \times 5}$$

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

$$\frac{-1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{-2 \times 3}{2 \times 3} = \frac{-7}{7} > \left(\frac{-8}{7} \right) > \left(\frac{-4}{7} \right) > \left(\frac{-3}{7} \right) > \frac{-1 \times 3}{2 \times 3}$$

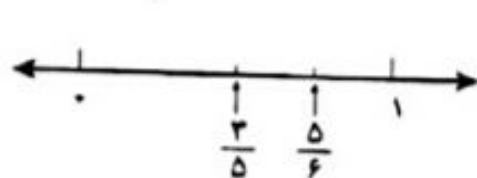
۲- بین $-\frac{1}{4}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد : شاهد به صورت تقریبی کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی : مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می آید. کار مرتضی را کامل کنید :

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید : مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید :

$$\frac{5}{9} = 0.55$$

$$\frac{7}{8} = 0.87$$

$$\frac{5}{6} = 0.83$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرها را تا دو رقم اعشار بنویسید :

$$\frac{1}{7} = 0.142857142$$

$$\frac{1}{9} = 0.1111$$

$$\frac{7}{6} = 1.16$$

$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می دهد؟
ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ بعضی از کسرها دوره تناوب دارند.

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم های اعشار آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می کنیم :

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\bar{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666\ldots = 1.1\bar{6}$$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هریک از کسره‌های زیر را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$\frac{7}{32} = \frac{7}{9} = 0.\overline{7}$$

$$\frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6} = 0.\overline{83}$$

$$\frac{7}{2 \times 11} = \frac{7}{22} = 0.\overline{318}$$

$$\frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{5}{2^4} = \frac{5}{16} = 0.\overline{3125}$$

اگر به نمایش اعشاری کسره‌های بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسره‌هایی نمایش اعشاری مخنوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولیه به جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

$$\frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$\frac{3}{4} \times -\frac{9}{10} = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + 5\frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}} \div \frac{14}{3} = -\frac{5}{3} \times \frac{3}{14} = -\frac{5}{14}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} + \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{49}{15} + \frac{2}{3} = \frac{-30 - 50 + 196 + 40}{30} = \frac{56}{30} = \frac{28}{15}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \left(2 + \frac{-6}{5}\right) =$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{10} + \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{3}{4} = \frac{143}{120}$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$-\frac{20}{7} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{8} < 2$$

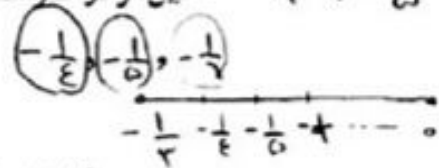
$$-\frac{92}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{31}{24} < \frac{48}{24}$$

$$\text{الف) } \frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{31}{24}, -\frac{14}{24}, \frac{18}{24}, \frac{48}{24}, -\frac{92}{24}$$

$$\text{ب) } \frac{16}{7}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{22}{12}, -\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{12}, -\frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}$$

$$\text{الف) } \frac{10}{11}, \frac{12}{13}$$

$$\text{ب) } 0, -\frac{1}{3}$$



$$\frac{1 \times 13}{11 \times 13} = \frac{13 \times 2}{13 \times 2} = \frac{24}{284} > \left(\frac{241}{287}\right) > \left(\frac{242}{284}\right) > \left(\frac{243}{287}\right) > \frac{12 \times 11}{13 \times 11} = \frac{132 \times 2}{132 \times 2} = \frac{246}{287}$$

$$\text{ب) } \frac{14}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}$$

سؤال 3:

$$2, 180, -170, 2, 50, -1222, 7, 7, 2, 2, 2, 2$$

$$-1222 < -170 < 2, 180, 2, 50 < 7, 2, 2, 2, 2$$

$$-\frac{5}{7} < -\frac{2}{3} < \frac{14}{5} < 2, 50 < \frac{57}{13} < 2 \frac{2}{5}$$

$$\text{ب) } 0, -\frac{1}{3}$$

سؤال 4:

$$-\frac{1 \times 2}{3 \times 3} = -\frac{2}{9} > \left(-\frac{2}{12}\right) > \left(-\frac{2}{12}\right) > \left(-\frac{1}{12}\right) > 0$$

