رحیم مشتاق نظم

درسنامه ویژه نوروز

معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس اول : معادلهٔ درجهٔ دوم و روش های مختلف حل آن

همان طور که می‌دانیم هر تساوی که به ازای مقادیری از متغیّر آن برقرار باشد معادله نامیده می‌شود، و معادله‌ای که پس از ساده کردن، بزرگترین توان متغیّر آن دو باشد معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود مانند : $x^3-2x+3x^2=(x-1)^2+x^3$ و $x^2=(2x-1)^2$

یک معادلهٔ درجهٔ دوم را در حالت کلی به صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌نویسیم. البته می‌دانیم که a باید ناصفر باشد زیرا اگر a برابر صفر باشد، معادله درجهٔ اوّل خواهد بود.

ریشه یا جواب معادله :

عددی که در معادله صدق می‌کند ریشه یا جواب معادله نامیده می‌شود.

تذکّر: معادلهٔ درجهٔ دوم در مجموعهٔ اعداد حقیقی سه حالت دارد :

یا ریشه ندارد یا فقط یک ریشه دارد که در این حالت می‌گویند معادله ریشهٔ مضاعف دارد و یا اینکه دو ریشهٔ حقیقی دارد.

روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم :

۱) روش تجزیه : در این روش همهٔ عبارت های معادله را به سمت چپ آورده تا سمت راست صفر شود. سپس با یکی از روش های :

الف) فاکتورگیری ب) تجزیه با استفاده از اتحاد مزدوج ج) تجزیه با استفاده از اتحاد جمله مشترک

عبارت سمت چپ را تجزیه می‌کنیم و می‌دانیم اگر $a\times b=0$ آنگاه باید $a=0$ یا $b=0$، در این صورت می‌توان جواب معادله را بدست آورد.

مثال: هریک از معادله‌های زیر را با استفاده از روش تجزیه، حل کنید.

الف) $5x^2=20x$

ب) $16-4x^2=0$

پ) $4x^2-8x=21$

حل)

الف) $5x^2-20x=0 \to 5x(x-4)=0 \to 5x=0$ یا $x-4=0$

$\to x=0$ یا $x=4$

ب) $(4-2x)(4+2x)=0 \to 4-2x=0$ یا $4+2x=0$

$\to -2x=-4$ یا $2x=-4 \to x=2$ یا $x=-2$

پ) $4x^2-\underbrace{8x}_{-4(2x)}-21=0 \to (2x-7)(2x+3)=0 \to 2x-7=0$ یا $2x+3=0$

$\to 2x=7$ یا $2x=-3 \to x=\frac{7}{2}$ یا $x=-\frac{3}{2}$

۲) حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کمک ریشه‌گیری

اگر بتوان معادله را به صورت $x^2=a$ $(a>0)$ نوشت. در این صورت جواب‌های معادله برابر است با:

$$x^2=a \to x=\pm\sqrt{a}$$

مثال: معادله‌های زیر را با استفاده از روش ریشه‌گیری حل کنید.

الف) $16-4x^2=0$

ب) $(x^2-6)^2-9=0$

حل)

الف) $16-4x^2=0 \to -4x^2=-16 \to x^2=4 \to x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

ب) $(x^2-6)^2=9 \to x^2-6=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$$\to \begin{cases} x^2-6=3 \to x^2=9 \to x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \\ x^2-6=-3 \to x^2=3 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

۳) حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌کمک روش مربع کامل

در این روش معادله را به صورت $x^2+bx=c$ بازنویسی می‌کنیم. سپس به طرفین تساوی عبارت $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$ را اضافه می‌کنیم. در این صورت سمت چپ تساوی با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده می‌شود و سپس می‌توانیم با استفاده از روش ریشه‌گیری، جواب معادله را بدست آوریم.

$$x^2+bx=c \xrightarrow{+\frac{b^2}{4}} x^2+bx+\frac{b^2}{4}=c+\frac{b^2}{4}$$

$$\longrightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\frac{b^2}{4} \rightarrow$$ جواب را با ریشه‌گیری بدست می‌آوریم.

مثال: معادله‌های زیر را با استفاده از روش مربع کامل حل کنید.

