باسمه تعالی

مجتمع آموزشی دکتر حسابی

خلاصه درس ریاضی دهم — مدرس: محمد ایزدی (مدرسه ی دکتر حسابی)

فصل اول، درس اول: مجموعه، بازه و مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یادآوری:

انواع مجموعه‌های اعداد:

اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{۱, ۲, \cdots\}$

اعداد حسابی $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۳, \cdots\}$

اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\}$

اعداد گویا $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$

اعداد گنگ $\mathbb{Q}' =$ تمام اعداد اعشاری با اعشار نامختوم غیر تکراری

اعداد حقیقی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

مثال ۱: فرض کنید A مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ باشد. در این صورت:

$A - B = \{۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶, \cdots\}$

$(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) - (A \cap B) = \{\cdots, -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, , ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۳, \cdots\} = \mathbb{Z} - \{۶k | k \in \mathbb{N}\}$

$(\mathbb{Q}' \cap (\mathbb{Q} \cap A)) \cup (\mathbb{R} \cap B) = B$

تعریف: بازه

فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ باشد که $a < b$. تمام اعداد حقیقی بین a و b را بازه گویند. سه نوع بازه قابل تعریف است که در زیر به همراه نماد و به طور دقیق معرفی شده اند:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \longrightarrow \text{بازه‌ی باز}$$

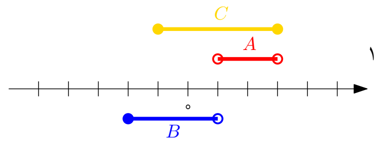
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\} \longrightarrow \text{بازه‌ی نیم‌باز}$$

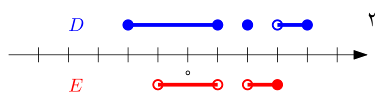
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\} \longrightarrow \text{بازه‌ی نیم‌باز}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\} \longrightarrow \text{بازه‌ی بسته}$$

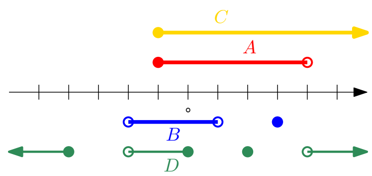
نکته: طبق اصلی در ریاضیات به نام اصل کمال، بازه به شکل پیوسته و بدون هیچ حفره‌ای روی محور اعداد حقیقی نمایش داده می‌شود.

مثال ۲: بازه‌های $A = (۱, ۳)$، $B = [-۲, -۱)$ و $C = [-۱, ۳]$ را روی محور ۱ و مجموعه‌های $D = [-۲, ۱] \cup \{۲\} \cup (۳, ۴]$ و $E = (-۱, ۱) \cup (۲, ۳]$ را روی محور ۲ نشان داده‌ایم.





مثال ۳: دانش‌آموزان سال دهم آقای ایزدی، چهار مجموعه‌ی A، B، C و D که در شکل زیر آمده‌اند را به بیان نمادی و به بیان بازه‌ای نوشته‌اند:



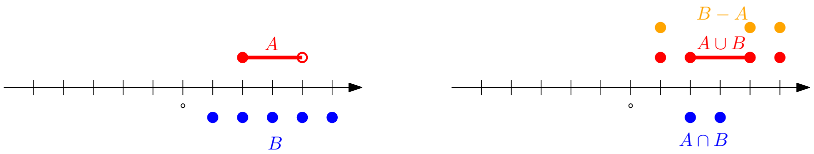
$A = \{x \in \mathbb{R} | -۱ \leqslant x < ۴\} = [-۱, ۴) \longrightarrow$ بازه‌ی نیمه باز

$B = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۱\} \cup \{۳\} = (-۲, ۱) \cup \{۳\} \longrightarrow$ بازه‌ی نیست

$C = \{x \in \mathbb{R} | x > -۱\} = (-۱, \infty) \longrightarrow$ بازه‌ی نیمه باز

$D = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -۴\} \cup \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x \leqslant ۰\} \cup \{x \in \mathbb{R} | ۲ \leqslant x \leqslant ۲\} \cup \{x \in \mathbb{R} | x > ۴\} = (-\infty, -۴] \cup (-۲, ۰] \cup \{۲\} \cup (۴, \infty)$

مثال ۴: مجموعه‌های $A=\{2x\in\mathbb{R}|1\leqslant x<2\}$ و $B=\{x-3\in\mathbb{Z}|3<x\leqslant 8\}$ به همراه مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $B-A$ را روی محور نشان داده‌ایم.



تعریف: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را یک مجموعه‌ی متناهی می‌نامیم و در غیر این صورت آن را نامتناهی گوییم.

مثال ۵: مجموعه‌های تمام اجرام آسمانی، تمام دانش‌آموزان روی کره‌ی زمین، تمام مولکول‌های تشکیل دهنده‌ی کره‌ی زمین و تمام دانش‌آموزان آقای ایزدی، همگی متناهی و مجموعه‌های مضارب عدد ۴۳۴، تمام مثلث‌های متشابه و تمام اعداد اول همگی، نامتناهی هستند.

نکته: الف) اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه هر زیرمجموعه‌ی آن متناهی است.

ب) اگر A یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد آنگاه هر مجموعه‌ای که A زیرمجموعه‌ی آن باشد نیز نامتناهی است.

نکته: به کمک نکته‌ی قبل تعداد زیادی گزاره می‌توان به دست آورد. مثلاً اگر A متناهی باشد آنگاه برای هر مجموعه‌ی دلخواه B، $A\cap B$ و $A-B$ متناهی‌اند؛ زیرا $A\cap B\subseteq A$ و $A-B\subseteq A$. همچنین اگر A نامتناهی باشد آنگاه برای هر مجموعه‌ی دلخواه B، $A\cup B$ نامتناهی است؛ زیرا $A\subseteq A\cup B$.

تمارین درس ۱

۱. درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\{x\in\mathbb{R}|5\leqslant x<5\}=\varnothing$؛ ب) $[2,1)\cup\{x\in\mathbb{R}|1\leqslant x\leqslant 1\}=[2,1]$؛

پ) $[\mathbb{N}\cup(\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q})]\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$؛ ت) $\mathbb{R}$ یک بازه‌ی بسته است؛

ث) $\mathbb{Q}$ یک بازه‌ی بسته است؛ ج) هر بازه یا یک عضو دارد یا بی‌نهایت عضو؛

چ) مجموعه‌ی اعداد گنگ نامتناهی است؛ ح) اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد آنگاه $B-A$ نیز متناهی است.

خ) مقسوم‌علیه‌های عدد $2^{20}\times 3$ یک مجموعه‌ی متناهی است؛ د) از نامتناهی بودن $\{\frac{k+1}{k}|k\in\mathbb{N}\}$ می‌توان نامتناهی بودن $[0,1]$ را نتیجه گرفت؛

ذ) مجموعه‌ی $((-\infty,-2]\cup(2,\infty))\cap[-4,4]=A$ دارای ۵ عدد صحیح است.

۲. مجموعه‌های زیر را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک بازه هستند و کدام یک بازه نیستند. هر مجموعه‌ای را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

$$[1,2]-\{2\}\qquad (-\infty,\tfrac{1}{2}]\cap(0,\infty)\qquad [-1,1]-\{0\}\qquad (-2,-1)\cup(1,2)\qquad (-3,1)\cap(-1,3]$$

۳. اگر $A_n=[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$ باشد حاصل موارد خواسته شده‌ی زیر را بیابید.

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots A_{10})-(A_1\cap A_2\cap\cdots,A_{10})\qquad A_2\cap A_3\cap A_4\qquad A_2\cup A_3\cup A_4$$

۴. اگر عدد ۲ در بازه‌ی $[2a,3+a)$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۵. مشخص کنید که کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند.

الف) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2}$؛ ب) اعداد صحیح بین 3^{20} و 3^{21}؛ پ) اشتراک اعداد زوج با اعداد گنگ؛ ت) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$.

۶. به کمک چند مجموعه از موارد زیر می توان نشان داد که بازه‌ی $[1,\frac{3}{2}]$ نامتناهی است؟

$$\{\frac{1}{\sqrt{k}}+1|k\in\mathbb{N}\}\qquad \{\frac{1}{k}|k\in\mathbb{N}\}\qquad \{\frac{1}{\sqrt{k}}|k\in\mathbb{N}\}\qquad \{1+\frac{1}{k}|k\in\mathbb{N}\}\qquad \{1-\frac{1}{k}|k\in\mathbb{N}\}$$

۷. اگر A نامتناهی و B متناهی باشد نامتناهی یا نامتناهی بودن هر یک از موارد زیر را مشخص کنید؟

$$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)\qquad (A\cup B)-(A\cap B)\qquad (A\cap B)-(A\cup B)\qquad A\cup(B-A)\qquad A-B\qquad B-A$$

ملک‌الشعرای بهار:

دگران کاشتند و ما خوردیم ما بکاریم و دیگران بخورند

فصل اول، درس دوم: متمم، جبر مجموعه‌ها و تعداد اعضای یک مجموعه

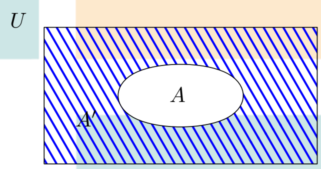
تعریف: مجموعه‌ی مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد مطالعه، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و با دو نماد U و M نشان داده می‌شود.

مثال ۱: زمانی که راجع به بازه‌ها صحبت می‌کنیم، مجموعه‌ی مرجع همان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی دیگری مد نظر گرفته شود، آن را حتماً ذکر خواهیم کرد. زمانی که راجع به دانش‌آموزان آقای ایزدی در مدرسه‌ی دکتر حسابی صحبت می‌کنیم، مجموعه‌ی مرجع، تمام دانش‌آموزان مدرسه‌ی دکتر حسابی هستند.

تعریف: متمم یک مجموعه

اگر A یک مجموعه و U مجموعه‌ی مرجع باشد، تفاضل $U - A$ را متمم مجموعه‌ی A نسبت به مجموعه‌ی مرجع U گوییم و با نماد A' نمایش می‌دهیم.

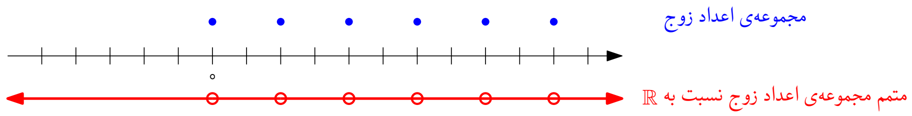


تذکر: با تعریف فوق، متمم یک مجموعه، شدیداً به مجموعه‌ی مرجع آن بستگی دارد. همچنین از تعریف متمم A می‌توان فهمید که همه‌ی اعضای مجموعه‌ی مرجع به جز اعضای A، عضو A' هستند (به نمودار ون دقت کنید).

نکته: برای هر مجموعه‌ی A روابط زیر برقرارند:

$$(A')' = A \qquad A \cap A' = \varnothing \qquad A \cup A' = U \qquad A \cap U = A \qquad A \cup U = U$$

مثال ۲: الف) اگر $U = \mathbb{N}$ مجموعه‌ی مرجع باشد آنگاه متمم مجموعه‌ی اعداد زوج، اعداد فرد خواهند بود. اگر مجموعه‌ی مرجع $U = \mathbb{R}$ باشد آنگاه متمم اعداد زوج به صورت زیر خواهد بود:



اگر بخواهیم متمم اعداد زوج نسبت به $\mathbb{R}$ را با نماد بازه‌ای بنویسیم برابر خواهد بود با:

$$(-\infty, ۰) \cup (۰, ۲) \cup (۲, ۴) \cup (۴, ۶) \cup \cdots$$

ب) متمم مجموعه‌ی دانش‌آموزان آقای ایزدی در مدرسه‌ی دکتر حسابی، تمام دانش‌آموزانی در مدرسه دکتر حسابی هستند که هیچ درسی با آقای ایزدی ندارند.

مثال ۳: اگر $A = (۱, ۳]$، $B = [-۱, \infty)$، $C = (-\infty, -۳] \cup (-۱, ۲) \cup (۳, \infty)$ آنگاه:

$$A' = (-\infty, ۱] \cup (۳, \infty) \qquad B' = (-\infty, -۱) \qquad C' = (-۳, -۱] \cup [۲, ۳]$$

هر ۶ مجموعه‌ی بالا را روی محور نشان دهید.

مثال ۴: اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و $U = \{۱, \cdots, ۱۰\}$ باشد آنگاه

$$(A \cap B)' = \{۱, ۲, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\} \quad , \quad A' \cup B' = \{۱, ۲, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\} \quad , \quad (A \cup B)' = \{۸, ۹, ۱۰\} \quad , \quad A' \cap B' = \{۸, ۹, ۱۰\}$$

قانون: برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad , \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

دو تساوی فوق را قوانین دمورگان می‌نامند (درستی این قانون را در مثال قبل مورد بررسی قرار دهید و سپس برای صحت این دو تساوی نمودار ون رسم کنید).

قانون: اجتماع‌ها و اشتراک‌های پیاپی نیازی به پرانتز ندارند ولی تفاضل‌های پیاپی نیاز به پرانتز دارند:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

اما لزوماً $(A - B) - C$ با $A - (B - C)$ برابر نیست (مثالی برای عدم تساوی این دو مجموعه ارائه دهید) و درنتیجه عبارت $A - B - C$ بی معنی است!

به طور خلاصه می‌گوییم اجتماع و اشتراک دارای خاصیت شرکت‌پذیری هستند ولی تفاضل دارای خاصیت شرکت‌پذیری نیست.

قانون: برای هر دو مجموعه‌ی A و B، اجتماع و اشتراک دارای خاصیت‌های جابه‌جایی هستند؛ یعنی

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

اما، تفاضل دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی $A - B$ با $B - A$ لزوماً برابر نیستند (مثالی برای عدم تساوی این دو مجموعه ارائه دهید).

قانون: برای هر سه مجموعه‌ی A، B و C، اعمال اجتماع و اشتراک دارای خاصیت پخشی هستند. یعنی (درستی این رابطه را با نمودار ون نشان دهید):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

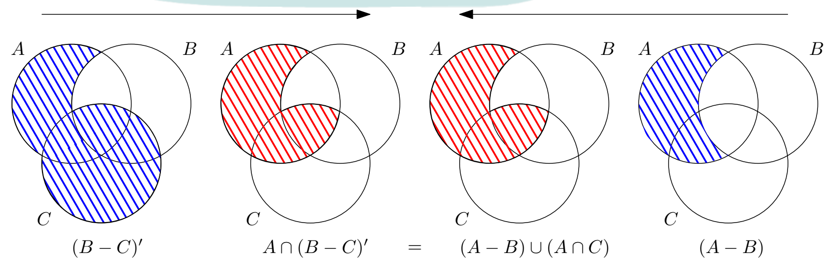
قانون: برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم (درستی این رابطه‌ها را با نمودار ون نشان دهید):

$$(A')' = A \quad , \quad A - B = A \cap B'$$

مثال ۵: به کمک نمودار ون و جبر مجموعه‌ها (قوانین) نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $A \cap (B - C)'$ با $(A - B) \cup (A \cap C)$ برابرند. ابتدا به کمک جبر مجموعه‌ها این کار را انجام می‌دهیم:

$$A \cap (B - C)' = A \cap (B \cap C')' = A \cap (B' \cup (C')') = A \cap (B' \cup C) = (A \cap B') \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

اکنون این کار را به کمک نمودار ون نیز صورت می‌دهیم:



تعریف: مجموعه‌های جدا از هم

دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم گوییم هرگاه $A \cap B = \varnothing$؛ یعنی هیچ اشتراکی نداشته باشند.

نمادگذاری: تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

نکته: اگر A، B و C سه مجموعه باشند آنگاه:

۱) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

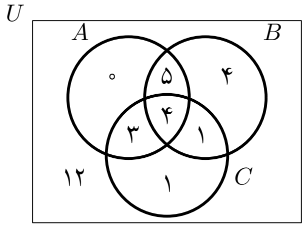
۲) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

۳) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

۴) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

تذکر: در محاسبه‌ی تعداد اعضا بهتر است که از نمودار کمک بگیریم.

مثال ۶: در یک کلاس با ۳۰ نفر دانش‌آموز، ۱۲ نفر در شیمی، ۱۴ نفر در فیزیک و ۹ نفر در زیست‌شناسی نمره‌ی ۲۰ گرفته‌اند. اگر ۹ نفر هم در شیمی و هم در فیزیک، ۷ نفر هم در شیمی و هم در زیست‌شناسی و ۵ نفر هم در فیزیک و هم در زیست‌شناسی نمره‌ی ۲۰ گرفته باشند و بدانیم ۱۲ نفر در هیچ یک از این درس‌ها ۲۰ نگرفته‌اند، آنگاه به کمک نمودار ون زیر، می‌توان تعداد دانش‌آموزانی که در هر سه درس نمره‌ی ۲۰ گرفته‌اند را یافت (نمودار زیر را تحلیل کنید که اعداد آن چگونه به دست آمده‌اند):



$U =$ مجموعه‌ی مرجع

$A =$ کسانی که در شیمی ۲۰ گرفتند

$B =$ کسانی که در فیزیک ۲۰ گرفتند

$C =$ کسانی که در زیست‌شناسی ۲۰ گرفتند

تمارین درس ۱

۱. فرض کنید $A = (-۱, ۳]$، $B = (۱, \infty)$، $C = (-\infty, ۲]$، $D = [-۴, ۰) \cup [۱, ۶]$ و $E = \{۲x - ۱ | x \in \mathbb{N}\}$. مجموعه‌های خواسته‌ی زیر را روی محور نشان دهید:

$۱) A \cap (B \cap C)$ $\quad$ $۲) A \cup (B \cap D)$ $\quad$ $۳) A - (B - C)$ $\quad$ $۴) A' \cap B$ $\quad$ $۵) E'$

$۶) A' \cup C'$ $\quad$ $۷) (C \cup D)'$ $\quad$ $۸) (E - A)'$ $\quad$ $۹) (E' \cap A)'$ $\quad$ $۱۰) C \cap D'$

۲. موارد زیر را به دو روش نمودار ون و جبر مجموعه‌ها اثبات کنید.

الف) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ $\qquad$ ب) $A \cap (B - C) = (A - C) \cap B$

پ) $C - (B - A) = (A \cap C) \cup (C - B)$ $\qquad$ ت) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

ث) $(A - B) \cup (B \cap (A \cup B)) = A \cup B$ $\qquad$ ج) $(A' \cap B) \cup (A \cup B') = U$

۳. در یک کلاس ۱۵ نفره‌ی آقای ایزدی در مدرسه‌ی دکتر حسابی، ۷ دانش‌آموز به فوتبال و ۱۲ دانش آموز به والیبال علاقه دارند. چند دانش‌آموز به هر دو ورزش فوتبال و والیبال علاقه دارند؟

۴. ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا، در دو کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر در کارگاه ریسندگی و ۱۹ نفر در بافندگی شرکت کرده باشند، چند نفر فقط ریسندگی را انتخاب کرده‌اند؟

۵. با نمودار ون نشان دهید که مجموعه‌های زیر مجزا (جدا از هم) هستند:

$$(A - B), (B - A) \qquad\qquad (A - B) \cup (B - A), (A \cap B)$$

۶. اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

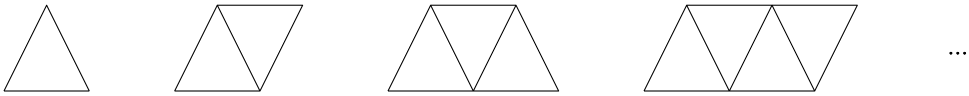
$$A' \qquad (A \cap B')' \qquad (A \cap B)'$$

شهریار:

من چون ز پا بیفتم درمان درد من اوست $\qquad$ درد آن بود که از پا درمان من بیفتد

فصل اول، درس سوم: الگو و دنباله

مثال ۱: شکل زیر را در نظر بگیرید:

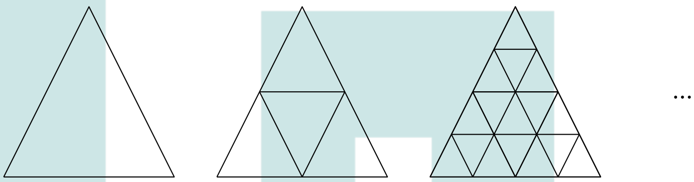


مرحله‌ی اول — مرحله‌ی دوم — مرحله‌ی سوم — مرحله‌ی چهارم

در مرحله اول ۳ ضلع، مرحله‌ی دوم ۵ ضلع، مرحله‌ی سوم ۷ ضلع و مرحله‌ی چهارم ۹ ضلع وجود دارد. در این شکل می‌توان بدون رسم شکل تعداد ضلع‌های مرحله‌ی ششم را نیز حدس زد که برابر با ۱۳ است. موضوع اصلی که از این مثال متوجه شدیم این است که در هر مرحله، ۲ ضلع افزایش می‌یابد. تعداد اضلاع در مرحله‌ی nام برابر است با $3 + 2(n-1)$.