فعالیت

$$\frac{1 \times 2}{1 \times 2}, \left(\frac{7}{6}\right), \left(\frac{8}{4}\right), \left(\frac{9}{4}\right), \left(\frac{10}{4}\right), \left(\frac{11}{4}\right), \frac{2 \times 2}{1 \times 2}$$



۱- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید. $\frac{7}{6}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}$

۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ مساوی $1/4$ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳- معلم از دانش آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{2}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش آموزان از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136 1.414213562

1.41421356237

- چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد. چون عدد گرد شده نمایش می‌دهد.
- چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟ چون گرد شده آن‌ها همان می‌شود.
- با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟ تفسیر
- مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان داده شده برای $\sqrt{2}$ ، تناوبی می‌بینید؟ تفسیر

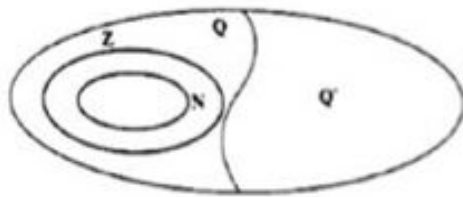
عددهایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{17}$ ، $\sqrt{19}$ ، $\sqrt{23}$ ، $\sqrt{29}$ ، $\sqrt{31}$ ، $\sqrt{37}$ ، $\sqrt{41}$ ، $\sqrt{43}$ ، $\sqrt{47}$ ، $\sqrt{53}$ ، $\sqrt{59}$ ، $\sqrt{61}$ ، $\sqrt{67}$ ، $\sqrt{71}$ ، $\sqrt{73}$ ، $\sqrt{79}$ ، $\sqrt{83}$ ، $\sqrt{89}$ ، $\sqrt{97}$ ، $\sqrt{101}$ ، $\sqrt{103}$ ، $\sqrt{107}$ ، $\sqrt{109}$ ، $\sqrt{113}$ ، $\sqrt{127}$ ، $\sqrt{131}$ ، $\sqrt{137}$ ، $\sqrt{139}$ ، $\sqrt{149}$ ، $\sqrt{151}$ ، $\sqrt{157}$ ، $\sqrt{163}$ ، $\sqrt{167}$ ، $\sqrt{173}$ ، $\sqrt{179}$ ، $\sqrt{181}$ ، $\sqrt{191}$ ، $\sqrt{193}$ ، $\sqrt{197}$ ، $\sqrt{199}$ ، π را، که تعداد ارقام اعشاری آن‌هایی شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

$\sqrt{2}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید.

عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا 30 رقم اعشار نوشته شده است: اقادیر محاسبات، معمولاً تا

دو رقم اعشار π استفاده می شود: $\pi = 3.141592653589793238462643383279$

به طور کلی جذر عددهایی که مربع کامل (عددهایی مانند $1, 4, 9, 16, \dots$ مربع کامل است.) گنگ است؛ مانند $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$



مثال: مجموعه های N و Z و Q و Q' به کمک

نمودار ون، مشخص شده است.

مثال: $-\frac{3}{4} \in Q'$ $\sqrt{3} \in Q'$ $\sqrt{8} \in Q'$ $0 \in Q$ $0.200200020000200002000020000200002 \dots \in Q'$

کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

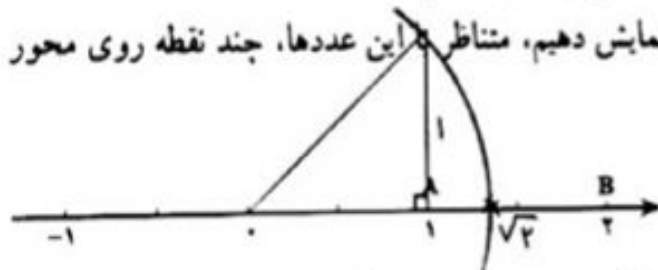
$Q \cap Q' = \emptyset$ ✓ $N \subseteq Q'$ ✗ $Z \subseteq Q$ ✓ $Z \subseteq Q'$ ✗