1) $x^2-4x-5=0$

2) $2x^2-3x+1=0$

حل)

1) $x^2-4x-5=0 \rightarrow x^2-4x=5$ $\quad\quad \left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=(-2)^2=4$

$\rightarrow x^2-4x+4=5+4 \rightarrow (x-2)^2=9 \rightarrow x-2=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$\rightarrow x-2=3$ یا $x-2=-3 \rightarrow x=5$ یا $x=-1$

2) $2x^2-3x+1=0 \rightarrow 2x^2-3x=-1 \xrightarrow{\div 2} x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\rightarrow x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{16} \rightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{-8+9}{16}=\frac{1}{16}$

$\rightarrow x-\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}=\pm\frac{1}{4} \rightarrow x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ یا $x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$\rightarrow x=\frac{4}{4}=1$ یا $x=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

۳) حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی یا دلتا :

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ ابتدا مقدار $\Delta = b^2-4ac$ را محاسبه می‌کنیم در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر Δ عددی منفی باشد آنگاه می‌گوییم معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب) اگر Δ برابر صفر باشد آنگاه می‌گوییم ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) دارد. و آن ریشهٔ مضاعف برابر $x=\frac{-b}{2a}$ است.

ج) اگر Δ عددی مثبت باشد آنگاه می‌گوییم معادله دو ریشه دارد که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال : معادله‌های زیر را از روش کلی حل کنید.

1) $3x^2-2x+5=0$

2) $-5x^2+6=x$

3) $4x^2=4x-1$

حل) 1) $a=1,\ b=-2,\ c=5 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=4-4(1)(5)=4-20=-16$

Δ عددی منفی است پس معادله ، ریشهٔ حقیقی ندارد.

2) $-5x^2-x+6=0 \rightarrow a=-5,\ b=-1,\ c=6$

$\Delta=b^2-4ac=1-4(-5)(6)=1+120=121$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{121}}{2(-5)}=\frac{1\pm 11}{-10} \quad \begin{cases} x_1=\frac{1+11}{-10}=\frac{12}{-10}=\frac{-6}{5} \\ x_2=\frac{1-11}{-10}=\frac{-10}{-10}=1 \end{cases}$$

3) $4x^2-4x+1=0 \rightarrow a=4,\ b=-4,\ c=1 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=16-4(4)(1)$ $=16-16=0 \rightarrow$ معادله ریشهٔ مضاعف دارد $\rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(4)}=\frac{1}{2}$

نکته : جواب معادلهٔ درجهٔ دوم را در حالت های خاصی به سرعت می توان بدست آورد. به دو نکتهٔ زیر توجّه کنید :

$$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow \begin{cases} \underbrace{a+b+c=0}_{\text{مجموع ضرایب معادله صفر است}} \rightarrow x_1=1 \text{ و } x_2=\dfrac{c}{a} \\ \underbrace{b=a+c}_{\text{ضریب } x \text{ با مجموع دو ضریب دیگر برابر است.}} \rightarrow x_1=-1 \text{ و } x_2=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$x^2-\sqrt{2}x+(\sqrt{2}-1)=0$$

حل) چون $a=1, b=-\sqrt{2}, c=\sqrt{2}-1$ و $a+b+c=0$ پس :

$$x_1=1 \text{ و } x_2=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

دقّت کنید اگر می خواستیم این معادله را از روش دیگری حل کنیم ، راه حل طولانی بود!

تمرین : مقدار m را چنان بیابید تا معادلهٔ زیر ریشهٔ مضاعف داشته باشد و سپس آن ریشه را بیابید.

$$mx^2+(3-m)x+1=0$$

حل)

$$a=m, b=3-m, c=1 \xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta=0 \rightarrow (3-m)^2-4(m)(1)=0$$

$$\rightarrow 9-6m+m^2-4m=0 \rightarrow m^2-10m+9=0 \rightarrow (m-1)(m-9)=0$$

$$\rightarrow m-1=0 \text{ یا } m-9=0 \rightarrow m=1 \text{ یا } m=9$$

بنابراین دو حالت زیر را داریم :

$$m=1 \longrightarrow x^2+2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$m=9 \longrightarrow 9x^2-6x+1=0 \rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2(9)}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

سهمی :

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^2+bx+c$ را سهمی می‌گویند. برای رسم آن به نکات زیر توجه می‌کنیم :

۱) اگر $a>0$ آنگاه نمودار سهمی به صورت ∪ است و در این حالت می‌گوییم سهمی نقطهٔ مینیمم دارد و اگر $a<0$ آنگاه نمودار سهمی به صورت ∩ است و در این حالت می‌گوییم سهمی نقطهٔ ماکسیمم دارد.

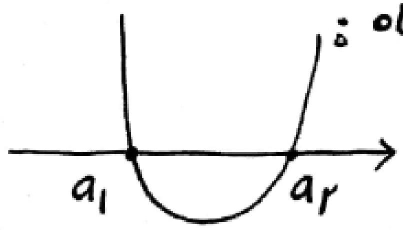
۲) طول نقطهٔ مینیمم یا ماکسیمم سهمی از رابطهٔ $x=\frac{-b}{2a}$ و عرض آن از رابطهٔ $y=\frac{-\Delta}{4a}$ بدست می‌آید بنابراین نقطهٔ $S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$ رأس سهمی است. البته بهتر است برای محاسبهٔ عرض رأس سهمی در معادله با قرار دادن مقدار x، y را بدست آوریم.

۳) برای رسم سهمی جدول زیر را کامل می‌کنیم یعنی y ها را محاسبه می‌کنیم و سپس این نقاط را به هم وصل می‌کنیم :

x	$-\frac{b}{2a}-1$	$\boxed{-\frac{b}{2a}}$	$-\frac{b}{2a}+1$
y			

رأس سهمی

۴) اگر سهمی محور x ها را در نقاط a_1 و a_2 قطع کند آنگاه :



الف) معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-a_1)(x-a_2)$ است. (a را باید از روشی محاسبه کرد!)

ب) $\frac{a_1+a_2}{2}=$ طول رأس سهمی . (یعنی دقیقاً وسط آن دو نقطه است.)

مثال: سهمی $y = 2x^2 - 4x$ را رسم کنید.

حل)

x	0	1	2
y	0	-2	0

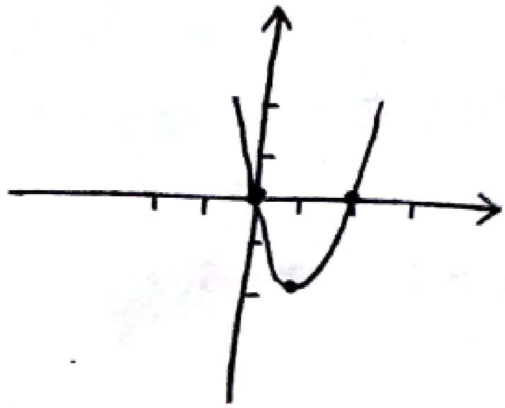
$a=2 \longrightarrow \cup$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$x=0 \longrightarrow y = 0-0 = 0$

$x=1 \longrightarrow y = 2-4 = -2$

$x=2 \longrightarrow y = 2\times 4 - 4\times 2 = 8-8 = 0$



مثال: یک سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید.

حل) $a_1=-1 \,,\, a_2=2 \longrightarrow y = a(x-a_1)(x-a_2) = a(x+1)(x-2)$

این سهمی از نقطهٔ $(0,3)$ نیز می‌گذرد:

$(0,3) \longrightarrow 3 = a(0+1)(0-2) \rightarrow 3 = -2a \longrightarrow a = -\frac{3}{2}$

$$y = -\frac{3}{2}(x+1)(x-2) = -\frac{3}{2}(x^2-x-2) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$$

تعیین علامت :

منظور از تعیین علامت این است که مشخص کنیم عبارت داده شده در چه بازه‌ای مثبت یا منفی است .

۱) تعیین علامت عبارت های درجه‌ی اول :

عبارت را مساوی صفر قرار داده و ریشه را بدست می‌آوریم در این صورت علامت عبارت از جدول زیر بدست می‌آید :

x	$-\infty$		ریشه		$+\infty$
عبارت		مخالف ضریب x	0	موافق ضریب x	

۲) تعیین علامت عبارت های درجه‌ی دوم :

ریشه‌ی معادله را در صورت وجود می‌یابیم در این صورت سه حالت رخ می‌دهد :

الف) معادله ریشه ندارد $(\Delta<0)$

x	$-\infty$	ریشه نداریم !	$+\infty$
عبارت		همواره موافق علامت ضریب x^2	

ب) معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $(\Delta=0)$

x	$-\infty$		ریشه‌ی مضاعف		$+\infty$
عبارت		همواره موافق علامت ضریب x^2	0	همواره موافق علامت ضریب x^2	

پ) معادله دو ریشه دارد $(\Delta>0)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
عبارت		موافق علامت ضریب x^2	0	مخالف علامت ضریب x^2	0	موافق علامت ضریب x^2	

۳) تعیین علامت عبارت های حاصل ضربی و کسری :

در یک جدول هر عبارت را به تنهایی تعیین علامت می‌کنیم ، علامت حاصل ، حاصل ضرب علامت های هر قسمت است .

مثال : عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

1) $P = 3x - \frac{3}{4}$

2) $P = -2x^2 + 3x + 5$

3) $P = -4x^2 + 4x - 1$

4) $P = 2x(x^2-1)(3x-6)$

5) $P = \dfrac{3x - 6x^2}{x^2 - 5x + 4}$

حل)

1) $P = 0 \rightarrow 3x - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow 3x = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	

2) $P = 0 \rightarrow -2x^2 + 3x + 5 = 0 \xrightarrow{b = a + c} x_1 = -1$ یا $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) $P = 0 \rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-4)} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		$-$	0	$-$	

4) $P = 0 \rightarrow 2x = 0$ یا $x^2 - 1 = 0$ یا $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 0$ یا $x = \pm 1$ یا $x = 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-6$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

۵) $\begin{cases} 3x-6x^2=0 \rightarrow 3x(1-2x)=0 \rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{1}{2} \\ x^2-5x+4=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1 \text{ یا } x=4 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		4		$+\infty$
$3x-6x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2-5x+4		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$	

نامعادله:

اگر به جای تساوی در معادله، نامساوی قرار دهیم، حاصل یک نامعادله است. مانند:

$2x-1 \geq x^2$ و $x < 2x+1 \leq 2x^2$

برای حل نامعادله به نکات زیر توجه می‌کنیم:

۱) به طرفین نامعادله می‌توان عددی اضافه یا کم کرد و جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

۲) طرفین نامعادله را می‌توان در هر عدد دلخواه ضرب کرد با این شرط که اگر طرفین را در عدد مثبت ضرب کنیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند ولی اگر طرفین را در عددی منفی ضرب کنیم جهت نامساوی تغییر می‌کند.

۳) اکثراً تعیین علامت می‌تواند در حل نامعادله به ما کمک کند. بدین منظور باید همهٔ عبارت را به سمت چپ آورده و عبارت را تعیین علامت می‌کنیم تا با استفاده از جدول حاصل نامعادله را بیابیم.

مثال : هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید.

1) $5 \le 2x-3 < 7$

2) $x^2 > 2x+3$

3) $\frac{2x-1}{x+3} \le 2$

4) $\frac{1}{x} - x \ge 2x+2$

حل)

1) $5 \le 2x-3 < 7 \xrightarrow{+3} 5+3 \le 2x-3+3 < 7+3$

$\to 8 \le 2x < 10 \to 4 \le x < 5$

2) $x^2-2x-3>0 \to P=x^2-2x+3=0 \xrightarrow{b=a+c} x=-1$ یا $x=-3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

جواب: $x<-3$ یا $x>-1$

3) $\frac{2x-1}{x+3}-2 \le 0 \to \frac{2x-1-2x-6}{x+3} \le 0 \to \frac{-7}{x+3} \le 0$

$\to x+3>0 \to x>-3$

4) $\frac{1}{x}-x-2x-2 \ge 0 \to \frac{1}{x}-3x-2 \ge 0 \to \frac{-3x^2-2x+1}{x} \ge 0$

$\Rightarrow P=\frac{-3x^2-2x+1}{x} \to \begin{cases} -3x^2-2x+1=0 \xrightarrow{b=a+c} \boxed{x=-1 \text{ یا } x=\frac{1}{3}} \\ \boxed{x=0} \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x^2-2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
P		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

جواب: $x \le -1$ یا $0<x \le \frac{1}{3}$