نکته: مرحله‌ی اول را با a_1، مرحله‌ی دوم را با a_2 و همینطور مرحله‌ی nام را با a_n نمایش می‌دهیم. همچنین مرحله‌ی اول را جمله‌ی اول، مرحله‌ی دوم را جمله‌ی دوم و همینطور مرحله‌ی nام را جمله‌ی nام نیز می‌گوییم. جمله‌ی nام را نیز جمله‌ی عمومی نیز می‌نامند.

مثال ۲: در شکل زیر در مرحله‌ی اول یک مثلث، در مرحله‌ی دوم ۴ مثلث و در مرحله‌ی سوم ۱۶ مثلث وجود دارد (در هر مرحله وسط اضلاع مثلث‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث‌های جدید ایجاد شود).



پس می‌توانیم بنویسیم:

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_3 = 16 \quad , \quad \cdots \quad , \quad a_n = 2^{2(n-1)}$$

به کمک رابطه‌ی $a_n = 2^{2(n-1)}$ می‌توانیم تعداد مثلث‌ها در مرحله‌ی ششم را نیز به راحتی و بدون رسم شکل به دست آوریم که برابر است با $a_6 = 2^{2(6-1)} = 1024$.

تعریف: الگوی خطی

هر الگو که تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی آن عددی ثابت باشد، یک الگوی خطی نام دارد. همچنین جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به صورت $a_n = an + b$ است. ضمناً هر الگو که خطی نباشد را الگوی غیرخطی می‌نامیم.

مثال ۳: موارد زیر همگی یک الگوی خطی معرفی می‌کنند. جمله عمومی هر یک را بنویسید:

الف) اعداد فرد؛

ب) اعداد $2, 5, 8, \cdots$؛

پ) اضلاعی که در شکل مثال ۱ آمده است.

مثال ۴: موارد زیر همگی یک الگوی غیرخطی معرفی می‌کنند. جمله عمومی هر یک را بنویسید:

الف) اعداد مربع کامل با شروع از ۴؛

ب) اعداد $0, 2, 8, 26, 80, \cdots$؛

پ) تعداد مثلث‌هایی که در شکل مثال ۲ آمده است.

مسئله: اگر در یک الگوی خطی جمله‌ی پنجم برابر با ۶ و جمله‌ی دهم برابر با ۱۸ باشد، جمله‌ی بیستم آن چند خواهد بود؟

تعریف: دنباله

هر تعداد عدد که به ترتیب پشت سر هم قرار گیرند را دنباله گوییم.

نکته: الف) هر دنباله یک نوع الگو است و مشابه الگوها جمله‌ی عمومی آن‌ها را با a_n، t_n و یا عباراتی مشابه با این نمایش می‌دهیم.

ب) هر دنباله لزوماً دارای جمله‌ی عمومی نیست.

مسئله: جمله عمومی دنباله‌های زیر را به دست آورید:

۱)۱, ۱, ۱, $\cdots$

۲)۱, ۲, , ۳, ۴, ۵, $\cdots$

۳)۱, −۲, ۳, −۴, ۵, $\cdots$

۴)۳, ۶, ۹, ۱۲, $\cdots$

۵)۵, ۲۵, ۱۲۵, $\cdots$

۶)$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \cdots$

۷)۱/۹, ۱/۹۹, ۱/۹۹۹, ۱/۹۹۹۹, $\cdots$

سعدی:

دیبا نتوان کردن از این پشم که رشتیم
خرما نتوان خوردن از این خار که کشتیم

فصل اول، درس چهارم: دنباله و انواع آن

بخش مقدماتی

تعریف: دنباله‌ی حسابی

به دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به جز جمله‌ی اول) با اضافه شدن مقداری ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی گفته می‌شود و آن عدد را قدرنسبت دنباله‌ی حسابی می‌گوییم و با d نشان می‌دهیم.

مثال ۱: دنباله‌های زیر همگی دنباله‌های حسابی هستند. ابتدا قدرنسبت هر یک را به دست آورید و سپس جمله‌ی عمومی آن‌ها را بیابید.

$۱)۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \cdots$

$۲)۱۰, ۲۰, ۳۰, \cdots$

$۳)۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, \cdots$

$۴)۹, ۶, ۳, ۰, -۳, \cdots$

$۵) -۴, -۶, -۸, \cdots$

$۶) -۲۰, -۱۶, -۱۲, \cdots$

$۷)\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, -۱, \cdots$

نکته: جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ است که در آن $a_۱$ جمله‌ی اول دنباله و d قدرنسبت دنباله است.

مثال ۲: در دنباله‌های زیر مشخص کنید که کدام یک حسابی است. جمله‌ی عمومی تمام دنباله‌ها را بنویسید.

$۱)۲, -۲, ۲, -۲, \cdots$

$۲)۴, ۷, ۱۰, \cdots$

$۳)\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \cdots$

$۴)\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۶}, \cdots$

$۵)۱, \frac{۵}{۳}, \frac{۷}{۳}, \cdots$

$۶)\sqrt{۱}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \cdots$

$۷)\sqrt{۳}, \sqrt{۳}+۱, \sqrt{۳}+۲, \cdots$

مثال ۳: در دنباله‌ی حسابی $\cdots ,-۱, ۱, ۳$ جمله‌ی چندم برابر با -۴۷ است؟ مجموع جمله‌ی بیستم و بیست و چهارم چند است؟

مثال ۴: تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست و یکم این دنباله را بیابید.

تعریف: واسطه‌ی حسابی

اگر عددی مانند c را چنان بین دو عدد a و b قرار دهیم که a, c, b تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهد آنگاه c را واسطه‌ی حسابی a و b گوییم.

نکته: برای آنکه عدد c واسطه‌ی حسابی a و b باشد باید $c = \frac{a+b}{۲}$ که در این صورت قدرنسبت برابر با $\frac{b-a}{۲}$ خواهد بود: $a, \frac{a+b}{۲}, b$

مثال ۵: بین دو عدد $۲\sqrt{۵}$ و ۴ یک واسطه حسابی درج می‌کنیم:

$$۲\sqrt{۵}, \sqrt{۵}+۲, ۴, \cdots$$

جمله‌ی عمومی این دنباله برابر است با $a_n = ۲\sqrt{۵} + (n - ۱)(۲ - \sqrt{۵})$ و در نتیجه جملات بعدی را نیز می‌توان به دست آورد؛ مثلاً جمله‌ی هفتم آن عبارت است از $a_۷ = ۱۲ - ۴\sqrt{۵}$.

مثال ۶: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی $a, ۱ - ۲a, ۳a - ۱, \cdots$ را بیابید.

تعریف: دنباله‌ی هندسی

به دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به جز جمله‌ی اول) با ضرب شدن مقداری ثابت در جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی هندسی گفته می‌شود و آن عدد را قدرنسبت دنباله‌ی هندسی می‌گوییم و با q یا r نشان می‌دهیم.

مثال ۷: دنباله‌های زیر همگی دنباله‌های هندسی هستند. ابتدا قدرنسبت هر یک را به دست آورید و سپس جمله‌ی عمومی آن‌ها را بیابید.

$۱)۴, ۸, ۱۶, \cdots$

$۲)\frac{۱}{۳}, ۶, ۴۵, \cdots$

$۳) - ۱, ۲, -۴, ۸, \cdots$

$۴)\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \cdots$

$۵)\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴}, \cdots$

$۶)۰/۲, ۰/۰۲, ۰/۰۰۲, \cdots$

$۷)\sqrt{۲}, ۲, ۲\sqrt{۲}, ۴, \cdots$

نکته: جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n = aq^{n-۱}$ است که در آن $a_۱$ جمله‌ی اول دنباله و q قدرنسبت دنباله است.

مثال ۸: در دنباله‌های زیر مشخص کنید که کدام یک هندسی است. جمله‌ی عمومی تمام دنباله‌ها را بنویسید.

$۱)۱, ۱, ۱, ۱, ۱$

$۲)۶, ۳۶, ۶۶, \cdots$

$۳)\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots$

$۴)\frac{۱}{۵}, -\frac{۱}{۲۵}, \frac{۱}{۱۲۵}, \cdots$

$۵)۳, ۲, \frac{۴}{۳}, \cdots$

$۶)\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \cdots$

مثال ۹: در دنباله‌ی هندسی $\sqrt{۲}, ۴, ۸\sqrt{۲}, \cdots$، جمله‌ی چندم برابر ۱۲۸ است؟ تفاضل جمله‌ی پنجم و هفتم را بیابید.

مثال ۱۰: در دنباله‌ی هندسی $a, ۲a, ۴a, \cdots$، نسبت جمله‌ی هفتم به جمله‌ی سوم را بیابید.

تعریف: واسطه‌ی هندسی

اگر عددی مانند c را چنان بین دو عدد a و b قرار دهیم که a, c, b تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهد آنگاه c را واسطه‌ی هندسی a و b گوییم.

نکته: برای آنکه عدد c واسطه‌ی هندسی a و b باشد باید $c = \pm\sqrt{ab}$ که در این صورت قدرنسبت برابر با $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ خواهد بود: $a, \sqrt{ab}, b$

مثال ۱۱: بین دو عدد $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۳}$ یک واسطه‌ی هندسی درج کنید:

$$\frac{۳}{۴}, \sqrt{\frac{۳}{۴}\frac{۴}{۳}}, \frac{۴}{۳}, \cdots \Rightarrow \frac{۳}{۴}, ۱, \frac{۴}{۳}, \cdots$$

چند مثال دشوار و مهم:

مثال ۱۲: مجموع سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۸ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

مثال ۱۳: اگر $2^{2x-1}, 4^{4x}, 8^{8x+1}, \cdots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد مقدار x جمله‌ی پنجم این دنباله را بیابید.

مثال ۱۴: اگر در دنباله‌ی حسابی $3, 6, 9, \cdots$ اگر جملات با شماره‌ی جمله‌ی فرد را حذف کنیم، نسبت جمله‌ی پنجم به جمله‌ی هشتم دنباله‌ی حاصل چیست؟

مثال ۱۵: دو دنباله‌ی $a_n = 4n - 1$ و $b_n = 5n + 1$ چند جمله‌ی مشترک کم‌تر از ۴۰۰ دارند؟

مثال ۱۶: در دنباله‌ای هندسی مجموع جملات اول و سوم سه برابر دومین جمله است. مجموع جملات پنجم و اول چند برابر جمله‌ی سوم است؟

مثال ۱۷: جملات دوم، پنجم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

مثال ۱۸: در دنباله‌ی حسابی $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \cdots$ جمله‌ی نخست را با $\frac{8}{3}$، جمله‌ی دوم را با $\frac{7}{3}$، جمله‌ی سوم را با $\frac{6}{3}$ و ... جمع می‌کنیم. جمله‌ی ۶۵ام دنباله‌ی جدید چند است؟

مثال ۱۹: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته‌ی باشد $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \cdots$ جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم را بیابید؟

مثال ۲۰: اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b, 16\sqrt{2}$ چهار جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی می‌باشند. $a - b$ را بیابید.

بخش تکمیلی

نکته: برای آنکه بین دو عدد a و b، m واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، در این صورت قدرنسبت برابر خواهد بود با $\frac{b-a}{m}$.

مثال ۲۱: بین دو عدد $۵+\sqrt{۲}$ و $۵-\sqrt{۲}$ چهار واسطه‌ی حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عدد نوشته شده را بیابید.

نکته: اگر $n+m=p+q$ آنگاه $a_n+a_m=a_p+a_q$.

مثال ۲۲: در یک دنباله‌ی حسابی $a_۳+a_۷=۲۰$. حاصل عبارت $a_۲+a_۴+a_۶+a_۸$ را بیابید.

نکته: برای آنکه بین دو عدد a و b، m واسطه‌ی هندسی قرار دهیم، در این صورت قدرنسبت برابر خواهد بود با $\sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$.

مثال ۲۳: بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۱۶\sqrt{۲}$، هفت واسطه‌ی هندسی درج می‌کنیم. مربع قدرنسبت دنباله‌ی حاصل را بیابید.

نکته: اگر $n+m=p+q$ آنگاه $a_na_m=a_pa_q$.

مثال ۲۳: در دنباله‌ای هندسی $t_۱t_۲\cdots t_۹=۸$. حاصل $t_۲t_۴t_۶t_۸$ را بیابید.

تعریف: دنباله‌ی بازگشتی

دنباله‌ای که جمله‌ی عمومی آن به جملات ماقبل وابسته باشد را دنباله‌ی بازگشتی می‌گوییم.

مثال ۲۴: موارد زیر نمونه‌هایی از دنباله‌های بازگشتی هستند که جمله‌ی عمومی آن‌ها آمده است:

۱) $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \cdots$ $\quad a_n=a_{n+۱}+a_{n+۲}$

۲) $۰, ۲, ۶, ۱۲, ۲۴, \cdots$ $\quad a_n=۲a_{n-۱}+۲$

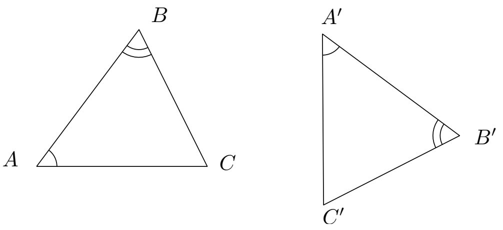
مثال ۲۵: در یک دنباله‌ی اعداد $a_۱=۱$ و برای هر $n\geqslant ۲$ داریم $a_n=۲a_{n-۱}+۱$. جمله‌ی هشتم چند برابر جمله‌ی سوم است؟

سعدی:

کز صحبت دیگران، سیاهی خیزد   با مردم زشت‌نام همراه مباش

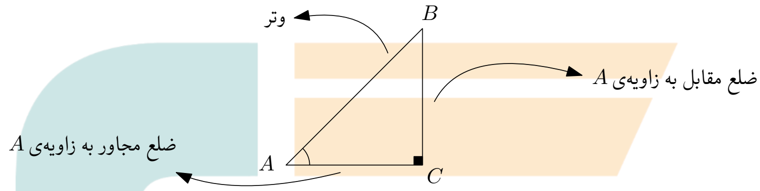
فصل دوم، درس اول: روابط مثلثاتی

یادآوری: اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر، برابر باشند آنگاه آن دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند؛ یعنی نسبت اضلاع متناظر با یکدیگر برابرند.

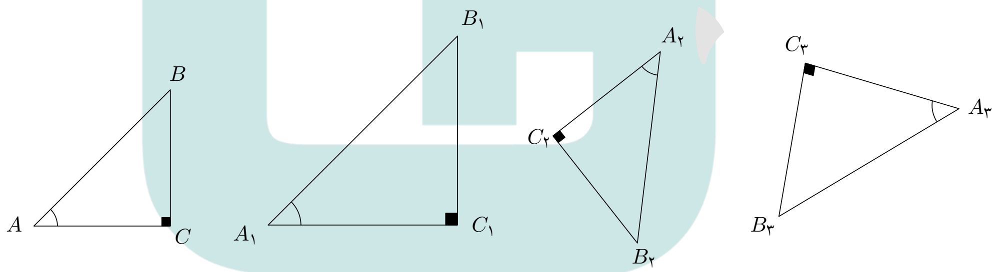


$$ABC \sim A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

قرارداد: اگر ABC یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی قائمه‌ی C باشد آنگاه ضلع متناسب با زاویه‌ی A، ضلع AC را ضلع مجاور به A، BC را ضلع مقابل به A و AB را وتر می‌نامیم.



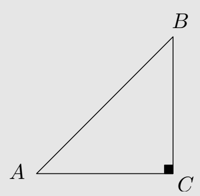
نکته: هر دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌ی یکسان غیر از زاویه‌ی قائم داشته باشند متشابه هستند. پس نسبت‌های زیر، در **تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای** که یکی از زاویه‌های آن برابر با زاویه‌ی A باشد، برقرار هستند.



$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{A_1B_1} \\ \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{A_1B_1} \\ \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{A_1C_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{A_1B_1} = \dfrac{A_2C_2}{A_2B_2} = \dfrac{A_3C_3}{A_3B_3} = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} \\ \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{A_1B_1} = \dfrac{B_2C_2}{A_2B_2} = \dfrac{B_3C_3}{A_3B_3} = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} \\ \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{A_1C_1} = \dfrac{B_2C_2}{A_2C_2} = \dfrac{B_3C_3}{A_3C_3} = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A} \end{cases}$$

تعریف: نسبت‌های مثلثاتی

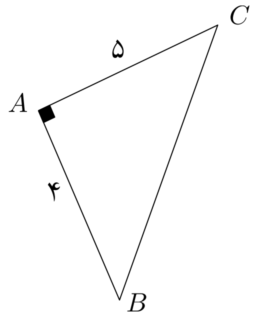
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با زاویه‌ی قائم C، چهار نوع رابطه‌ی مثلثاتی برای زاویه‌ی A و B می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

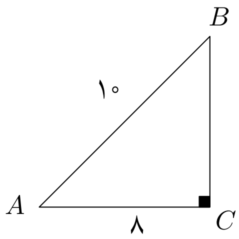


$$\text{زاویه‌ی } B \begin{cases} \sin B = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } B}{\text{وتر}} = \dfrac{AC}{AB} \\ \cos B = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } B}{\text{وتر}} = \dfrac{AB}{AB} \\ \tan B = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } B}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } B} = \dfrac{AC}{BC} \\ \cot B = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } B}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } B} = \dfrac{BC}{AC} \end{cases}$$

$$\text{زاویه‌ی } A \begin{cases} \sin A = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} = \dfrac{BC}{AB} \\ \cos A = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{وتر}} = \dfrac{AC}{AB} \\ \tan A = \dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A} = \dfrac{BC}{AC} \\ \cot A = \dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } A} = \dfrac{AC}{BC} \end{cases}$$

مثال ۱: در مثلث‌های زیر نسبت‌های مثلثاتی چهارگانه را برای دو زاویه‌ی غیر قائم به دست‌آورید.





نکته: الف) با توجه به اولین نکته‌ی درس، اگر بتوانیم نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و یا کتانژانت یک زاویه مانند A را در مثلثی به دست بیاوریم، این نسبت در تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌ی A دارند، یکسان است.

ب) نسبت‌های مثلثاتی همه‌ی زوایا، بدون داشتن اضلاع مثلث، به راحتی قابل محاسبه نیستند. اما برخی از زوایا که به زوایای خاص معروف هستند، به راحتی قابل محاسبه می‌باشند که در نکته بعد آمده اند.

نکته: نسبت مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° در جدول زیر آمده است. اثبات درستی آن‌ها را بنویسید.

روابط مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

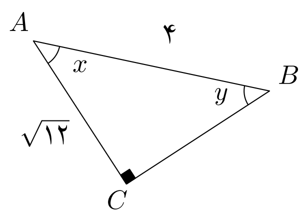
نکته: الف) نسبت مثلثاتی سینوس با افزایش زاویه از ۰° تا ۹۰°، افزایش پیدا می‌کند.

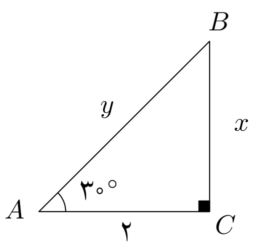
ب) نسبت مثلثاتی کسینوس با افزایش زاویه از ۰° تا ۹۰°، کاهش پیدا می‌کند.

پ) نسبت مثلثاتی تانژانت با افزایش زاویه از ۰° تا ۹۰°، افزایش پیدا می‌کند.

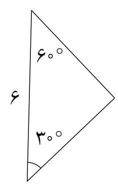
الف) نسبت مثلثاتی کتانژانت با افزایش زاویه از ۰° تا ۹۰°، کاهش پیدا می‌کند.

مثال ۲: در مثلث‌های زیر مقدار مجهولات خواسته شده را بیابید.





مثال ۳: در مثلث زیر، مساحت چند برابر محیط است؟

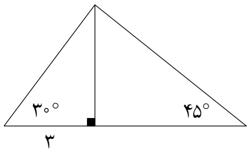


مثال ۴: یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

نکته: مساحت **هر مثلث دلخواه** برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع از یک مثلث در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع. به بیان نمادین در مثلث ABC داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(\text{ارتفاع})(\text{قاعده}) = \frac{۱}{۲}AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{۱}{۲}AC \times CB \times \sin \hat{C} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

مثال ۵: ابتدا تمام اجزای مثلث زیر را بیابید و سپس مساحت مثلث بزرگ را به چند طریق حساب کنید.