فعالیت

الف) بین دو عدد 1 و 2 چند عدد گویا می توان نوشت؟ بی شمار

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور

می توان پیدا کرد؟ بی شمار



ج) روی محور نقطه نمایش $\sqrt{2}$

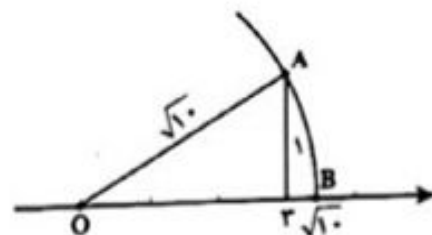
را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم، که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ

می شود؟ آیا $\sqrt{2}$ نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط

به وجود می آورد؟ چرا؟ چون اعداد گویا ^{نظم} هستند که بین اعداد گویا فاصله می اندازند.

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{10}$ روی محور به صورت زیر است:



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می کنیم. نقطه B

روی محور عدد $\sqrt{10}$ را نمایش می دهد.

$$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

۲۴

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

« ضلع مثلث قائم الزامی را ۳ در نظر بگیریم »

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ فرار دارد.

می دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

کار در کلاس

$$\sqrt{5}, \sqrt{4}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$$

۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

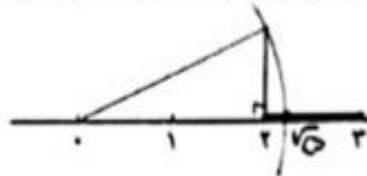
$$\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$$

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳- الف) مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟ تفسیر

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

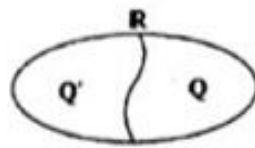
$$2 < \sqrt{5} < 3$$



ب) نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

ضلع گشت

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته بندی



می شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را

مجموعه عددهای حقیقی می نامیم و آن را با \mathbb{R} نمایش می دهیم.

تساوی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ بین سه مجموعه \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' و \mathbb{R} برقرار است.

مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.12022022202222... \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

کار در کلاس

۱- داخل \circ علامت \in یا \notin بگذارید:

$$2 \in \mathbb{Z}$$

$$0.12 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$-5 \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}'$$

$$\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

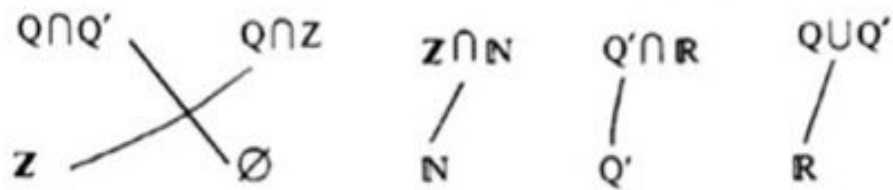
$$\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{1/9} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{1.09} \in \mathbb{Q}$$

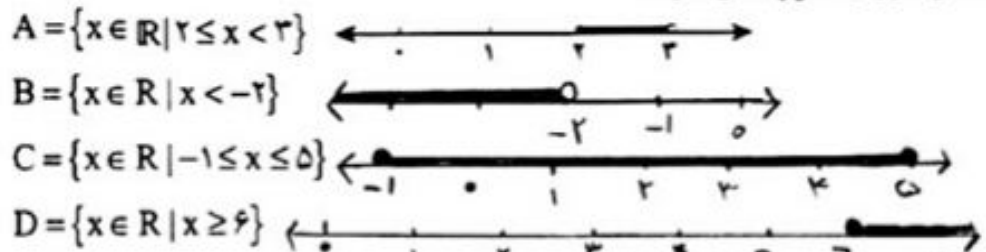
$$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$$

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:



با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور نویر و نقطه ۳ روی محور تو خالی است؟ چون عدد ۲ عضو مجموعه A است، ولی عدد ۳ عضو مجموعه A نیست.