مثال ۶: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$(\sin ۶۰ - \sin ۴۵)(\cos ۳۰ + \cos ۴۵) - (\tan ۳۰ - \tan ۴۵)(\cot ۶۰ + \cot ۴۵)$$

$$\frac{\sin ۳۰ + \cos ۶۰ - \tan ۴۵}{\cot ۳۰ \times \tan ۳۰ + \sin ۴۵}$$

$$۲\tan ۴۵ + ۴\sin^۲ ۳۰ - \cot^۲ ۶۰$$

مثال ۷: مقدار x را از تساوی زیر بیابید.

$$\frac{\tan ۶۰ + - \tan ۳۰}{۱ + \tan ۶۰ \tan ۳۰} = \cot x$$

تمرین درس ۱:

۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع قائم بر هم برابر با ۹ و ۱۲ هستند. تمام نسبت‌های مثلثاتی را برای زاوایای غیر قائم بنویسید.

۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۵، یکی از زوایا برابر با ۳۰ درجه است. تمام نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه‌ی غیر قائم دیگر بنویسید.

۳. عبارات زیر را ساده کنید.

$$۱)(\sin ۳۰ + \cos ۳۰)^۲ - ۶\tan^۲ ۳۰$$

$$۲)\frac{\tan ۳۰}{\sin ۳۰} - \frac{\sin ۶۰}{\cos^۲ ۴۵}$$

$$۳)\frac{\cot^۲ ۴۵}{\cos ۶۰} - \sin ۳۰ \cos ۶۰$$

۴. در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه‌ی قائم B، اگر $BC = \sqrt{۳}$ و $AB = \sqrt{۵}$ باشد، حاصل $\sin^۲ A + \cot^۲ A - \cos^۲ B$ را بیابید.

۵. در مثلث ABC، $\hat{C} = ۴۸^\circ$، $\hat{B} = ۷۲^\circ$، $AC = \sqrt{۳}$ و $AB = ۸$. مساحت مثلث را بیابید.

سعدی:

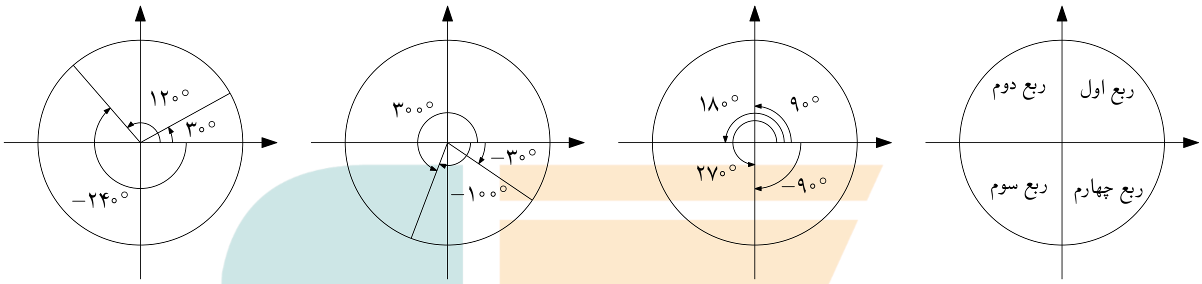
صفت عاشق صادق به درستی آنست — که گرش سر برود از سر پیمان نرود

فصل دوم، درس دوم: دایره‌ی مثلثاتی

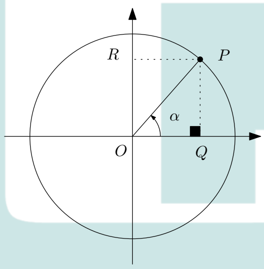
تعریف: دایره‌ی مثلثاتی

در دستگاه مختصات، دایره‌ی به مرکز مبدأ و شعاع واحد را دایره‌ی مثلثاتی گوییم.

قرارداد: در دایره‌ی مثلثاتی اگر بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم، زاویه‌ی به دست آمده را مثبت و اگر موافق با جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم، زاویه‌ی به دست آمده منفی در نظر می‌گیریم.



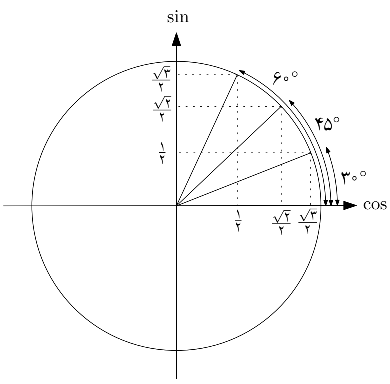
نکته: در دایره‌ی مثلثاتی، محور xها نمایشگر مقدار کسینوس و محور yها نمایشگر مقدار سینوس می‌باشد.

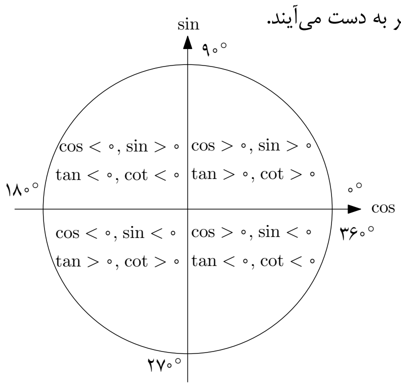


$$\cos\alpha = \frac{OQ}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OQ$$

$$\sin\alpha = \frac{PQ}{1} \Rightarrow \sin\alpha = RO$$

نکته: در ربع اول تمام نسبت‌های مثلثاتی مثبت، در ربع دوم سینوس مثبت و مابقی منفی، در ربع سوم سینوس و کسینوس منفی ولی تانژانت و کتانژانت مثبت و در نهایت در ربع چهارم سینوس منفی و مابقی مثبت هستند. همچنین به زوایای $0°$، $90°$، $180°$، $270°$ و $360°$ زوایای مرزی گفته می‌شود که نسبت مثلثاتی آن‌ها به کمک دایره‌ی مثلثاتی به صورت زیر به دست می‌آیند.





	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°
sin	۰	۱	۰	−۱
cos	۱	۰	−۱	۰
tan	۰	ت ن	۰	ت ن
cot	ت ن	۰	ت ن	۰

نکته: تانژانت و کتانژانت در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

مثال ۱: سینوس یک زاویه‌ای برابر با $-\frac{1}{2}$ و کسینوس آن برابر با $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. انتهای چنین زاویه‌ای در ربع سوم قرار دارد. چرا؟ مقدار تانژانت و کتانژانت این زاویه را بیابید.

نکته: برای هر زاویه مانند α مجموع مربع سینوس آن زاویه و مربع کسینوس آن زاویه همواره برابر با ۱ است:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

در این رابطه دقت داشته باشید زاویه در هر دو نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس یکسان است.

مثال ۲: فرض کنید انتهای یک زاویه‌ای در ربع دوم قرار دارد و مقدار سینوس آن برابر با $\frac{3}{5}$ است. مقدار کسینوس، تانژانت و کتانژانت این زاویه را بیابید.

مثال ۳: سینوس چه زاویه‌هایی در دایره‌ی مثلثاتی برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است؟ کسینوس چه زاویه‌هایی برابر با $-\frac{1}{2}$ است؟

مثال ۴: سینوس چه زاویه‌هایی برابر با $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؟ کسینوس، تانژانت و کتانژانت این زوایا را نیز بیابید.

مثال ۵: مقادیر زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

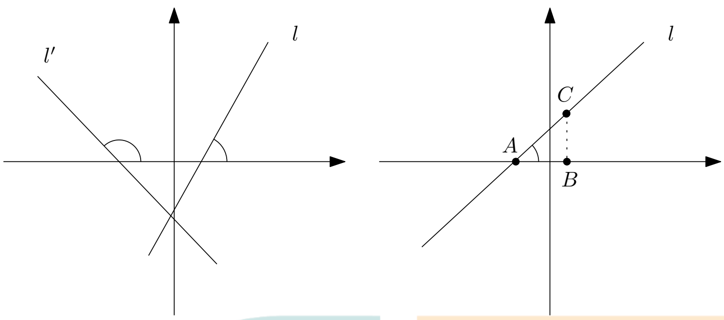
$$\sin 0, \sin 20, \sin 30, \sin 45, \sin 60, \sin 90, \sin 100, \sin 120, \sin 135, \sin 150, \sin 170, \sin 180, \sin 200, \sin 210, \sin 330$$

مثال ۶: اگر $\sin\alpha\cos\alpha < 0$ و $\sin\alpha\tan\alpha > 0$ آنگاه انتهای زاویه‌ی α در چه ربعی قرار دارد؟

مثال ۷: اگر $\sin\theta = -\frac{3}{4}$ و $\cot\theta \cdot \sin\theta > 0$ آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

مثال ۸: اگر $\cot\alpha = ۲$ و $\sin\alpha \cdot \tan\alpha < ۰$، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

نکته: شیب یک خط در صفحه‌ی دکارتی برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط به قسمت مثبت محور xها می‌سازد.

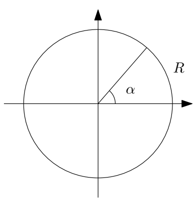


$$\tan \hat{A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \text{شیب خط}$$

مثال ۹: معادله‌ی خطی را بنویسید که با قسمت مثبت محور xها زاویه‌ی ۳۰° بسازد و محور xها در نقطه‌ی ۲ قطع کند.

مثال ۱۰: خطی که از نقاط $(۲,۱)$ و $(۳,۲)$ می‌گذرد، محور xها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟ سینوس و کسینوس آن زاویه را نیز بیابید.

نکته: محیط دایره‌ی مثلثاتی برابر با ۲π است. بنابراین نسبت زیر در دایره‌ی مثلثاتی برقرار است:



$$\frac{۳۶۰^\circ}{\alpha} = \frac{۲\pi}{R}$$

تعریف: رادیان

بخشی از محیط دایره‌ی مثلثاتی که روبروی زاویه‌ی α قرار دارد را رادیان می‌نامیم و معمولاً آن را با نماد R نمایش می‌دهیم و از رابطه‌ی فوق به دست می‌آید.

نکته: در جدول زیر برخی از زاوایای خاص بر حسب رادیان آورده شده‌اند:

زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

مثال ۱۱: هر ۱ رادیان، حدوداً چند درجه است؟ ۲۰۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

مثال ۱۲: حاصل مقادیر زیر را بیابید.

$$۱)\ \sin(\pi + \frac{\pi}{۴})\cos(\pi - \frac{\pi}{۴})$$

$$۲)\ \cos^۲\frac{۵\pi}{۴} + \sin\frac{۷\pi}{۶}$$

$$۳)\ \sin\frac{۳۱\pi}{۴} + \cos\frac{۱۰۵\pi}{۴} + \tan\frac{۴۳\pi}{۴}$$

تمرین درس ۲:

۱. حاصل مقادیر زیر را بیابید:

$\tan\frac{۲\pi}{۳} \times \sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴} - \cot\frac{\pi}{۴}$	$\cos\frac{\pi}{۴} + \cos ۶۰$	$\sin(-۱۲۰) - \sin ۱۲۰$
$\sin\pi - \tan(-۲۷۰)$	$\cos(\pi - \frac{\pi}{۴})\tan(-۶۰)$	$\sin(-\frac{\pi}{۳})$

۲. اگر α زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$، آنگاه مقدار $\cot\alpha - \tan\alpha$ را بیابید.

۳. اگر $\sin\alpha = \frac{۱}{۳}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای $\cos\alpha$ را بیابید.

۴. اگر $\sin\alpha = \frac{۲}{۳}$ و $\sin\alpha\cos\alpha < ۰$ آنگاه تمام راوبط مثلثاتی مربوط به زاویه‌ی α را بیابید.

۵. اگر $\tan\theta = \frac{۱}{۲}$ و $\sin\theta < ۰$ آنگاه تمام راوبط مثلثاتی مربوط به زاویه‌ی θ را بیابید.

۶. اگر $\tan ۲۴۰^\circ = \sqrt{۳}$ باشد، حاصل $\cos ۲۴۰^\circ + \cot ۲۴۰^\circ$ را بیابید.

۷. اگر $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ که α در ربع چهارم و $\sin\beta = -\frac{۱}{۲}$ که β در ربع سوم است، حاصل $\cot\beta - \sin\alpha - \sqrt{۳}$ را بیابید.

۸. معادله‌ی خطی را بنویسید که با قسمت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی $\frac{۲\pi}{۳}$ بسازد و از نقطه‌ی $(۱, ۱)$ بگذرد.

۹. کتانژانت زاویه‌ی بین خط $۵y - ۲x = ۳$ و جهت مثبت محور طول‌ها را بیابید.

پروین اعتصامی:

گفتن از زشتروئی دگران — نشود باعث نکوروئی

فصل دوم، درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (اتحادهای مثلثاتی)

نکته: در زیر تعدادی از اتحادهای مثلثاتی ارائه شده‌اند. آن‌ها را اثبات کنید.

$$۱)\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$۲)\ \tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cot\alpha = ۱$$

$$۳)\ \cos^{۲}\alpha + \sin^{۲}\alpha = ۱$$

$$۴)\ \tan^{۲}\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \quad , \quad \cot^{۲}\alpha + ۱ = \frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

$$۵)\ \cos^{۲}\alpha = (۱-\sin\alpha)(۱+\sin\alpha) \quad , \quad \sin^{۲}\alpha = (۱-\cos\alpha)(۱+\cos\alpha)$$

$$۶)\ \cos^{۴} + \sin^{۴} = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

مثال ۱: درستی هر یک از اتحادهای زیر را، به کمک اتحادهای مثلثاتی فوق ثابت کنید.

$$۱)\ \frac{\tan^{۲}x}{۱+\tan^{۲}x} + \frac{\cot^{۲}x}{۱+\cot^{۲}x} = ۱$$

$$۲)\ \frac{\sin x}{۱+\cos x} + \frac{۱+\cos x}{\sin x} = \frac{۲}{\sin x}$$

$$۳)\ \cos^{۲}\theta(۲+\tan^{۲}\theta) + \sin^{۲}\theta = ۲$$

$$۴)\ \frac{۲}{\cos^{۲}\alpha} - \frac{۱}{\cos^{۴}\alpha} = ۱ - \tan^{۴}\alpha$$

$$۵)\ \frac{۱}{\sin^{۴}\theta} - \frac{۱}{\sin^{۲}\theta} - \cot^{۴}\theta = \cot^{۲}\theta$$

$$۶)\ (۱+\tan x)(۱+\cot x) - \frac{۱}{\sin x \cos x} = ۲$$

مثال ۲: هرگاه $\cot x = ۳$ آنگاه مقدار $\dfrac{۲\sin x + \cos x}{-\cos x + \sin x}$ را بیابید.

حافظ:

به یکی جرعه که آزار کسش در پی نیست　　　زحمتی می‌کشم از مردم نادان که مپرس

باسمه تعالی

مجتمع آموزشی دکتر حسابی

خلاصه درس ریاضی دهم — مدرس: محمد ایزدی (مدرسه ی دکتر حسابی)

فصل سوم، درس اول، دوم و سوم: ریشه‌ی nام و توان گویا

یادآوری: ریشه‌ی nام عدد x برابر با عددی است که اگر به توان n برسد برابر با x شود؛ به بیان دیگر، y ریشه‌ی nام عدد x است هرگاه $y = x^n$.

مثال ۱: الف) اعداد ۲ و ۲− ریشه‌ی nام عدد ۴ هستند.

ب) عدد ۲۷ تنها یک ریشه‌ی سوم دارد که برابر با ۳ می‌باشد. همچنین این عدد دارای دو ریشه‌ی دوم $\sqrt{۲۷}$ و $-\sqrt{۲۷}$ می‌باشد.

پ) عدد ۶۴ دارای دو ریشه‌ی دوم ۸ و ۸− می‌باشد. همچنین دارای یک ریشه‌ی سوم ۴ و دو ریشه‌ی چهارم ۲ و ۲− می‌باشد.

نمادگذاری: ریشه‌ی nام عدد x را با نماد $\sqrt[n]{x}$ نمایش می‌دهیم. همچنین هر عدد به صورت $\sqrt[n]{x^m}$ به شکل $x^{\frac{m}{n}}$ قابل نمایش است.

نکته: الف) اعداد منفی، ریشه‌ی زوج ندارند. همچنین اعداد مثبت، دارای دو ریشه‌ی زوج هستند که قرینه‌ی یکدیگر می‌باشند.

ب) تمام اعداد حقیقی تنها یک ریشه‌ی فرد دارند.

مثال ۲: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x^{۲} - ۳ = ۰$

۲) $x^{۳} + ۱۲۵ = ۰$

۳) $x^{۲} + ۱ = ۰$

۴) $x^{۴} - ۸ = ۱$

۵) $x^{۵} - ۸ = ۱$

نکته: الف) برای هر دو عدد حقیقی a و b، اگر $a < b$ آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ (اگر n زوج باشد باید a و b مثبت باشند).

ب) برای هر دو عدد طبیعی m و n، اگر $n < m$ اگر a عددی حقیقی باشد که $a > ۱$، آنگاه $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ و اگر $۰ < a < ۱$، آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد باید a نیز مثبت باشد).

مثال ۳: اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

۱) $\sqrt{۰/۲},\ \sqrt{۲/۵},\ \sqrt[۴]{۴},\ \sqrt{۵},\ \sqrt[۳]{۲},\ \sqrt[۳]{۶۴},\ \sqrt{۰/۱}$

۲) $\sqrt[۳]{-۲۷},\ \sqrt[۴]{(-۲)^{۴}},\ \sqrt{۲},\ -\sqrt[۵]{(-۳۲)^{۵}},\ \sqrt[۳]{۲}$

نکته: الف) اگر n زوج باشد آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

ب) اگر n فرد باشد آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = a$

مثال ۴: حاصل هر یک از عبارات زیر را بنویسید.

$$\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۵})^{۴}} + \sqrt[۶]{(۳-\sqrt{۵})^{۶}}$$

نکته: اگر a و b یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد آنگاه:

۱) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

۲) $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ n فرد

۳) $\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$ n زوج

۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

مثال ۵: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $\sqrt[9]{5-\sqrt{24}} \times \sqrt[9]{5+\sqrt{24}}$

۲) $\dfrac{\sqrt[7]{3-\sqrt{8}}}{\sqrt[7]{\frac{1}{3+\sqrt{8}}}}$

مثال ۶: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt[6]{64a^{12}b^{6}}$

۲) $\sqrt[7]{x^{8}y^{15}}$

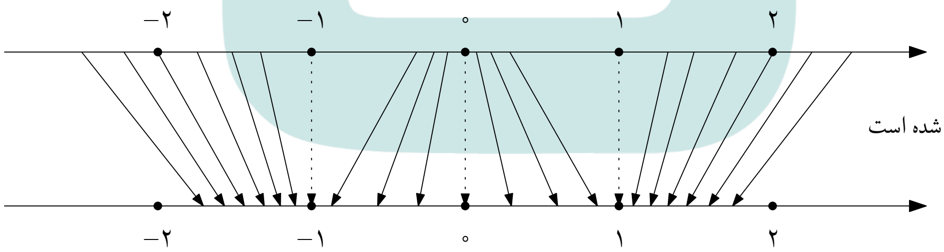
مثال ۷: اگر $\sqrt[4]{a^{4}b^{2}} = -a\sqrt{-b}$، آنگاه مثبت و منفی بودن a و b را تعیین کنید.

مثال ۸: حاصل مقادیر زیر را بیابید.

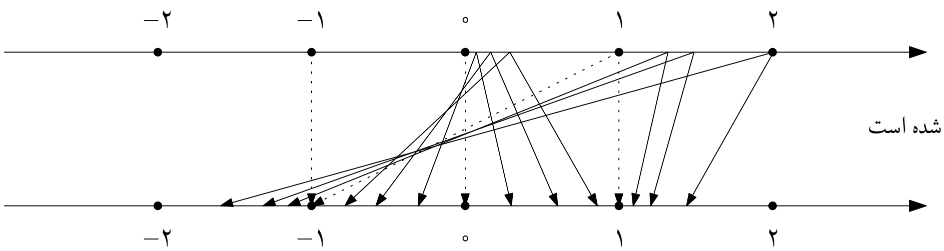
۱) $(\sqrt{18}-\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \times (\sqrt{18}+\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}$

۲) $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{9}} \times \sqrt[5]{\dfrac{2}{\sqrt[6]{2}}}$

نکته: نکات قبل را به طور خلاصه می‌توان روی محور به صورت زیر نشان داد.



هر عدد به ریشه‌ی سوم آن متناظر شده است



هر عدد به ریشه‌ی دوم آن متناظر شده است

مثال ۹: دو عدد $(\frac{1}{5})^{\frac{1}{3}}$ و $(\frac{1}{\sqrt{5}})^{\frac{1}{2}}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

مثال ۱۰: حاصل عبارات زیر را به دست آورده و سپس مشخص کنید که بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد.

$۱)\ (\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}-۱}$

$۲)\ \sqrt{\frac{۳}{۲۵}}+۳\sqrt{\frac{۳}{۴۹}}-\sqrt{\frac{۲۷}{۴}}$

$۳)\ \sqrt[۴]{۷-\sqrt{۱۳}}\times\sqrt[۴]{۷+\sqrt{۱۳}}$

$۴)\ \sqrt[۶]{۱۲}\times\sqrt[۴]{۵۴}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}$

$۵)\ \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۰}}$

مثال ۱۱: درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.