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

A = {x ∈ R | x > -1} (الف)

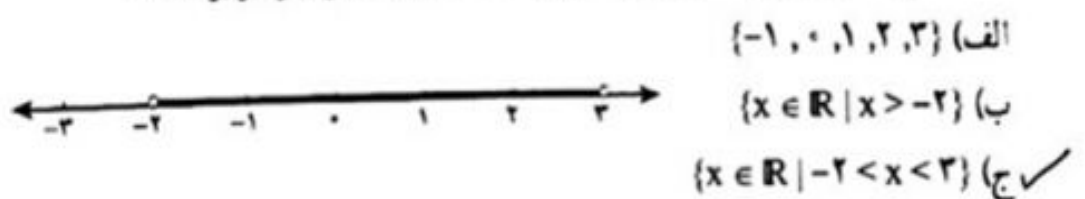
B = {x ∈ R | x < 3} (ب)

C = {x ∈ R | x ≤ 2} (ج)

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$0.75 \in A$ ✓ $0.252552555... \in B$ ✓ $\sqrt{13} \in A$ ✓
 $\sqrt{7} \in C$ ✗ $\sqrt{1} \in A$ ✓ $-1000 \in C$ ✓

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	0	π	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\dots$	-10	$\frac{6}{2}$
N طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
W حسابی	x	x	✓	x	x	x	x	✓
Z صحیح	x	x	✓	x	x	x	✓	✓
Q گویا	x	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓
Q' گنگ	✓	x	x	✓	x	x	x	x
R حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :
 الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$
 ب) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :
 دلی 5 اعداد حقیقی بین 3 و 9 هست.
 دلی 5 اعداد صحیح بین 3 و 9 هست.

۱) $N \cup Z = Z$ ۲) $R - Q' = Q$ ۳) $Z \cap N = \emptyset$ $R \cap Q' = Q'$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$
 ۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- الف) 6 و 7 ب) $\sqrt{3}, 6$ ج) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$ د) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بزنید.

۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. مثال: ۳- هم گویا هست و هم صحیح

۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. مثال: $\sqrt{3}$ هم عدد گنگ هست و هم حقیقی

۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. مثال: 5 هم عدد طبیعی هست و هم حقیقی

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{2}{11}$ چه تفاوتی هست؟
 $\sqrt{10} = 3,14227766\dots$ $\frac{2}{11} = 0,18181818\dots$
 عدد $\sqrt{10}$ دوره تناوب ندارد ولی کسر $\frac{2}{11}$ دوره تناوب دارد.

الف) $\sqrt{4}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{23}, \sqrt{29}, \sqrt{31}, \sqrt{37}, \sqrt{41}, \sqrt{43}, \sqrt{47}, \sqrt{53}, \sqrt{59}, \sqrt{67}, \sqrt{71}, \sqrt{73}, \sqrt{79}, \sqrt{83}, \sqrt{89}, \sqrt{97}, \sqrt{101}, \sqrt{103}, \sqrt{107}, \sqrt{109}, \sqrt{113}, \sqrt{127}, \sqrt{131}, \sqrt{137}, \sqrt{139}, \sqrt{149}, \sqrt{151}, \sqrt{157}, \sqrt{163}, \sqrt{167}, \sqrt{173}, \sqrt{179}, \sqrt{181}, \sqrt{191}, \sqrt{193}, \sqrt{197}, \sqrt{199}$

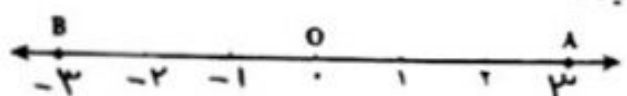
ب) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{23}, \sqrt{29}, \sqrt{31}, \sqrt{37}, \sqrt{41}, \sqrt{43}, \sqrt{47}, \sqrt{53}, \sqrt{59}, \sqrt{67}, \sqrt{71}, \sqrt{73}, \sqrt{79}, \sqrt{83}, \sqrt{89}, \sqrt{97}, \sqrt{101}, \sqrt{103}, \sqrt{107}, \sqrt{109}, \sqrt{113}, \sqrt{127}, \sqrt{131}, \sqrt{137}, \sqrt{139}, \sqrt{149}, \sqrt{151}, \sqrt{157}, \sqrt{163}, \sqrt{167}, \sqrt{173}, \sqrt{179}, \sqrt{181}, \sqrt{191}, \sqrt{193}, \sqrt{197}, \sqrt{199}$

ج) $4 = \sqrt{16}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}, \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{24}, \sqrt{25}, \sqrt{26}, \sqrt{27}, \sqrt{28}, \sqrt{29}, \sqrt{30}, \sqrt{31}, \sqrt{32}, \sqrt{33}, \sqrt{34}, \sqrt{35}, \sqrt{36}, \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \sqrt{41}, \sqrt{42}, \sqrt{43}, \sqrt{44}, \sqrt{45}, \sqrt{46}, \sqrt{47}, \sqrt{48}, \sqrt{49}, \sqrt{50}, \sqrt{51}, \sqrt{52}, \sqrt{53}, \sqrt{54}, \sqrt{55}, \sqrt{56}, \sqrt{57}, \sqrt{58}, \sqrt{59}, \sqrt{60}, \sqrt{61}, \sqrt{62}, \sqrt{63}, \sqrt{64}, \sqrt{65}, \sqrt{66}, \sqrt{67}, \sqrt{68}, \sqrt{69}, \sqrt{70}, \sqrt{71}, \sqrt{72}, \sqrt{73}, \sqrt{74}, \sqrt{75}, \sqrt{76}, \sqrt{77}, \sqrt{78}, \sqrt{79}, \sqrt{80}, \sqrt{81}, \sqrt{82}, \sqrt{83}, \sqrt{84}, \sqrt{85}, \sqrt{86}, \sqrt{87}, \sqrt{88}, \sqrt{89}, \sqrt{90}, \sqrt{91}, \sqrt{92}, \sqrt{93}, \sqrt{94}, \sqrt{95}, \sqrt{96}, \sqrt{97}, \sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}$

د) $5 = \sqrt{25}, \sqrt{26}, \sqrt{27}, \sqrt{28}, \sqrt{29}, \sqrt{30}, \sqrt{31}, \sqrt{32}, \sqrt{33}, \sqrt{34}, \sqrt{35}, \sqrt{36}, \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \sqrt{41}, \sqrt{42}, \sqrt{43}, \sqrt{44}, \sqrt{45}, \sqrt{46}, \sqrt{47}, \sqrt{48}, \sqrt{49}, \sqrt{50}, \sqrt{51}, \sqrt{52}, \sqrt{53}, \sqrt{54}, \sqrt{55}, \sqrt{56}, \sqrt{57}, \sqrt{58}, \sqrt{59}, \sqrt{60}, \sqrt{61}, \sqrt{62}, \sqrt{63}, \sqrt{64}, \sqrt{65}, \sqrt{66}, \sqrt{67}, \sqrt{68}, \sqrt{69}, \sqrt{70}, \sqrt{71}, \sqrt{72}, \sqrt{73}, \sqrt{74}, \sqrt{75}, \sqrt{76}, \sqrt{77}, \sqrt{78}, \sqrt{79}, \sqrt{80}, \sqrt{81}, \sqrt{82}, \sqrt{83}, \sqrt{84}, \sqrt{85}, \sqrt{86}, \sqrt{87}, \sqrt{88}, \sqrt{89}, \sqrt{90}, \sqrt{91}, \sqrt{92}, \sqrt{93}, \sqrt{94}, \sqrt{95}, \sqrt{96}, \sqrt{97}, \sqrt{98}, \sqrt{99}, \sqrt{100}$

فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید :



$$A = 3$$

$$B = -3$$

نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهد؟

فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ ۳ واحد

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ ۳ واحد

می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد. ۲ و -۲

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می توان

یافت؟ ۲ نعم

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید

قدر مطلق a) نمایش می دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می توان نوشت: $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق $\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می دهیم که مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق

0.04 را به صورت $|0.04|$ نشان می دهیم که مساوی 0.04 است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد

است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------|
| الف) دو عدد a و b مثبت است. | ۱) $a > 0, b < 0$ |
| ب) عدد a نامنفی است. | ۲) $a > 0, b > 0$ |
| ج) دو عدد a و b منفی است. | ۳) $a \geq 0$ |
| د) عدد a مثبت و عدد b منفی است. | ۴) $a < 0, b < 0$ |
| ه) عدد a نامثبت است. | ۵) $a \leq 0$ |

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید :

- | | |
|---------------------|------------------------|
| الف) $a > 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$ |
| ب) $a < 0, b < 0$ | ۲) $ab > 0, a + b > 0$ |
| ج) $a < 0, b > 0$ | ۳) $ab > 0, a + b < 0$ |