$۲<\sqrt[۳]{۲۵}<۳$ $-۳<\sqrt[۵]{-۱۰۰}<-۲$ $۴<\sqrt[۴]{۵۰۱}<۵$ $-۹<\sqrt[۳]{-۴۹۷}<-۸$

$\sqrt[۳]{۵}<\sqrt[۴]{۶}<۱$ $-۱<\sqrt[۵]{-۵}<\sqrt[۳]{-۳}$ $\sqrt[۴]{۵}<\sqrt[۵]{۷}<۱$ $-۱<\sqrt[۳]{-۲}<\sqrt[۷]{-۳}$

مثال ۱۲: ریشه‌ی پنجم $۳\sqrt[۳]{۵}$ را به صورت توان‌دار بنویسید.

مثال ۱۳: حاصل عبارات $\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}\times(۲+\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}(۲-\sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}$ را به صورت توان‌دار بنویسید.

مثال ۱۴: اگر $2 < \sqrt[4]{x} \leqslant 3$ باشد، به جای x چند عدد طبیعی می‌توان قرار داد؟

مثال ۱۵: حاصل هر یک از عبارات زیر را به دست آورید.

$$1)\left(\sqrt[5]{-2\sqrt{\frac{1}{8}}}\right)^{40}$$

$$2)\ \sqrt[3]{2x\sqrt{\frac{1}{4x^{2}}}}\quad x<0$$

$$3)\left(\sqrt[3]{(-64)^{2}}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$4)\left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{3}{8}}\times(2/5)^{-2/5}$$

مثال ۱۶: اگر $2^{\frac{m}{n}}=\left(\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{\frac{1}{64}}}\right)^{2}$ آنگاه کمترین مقدار $m+n$ را بیابید.

مثال ۱۷: اگر $\sqrt{3}=2^{x}$ و $\sqrt{2}=3^{y}$، حاصل $\dfrac{81^{y+1}}{16^{x}}$ را بیابید.

مثال ۱۸: حاصل عبارت $\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$ را به صورت توان‌دار بنویسید.

حافظ:

رسید مژده که ایام غم نخواهد ماند چنان نماند چنین نیز هم نخواهد ماند

فصل سوم، درس چهارم: عبارات جبری

یادآوری: برخی از اتحادهایی که در سال پیش خوانده‌ایم به شرح زیر می‌باشد.

نام اتحاد	عبارت جبری اتحاد
مربع کامل (مربع دوجمله‌ای)	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
مربع کامل (مربع دوجمله‌ای)	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
مزدوج	$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
جمله مشترک	$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$
مکعب کامل (مکعب دوجمله‌ای)	$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
مکعب کامل (مکعب دوجمله‌ای)	$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
مربع سه جمله‌ای	$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
چاق و لاغر (فیل و فنجون)	$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
چاق و لاغر (فیل و فنجون)	$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

مثال ۱: مقادیر زیر را بیابید.

$1)(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{10} + \sqrt{3})^2$

$2)(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})^3$

$3)(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2(7 + 2\sqrt{10})$

$4)(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt[4]{24})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt[4]{24})$

$5)(\sqrt{3} - \sqrt{4})(\sqrt{3} - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$

$6)(\sqrt[3]{2} - 2)(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{64})$

مثال ۲: اگر $a^2 + b^2 = 7ab$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را به دست آورید ($a > b > 0$).

مثال ۳: اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 32$ و $x < 0$، حاصل $x + \frac{1}{x}$ را بیابید.

مثال ۴: اگر $a^۲ - ۲ab + b^۲ - a + b = ۱۲$ آنگاه مقدار $a - b$ را بیابید.

مثال ۵: ساده شده‌ی عبارت $(x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)(x^۳ - ۷)$ را بیابید.

مثال ۶: حاصل عبارت $(a - ۱)^۳ + ۳(a - ۱)^۲ + ۳(a - ۱) + ۱$ را بیابید.

مثال ۷: مقدار عددی عبارت $\frac{(x^۲ - ۳x + ۲)(x^۲ - x - ۶)(x^۲ + ۴x + ۳)}{(x^۲ - ۱)(x^۲ - ۴)(x^۲ - ۹)}$ را به ازای $x = \sqrt{۲}$ بیابید.

مثال ۸: حاصل عبارت $(x^۲ - ۱)(x^۶ + ۱)(x^۴ + x^۲ + ۱)(x^{۲۴} + x^{۱۲} + ۱)$ را به ازای $x = ۲$ بیابید.

مثال ۹: اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ را بیابید.

مثال ۱۰: حاصل $(۷x + ۲)^۲ - (۷x - ۲)^۲$ را به ازای $x = \frac{۳}{۲۸}$ را بیابید.

نکته: هر عبارت به صورت $(a + b)^n$ را یک بسط می‌نامیم که به صورت زیر باز می‌شود.

$$(x + y)^n = a_۱x^n + a_۲x^{n-۱}y + a_۳x^{n-۲}y^۲ + \cdots + a_nxy^{n-۱} + a_{n+۱}y^n$$

ضرایب این بسط از طریق مثلث خیام که به صورت زیر است به دست می‌آید.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱

مثال ۱۱: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$۱)(x-۱)^۳$

$۲)(x-۲y)^۴$

$۳)(x^۲+۲xy)^۵$

یادآوری: تجزیه‌ی یک عبارت جبری به این معناست که آن را به صورت حاصلضربی از چند عبارت جبری نوشت.

۱) فاکتورگیری و دسته‌بندی: همواره در تجزیه کردن، فاکتورگیری بر هر امری اولویت دارد.

مثال ۱۱: عبارات زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

$۱)۵x^۲(x-y)+۱۰x(x-y)$

$۲)۱۵a^۴b^۳+۵a^۳b^۲$

$۳)a+b+ab+۱$

$۴)a^۲b+ab^۲+-a-b-ab+۱$

$۵)x^۳+۳x^۲+۶x+۱۸$

$۶)x^۳-۲x^۲+x-۲$

$۷)x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸$

$۸)x^۴+x^۳-۸x-۸$

۲) اتحاد مزدوج: هر عبارت به صورت تفاضل دو عبارت مربع کامل، با اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود.

مثال ۱۲: عبارات جبری زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

$۱)x^۴y^۲-۱$

$۲)x^۳y^۳-xy$

$۳)-۱+۹x^۲$

$۴)۱۸x^۵(x^۲+۵)^۳-۱۵x^۳(x^۲+۵)^۴$

۵) $x^{۴} - ۴x^{۳} - ۹x^{۲} + ۸$

۶) $۲x^{۳} - x^{۲} - ۸x + ۴$

۳) اتحاد جمله مشترک: این نوع تجزیه به سه نوع خاص تقسیم می‌شود.

الف) اگر عبارت درجه دوم به صورت $x^{۲} + bx + c$ باشد و اعداد $c_{۱}$ و $c_{۲}$ چنان یافت شوند که $b = c_{۱} + c_{۲}$ و $c = c_{۱}c_{۲}$ (یعنی جمع دو عدد برابر با ضریب وسط و ضرب آن‌ها برابر با ضریب آخر باشد)، آنگاه این عبارت به صورت $(x + c_{۱})(x + c_{۲})$ تجزیه می‌شود.

ب) اگر عبارت درجه دوم به صورت $ax^{۲} + bx + c$ و a مربع کامل باشد و اعداد $c_{۱}$ و $c_{۲}$ چنان یافت شوند که $\frac{b}{\sqrt{a}} = c_{۱} + c_{۲}$ و $c = c_{۱}c_{۲}$ (یعنی باید ابتدا $\sqrt{a}$ را بر b تقسیم کرده و سپس اعداد $c_{۱}$ و $c_{۲}$ را چنان یافت که جمع آن‌ها برابر با ضریب وسط و ضرب آن‌ها ضریب آخر باشد). در این صورت عبارت داده شده به صورت $(\sqrt{a}x + c_{۱})(\sqrt{a}x + c_{۲})$ تجزیه می‌شود.

پ) اگر عبارت درجه دوم به صورت $ax^{۲} + bx + c$ بوده و a مربع کامل نباشد. در این صورت باید طرفین تساوی $A = ax^{۲} + bx + c$ را در a (ضریب $x^{۲}$) ضرب کرده و حاصل عبارت سمت راست را به کمک حالت قبل (حالت ب) تجزیه می‌کنیم و در نهایت طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم.

نکته: هر اتحاد مربع کامل نوعی اتحاد جمله مشترک است و لذا می‌تواند به صورت جمله مشترک تجزیه شود.

مثال ۱۳: عبارات جبری زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

۱) $x^{۲} - ۱۸x + ۸۱$

۲) $۲x^{۳} + ۶x^{۲} - ۸x$

۳) $۹x^{۲} + ۱۸x + ۸$

۴) $۲۵x^{۲} - ۱۰x$

۵) $۲۵x^{۲} - ۵x - ۱۲$

۶) $۲x^{۳} + ۵x^{۲} + ۲x$

۷) $x^{۴} - ۸x^{۲} - ۹$

۸) $۲۵x^{۲} + ۳۰x - ۷$

۹) $a^{۲} + b^{۲} + ۲ab - ۷a - ۷b + ۱۲$

۱۰) $۲x^{۳} + ۲x^{۲} - ۴x$

۱۱) $۱۶x^{۴} + ۲۴x^{۲} - ۷$

۱۲) $(x^{۲} + x)^{۲} - (x^{۲} + x) - ۲$

۴) چاق و لاغر و تعمیم آن: هر عبارت جبری به صورت $x^{۳} - y^{۳}$ به شکل $(x - y)(x^{۲} + xy + y^{۲})$ تجزیه می‌شود. تعمیم این اتحاد به صورت زیر آمده است:

$$x^{n} - y^{n} = (x - y)(x^{n-۱}y + x^{n-۲}y^{۲} + \cdots + x^{۲}y^{n-۲} + xy^{n-۱})$$

$$x^{n} + y^{n} = (x + y)(x^{n-۱}y - x^{n-۲}y^{۲} + \cdots + x^{۲}y^{n-۲} + (-۱)^{n}xy^{n-۱})$$

مثال ۱۴: عبارات جبری زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

$۱)x^{۵} - ۱$

$۲)x^{۴} - x$

$۳)x^{۵} - ۳۲y^{۱۰}$

$۴)x^{۶} - y^{۶}$

$۵)x^{۷} + \frac{x}{۲۱۶}$

$۶)(۲x - ۱)^{۳} - (x + ۳)^{۳}$

$۷)x^{۳} + ۸$

$۸)۸x^{۳} - ۲۷$

۴) بسط چندجمله‌ای: به کمک بسط و مثلث خیام می‌توان برخی از عبارات جبری را تجزیه کرد (فرمول آن را مرور کنید).

مثال ۱۵: عبارات جبری زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

$۱)x^{۳} + ۶x^{۲}y + ۲۴xy^{۲} + ۸y^{۳}$

$۲)۲۷x^{۳} - ۲۷x^{۲} + ۹x - ۱$

$۳)۸x^{۳} - ۳۶x^{۲}y^{۲} + ۵۴xy^{۴} - ۲۷y^{۳}$

$۴)x^{۱}۹ - ۳x^{۱}۳ + ۳x^{۷} - x$

مثال ۱۶: در هر یک از عبارات زیر، ب.م.م و ک.م.م را به دست آورید.

۱) $(x^{۳} - ۲۷)^{۲}\ ,\ (x^{۲} - ۹)^{۳}$

۲) $x^{۶} - ۱\ ,\ x^{۴} - ۵x^{۲} + ۴$

۳) $x^{۳} + x^{۲} - x - ۱\ ,\ x^{۳} - x^{۲} - x + ۱$

۴) $(x - ۱)^{۳}\ ,\ x^{۳} - ۱$

۵) $۲x^{۲} - ۹x + ۹\ ,\ x^{۲} + ۴x - ۲۱$

۶) $x^{۳} + ۳x^{۲} - x - ۳\ ,\ x^{۳} + x^{۲} - ۹x - ۹$

۷) $x^{۳} - ۲x^{۲} + x\ ,\ x^{۴} + x^{۳} - ۲x^{۲}\ ,\ x^{۴} - x$

۷) $(x^{۲} - ۴x + ۴)^{۲}\ ,\ ۲x^{۲} + ۸x + ۸$

مثال ۱۷: عبارات گویای زیر را ساده کنید.

۱) $\dfrac{x^{۲} - x - ۶}{x^{۲} - ۶x + ۹}$

$۲)\ \dfrac{x^{۴}+x^{۳}-۸x-۸}{x^{۲}-x-۲}$

$۳)\ \dfrac{x^{۴}-۲x^{۳}+۸x-۱۶}{x^{۲}-۴}$

$۴)\ \dfrac{-۶x(x^{۲}-۴)^{۲}+۲(x^{۲}-۴)^{۳}}{x^{۳}-۴x^{۲}-۴+۱۶}$

$۵)\ \dfrac{x^{۲}+۳x}{x^{۲}+۳x+۲}-\dfrac{۵x+۳}{x+۱}$

$۶)\ \dfrac{۳}{x-۱}-\dfrac{x}{۴x-۲x^{۲}-۱}+\dfrac{x}{x+۱}$

$۷)\ \left(۲x+۱-\dfrac{۳}{x}\right)\div\left(۲+\dfrac{۱}{x+۱}\right)$

مثال ۱۸: کسرهای زیر را گویا کنید.

$۱)\ \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

$۲)\ \dfrac{۳}{\sqrt[۵]{۸}}$

$۳)\ \dfrac{۳}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$

$۴)\ \dfrac{۱}{\sqrt{۲}-۱}+\dfrac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

$5)\ \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

$6)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

مثال ۱۹: اگر $\cot\theta = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ باشد آنگاه $\tan\theta$ را بیابید.

مثال ۲۰: حاصل مقادیر زیر را بیابید.

$1)\ 101^2$

$2)\ 997 \times 1003$

$3)\ 101^3 - 98^3$

مولانا:

غنی از بخیلی غنی مانده است   فقیر از سخاوت فقیر از سخا

فصل چهارم، درس اول: حل معادلات درجه دوم و مراتب بالاتر

روش اول (تجزیه). در این روش ابتدا باید تمام عبارات را به یک طرف تساوی انتقال داده و سپس با تجزیه کردن کل عبارت، جواب‌ها را می‌یابیم.

مثال ۱: جواب هر یک از جواب‌های زیر را بیابید.

۱) $۱۲x^۳ - ۱۷x^۲ + ۶x = ۰$

۲) $x^۴ - ۴ = ۰$

۳) $x^۳ + ۳x^۲ = x + ۳$

۴) $a^۸ - ۳۲a^۴ + ۲۵۶ = ۰$

۵) $۶x^۲ = x + ۱$

۷) $x^۷ + x^۴ - ۱۶x^۳ = ۱۶$

۸) $a^۳ + a - ۱۰$

روش دوم (تبدیل به مربع کامل). این روش تنها برای معادلات درجه دوم به کار می‌رود. برای تبدیل یک معادله‌ی درجه دوم به یک اتحاد مربع کامل باید نصف ضریب x را به توان دو رسانده و آن را اضافه و کم کنید. به مقدار اضافه شده یک اتحاد مربع کامل بسازید (اگر $x^۲$ ضریب داشته باشد ابتدا باید کل معادله را به ضریب $x^۲$ تقسیم کرد تا ضریب آن به ۱ تبدیل شود).

مثال ۲: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۳x^۲ + ۶x - ۸ = ۱$

۲) $۲x^۲ + x + ۱ = ۰$

۳) $۲x^۲ - ۳x = ۰$

۴) $۲x^۲ + ۳x - ۵ = ۰$

۵) $۲x^۲ = ۶x + ۱$

روش سوم (دلتا). فرض کنید معادله‌ی $ax^{۲} + bx + c = ۰$ داده شده است. مقدار $b^{۲} - ۴ac$ را دلتا نامیده و قرار می‌دهیم:

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac$$

در اینصورت اگر $\Delta < ۰$ آنگاه این معادله جواب ندارد. اگر $\Delta = ۰$ آنگاه این معادله تنها یک جواب دارد و برابر با $\frac{-b}{۲a}$ است. اما اگر $\Delta > ۰$ آنگاه این معادله دو جواب متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_{۱} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_{۲} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

مثال ۳: در معادلات درجه‌ی دوم، زیر ابتدا مشخص کنید که معادله چند جواب دارد. سپس در صورت وجود جواب‌های آن را به کمک روش دلتا بیابید (در صورت امکان به روش تجزیه نیز آن را حل کنید).

۱)$x^{۲} - ۳x + ۴ = ۰$

۲)$۲x^{۲} = ۳$

۳)$۳x^{۲} - ۵x = ۰$

۴)$۲x^{۲} - ۳x + ۴ = ۰$

۵)$۳x^{۲} = \sqrt{۳}x - ۱$

۶)$x^{۲} + x + ۱ = ۰$

۷)$۲x^{۲} + x - ۳ = ۰$

۸)$x^{۲} = -۳x - ۱۰$

۹)$x^{۲} + ۲x + ۱ = ۰$

۱۰)$۳۶x^{۲} - ۲۴x = -۴$

۱۱)$x^{۲} - (\sqrt{۳} - ۱)x = \sqrt{۳}$

۱۲)$x^{۴} - ۵x^{۳} + ۳x^{۲} + x = ۰$

روش چهارم (تغییر متغیر). در برخی از معادلات با تغییر متغیر مسئله می‌توان حل آن را ساده‌تر کرد. برای تغییر متغیر دقت داشته باشید که تمام متغیرها باید تغییر کنند و به نوع جدید تبدیل شوند. همچنین دقت داشته باشید که پس حل اولیه، مقدار متغیر را بازگردانید (این روش برای معادلات درجه‌ی بالاتر نیز کاربرد دارد).

مثال ۴: معادلات زیر را به کمک روش تغییر متغیر حل کنید.

$(x-۱)^۲ + ۲\sqrt{۳}(x-۱) = ۶$

۲) $x^۴ + ۱۰x^۲ + ۹ = ۰$

۳) $(x^۲+x)^۲ - ۱۸(x^۲+x) + ۷۲ = ۰$

۴) $x^۶ - ۲x^۳ + ۱ = ۰$

۵) $(۲x-۵)^۲ + ۳(۵-۲x) + ۲ = ۰$

۶) $(۳x-۳)^۲ + ۲(x-۱) - ۱ = ۰$

مثال ۵: معادلات زیر را حل کنید. ساده و مکرر بودن ریشه‌ها را نیز تعیین کنید.

۱) $x^۳ - x^۲ + x - ۱ = ۰$

۲) $۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$

۳) $x^۳ + ۳x^۲ + ۴x + ۲ = ۰$

۴) $x^۳ - ۲x^۲ + ۳x - ۶ = ۰$

جمع و ضرب ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای جواب‌های $x_۱$ و $x_۲$ باشند، آنگاه

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} \qquad x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a}$$

مثال ۶: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$۱) x^۲ - ۳x + ۴ = ۳$

$۲) ۳x^۲ - ۳ + ۴x = ۰$

$۳) x^۲ - ۳x + ۱ = -۲x + ۴$

مثال ۷: در معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - (b - ۲)x + ۲b = ۰$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است. ریشه‌های این معادله را بیابید.

مثال ۸: در معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ + kx + ۱ - k$، اگر حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه‌های معادله را بیابید.

مثال ۹: به ازای یک مقدار m ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ + ۳mx + ۲m = -۶$ معکوس یکدیگر هستند. مجموع این دو ریشه را بیابید.

مثال ۱۰: در معادله‌ی درجه دوم $۴x^۲ - ۴x + a = ۰$ به ازای چه مقداری از a یکی از جواب‌ها ۲ واحد از دیگری است؟

مثال ۱۰: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ باشند آنگاه مقدار $\alpha^۲ + \beta^۲$ را بیابید.

مثال ۱۰: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $(2x-1)^2 = (2-x)^2$ را بیابید.

مثال ۱۱: طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۵ واحد بیشتر است. اگر مساحت این مستطیل ۱۸ واحد مربع باشد، محیط آن را بیابید.

مثال ۱۲: رابطه‌ی هزینه‌ی شرکتی $C(x) = 9x + 11$ و رابطه‌ی درآمد آن برابر $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x + 1$ واحد است. با تولید چندمین کالا سوددهی آغاز می‌شود (x تعداد کالاهاست)؟

مثال ۱۳: تفاضل ۳ برابر کدام عدد حقیقی از مربع‌اش، برابر ۴ است؟

مثال ۱۴: عددی، ربع عدد دیگر است. اگر حاصلضرب این دو عدد متمایز دو برابر مجموع آن‌ها باشد، تفاضل آن‌ها چقدر است؟

مثال ۱۵: حاصلضرب دو عدد متوالی از ۵ برابر عدد کوچک‌تر ۱۲ واحد بیش‌تر است. مجموع آن دو عدد کدام است؟

مثال ۱۶: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{3}$ و ۷ باشد. چند معادله‌ی دیگر به این صورت می‌توان نوشت؟

مثال ۱۷: معادله‌ی درجه سومی بنویسید که $\sqrt{2}$ دو ریشه‌ی آن و ۲ یک ریشه‌ای آن باشد.

مثال ۱۶: معادلات گویای زیر را حل و نوع ریشه‌ها را نیز تعیین کنید.

۱) $\frac{6x}{x-1}+\frac{x-1}{3x}=3$

۲) $\frac{2x-4}{x+1}=\frac{x+1}{2x-4}$

۳) $\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x-2}=x-3$

۴) $\frac{x+1}{2}+\frac{1}{x-2}=\frac{x+2}{x-2}$

۵) $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$

۶) $\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$

حافظ:

در کار گلاب و گل حکم ازلی این بود کاین شاهد بازاری وان پرده نشین باشد

فصل چهارم، درس دوم: سهمی و رسم آن

تعریف: سهمی

نمودار هندسی عبارات درجه دوم به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ را سهمی‌گوییم.

مثال ۱: عبارت درجه دوم $y = x^۲$ را در نظر بگیرید. مقادیر معادله را به ازای xهای ۰، ±۱، ±۲ و ±۳ بیابید و نمودار آن را حدس بزنید.

مثال ۲: به روش قبل نمودار عبارات درجه دوم $y = x^۲ + ۲x + ۱$ و $y = x^۲ - x - ۲$ را رسم کنید. ریشه‌های این عبارات را نیز بیابید. با توجه به این نمودارها مشخص کنید که ضریب c در رسم نمودار چه نقشی دارد؟

نکته: الف) هر سهمی (نمودار تابع درجه دو) متقارن است و خط تقارن آن دارای اهمیت ویژه‌ای است.

ب) محل برخورد محور تقارن و سهمی را رأس سهمی گوییم.

مثال ۳: سهمی‌های زیر را رسم کنید و سپس به کمک نکته‌ی قبل، خط تقارن، طول و عرض سهمی را به دست آورید.

$y = x^۲ + ۶x + ۸$　　$y = (x - ۱)^۲$　　$y = x^۲ - ۱$

تمرین:

۱. نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید و خط تقارن، طول و عرض سهمی را نیز بیابید.

$y = (x - ۳)^۲ - ۳$　　$y = -x^۲ + ۴x - ۳$　　$y = (x + ۲)^۲$　　$y = x^۲ - ۴$

$y = x^۲ + ۲x$　　$y = \sqrt{۳}x^۲ + ۲x - ۱$　　$y = -x^۲ - ۴x + ۱$　　$y = x^۲ + ۳$

نکته: فرض کنید $y = ax^۲ + bx + c$ یک عبارت درجه دوم باشد.

الف) عدد c، محل برخورد سهمی با محور yها است.

ب) اگر $\Delta > ۰$ آنگاه این عبارت درجه دوم، دو ریشه دارد (سهمی در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند)، اگر $\Delta = ۰$ آنگاه این عبارت درجه دوم، یک ریشه دارد (سهمی بر محور xها مماس است؛ یعنی در یک نقطه آن را قطع می‌کند) و اگر $\Delta < ۰$ آنگاه این عبارت درجه دوم، هیچ ریشه‌ای ندارد (سهمی محور xها را قطع نمی‌کند).

پ) اگر $a > ۰$ آنگاه تقعر نمودار رو به بالاست و اگر $a < ۰$ آنگاه تقعر رو به پایین است. همچنین اگر تقعر رو به بالا باشد، این نمودار دارای مینیمم (کمترین مقدار) و اگر تقعر رو به پایین باشد، این نمودار دارای ماکسیمم (بیشترین مقدار) است که در هر دو حالت در رأس سهمی رخ می‌دهد.

ت) طول رأس سهمی برابر با $x = \frac{-b}{۲a}$ و عرض رأس سهمی به این صورت به دست می‌آید که مقدار $x = \frac{-b}{۲a}$ را در معادله قرار داده و y به دست می‌آوریم. همچنین عرض سهمی را به کمک فرمول $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ نیز می‌توان به دست آورد.

مثال ۴: به کمک یافتن رأس سهمی، نمودارهای زیر را رسم کنید. راجع به ریشه‌ها و نقاط مینیمم و ماکزیمم این توابع چه می‌توان گفت؟

$$y = ۳x^۲ - ۳x + ۱ \qquad y = -۲x^۲ - ۳x + ۱ \qquad y = ۲x^۲ - ۳ \qquad y(x) = -۲x^۲ - ۴x - ۸$$

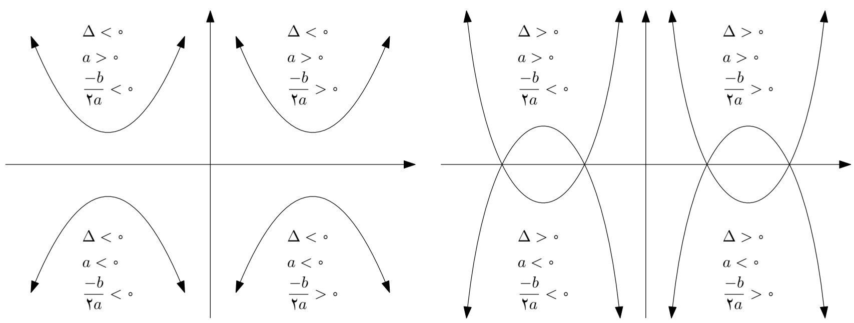
مثال ۵: به ازای چه مقداری از a، بیشترین مقدار عبارت درجه دوم $y = ax^۲ + ۲۰x - ۱۲۰$ برابر با ۱۸۰ است؟

مثال ۶: نقطه‌ی $A(-۱, -۴)$، رأس سهمی به معادله‌ی $y = ۳x^۲ + ax + b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

مثال ۷: رأس سهمی به معادله‌ی $y = -x^۲ + ax + ۵$ روی خط به معادله‌ی $x = ۲$ قرار دارد. مقدار این سهمی در نقطه‌ی ۵ چقدر است؟

مثال ۸: اگر رأس سهمی $y = ۲x^۲ - ۸x + a + ۱$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد، مقدار a را بیابید.

نکته: وضعیت سهمی نسبت به محورهای مختصات، حالت‌های مختلفی دارد که در شکل زیر آمده است.



مثال ۹: حالتی که رأس سهمی روی محور yها یا xها باشد در نکته‌ی فوق نیامده است. برای آن‌ها چه می‌توان گفت؟

مثال ۱۰: اگر بیشترین مقدار سهمی $y = (k+۳)x^۲ - ۴x + k$ برابر با صفر باشد، مقدار k را یافته و آن را رسم کنید.

مثال ۱۱: علامت a را به نحوی تعیین کنید که سهمی $y = (a-۳)x^۲ + ۲x - ۴$ هیچ ریشه‌ای نداشته باشد.

مثال ۱۲: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که عرض از مبدأ آن ۲− و ریشه‌های آن ۱ و ۷ باشد.

مثال ۱۳: معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که رأس سهمی دارای مختصات $(۱,۱)$ باشد و از مبدأ مختصات عبور کند.

مثال ۱۴: آیا معادله‌ی درجه دومی وجود دارد که یک ریشه‌ی آن ۲ باشد و از نقاط $A(۱,۱)$ و $B(۳,۴)$ بگذرد؟

مثال ۱۵: سهمی بنویسید که $\sqrt{۳} - ۱$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد. چند سهمی به این صورت می‌توان نوشت؟

حافظ:

غمناک نباید بود از طعن حسود ای دل　　شاید که چو وابینی خیر تو در این باشد

فصل چهارم، درس سوم: تعیین علامت و قدرمطلق

نکته: الف) برای تعیین علامت عبارت $P(x) = ax + b$، اگر $a > ۰$، آنگاه برای xهای قبل از ریشه، حاصل $P(x)$ منفی و برای xهای بعد از ریشه، حاصل $P(x)$ مثبت است (جدول و نمودار آن‌ها را رسم و مقایسه کنید).

ب) برای تعیین علامت عبارت درجه دوم $P(x) = ax^۲ + bx + c$ اگر $P(x)$ یک ریشه یا هیچ ریشه‌ای نداشته باشد علامت $P(x)$ همواره با a هم علامت است اما اگر $P(x)$ دارای دو ریشه باشد، آنگاه اگر $a > ۰$ آنگاه بین دو ریشه منفی و خارج دو ریشه مثبت می‌باشد و اگر $a < ۰$ آنگاه بین دو ریشه مثبت و خارج دو ریشه منفی است (جدول و نمودار آن‌ها را رسم و مقایسه کنید).

مثال ۱: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$y = ۷x - ۳ \quad , \quad y = x^۲ + ۱۴x + ۴۸ \quad , \quad y = ۳ - x \quad , \quad y = -x^۲ + ۴x - ۴ \quad , \quad y = x^۲ - ۳x + ۹$$

مثال ۲: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$x^۲ - x - ۶ < ۰ \quad , \quad ۲x^۲ + ۶x + ۱ > ۰ \quad , \quad \frac{۱}{۲}x^۲ - \sqrt{۲}x - ۱ \leqslant ۰ \quad , \quad ۳x^۲ - ۲x - ۶ \geqslant$$

نکته: برای تعیین علامت عبارت $P(x)$، پس از تجزیه شدن به صورت کامل، اگر a ریشه‌ی ساده یا مکرر از مرتبه‌ی فرد باشد، همانند عبارات خطی تعیین علامت می‌شود. اما اگر ریشه‌ها مکرر از مرتبه‌ی زوج باشد علامت حول ریشه تغییر نمی‌کند و با ضریب بزرگ‌ترین درجه هم‌علامت می‌باشد.

مثال ۳: عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $(۴x + ۲)(۳x - ۷)$

۲) $x^{۴} - ۳$

۳) $\dfrac{۱۲x - ۶}{x}$

۴) $x^{۳} - ۴x^{۲} + ۳$

۵) $\dfrac{|x - ۲|(x^{۲} + ۴x - ۲۱)}{-x^{۴} - ۳x^{۳} - ۲x^{۲}}$

۶) $\dfrac{(x - ۷)^{۲}(x + ۲)^{۳}}{(-x + ۳)^{۵}(x^{۲} + ۱)^{۳}}$

۷) $\dfrac{-۳x^{۲}\sqrt[۵]{x - ۳}}{x^{۳} - ۲x^{۲} - x + ۲}$

۸) $\sqrt{\dfrac{x - ۲}{x + ۲}} + \sqrt[۸]{\dfrac{(۷x - ۳)|۳x^{۲} - ۳|}{x^{۳}}} + x^{۲}$

۹) $\dfrac{x^{۳} - ۲x}{\sqrt{x^{۲} - ۹}}$

۱۰) $\dfrac{x^{۱۲} - ۴۰۹۶}{x^{۳} - x^{۲} + x - ۱}$

مثال ۴: عبارات زیر را به روش سریع تعیین علامت کنید.

$$1)\ \frac{(x^2-1)(x^2-4x+3)}{-x^2-x+6}$$

$$2)\ \frac{|3-x|(x-1)^4}{-3(1-x^2)^3(x^2+4x+3)^5}$$

$$3)\ \frac{x^3-x}{x^4-x^3+x^2-x}$$

مثال ۵: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \frac{x-5}{3} < 2x-5 \leqslant \frac{1-x}{2}$$

$$2)\ 1-\frac{2}{x} \leqslant 3$$

$$3)\ \frac{x^2-1}{x^2-4} > 1$$

$$4)\ 4x^3 > x$$

$$5)\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

مثال ۶: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱)\begin{cases} ۳x - ۳ \geqslant ۰ \\ x + \sqrt{۵} < ۰ \end{cases}$$

$$۲)\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۳} + \dfrac{۲x+۱}{۲} > \dfrac{x-۱}{۶} \\[2ex] \dfrac{۳x-۵}{۴} + \dfrac{x-۱}{۲} > \dfrac{۵x}{۳} \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} ۱ + x < ۳x - ۱ \leqslant ۲x + ۱۴ \\ ۳x - ۷ \geqslant ۱۱ \\ x \neq ۱۰ \\ x^{۲} - ۱ < ۱۲۰ \end{cases}$$

$$۴)\begin{cases} x - ۲ < x^{۲} - ۱ \leqslant ۷ - x \\ \sqrt{x} \leqslant x^{۲} + ۱ < ۳x \\ x \neq ۲, ۳, ۴ \end{cases}$$

نکته: برای حل معادلات قدرمطلقی، راه‌های بسیار متعددی وجود دارد.

الف) اگر $|x| = a$ یا $|x| = |a|$ آنگاه $x = \pm a$.

ب) تعیین علامت داخل قدر مطلق؛

پ) استفاده از نامساوی مثلثی: همواره $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ تساوی تنها در حالتی رخ می‌دهد که $ab > ۰$.

مثال ۷: معادلات زیر را حل کنید.

$۱)|x-۱| = ۳$

$۲)|۲x-۱| = |۴x+۱|$

$۳)||x-۳|-۱| = ۲$

$۴)|x-۳| + |x+۲| = ۵$

$۵)|x^۲ - ۳x + ۲| = x^۲ - ۳x + ۲$

$۶)|۳-x| - |۲x+۱| = ۰$

$۷)|۳x-۲| + |۲x+۱| = |۵x-۱|$

$۸)|۴x-۲| + |۲x+۱| = |۲x-۳|$

$۹)|x^۲ - x - ۶| = -x^۲ + x + ۶$

$۱۰)|x^۲ + ۳x + ۲| + |x^۲ + ۴x + ۳| = ۰$

نکته: حل نامعادلات قدرمطلقی نیز راه‌های بسیار زیادی دارند. دو راه اساسی آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.

الف) اگر $|x| < a$ آنگاه $-a < x < a$.   ب) اگر $|x| > a$ آنگاه $x > a$ یا $x < -a$.

مثال ۸: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x+2| > 4$

۲) $||x-1|-1| < 2$

۳) $||x-4|-2| \leqslant 5$

۴) $|2x-1| < |4x+1|$

۵) $|x^2-3x+2| \leqslant 2$

۶) $|x-3|-|2x-1| > 0$

۷) $|4-|x+1|| \geqslant 3$

۸) $|x^2-5|x|+4| \geqslant |x^2-4|x|+3|$

۹) $\dfrac{|x-3|}{x+2} < 2$

۱۰) $|x^2-3x-2| > 0$

حافظ:

باده خور غم مخور و پند مقلد منیوش   اعتبار سخن عام چه خواهد بودن

فصل پنجم، درس اول: مفهوم تابع

تعریف: زوج مرتب

الف) به هر عضو (x, y) که ترتیب و تکرار اعضا در آن (بر خلاف مجموعه‌ها) اهمیت دارد، زوج مرتب یا جفت مرتب گفته می‌شود.

ب) دو زوج مرتب با یکدیگر برابر هستند هرگاه مولفه‌های اول با یکدیگر و مولفه‌های دوم نیز با یکدیگر برابر هستند.

$$(a, b) = (c, d) \Longrightarrow a = c\ ,\ b = d$$

مثال ۱: اگر دو زوج مرتب $(5, 3x - y)$ و $(2x + y, 0)$ برابر باشند مقادیر x و y را بیابید.

تمرین:

۱. از مساوی بودن سه زوج مرتب $(a + b, c)$، $(c - b, b)$ و $(a, a + b)$ مقدار زوج مرتب $(\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2})$ را بیابید.

۲. اگر دو زوج مرتب $(z, y^2 + x + 1)$ و $(y + 1, x + 2y)$ و مساوی بودن دو زوج مرتب $(x, z + y)$ و (z, wy) مقدار دو زوج مرتب (xyw, yz) و $(\sqrt{x^2 - 1}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2})$ را بیابید.

۳. اگر $(x+y+2z-1, w^2+zw) = (x+y+z, -z-w)$ و $(2x-z, w^2) = (2z-2y, u)$ آنگاه حاصل زوج مرتب $(2x+2y, x-zw+yu)$ را بیابید.

۴. از تساوی $((y-1)x^2 - 1, 6y) = (-x, y^2 + 9)$ چند مقدار متفاوت برای $(2x - 1 + y, y + x)$ می‌توان نوشت؟ همه‌ی آن‌ها را بنویسید.

تعریف: حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند. حاصل‌ضرب دکارتی این دو مجموعه را با نماد $A \times B$ نمایش می‌دهیم که برابر است با تمام زوج مرتب‌هایی که مولفه‌ی اول از A و مولفه‌ی دوم از B گرفته می‌شود؛ یعنی

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A\ ,\ b \in B\}$$

هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه گوییم.

مثال ۲: حاصلضرب‌های دکارتی $A \times B$، $B \times A$ و $A \times A$ را برای مجموعه‌های $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ بیابید و آن‌ها را روی دستگاه مختصات نشان دهید.

تمرین:

۱. حاصل $A \times B$، $B \times A$، $A \times A$ و $B \times B$ را بیابید که در آن $A = \{3, 6, 9\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$.

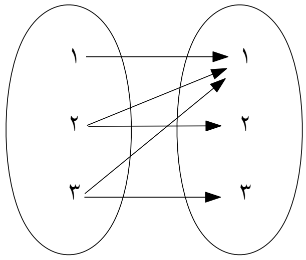
۲. اگر $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و $Y = \{3, 4, 5\}$ آنگاه حاصل $(X \times Y) \cap (X \times X)$ را بیابید.

۳. اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد، آنگاه $A \times B$، $B \times A$، $A \times A$ و $B \times B$ چند عضو دارند؟

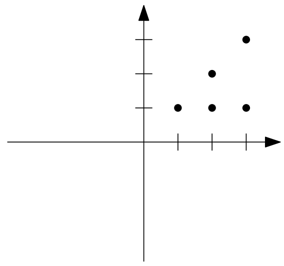
۴. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ آنگاه اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌ی $(A \cap B) \times (A \cup B)$ با تعداد اعضای مجموعه‌ی $(A \times B) \cap (B \times A)$ را بیابید.

نکته: هر رابطه، دارای چند نمایش مرسوم می‌باشد که عبارت اند از ((نمایش زوج مرتبی، نمودار ون، جدول و دستگاه مختصاتی)).

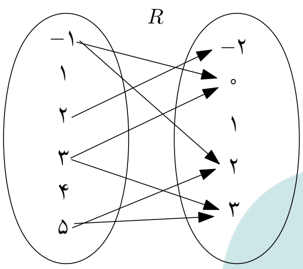
مثال ۳: مجموعه‌ی $X = \{(۱,۱), (۲,۲), (۲,۱), (۳,۱), (۳,۳)\}$ یک رابطه با نمایش زوج مرتبی است. سایر نمایش‌های رابطه در زیر آمده است.



۱	۲	۲	۳	۳
۱	۱	۲	۱	۳



مثال ۴: با توجه به نمایش نمودار ون زیر، سایر نمایش‌های رابطه‌ی داده شده را رسم کنید.



تمرین:

۱. یک رابطه مثال بزنید که در آن هیچ دو زوج مرتبی وجود نداشته باشد که دارای عضو اول یکسان باشند. سایر نمایش‌های این رابطه را رسم کنید.

۲. با توجه به نمایش جدولی زیر، سایر نمایش‌های رابطه‌ی داده شده را رسم کنید.

x	۳	۳	۱	۲	۵	۵	۲
y	۱	۳	۳	۲	۳	۲	۴

۳. اگر $f = \{(-۲,-۱), (-۱,۰), (۰,۱), (۱,۲), (۲,۳), (۳,۴)\cdots\}$ آنگاه سایر نمایش‌های رابطه‌ی f را رسم کنید. در نمایش دکارتی، آیا می‌توان گفت که این نقاط همگی روی یک خط قرار دارند؟

تعریف: تابع

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. مجموعه‌ی f شامل زوج مرتب‌هایی که عضو اول آن‌ها از A و عضو دوم آن‌ها از B گرفته شوند (یعنی رابطه‌ای از $A \times B$ است) را یک تابع گوییم هرگاه تمام اعضای A به عنوان عناصر اول ظاهر شوند و هیچ یک از عناصر اول، دو بار تکرار نشده باشند (یعنی اگر دو زوج مرتب وجود داشته باشد به نحوی که عناصر اول آن‌ها یکسان باشند، باید عناصر دوم آن‌ها نیز یکسان باشند).

مثال ۵: مشخص کنید که کدام یک از موارد زیر تابع هستند.

$g = \{(۲,۲), (۳,۲), (۴,۱)\}$

$f = \{(۲,۱), (۴,۲), (۱۲,۳)\}$

$i = \{(۱,۱), (۲,۳), (۴,۲), (۵,۵), (۲,۲)\}$

$h = \{(۳,۲), (۴,۳), (۳,۲)\}$

$k = \{(۱,۱), (۲,۳), (۴,۳)\}$

$j = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۱,۱)\}$

مثال ۶: اگر $f = \{(۵,x), (۳,۳), (۵,۴), (۳,y-x)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x+y$ را بیابید.

مثال ۷: اگر $f = \{(5,8),(6,12),(3,0),(6,2x-4),(5,y-10),(6,3z)\}$ حاصل xyz را بیابید.

مثال ۸: اگر $f = \{(m^2-4,5),(m^2-4,m^2-11),(8+m,2)\}$ تابع باشد، m کدام است؟

مثال ۹: چگونه می‌توان رابطه‌های زیر را به تابع تبدیل کرد؟

$1) f = \{(\pi,1),(0,1),(\pi,\sin x),(0,\tan y)\}$

$2) g = \{(x,1),(2,2)\}$

$3) h = \{(x,y)(2,x-1)(2,4),(5,-2)\}$

مثال ۱۰: رابطه‌ی $R = \{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ به ازای چه مقدار m یک تابع است؟

تمرین:

۱. اگر $\{(1,x),(x,y^2),(1,5),(5,4)\}$ یک تابع باشد، آنگاه حاصل زوج مرتب $\left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x}\right)$ را بیابید.

۲. اگر $\{(3,x^3+x^2+x),(x^2-1,y),(x^4-1,2),(3,-1)\}$ یک تابع باشد، تابع بودن یا نبودن $\{(x^2,2),(x,y),(2,1)\}$ را بررسی کنید.

۳. تابع بودن یا نبودن رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$R_1 = \{(1,x^2),(1,x+2),(x+2,y+1)\}$

$R_2 = \{(a,2a+b),(b,a-b),(a,a-b+1),(b,4)\}$

$R_3 = \{(a-1,2),(5,a-2),(a-2,b+3),(3,5),(5,3)\}$

نکته: اگر f یک تابع باشد و $(x,y) \in f$، آنگاه y را مقدار x تحت تابع f گوییم و آن را نماد $f(x)$ نیز نمایش می‌دهیم؛ یعنی $y = f(x)$.

مثال ۱۱: مقدار ۱، ۲، ۳ و ۴ را تحت تابع $\{(4,0),(5,1),(2,3),(1,3),(3,1)\}$ بیابید.

مثال ۱۲: مقادیر $f(۱)$، $f(۲)$ و $f(f(۱))$ را در تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۲),(-۱,۲),(۰,۱)\}$ بیابید.

مثال ۱۳: اگر $f=\{(۲,۳),(۴,۳),(۱,۲),(-۲,۱),(-۱,-۱),(۳,-۲),(۰,۲)\}$ آنگاه حاصل $f(f(۱)+۱)-f(f(f(۰)))$ را بیابید.

مثال ۱۴: اگر $f=\{(-۱,۲),(-۲,۰),(۰,۰),(۱,۰),(۲,۱),(۳,۱)\}$ و $g=\{(۰,۲),(-۱,۳),(۱,۱),(-۲,-۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$ آنگاه حاصل موارد زیر را بیابید.

۱) $f(۱)-g(f(۱))$

۲) $g(f(۱))+f(g(۱))$

۳) $f(f(g(۰))-۲(g(f(۲)))$

۴) $g(f(-۲)+f(-۱)+f(۰))-f(g(f(g(۰))))$

تمرین:

۱. اگر $f=\{(-۵,-۵),(-۴,-۴),\cdots,(۴,۴),(۵,۵)\}$ و $g=\{(-۵,۵),(-۴,۴),\cdots,(۰,۰),(۱,-۱),\cdots,(۴,-۴),(۵,-۵)\}$ و $h=\{(-۵,-۴),(-۴,-۳),(-۳,-۲),\cdots,(۳,۴),(۴,۵)\}$ موارد زیر را بیابید.

۱) $f(g(h(۰)))-g(f(h(۰)))$

۲) $h(f(g(۰)))+f(g(h(۱)))+۱$

۳) $f(۲g(-۱)-h(۳))+h(۴)$

نکته: هر تابع، همانند رابطه‌ها دارای چند نمایش مرسوم می‌باشد که عبارت اند از ((نمایش زوج مرتبی، نمودار ون، جدول، دستگاه مختصاتی و ضابطه)).

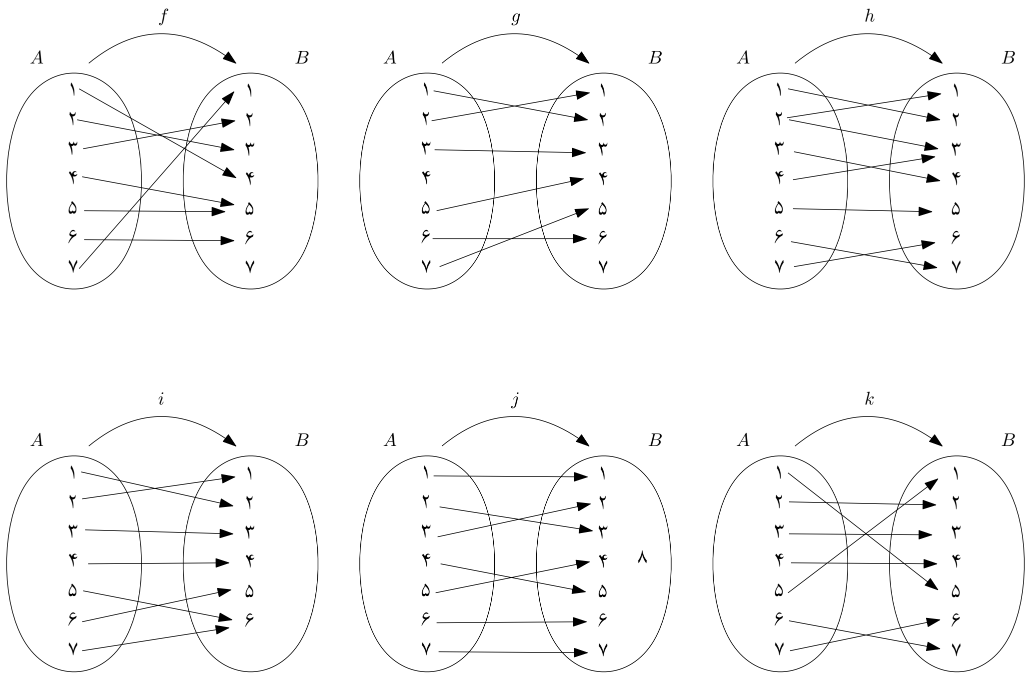
بررسی تابع بودن در نمایش زوج مرتبی: هیچ دو عضو اول یکسانی نباید در رابطه موجود باشد مگر آنکه عضو دوم یکسانی نیز داشته باشند.

بررسی تابع بودن در نمایش نمودار ون: از هر عضو از مجموعه‌ی اول باید فقط یک فلش خارج شده باشد. مجموعه‌ی دوم هیچ اهمیتی ندارد.

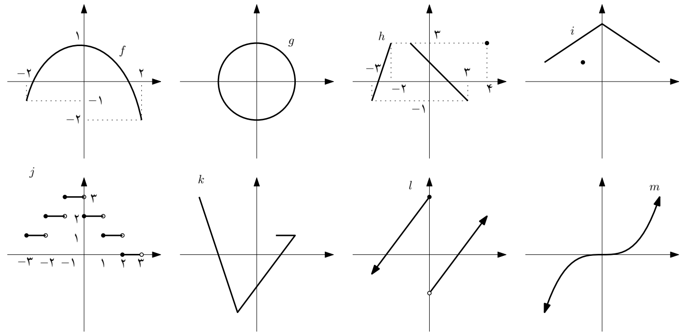
بررسی تابع بودن در نمایش جدول: هر عضو از سطر بالا فقط و فقط یک بار باید مقدار دهی کرده باشد مگر اینکه مقدار یکسانی داده باشد.

بررسی تابع بودن در نمایش دستگاه مختصاتی: هر خط که به موازات محور yها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

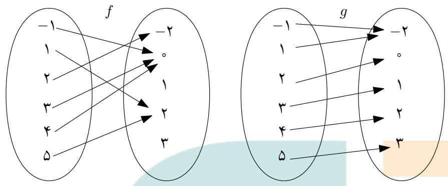
مثال ۱۵: کدام یک از رابطه‌های زیر معرف یک تابع است؟ مواردی که تابع هستند را با نمایش زوج مرتبی نیز بنویسید.



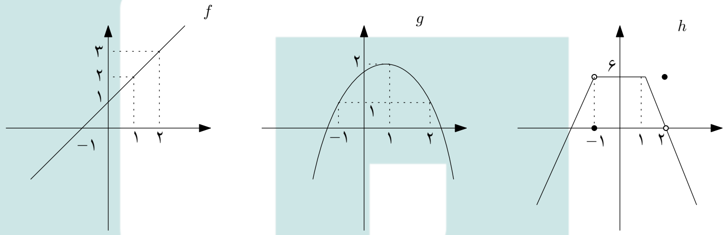
مثال ۱۶: کدام یک از رابطه‌های زیر معرف یک تابع هستند؟



مثال ۱۷: در توابع زیر مقدار $f(g(۱))-g(f(۰))+f(۰)$ را بیابید. همچنین نمایش زوج مرتبی و مختصاتی این توابع را نیز بنویسید.



مثال ۱۸: در موارد زیر مقدار توابع f، g و h را در نقاط ۰، ۱، ۱− و ۲ بیابید.



تمرین:

۱. در مثال ۱۵، مقدار $f(۱)+i(f(۲))-f(i(j(۲)))-k(۵)$ را حساب کنید.

۲. در مثال ۱۶، حاصل $\dfrac{h(f(j(-۲)))+f(۳-h(۴))}{f(۰)}$ را بیابید.

۳. در مثال ۱۸، مقدار $h(g(۱)-۱)-h(g(۱))-f((g(-۱))+g(۱)$ را حساب کنید.

۴. در مثال ۱۷، مقدار $g(g(g(۵)))+f(g(f(۵))+۱)$

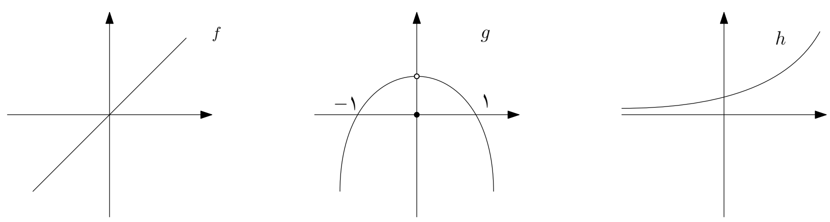
۵. برای نمایش زوج مرتبی تابع $\{(x,x^۲-۱)|x\in\mathbb{N},-۲<x<۵\}$، نمایش مختصاتی، نمودار ون و جدولی ارائه دهید.

۶. برای نمایش زوج مرتبی تابع $\{(x,\sqrt{x}-x)x\in\mathbb{W},-۴<x<۴\}$، نمایش مختصاتی، نمودار ون و جدولی ارائه دهید.

نکته: در یک تابع منظور از $f(x)=a$ یعنی نقاطی مانند x که مقدار آن‌ها برابر با a شود. به خصوص اینکه منظور از $f(x)=۰$ یعنی نقاطی که مقدار آن‌ها برابر با صفر شود. از روی نمایش زوج مرتبی این موضوع به این معناست که مولفه‌های دوم برابر با صفر شوند و از روی نمایش مختصاتی منظور نقاطی هستند که محور xها را قطع می‌کنند. نقاطی مانند x که $f(x)=۰$ باشد را ریشه‌ی تابع گوییم.

مثال ۱۹: ریشه‌های تابع $f=\{(۱,۰),(۴,۲),(۰,۲),(۵,۰),(۳,۱),(-۲,۱)\}$ را بیابید. تابع f در چه نقاطی برابر با ۱ می‌شود؟

مثال ۲۰: ریشه‌های توابع زیر را بیابید.



نکته: اگر بتوان بین مولفه‌های اول و مولفه‌های دوم تابع، یک رابطه‌ی جبری یافت، این رابطه‌ی جبری را ضابطه‌ی تابع گوییم. نمایش ضابطه‌ای توابع برای مواردی مناسب است که تابع بی‌نهایت عضو داشته باشد.

مثال ۲۱: ضابطه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$$f = \{\cdots, (۱,۲), (۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), \cdots\}$$
$$g = \{\cdots, (۱,۱), (۲,۴), (۳,۹), (۴,۱۶), \cdots\}$$
$$h = \{\cdots, (-۳,-۲۷), (-۲,-۸), (-۱,-۱), (۰,۰), \cdots\}$$
$$i = \{\cdots, (۱,۱), (۲,۴), (۳,۷), (۴,۱۰), \cdots\}$$

مثال ۲۲: چند عضو از توابع زیر را به صورت زوج مرتبی بنویسید.

$$f(x) = x^۲ - ۲$$
$$g(x) = x^۳ - ۱$$
$$h(x) = x - ۱$$
$$i(x) = x^۳ - x^۲ + x - ۱$$
$$j(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x^۴ + x + ۱}$$

مثال ۲۳: توابع $f(x) = ۲x - ۱$، $g(x) = ۳x^۲ - ۱$ و $h(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $f(۰) - g(۱)$ را بیابید.

ب) مقدار $h(f(۱)) - g(f(۰))$ را بیابید.

پ) مقدار $\frac{h(f(۲) + ۱) - g(f(-۱))}{۲f(۲)}$ را بیابید.

ت) تابع f به ازای چه مقداری از x برابر با ۱ است؟

ث) تابع g به ازای چه مقادیری برابر با ۲ است؟

ج) تابع $f(x + ۱)$، $g(-x)$ و $h(\frac{۱}{x})$ را بیابید.

مثال ۲۴: اگر $f(x) = x^۲ + x$ و $g(x) = x + \frac{۱}{x}$ آنگاه توابع $f(g(x))$، $g(f(x))$ و $f(f(x))$ را بیابید.

بررسی تابع بودن در نمایش ضابطه‌ای: اگر به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ که $x_۱ = x_۲$ آنگاه $f(x_۱) = f(x_۲)$ آنگاه ضابطه‌ی داده شده تابع است. همچنین اگر مقداری از x چنان یافت شود که حداقل دو مقدار y به دست دهد، آن ضابطه تابع نخواهد بود (با نمایش زوج مرتبی نیز دلیل تابع نبودن را بیان کنید).

مثال ۲۵: مشخص کنید که کدام یک از موارد زیر y تابعی از x است؟

$$y = |x| \quad , \quad y = x^۲ + x \quad , \quad x = |y| \quad , \quad y = \frac{۱}{x} \quad , \quad x = \frac{۱}{y} \quad , \quad y^۲ + y = x \quad , \quad \sqrt{y} = x \quad , \quad y^۲ + ۲y = -۱ - x^۲$$

هوشنگ ابتهاج:

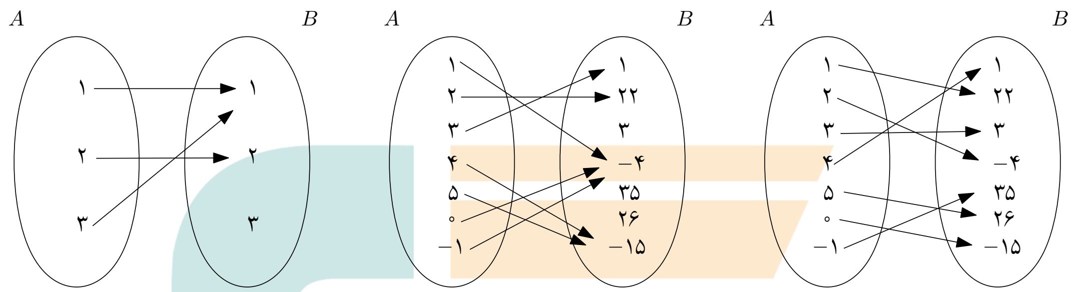
من چه گویم که کسی را به سخن حاجت نیست
خفتگان را به سحرخوانی من حاجت نیست

فصل پنجم، درس دوم: دامنه، هم‌دامنه، برد

تعریف: دامنه، هم‌دامنه و برد

هر تابع را به صورت کلی $f : A \longrightarrow B$ می‌توان نشان داد که در آن A مجموعه‌ی تمام مولفه‌های اول است و آن را دامنه‌ی تابع f می‌نامیم و با D_f نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی B را هم‌دامنه‌ی تابع f گوییم. همچنین مجموعه‌ی تمام مولفه‌های دوم که زیرمجموعه‌ای از B است را برد تابع f گوییم و با R_f نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: فرم کلی توابع زیر را نوشته و سپس دامنه، هم‌دامنه و برد آن‌ها را نیز تعیین کنید.



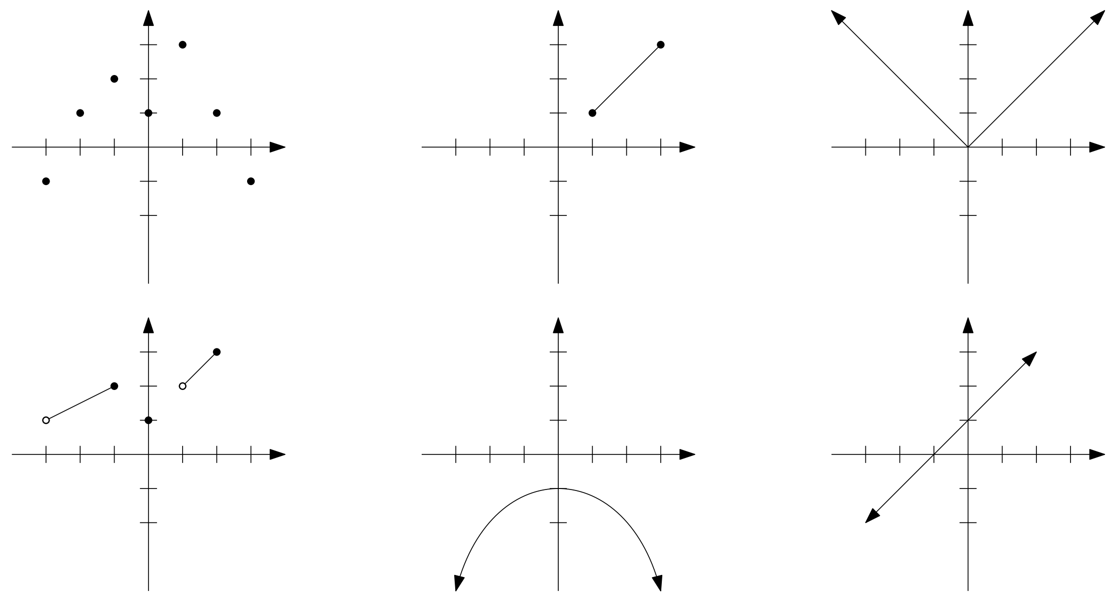
مثال ۲: فرم کلی توابع زیر را نوشته و سپس دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید. نمایش ضابطه‌ای برای این توابع نیز ارائه دهید.

$f = \{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),(۴,۸),\cdots\}$

$g = \{(-۱,\frac{۱}{۲}),(۰,۱),(۱,۲),(۲,۴),(۳,۸),(۴,۱۶),\cdots\}$

$h = \{(-۱,۱),(-۲,۲),(-۳,۳),(-۴,۴),\cdots\}$

مثال ۳: فرم کلی توابع زیر را نوشته و سپس دامنه و برد آن‌ها را نیز تعیین کنید.



تمرین:

۱. سه تابع متفاوت در دستگاه مختصات رسم کنید که دامنه و برد آن‌ها برابر با $(۱,۲]$ باشد.

۲. چند تابع متفاوت با دامنه‌ی $D_f = \{۱,۲,۳\}$ و برد $R_f = \{۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت؟

۳. دامنه و برد تابع $\{(۲,a^۲-۳a),(۳,۴),(۴,۶),(۲,۴),(۳,b^۲)\}$ را تعیین کنید.

۴. تابعی در دستگاه مختصات رسم کنید که $D_f = \{x|x\in\mathbb{R}, ۰\leqslant x\leqslant ۲\}$ و $R_f = \{y|y\in\mathbb{R}, ۲\leqslant y\leqslant ۴\}\cup\{۵\}$.

۵. از تساوی $((y-۱)x^۲-۱,۶y) = (-x,y^۲+۹)$ چند مقدار متفاوت برای $(۲x-۱+y, y+x)$ می‌توان نوشت؟ همه‌ی آن‌ها را بنویسید.

۶. اگر $\{۱,۲,۳,۴\}$ دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+x}$ باشد، برد آن را بیابید.

مثال ۴: اگر برد تابع $f(x)=x^۲+۴$ برابر با $\{۵,۱۳\}$ باشد، دامنه‌ی آن را بیابید.

مثال ۵: برد توابع $f(x)=x$، $g(x)=-x$ و $h(x)=x^۲+۱$ را با توجه به دامنه‌ی داده شده بیابید.

$D_۱ = \{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$D_۲ = (۰,۲]$

$D_۳ = (-۱,۲]$

$D_۴ = \mathbb{R}$

تمرین:

۱. برد تابع $f(x)=۲x-۱$ را با دامنه‌های $D_۱=\{-۴,۳,۱,۰\}$ و $D_۲=\{-۵,-۴,-۳,-۲,\cdots,۴,۵\}$ بیابید.

۲. برد تابع $f(x)=x+۱$ را با دامنه‌های $D_۱=(-۱,۱]$ و $D_۲=\mathbb{R}$ بیابید.

۳. دامنه‌ی تابع $f(x)=۲-۳x$ را با برد $R_f=\{۳,۵,۶,-۱,۰\}$ بیابید.

نکته: توابعی که ورودی آن‌ها x باشد را توابع صریح گوییم. در غیر این صورت تابع را غیر صریح می‌نامیم.

مثال ۶: تابع $f(x)=x^۲+x+۱$ را در نظر بگیرید. توابع غیرصریح زیر را بیابید.

۱) $f(x+۱)$

۲) $f(x^۲+۱)$

۳) $f(\sqrt{x})$

۴) $f(-x)$

مثال ۷: ابتدا مشخص کنید که کدام یک توابع زیر صریح و کدام یک غیر صریح است. سپس مقدار $f(۱)$ را در هر یک بیابید.

$۱) f(x) = x^{۲} + x + ۲$

$۲) f(x + ۱) = \sqrt{x^{۲} + ۱} + ۲x$

$۳) f(\frac{۱}{x}) = x^{۲} + ۳$

$۴) f(x - x^{۲}) = |x|x^{۲}$

$۵) f(x) = ۳x^{۳} + x + ۳$

مثال ۸: توابع غیر صریح زیر را به صورت صریح درآورید.

$۱) f(x - ۱) = x + ۵$

$۲) g(x^{۲}) = x^{۴} + x^{۲} + ۱$

$۳) h(x + \frac{۱}{x}) = x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}}$

$۴) i(x + \frac{۱}{x}) = x^{۳} + \frac{۱}{x^{۳}}$

$۵) j(x^{۲} + ۲x) = \frac{\sqrt{x}}{x + ۱}$

مثال ۹: اگر $f(x) = \frac{۲x-۱}{x+۳}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x+۲}$ توابع غیرصریح زیر را بیابید.

۱) $f(g(x))$

۲) $g(f(x))$

۳) $f(f(x))$

۴) $g(g(x))$

تمرین:

۱. اگر $f(x) = \sqrt{x} + x^{۲}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ آنگاه توابع غیرصریح $f(g(x))$، $g(f(x))$، $f(f(x))$ و $g(g(x))$ را بیابید.

۲. اگر $f(x) = x^{۲} + x$ و $g(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$ آنگاه حاصل توابع غیرصریح $f(g(x))$، $g(f(x))$، $f(f(x))$، $g(g(x))$ و $g(f(g(x)))$ را بیابید.

۳. مقدار $f(۳)$ را در توابع زیر بیابید.

$$f(x) = \frac{۳^{x} - ۱}{x} \qquad f(۲x-۱) = ۳x^{۲}+۱ \qquad f(x^{۲}+۴x) = ۳^{x} \qquad f(\frac{x+۱}{x}) = \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}}$$

۴. اگر $f(x) = ۳x - ۲$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x}$ آنگاه دامنه‌ی توابع $f(g(x))$ و $g(f(g(f(x))))$ را با دامنه‌ی $\{۲۰, ۲۱, ۲۲\}$ بیابید

مثال ۱۰: اگر مساحت یک مربع به طول a را با S و محیط آن را با P نمایش دهیم آنگاه $S(P) = \frac{P}{۱۶}$. یعنی مساحت تابعی از محیط است. اکنون به کمک داشتن محیط یک مربع بدون محاسبه‌ی ضلع آن می‌توان مساحت را به دست آورد. روند به دست آوردن $S(P)$ را شرح دهید.

مثال ۱۱: محیط یک دایره را به عنوان تابعی از مساحت آن به دست آورید.

مثال ۱۲: تابعی ارائه دهید که مساحت تمام مثلث‌هایی به طول ۳ و ۴ را بر حسب تغییر زاویه‌ی آن‌ها بیابد.

مثال ۱۳: تابعی ارائه دهید که حجم استوانه را به عنوان ورودی دریافت کند و مساحت جانبی آن را به عنوان خروجی بدهد.

هوشنگ ابتهاج:

من چه گویم که کسی را به سخن حاجت نیست — خفتگان را به سحرخوانی من حاجت نیست

فصل پنجم، درس سوم: انواع تابع و رسم و خواص آن‌ها

تعریف: تابع خطی و تابع ثابت

هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی گوییم که نمایش مختصاتی آن یک خط می‌باشد. توابع خطی که به فرم $f(x) = b$ باشند را تابع ثابت گوییم. همچنین تابع خطی $f(x) = x$ را تابع همانی گوییم.

نکته: دامنه و برد توابع خطی (به شرط ثابت نبودن) در حالت کلی $\mathbb{R}$ می‌باشد و اگر تابع $f(x) = b$ ثابت باشد، دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ و برد آن $\{b\}$ می‌باشد.

مثال ۱: توابع خطی زیر را رسم کرده و مقادیر $f(۱)$ و $f(۲)$ را روی آن‌ها نیز نشان دهید. همچنین ریشه‌های این توابع را بیابید. دامنه و برد آن‌ها را از روی نمودار نیز تعیین کنید.

۱) $f(x) = ۲x - ۱$

۲) $f(x) = x - ۱$

۳) $f(x) = ۲ - ۲x$

۴) $f(x) = ۲$

مثال ۲: تابع ثابت $f(x) = ۰$ را در نظر بگیرید. نمایش هندسی (مختصاتی)، نمایش نمودار و نمایش جفت مرتبی را برای این تابع بنویسید. همچنین مشخص کنید که این تابع چند ریشه دارد.

مثال ۳: نمودار دو تابع $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = ۳ - x$ را همزمان روی یک دستگاه رسم کنید و تفاوت مقادیر $f(۱)$ و $g(۱)$ و همچنین $f(۲)$ و $g(۲)$ را از روی نمودار مشخص کنید.

تمرین:

۱. یک خط در چه صورتی نمی‌تواند یک تابع باشد؟

۲. تابع خطی را بیابید که از نقاط $(-۲,۳)$ و $(۴,-۱)$ بگذرد.

۳. اگر $f = \{(۱,a),(۴,۳a-b),(۰,a-c),(۱,d)\}$ یک تابع ثابت باشد، آنگاه بررسی کنید که $g = \{(a,d),(d,c),(b,a)\}$ تابعی ثابت هست یا خیر.

۴. توابع خطی $f(x) = \frac{x}{۲} + ۱$ و $g(x) = ۲x - ۴$ را رسم کنید و مقادیر $f(۱)$ و $g(۱)$ را از روی نمودار مقایسه کنید.

۵. اگر f یک تابع خطی باشد، یا یک ریشه دارد، یا ریشه ندارد و یا اینکه بی‌نهایت ریشه دارد. بیان کنید که تابع f برای هر یک از این حالت‌ها باید چه شرایطی داشته باشد (به کمک شیب و عرض از مبدأ این شرایط را تعیین کنید)؟

مثال ۴: طول یک فنر در حالتی که هیچ شیء به آن آویزان نشده باشد، $۵cm$ است. به ازای هر یک کیلوگرم که به آن وزنه آویزان کنیم، طول آن نیم سانتی متر افزایش پیدا می‌کند. همچنین طول این فنر بیش از $۲۰cm$ نمی‌تواند باشد.

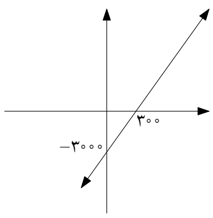
الف) مقدارهای $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۳)$ را بیابید.

ب) تابعی بنویسید که طول فنر را بر حسب وزنه‌های آویخته شده بر آن بدهد.

پ) این تابع را در دستگاه مختصات رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ت) از روی نمودار بیان کنید که حداکثر وزنه‌ای که می‌توان به این فنر آویزان کرد چقدر است؟

مثال ۵: نمودار سود و زیان یک شرکت از تابع زیر به دست می‌آید.



الف) دامنه و برد واقعی این نمودار را مشخص کنید.

ب) از روی نمودار بیان کنید که این شرکت با فروش ۲۰ کالا، ضرر کرده است یا سود؟ با فروش ۸۰ کالا چطور؟

پ) تابع سود بر حسب کالا را بنویسید.

ت) این شرکت حداقل چند کالا بفروشد تا نه سود کند نه ضرر؟ این نقطه برای تابع f چه نقطه‌ای است؟

مثال ۶: رابطه‌ی سود و زیان دو شرکت A و B به ترتیب با توابع $f(x) = ۳x - ۱۰$ و $g(x) = ۲x - ۵$ بیان می‌شوند.

الف) این دو نمودار را رسم کنید. این دو شرکت پس از فروش ۳ کالا، سود می‌کنند یا ضرر؟

ب) تحت فروش ۲ کالا، کدام شرکت کمتر ضرر می‌کند؟

پ) این دو شرکت بعد فروش چند کالا به یک سود یکسانی می‌رسند؟

ت) پس از فروش چند کالا سود شرکت A بیش از سود شرکت B می‌شود؟

تعریف: تابع درجه دو

هر تابع به صورت $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ را یک تابع درجه دو گوییم که نمایش مختصاتی آن یک سهمی می‌باشد.

مثال ۷: تابع درجه دوم $f(x) = x^{۲} - ۳x - ۲$ و $g(x) = ۴x^{۲} - ۶x + ۲$ را رسم کنید.

مثال ۸: نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس خط تقارن، طول و عرض سهمی را به دست آورید.

$$f(x) = x^{۲} + ۴ \qquad g(x) = (x - ۳)^{۲} + ۳ \qquad h(x) = x^{۲} + ۳x + ۵$$

نکته: فرض کنید $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ یک تابع درجه دوم باشد.

الف) عدد c، محل برخورد سهمی با محور yها است.

ب) اگر $\Delta > ۰$ آنگاه تابع f دو ریشه دارد (تابع f در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند)، اگر $\Delta = ۰$ آنگاه تابع f یک ریشه دارد (تابع f بر محور xها مماس است) و اگر $\Delta < ۰$ آنگاه تابع f هیچ ریشه‌ای ندارد (تابع f محور xها را قطع نمی‌کند).

پ) اگر $a > ۰$ آنگاه تقعر نمودار رو به بالاست و اگر $a < ۰$ آنگاه تقعر رو به پایین است. همچنین اگر تقعر رو به بالا باشد، این نمودار دارای مینیمم (کمترین مقدار) و اگر تقعر رو به پایین باشد، این نمودار دارای ماکسیمم (بیشترین مقدار) است که در هر دو حالت در رأس سهمی رخ می‌دهد.

ت) طول رأس سهمی برابر با $x = \frac{-b}{۲a}$ و عرض رأس سهمی برابر با $y = f(\frac{-b}{۲a})$ است. همچنین عرض سهمی را به کمک فرمول $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ نیز می‌توان به دست آورد.

ث) دامنه‌ی تمام توابع درجه دو برابر با $\mathbb{R}$ است؛ اما برد این توابع به هیچ عنوان $\mathbb{R}$ نمی‌تواند باشد. اگر $a > ۰$ آنگاه برد برابر با $[f(\frac{-b}{۲a}), \infty)$ و اگر $a < ۰$ آنگاه برد برابر با $(-\infty, f(\frac{-b}{۲a})]$ است.

مثال ۹: به کمک یافتن رأس سهمی، نمودارهای زیر را رسم کنید. راجع به ریشه‌ها، دامنه، برد، نقاط مینیمم و ماکزیمم این توابع چه می‌توان گفت؟

$$f(x) = x^{۲} + x + ۱ \qquad g(x) = -۲x^{۲} - ۳x + ۱ \qquad h(x) = ۵x^{۲} - ۳ \qquad i(x) = x^{۲} + ۲x + ۶$$

مثال ۱۰: در چه نقاطی مقدار تابع $f(x) = x^2 - 5x + 4$ از تابع $g(x) = x^2 - 3x$ بیشتر می‌باشد؟

مثال ۱۱: دو سنگ را از بالای دو ساختمان پرتاب می‌کنیم که فاصله آن‌ها از سطح زمین از توابع $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = -3x^2 - x + 9$ به دست می‌آید (متغیر x، زمان بر حسب ثانیه است).

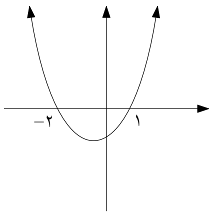
الف) بیشترین فاصله‌ای که این دو سنگ از زمین می‌گیرند چقدر است؟

ب) در چه زمانی این دو سنگ به یک ارتفاع یکسان می‌رسند؟

پ) در چند ثانیه سنگ با تابع f بالاتر از تابع g قرار دارد؟

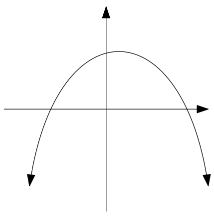
مثال ۱۲: ضابطه‌ی تابع زیر در کدام یک از موارد زیر آمده است؟

$y = -2x^2 + 4x - 4$ $\qquad$ $y = -2x^2 + 2x - 4$ $\qquad$ $y = 2x^2 + 2x - 4$ $\qquad$ $y = 2x^2 - 2x - 4$



مثال ۱۳: ضابطه‌ی تابع زیر در کدام یک از موارد زیر آمده است؟

$y = -x^2 - 2x + 3$ $\qquad$ $y = -x^2 + 2x + 3$ $\qquad$ $y = x^2 - 2x + 3$ $\qquad$ $y = x^2 + 2x + 3$



تعریف: تابع چند ضابطه‌ای به تابعی که در دو یا چند بخش از دامنه‌ی خود از ضابطه‌های گوناگون استفاده کند، تابع چندضابطه‌ای گوییم.

مثال ۱۴: همه‌ی ضوابط زیر را رسم کنید و تابع بودن یا نبودن آن‌ها را نیز بررسی کنید. همچنین دامنه و برد مواردی که تابع هستند را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq -2 \\ x + 2 & x \geq -2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ 4x + 2 & x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۱۵: تابع قدرمطلق $f(x) = |x|$ در حقیقت تابعی چندضابطه‌ای می‌باشد. آن را نوشته و رسم کنید.

مثال ۱۶: محل تلاقی توابع زیر را به دو روش جبری و هندسی بیابید.

$$۱)f(x) = x^{۲} + ۱ \quad , \quad g(x) = x + ۱$$

$$۲)f(x) = x^{۲} + ۲x + ۱ \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x - ۱ & x < -۲ \\ ۳ & -۲ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۲ - x & x \geqslant ۱ \end{cases}$$

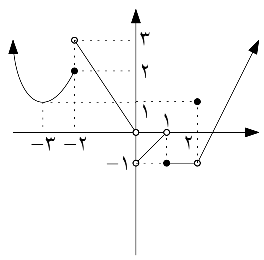
مثال ۱۷: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + ۴} & x > ۳ \\ ۲x + ۳ & x \leqslant ۳ \end{cases}$، مقدار $f(f(۱)) + f(f(۵))$ را بیابید.

مثال ۱۸: توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید که به ازای چه مقادیری از x، $f(x) < g(x)$؟

$$۱)f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x \geqslant ۲ \\ ۱ - ۲x & -۱ \leqslant x < ۲ \\ -۲x^{۲} + ۴x - ۴ & x < -۱ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۸x + ۳ & x \geqslant ۳ \\ ۵ & ۲ \leqslant x < ۳ \\ ۴ - ۳x & -۲ > x \end{cases}$$

$$۲)f(x) = \begin{cases} ۲ + x^{۲} & x \leqslant ۰ \\ x^{۲} & ۰ < x \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} -۲x - ۳ & x < -۱ \\ |x| & -۱ \leqslant x \leqslant ۱ \\ x + ۲ & ۲ < x \end{cases}$$

مثال ۱۹: تابعی بنویسید که نمودار آن به صورت زیر باشد.



نکته: دامنه‌ی هر تابع، هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد به جز مقادیری که تعریف نشده‌اند. هر عبارت کسری، در مقادیری تعریف نشده‌اند که مخرج را صفر می‌کنند. هر عبارت رادیکالی (با فرجه‌ی زوج) در مقادیری که زیر رادیکال منفی باشند تعریف نشده‌اند.

مثال ۲۰: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $\frac{1}{x}$

۲) $\frac{4x-2}{7x+3}$

۳) $\frac{8x^2-1}{x^2-5x+6}$

۴) $\frac{7x^3-2x+1}{x^4+2x^3-7x^2-8x+12}$

۵) $\sqrt{x+1}$

۶) $\sqrt{x^2+4x-3}$

۷) $\sqrt{x^3-2x^2+x}$

۸) $\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2+4}}$

۹) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

۱۰) $\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$

مثال ۲۱: اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x^2+ax+b}$ برابر با $D_f=\mathbb{R}-\{2,4\}$ باشد و $g(x)=\sqrt{x^2+(b-a)x-b}$، آنگاه حاصل $D_f\cap D_g$ را بیابید.

هوشنگ ابتهاج:

در بهاری که بر او چشم خزان می‌گرید — به غزل خوانی مرغان چمن حاجت نیست

باسمه تعالی

خلاصه درس ریاضی دهم مدرس: محمد ایزدی (مدرسه ی دکتر حسابی)

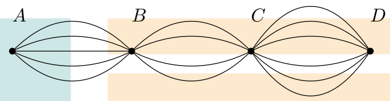
فصل ششم، درس اول، دوم و سوم: شمارش، جایگشت و ترکیب

اصل: اگر کاری شامل k جزء باشد و بخش اول به n_1 طریق و بخش دوم به n_2 طریق و بالاخره بخش آخر به n_k طریق قابل انجام باشد آنگاه کل کار به $n_1 n_2 \cdots n_k$ طریق قابل انجام است (در اینجا باید تمام بخش‌ها مستقل از یکدیگر باشند؛ یعنی هیچ بخشی روی سایر بخش‌ها تأثیری نداشته باشد).

مثال ۱: در شکل زیر، ۵ راه از شهر A به شهر B، ۴ راه از شهر B به شهر C و ۶ راه از شهر C به شهر D وجود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟

ب) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و برگشت به نحوی که هیچ مسیری دوبار تکرار نشود؟



مثال ۲: با حروف a، b، c، d، e و f به چند طریق می‌توان:

الف) یک کلمه‌ی ۴ حرفی ساخت به نحوی که تکرار در آن‌ها مجاز باشد.

ب) یک کلمه‌ی ۴ حرفی ساخت به نحوی که تکرار در آن‌ها مجاز نباشد.

پ) یک کلمه‌ی ۴ حرفی ساخت به نحوی که تکرار در آن‌ها مجاز نباشد و حرف اول آن نیز a باشد.

ت) یک کلمه‌ی ۴ حرفی ساخت به نحوی که تکرار در آن‌ها مجاز نباشد و حروف a و b در اول یا آخر باشند.

مثال ۳: به چند طریق می‌توان به یک آزمون ۱۰ تستی که هر تست ۴ گزینه دارد پاسخ داد به نحوی که:

الف) به هر سوال حتما پاسخ داده شود؟

ب) بتوان به سوالی پاسخ نداد؟

مثال ۴: به کمک اصل ضرب نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با 2^n.

نکته: در رمز و کد تکرار مجاز است مگر آنکه صورت مسئله خلاف آن را قید کرده باشد.

مثال ۵: با حروف $\{a, b, c, d, e, f\}$:

الف) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت که در آن هیچ حرفی تکرار نشده باشد.

پ) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت که با حروف صدادار شروع شود.

ت) چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت که با حروف صدادار شروع شود و تکرار نداشته باشد.

مثال ۶: با مجموعه‌ی {۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷} چند کد چهار رقمی می‌توان نوشت که:

الف) تمام ارقام آن زوج باشد؟

ب) اعداد یکی در میان زوج و فرد باشند؟

پ) رقم آخر شمارنده‌ی ۱۲ باشد؟

ت) عدد اول زوج بیشتر از ۴ باشد و عدد آخر فرد کمتر از ۵ باشد؟

ث) تکرار در رمز مجاز نباشد؟

ج) اگر تکرار مجاز نباشد، حالت‌های الف تا ت را یک‌بار دیگر حل کنید.

مثال ۷: چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

مثال ۸: عدد ۷۲۰۰۰ را در نظر بگیرید.

الف) این عدد چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

ب) این عدد چند مقسوم‌علیه زوج دارد؟

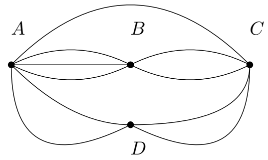
پ) این عدد چند مقسوم‌علیه بخش‌پذیر بر ۶۰ دارد؟

ت) چند مقسوم‌علیه دارد که شمارنده‌ی ۶۰ باشد؟

مثال ۹: اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی و B یک مجموعه‌ی m عضوی باشد، آنگاه چند تابع از A به B می‌توان نوشت؟

اصل: اگر انجام همزمان دو عمل، غیر ممکن باشد (در این صورت آن دو عمل را ناسازگار گوییم) و عمل اول به m طریق و عمل دوم به n طریق انجام پذیر باشد آنگاه عمل اول یا دوم (نه هر دو با هم) را به $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال ۱۰: با توجه به شکل زیر، به چند حالت می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟



مثال ۱۱: به چند طریق می‌توان از مدرسه‌ی دکتر حسابی بین ۵ دانش‌آموز آقای ایزدی، ۶ دانش‌آموز آقای امینیان و ۷ دانش‌آموز آقای آرمان، دو نفر را انتخاب کرد که هر دو از یک گروه نباشند.

مثال ۱۲: یک تاس و دو سکه متفاوت را پرتاب می‌کنیم.

الف) تعداد حالات اینکه سکه‌ها یک‌جور و تاس زوج بیاید، چقدر است؟

ب) تعداد حالات اینکه سکه‌ها یک‌جور یا تاس زوج بیایید، چقدر است؟

مثال ۱۳: با ارقام $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۷۰۰ یا کوچکتر از ۲۰۰ می‌توان نوشت؟

مثال ۱۴: چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت که در آن

الف) دقیقاً یک مرتبه عدد ۳ ظاهر شده باشد.

ب) حداقل یک مرتبه عدد ۳ ظاهر شده باشد.

اصل: به کمک رابطه‌ی $n(U) - n(A') = n(A)$ که در آن U مجموعه‌ی مرجع است، می‌توان بجای آنکه تعداد اعضای مجموعه‌ی A را بیابیم، اعضای متمم آن را در صورت ساده‌تر بودن پیدا می‌کنیم و از طریق رابطه‌ی گفته شده تعداد اعضای مجموعه‌ی A را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۵: تعداد اعداد سه رقمی که عدد دو در آن ظاهر می‌شود را بیابید.

مثال ۱۶: در پرتاب ۳ تاس، چند حالت وجود دارد مجموع ارقام رو شده حداکثر برابر با ۱۶ باشد؟

مثال ۱۷: با ارقام ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت که حداکثر در آن ۳ بار عدد ۲ ظاهر شده باشد؟

تعریف: اگر چند شی متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

مثال ۱۸: با حروف کلمه‌ی $nature$، چند کلمه‌ی متفاوت می‌توان ساخت؟ چند کلمه‌ی متفاوت می‌توان ساخت که به حروف صدادار ختم شود؟

مثال ۱۹: چهار دانش‌آموز دهمی و پنج دانش‌آموز یازدهمی آقای ایزدی به چند حالت می‌توانند در یک صف بایستند به نحوی که

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) دانش‌موزان دهمی همگی کنار هم باشند.

پ) دانش‌موزان دهمی کنار هم و دانش‌آموزان یازدهمی نیز کنار هم باشند.

ت) دانش‌موزان هم‌کلاسی کنار یکدیگر نباشند.

نمادگذاری: تعداد جایگشت‌های k شیء از n شیء متمایز را با نماد $P(n,k)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$P(n,k) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال ۲۰: معادله‌ی $P(n,5) = 12 \times P(n,3)$ را حل کنید.

مثال ۲۱: با حروف کلمه‌ی $complite$ (موارد زیر را به دو طریق جایگشت k شیء از n شیء متمایز و اصل ضرب حل کنید):

الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت که با c شروع شود؟

پ) چند کلمه‌ی هشت حرفی می‌توان نوشت؟

ت) چند کلمه‌ی چهار حرفی می‌توان نوشت که با حروف صدادار شروع شود؟

ث) چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت که در آن حرف o ظاهر نشده باشد ولی حرف c حتما در آن ظاهر شده باشد؟

مثال۲۲: در ساختمانی ۲۰ طبقه یک آسانسور وجود دارد که ۱۰ نفر سوار آن شده‌اند. اگر این آسانسور از طبقه‌ی همکف شروع به حرکت کند، به چند طریق می‌تواند مسافرین را پیاده کند؟

مثال ۲۳: ۴ سرباز و ۱۲ افسر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که هیچ دو افسر کنار نباشند؟

مثال ۲۴: به چند طریق می‌توان ۲ خودکار و ۴ کتاب را بین ۵ نفر توزیع کرد به نحوی که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

مثال ۲۵: با ارقام ۱ تا ۶ چه تعداد عدد ۶ رقمی می‌توان نوشت که هم زوج باشند و هم ارقام فرد کنار هم باشند (بدون تکرار)؟

مثال ۲۶: با اعداد $3, 4, 1, 0, 0, 2, 2, 2$ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

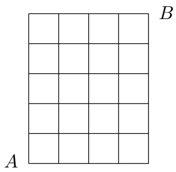
نکته: اگر n شیء داشته باشیم که m_1تای آن‌ها باهم یکسان، m_2تای دیگر با هم یکسان و به همین طریق تا m_k تای آن‌ها یکسان باشند، تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$$

مثال ۲۷: تعداد جایگشت‌های حروف Mississippi را بیابید.

مثال ۲۸: خانواده‌ای دارای ۸ فرزند است که می‌دانیم ۵ فرزند آن‌ها پسر است. تعداد حالات مختلف فرزند آن‌ها از نظر ترتیب تولد، را به دست آورید.

مثال ۲۹: اگر بخواهیم در مشبکه‌ی زیر از A به B برسیم، به نحوی که تنها بتوانیم به سمت راست و بالا حرکت کنیم، به چند طریق امکان‌پذیر است:



نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز دور یک دایره برابر $(n-1)!$ است.

مثال ۳۰: شش نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز قرار بگیرند به طوری که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) سه نفر خاص کنار هم باشند؟

مثال ۳۱: در کنفرانس چند حالت وجود دارد تا ۱۰ مرد و ۱۰ دور یک میز بنشینند به نحوی که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) زن‌ها و مردها یکی در میان نشسته باشند؟

پ) زن‌ها کنار یکدیگر و مردها نیز کنار یکدیگر نشسته باشند؟

نکته: انتخاب k شیء از n شیء متمایز برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

دقت: در انتخاب k شیء از n شیء متمایز، ترتیب هیچ اهمیتی ندارد. در واقع انتخاب k شیء از n شیء با ترتیب، همان جایگشت است.

مثال ۳۲: از بین ۲ دختر و ۵ پسر، می‌خواهیم ۴ نفر برای مسابقات ریاضی انتخاب کنیم. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد به نحوی که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) دو پسر و دو دختر انتخاب شوند؟

مثال ۳۳: از بین ۵ دانش‌آموز دهمی و ۶ دانش‌آموز یازدهمی آقای ایزدی، به چند حالت می‌توان ۴ دانش‌آموز را انتخاب کرده به نحوی که:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) دو دانش‌آموز از کلاس دهم و دو دانش‌آموز از کلاس یازدهم انتخاب شود.

پ) حداکثر یک دانش‌آموز از کلاس دهم انتخاب شود.

ت) حداقل ۱ دانش‌آموز از کلاس دهم انتخاب شود (به دو روش حل کنید).

مثال ۳۴: مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$:

الف) چند زیرمجموعه‌ی پنج عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه‌ی پنج عضوی شامل عدد ۲ و فاقد عدد ۴ باشد؟

پ) چند زیرمجموعه‌ی پنج عضوی دارد که شامل دو عدد اول و ۳ عدد غیر اول باشد؟

ث) چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی وجود دارد که شامل عضو ۱ باشند؟

مثال ۳۵: در یک آپارتمان ۶ زوج زندگی می‌کنند و قرار است یک هیئت مدیره‌ی ۴ نفری متشکل از آن‌ها انتخاب شود. تعداد حالات انتخاب این ۴ نفر چقدر است اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؟

ب) هر خانواده حداکثر یک عضو هیئت مدیره داشته باشد؟

پ) قسمت الف و ب را با این تغییر حل کنید: در این آپارتمان ۷ خانواده‌ی سه نفره زندگی می‌کنند.

مثال ۳۶: در یک همایش، ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آن‌ها فقط یک نفر سخنرانی کند؟

مثال ۳۷: تعداد جایگشت‌های چهار حرفی از حروف کلمه‌ی $SALAMAT$ که دقیقاً دو حرف آن‌ها A باشد، را بیابید.

مثال ۳۸: در یک کیسه چهار توپ سفید، پنج توپ قرمز و هفت توپ آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان:

الف) سه توپ همزمان خارج کرد که دوتای آن‌ها آبی باشد؟

ب) سه توپ را به ترتیب خارج کرد که دوتای آن‌ها آبی باشد؟

پ) سه توپ همزمان خارج کرد و همه‌ی آن‌ها یک رنگ باشند؟

پ) سه توپ را به ترتیب خارج کرد و همه‌ی آن‌ها یک رنگ باشند؟

تمارین درس ۶

۱. چه تعداد عدد کمتر از ۱۰۰۰ موجود است که عدد ۲ در آن‌ها ظاهر نشده باشد؟

۲. به چند طریق می‌توان به یک آزمون تستیِ ۴ گزینه‌ای شامل ۱۰ سوال، پاسخ داد به طوریکه:

الف) به هر سوال حتماً پاسخ داده شود.

ب) بتوان به هر سوال پاسخ نداد.

۳. خانواده‌ای دارای ۷ فرزند است و می‌دانیم ۴ فرزند آن‌ها پسر است. تعداد حالات مختلف فرزندان آن‌ها (از نظر ترتیب تولد) را به دست آورید.

۴. عدد ۷۲۰۰۰ چند مقسوم علیه مثبت دارد؟ با این عدد چند مقسوم علیه بخش‌پذیر بر ۶۰ می‌توان ساخت؟

۵. با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ :

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

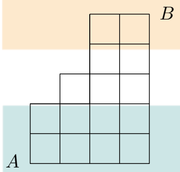
پ) چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟

۶. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند به طوری که هر فرد کنار همسر خود باشد؟

۷. در مشبکه‌ی زیر به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت؟



۸. با ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟ این اعداد چند جایگشت دارند؟

۹. در چند جایگشت از حروف gallery حروف l غیر مجاورند؟

۱۰. به چند طریق می‌توان از بین ۷ نفر که ۲ نفر با هم قهر هستند ۵ نفر را انتخاب نمود به طوری که این دو نفر با هم انتخاب نشوند؟

۱۱. الف) به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به سه گروه ۵ نفره تقسیم کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به سه گروه ۵ نفره تقسیم کرد؟

پ) به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به دو گروه ۶ نفره و یک گروه ۳ نفره تقسیم کرد؟

۱۲. به چند طریق می‌توان ۵ نفر را در چهار اتاق متمایز تقسیم کرد به طوری که هیچ اتاقی خالی نماند.

۱۳. یک n ضلعی محدب، چند قطر دارد؟

۱۴. ۴ کتاب ریاضی غیر یکسان و ۳ کتاب فیزیک غیر یکسان را به چند طریق می‌تواند یک در میان در قفسه چیده شود؟

۱۵. چند عدد فرد بین ۲۰۰۰ تا ۷۰۰۰ وجود دارد که رقم تکراری ندارند؟

سعدی:

نه هر که طرف کله کج نهاد و تند نشست   کلاه‌داری و آیین سروری داند

باسمه تعالی

خلاصه درس ریاضی دهم   مدرس: محمد ایزدی (مدرسه‌ی دکتر حسابی)

فصل هفتم، درس اول: احتمال

تعریف: مجموعه‌ی نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای گوییم.

مثال ۱: الف) خانواده‌ای یک فرزند دارد. فضای نمونه‌ای در این حالت برابر با $A = \{$پسر ,دختر$\}$ است.

ب) خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. فضای نمونه‌ای در این حالت برابر با $A \times A$ است.

پ) پرتاب سکه دارای فضای نمونه‌ای $A = \{$رو ,پشت$\}$ و پرتاب تاس دارای فضای نمونه‌ای $B = \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ است و در نتیجه فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه و یک تاس برابر است با $A \times A \times A \times B$ که تعداد اعضای آن برابر است با ۶×۲^۳.

ت) تعداد اعضای فضای نمونه‌ایِ انتخاب ۲ نفر از ۱۲ نفر برابر است با $\binom{۱۲}{۲}$.

تعریف: فرض کنید S یک فضای نمونه‌ای متناهی است و احتمال وقوع هر یک از اعضای S با یکدیگر باهم برابرند. در این صورت اگر $A \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A برابر است با

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۲: ظرفی شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز است. مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای در این حالت عبارت است از $\{$سفید ,قرمز$\}$ و در این حالت خارج کردن یک مهره از ظرف، یک احتمال هم‌شانس برای خارج شدن مهره‌ی سفید یا قرمز نیست؛ زیرا شانس خارج شدن مهره‌ی سفید دارای احتمال بیشتری است. اما اگر در ظرف دو مهره‌ی سفید و قرمز موجود باشد، این احتمال هم‌شانس است. اگر تمام مهره‌ها را شماره‌گذاری کنیم آنگاه فضای نمونه‌ای به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\{(\text{آبی}, ۳), (\text{آبی}, ۲), (\text{آبی}, ۱), (\text{قرمز}, ۲), (\text{قرمز}, ۱)\}$$

در این صورت فضای نمونه‌ای ما بجای دو عضو غیر هم‌شانس، پنج عضو هم‌شانس دارد.

مثال ۳: دو تاس متفاوت را باهم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه به صورت $S = A \times A$ است که در آن $A = \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ (چرا حالت‌هایی مثل $(۲, ۳)$ و $(۳, ۲)$ را یکسان در نظر نگرفته‌ایم؟) و بنابراین $n(S) = ۳۶$. احتمال زوج آمدن هر دو تاس برابر است با $\frac{۳\times۳}{۳۶}$. احتمال آنکه مجموع اعداد رو زوج باشد برابر است با $\frac{۳\times۳+۳\times۳}{۳۶}$.

مثال ۴: دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. به چه احتمالی جمع اعداد رو شده یک عدد اول خواهد بود؟

مثال ۵: در یک خانواده‌ی چهار فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

مثال ۶: کیسه‌ای شامل ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی سفید است. دو گوی از ظرف به تصادف و همزمان خارج می‌کنیم. احتمال آنکه یک گوی سفید و دیگری مشکی باشد برابر است با

$$\frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}$$

احتمال آنکه هر دو گوی سیاه باشند برابر با $\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}$ است.

مثال ۷: هشت حرف اول انگلیسی را به تصادف کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. احتمال آنکه بین حروف A و B سه حرف قرار بگیرد عبارت است از

$$\frac{۴ \times \left[\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۳!\right] ۲!}{۸!}$$

مثال ۸: در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

مثال ۹: اعداد ۱ تا ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده‌اند. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با چه احتمالی، مجموع اعداد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

مثال ۱۰: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی و پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با چه احتمالی دو مهره با شماره‌ی متوالیاً فرد خارج نمی‌شود.

مثال ۱۱: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی و پی در پی و با جایگذاری خارج می‌کنیم. با چه احتمالی دو مهره با شماره‌ی متوالیاً فرد خارج می‌شود.

قوانین احتمال: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد آنگاه:

۱) $P(A') = 1 - P(A)$

۲) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۳) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

مثال ۱۲: از ظرفی شامل ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه، دو مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یک مهره سفید باشد را به دو طریق می‌توانیم به دست آوریم. راه اول آن است که روش مستقیم را به کار بگیریم که حاصل برابر با $\frac{\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$ است. راه دوم آن است که از قوانین احتمال (قانون دوم) کمک بگیریم یعنی احتمال سیاه آمدن هر دو مهره را محاسبه کنیم که در این صورت احتمال خارج شدن حداقل یک مهره‌ی سفید برابر با $1 - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}$ است.

مثال ۱۳: ده نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. احتمال آنکه حداقل دو نفر از آن‌ها دارای تاریخ تولد یکسان باشند را به کمک احتمال متمم به صورت زیر محاسبه کرده‌ایم.

$$1 - \frac{365 \times 364 \times 364 \times \cdots \times 356}{365^{10}}$$

مثال ۱۴: عددی را به تصادف از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد برابر با $\frac{33}{100}$ و احتمال آنکه بر ۵ بخش‌پذیر باشد برابر با $\frac{20}{100}$ است. احتمال آنکه این عدد بر هر دو عدد ۵ و ۳ بخش‌پذیر باشد برابر با $\frac{16}{100}$ است. در نتیجه احتمال آنکه این عدد بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد را به صورت زیر می‌توانیم به دست آوریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{16}{100}$$

اما احتمال آنکه این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{33}{100} - \frac{16}{100}$$

و در نهایت احتمال آنکه بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

به عنوان تمرین احتمال آنکه این عدد فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش‌پذیر باشد را نیز حساب کنید.

مثال ۱۵: در جعبه‌ای، ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با چه احتمالی این دو مهره همرنگ نیستند؟

مثال ۱۶: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آن‌ها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟

تعریف: اگر دو پیشامد A و B در فضای نمونه‌ای S هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی $A \cap B = \varnothing$ آنگاه این دو پیشامد را ناسازگار و احتمال وقوع یکی از آن‌ها را احتمال ناسازگار می‌نامیم و این احتمال از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال ۱۷: سه تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده یا حداقل ۱۷ است یا دقیقاً ۵ است؟

مثال ۱۸: اگر $P(B') = \frac{۱}{۲}$، $P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$ و $P(A) = \frac{۱}{۳}$ باشد مطلوب است مقادیر $P(A \cup B)$ و $P(A' \cap B')$.

مثال ۱۹: در بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، دو عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این دو عدد نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیرند؟

تمارین درس ۶

۱. حروف mohammad را به تصادف کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. مطلوب است احتمال آنکه هر سه m کنار یکدیگر بیایند.

۲. خانواده‌ی آقای ایزدی دارای ۶ فرزند است. می‌دانیم بزرگ‌ترین فرزند خانواده پسر است. احتمال آنکه خانواده‌ی آقای ایزدی حداقل یک دختر داشته باشد چقدر است (این مسئله را به دو روش مستقیم و احتمال متمم حل کنید).

۳. تاسی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه هر بار کمتر از دفعه‌ی بیاید چقدر است؟

۴. از میان ۱۰ جفت کفش متمایز، ۳ لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه یک جفت کامل داشته باشیم چقدر است؟

۵. ۲۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه‌ی دکتر حسابی علاقه‌مند به والیبال، ۲۵ درصد علاقه‌مند به فوتبال، ۱۳ درصد علاقه‌مند به بسکتبال، ۱۰ درصد علاقه‌مند به والیبال و فوتبال، ۸ درصد علاقه‌مند به والیبال و بسکتبال و ۵ درصد علاقه‌مند به فوتبال و بسکتبال هستند. ۴ درصد نیز به هر سه ورزش علاقه‌مندند. احتمال آنکه فردی از مدرسه‌ی دکتر حسابی انتخاب شود و به هیچ ورزشی علاقه‌مند نباشد چقدر است؟

۶. در یک کیسه ۴ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی سبز وجود دارد. سه مهره را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر سه مهره سبز باشد.

ب) دو مهره سبز و یکی قرمز باشد.

پ) سه مهره هم‌رنگ باشند.

ت) سه مهره همرنگ نباشند.

۷. از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰۰۰\}$ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه این عدد بر ۴ بخش‌پذیر و بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۸. با ارقام ۰ تا ۴ عددی چهار رقمی ساخته‌ایم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) عددی فرد باشد.

ب) دارای ارقام متمایز باشد.

پ) دارای ارقام متمایز و زوج باشد.

۹. اگر $P(A) = \frac{۳}{۸}$، $P(B) = \frac{۱}{۲}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل موارد زیر را بیابید.

$$P(A \cup B) \quad , \quad P(A' \cap B') \quad , \quad P(A - B) \quad , \quad P(A' - B) \quad , \quad P(A' \cup B') \quad P(B - A')$$

۱۰. در یک کنفرانس ۵ مرد و ۵ زن شرکت کرده‌اند و برای ورود به محل برگزاری در یک صف به طور تصادفی ایستاده‌اند. سپس وارد محل کنفرانس شده و به طور تصادفی دور یک میز می‌نشینند.

الف) با چه احتمالی در صف، همه‌ی زن‌ها کنار یکدیگر قرار دارند؟

ب) با چه احتمالی در صف، همه‌ی زن‌ها کنار یکدیگر و مردها نیز کنار یکدیگر قرار دارند؟

پ) دور میز، با چه احتمالی زن‌ها کنار یکدیگر قرار دارند؟

ت) دور میز، با چه احتمالی زن‌ها کنار یکدیگر و مردها نیز کنار یکدیگر قرار دارند؟

سعدی:

نه هر که طرف کله کج نهاد و تند نشست   کلاه‌داری و آیین سروری داند