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید :

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| الف) $a > 0$ | ۱) $ a = -a$ |
| ب) $a > 0, b > 0$ | ۲) $ a = a$ |
| ج) $a < 0$ | ۳) $ a + b = a + b$ |
| د) $a < 0, b < 0$ | ۴) $ a + b = -(a + b)$ |

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست. مثال: $a = -5, b = 3$

۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1,7 \quad \sqrt{5} = 2/2 \quad \sqrt{6} = 2/4 \quad \sqrt{7} = 2/6$$

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

$$|-5 \times 3| = |5| \times |3|$$

$$|-15| = 5 \times 3$$

$$15 = 15$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|-5 + 3| \leq |-5| + |3|$$

$$|-2| \leq 5 + 3$$

$$2 \leq 5 + 3$$

$$2 \leq 8$$

مثال: $a = -5$
 $b = 3$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح

دهید:

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل: $\sqrt{2} = 1/4$ پس $1 - \sqrt{2}$ عددی منفی می شود:

۱) $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

دلیل: $\sqrt{3} = 1,7$ پس $2 - \sqrt{3}$ عددی مثبت می شود.

۲) $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$

دلیل: $\sqrt{7} = 2,6$ و $\sqrt{8} = 2,8$

۳) $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = 1\sqrt{5} = \sqrt{5}$

دلیل: $\sqrt{5} - \sqrt{8}$ عددی منفی می شود.

۴) $|-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$

دلیل: $\sqrt{5}$ عدد مثبت است.
 $\sqrt{3} = 1,7$ پس $4 - \sqrt{3}$ عددی منفی است.

مثال: اگر $a = \frac{1}{4}$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = -3$ باشند، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2/5 + \sqrt{2} \right|$$

چون $-2/5 + \sqrt{2}$ عددی منفی است ($\sqrt{2} = 1/4$)، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-2/5 + \sqrt{2})$ یعنی $2/5 - \sqrt{2}$ است.

$$\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

مثال:

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل جذر همیشگی به صورت قدر مطلق نوشته می شود.

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم: $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

کار در کلاس

۱- عبارت های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|(-7)^2| \bigcirc |-7|^2$

ب) $|-8+5| \bigcirc |-8|+|5|$

ج) $|3-9| \bigcirc |3|-|9|$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

$|0| = 0$ $|- \frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$ $|7^2 - 7^2| = |0/2^2 - 0/2^2| = 0/2^2 = 0/2 = 0/0.0.32 = 0.0.0.48$
 $7^2 - 7^2 = 49 - 49 = 0$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید: $2 = 0.0.0.256$

الف) $\sqrt{(-2595)^2} = |-2595| = 2595$ ب) $\sqrt{(1394)^2} = |1394| = 1394$

ج) $\sqrt{(-3 + \sqrt{10})^2} = |-3 + \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$ د) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$

تمرین

۱- اگر $a = 0/25$ ، $b = -\frac{1}{4}$ ، $c = 2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$|a+b| + 2|a-b-c| = |0/25 + (-\frac{1}{4})| + 2|0/25 - (-\frac{1}{4}) - (2\frac{1}{4})| = |0| + 2|-2| = 0 + 4 = 4$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید :

الف) $|-3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$ ب) $|7 - 5\sqrt{3}| = 5\sqrt{3} - 7$ ج) $|0 + \sqrt{5}| = \sqrt{5}$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر. و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$|5-12| > 1 + \square \rightarrow 12-5 = 7$ (در جای خالی می توان ۵، ۴، ۳ و ۲ وارد کرد. یعنی اعداد کوچکتر از ۷)

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a = -2$ و $a = 0$ و $a = 2$ به دست آورید. آیا می توانید

عددی حقیقی به جای a فرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ تشریح

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبرو را به دست آورید :

$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = |1-\sqrt{10}| = -(\sqrt{10}-1) = -\sqrt{10}+1 = 1-\sqrt{10}$

$|a|+a \Rightarrow |-2|+(-2) = 2-2 = 0$

$a = -2 \Rightarrow |0|+0 = 0$

$|a|+a \Rightarrow |2|+2 = 2+2 = 4$

$a = 2$



۲۱

سؤال ۴: