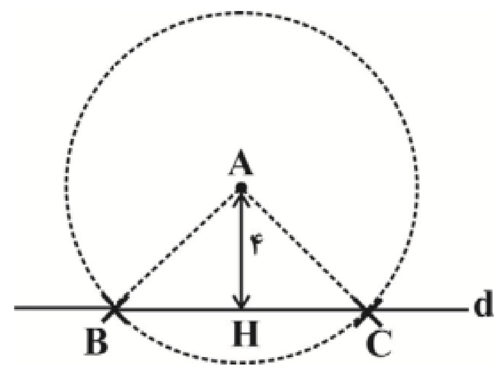
نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر از ـــ d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد. برای یافتن دو رأس مثلث، دایره‌ای به مرکز A و به چه شعاعی بزنیم؟

۱) $۴/۵\,cm$ ۲) $۵\,cm$ ۳) $۶\,cm$ ۴) $۴\sqrt{۲}\,cm$



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BC.AH \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}(BC)(۴)$$

$$\Rightarrow ۱۲ = ۲BC \Rightarrow BC = ۶\,cm$$

$$\Rightarrow BH = HC = ۳\,cm$$

$$A\overset{\Delta}{H}C \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^۲ = AH^۲ + HC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + (۳)^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵\,cm$$

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. اگر O محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع AB و BC باشد، به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای می‌زنیم. این دایره کدام ویژگی را دارد؟

۱) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در چهار نقطه دیگر قطع می‌کند.

۲) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در نقطه دیگری قطع نمی‌کند.

۳) در این دایره مرکز O همواره در خارج از مثلث قرار می‌گیرد.

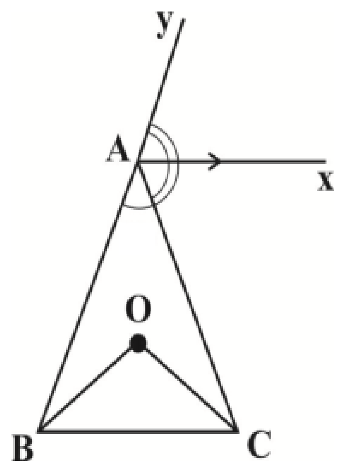
۴) این دایره از هر سه رأس مثلث یعنی A ، B و C عبور می‌کند.

چون محل برخورد عمودمنصف‌ها یکتاست، بنابراین نقطه‌ی O محل برخورد هر سه عمودمنصف است. همچنین اگر O روی عمود منصف AB باشد $OA = OB$ است و نیز O روی عمود منصف BC است پس $OB = OC$ است و همینطور O روی عمود منصف AC است پس $OA = OC$ خواهد بود. بنابراین $OA = OB = OC = r$ می‌باشد، یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA = r$ بزنیم از سه رأس A، B و C عبور می‌کند که اصطلاحاً می‌گوئیم این دایره محیط بر مثلث است.

در ضمن اگر مثلث یک زاویهٔ بیشتر از ۹۰ درجه داشته باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها خارج مثلث است و اگر یک زاویهٔ ۹۰° داشته باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها روی وتر است و اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها داخل مثلث است.

بنابراین گزینه‌ی «۳» نیز غلط است و فقط گزینه‌ی «۴» صحیح می‌باشد.

۱۰- شکل زیر Ax نیم‌ساز زاویهٔ CAy و $BC \parallel Ax$ است. اگر BO و CO نیم‌ساز زوایای B و C باشند و $\hat{B} = ۷۵^\circ$، اندازهٔ $B\hat{O}C$ چند درجه است؟ (Ay در امتداد BA است.)



۱) ۹۵°

۲) ۱۰۰°

۳) ۱۰۵°

۴) ۱۱۰°

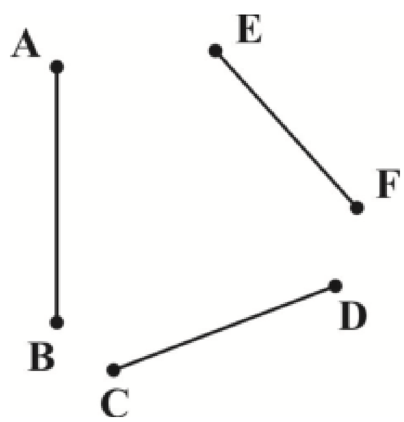
$$C\hat{A}y \text{ نیم‌ساز } Ax \Rightarrow y\hat{A}x = x\hat{A}C$$

از طرفی زاویه‌ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش، پس:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = y\hat{A}C = ۲x\hat{A}C \\ Ax \parallel BC, AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C} = x\hat{A}C \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

$$\hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲}) = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

- در شکل زیر نقطه‌ای وجود دارد که فاصلهٔ آن از **A** و **B** یکسان، از **C** و **D** یکسان و از **E** و **F** نیز یکسان است. چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟



الف) محل برخورد عمودمنصف‌های **AB** و **EF** روی عمودمنصف **CD** قرار دارد.

ب) محل برخورد عمودمنصف‌های سه پاره خط **AB**، **CD** و **EF** از شش نقطهٔ **A**، **B**، **C**، **D**، **E** و **F** به یک فاصله است.

پ) از امتداد سه پاره‌خط **AB**، **CD** و **EF** مثلثی به دست می‌آید که عمودمنصف‌های آن مثلث همان عمودمنصف‌های سه پاره‌خط داده شده است.

۱) ۱　　　۲) ۲　　　۳) ۳　　　۴) هیچ

چون نقطه‌ای وجود دارد که از دو سر پاره خط **AB** به یک فاصله و از دو سر پاره خط **EF** به یک فاصله است پس روی عمودمنصف‌های **AB** و **EF** قرار دارد هم‌چنین از دو سر پاره خط **CD** به یک فاصله است، پس روی عمود منصف **CD** قرار دارد. پس مورد (الف) درست است. اما لزوماً موارد (ب) و (پ) درست نیست.

- نقطهٔ C از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است و روی AB قرار ندارد. آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

۱) وسط پاره‌خط AB روی نیم‌ساز زاویهٔ $A\hat{C}B$ قرار دارد.

۲) وسط پاره‌خط AC از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است.

۳) C روی عمود منصف AB قرار دارد.

۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

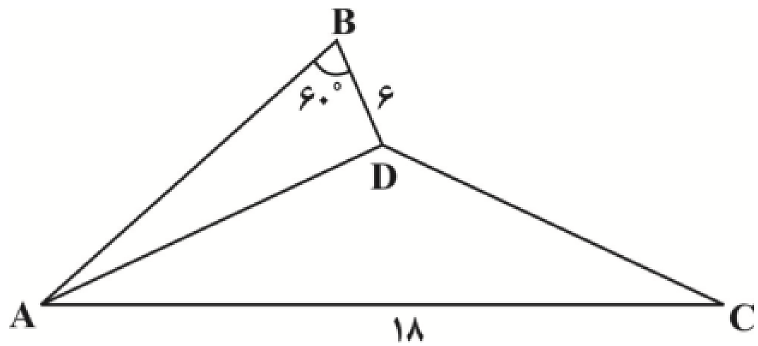
نقطه‌ی C از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، پس باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.

از طرفی چون $AC = BC$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نیم‌ساز زاویهٔ رأس (C) و عمودمنصف بر هم منطبق‌اند.

پس تنها گزینه‌ی «۲» می‌تواند نادرست باشد.

- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A است. مساحت مثلث ACD کدام است؟



۱) $۹\sqrt{۳}$

۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۲۷\sqrt{۳}$

۴) $۶\sqrt{۳}$

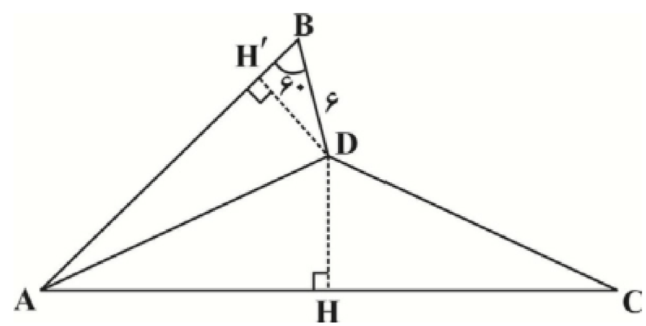
چون D روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان است. از D به هر دو ضلع عمود رسم می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{BDH'} : \sin ۶۰° = \frac{DH'}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{DH'}{۶} \Rightarrow DH' = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow DH = ۳\sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت مثلث ACD برابر می‌شود با:

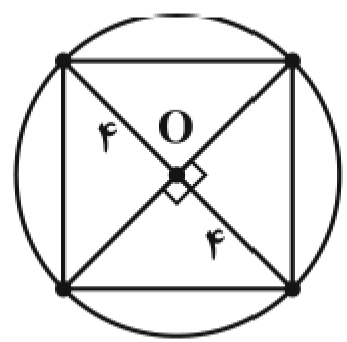
$$S_{\overset{\Delta}{ACD}} = \frac{DH \times AC}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}(۱۸)}{۲} = ۲۷\sqrt{۳}$$



۷- محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

۱) ۸　　　۲) ۴　　　۳) ۲　　　۴) صفر

می‌دانیم در مربع، قطرها عمودمنصف یکدیگرند. حال با توجه به اینکه شعاع دایره دقیقاً برابر نصف قطر مربع است $(\frac{۸}{۲}=۴)$ ، لذا دایرهٔ مذکور، مربع را در رأس‌هایش، یعنی در **۴** نقطه قطع می‌کند.



-اگر فاصلهٔ دو خط موازی d و d' برابر ۶ باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همهٔ نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۲ باشد؟

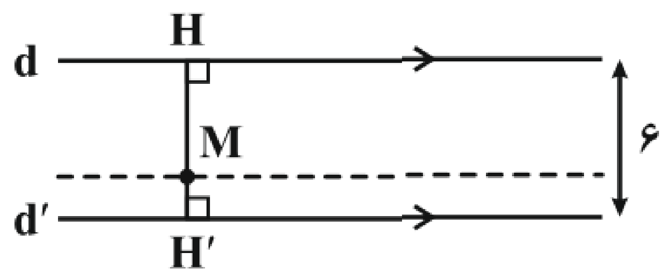
۱) یک خط موازی با d و d' و بین این دو

۲) دو خط موازی با d و d' و بین این دو

۳) دو خط موازی با d و d' و خارج این دو

۴) چهار خط موازی d و d'

با فرض اینکه نقطهٔ M بین دو خط و نزدیک به خط d' باشد، داریم:



$$\begin{matrix} MH + MH' = ۶ \\ MH - MH' = ۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} MH = ۴ \\ MH' = ۲ \end{cases}$$

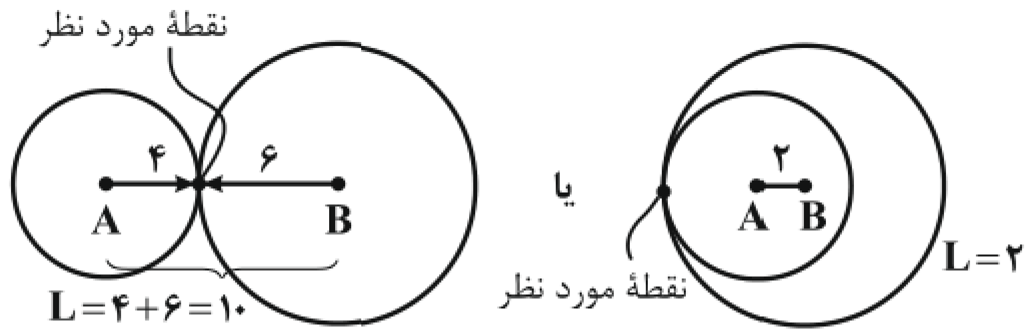
بنابراین نقاطی که روی خطی موازی دو خط d و d' و به فاصلهٔ ۲ از خط d' باشند، ویژگی‌های مسئله را دارا می‌باشند.

مشابه همین حالت برای زمانی رخ می‌دهد که نقطه M بین دو خط و این بار نزدیک خط d باشد.

۷- پاره‌خط AB به طول L مفروض است. اگر با توجه به مقدار L، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۶ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای L کدام است؟

۱) ۶ ‌ ‌ ‌ ۲) ۱۲ ‌ ‌ ‌ ۳) ۱۰ ‌ ‌ ‌ ۴) ۹

در صورتی که L یکی از دو مقدار ۲ یا ۱۰ را داشته باشد، نقطهٔ مورد نظر تنها یک نقطه در صفحه می‌باشد که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۶ است.



پس ۲ یا ۱۰ $= L$ بوده که جمع آن‌ها $۱۲ = ۲ + ۱۰$ است.

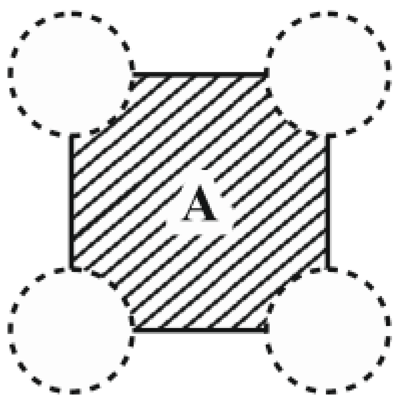
۷-مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A ، ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطهٔ درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، بیشترین مساحت ناحیهٔ A کدام است؟

۱) $۱۶-\pi$

۲) $۱۶-۲\pi$

۳) π

۴) $\frac{\pi}{۴}$

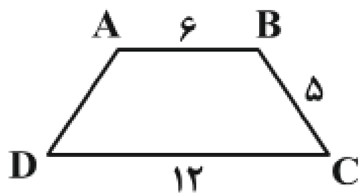


۴ دایره به مرکز رئوس مربع و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. ناحیهٔ A ، ناحیه هاشورخورده مطابق شکل است که برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است از مساحت مربع، ۴ تا مساحت ربع دایره (یا مساحت ۱ دایرهٔ کامل) را حذف کنیم:

$$\text{مساحت ناحیهٔ } A = \text{مساحت مربع} - (۴\times \text{مساحت ربع دایره})$$

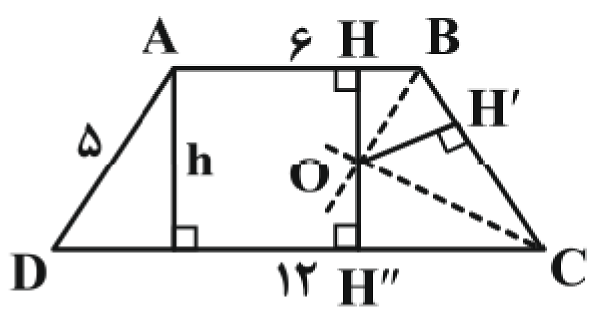
$$=۱۶-۴\times\frac{\pi\times ۱^{۲}}{۴}=۱۶-\pi$$

- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. فاصلهٔ O از ضلع BC کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۲/۵

طبق خاصیت نیمساز داریم:



$$\begin{cases} O \text{ روی نیمساز زاویهٔ } B \text{ است. } : OH = OH' \\ O \text{ روی نیمساز زاویهٔ } C \text{ است. } : OH' = OH'' \end{cases}$$
$$\Rightarrow OH = OH' = OH''$$

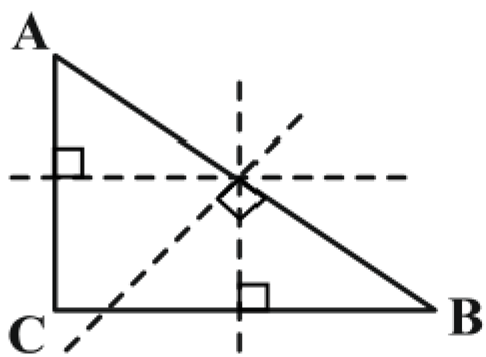
-اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

۱) درون مثلث ۲) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه

۳) بیرون مثلث ۴) روی بزرگ‌ترین ضلع

مجموع زوایای داخلی یک مثلث $۱۸۰°$ است. حال اگر رئوس مثلث را $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰° \\ \widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C} \end{cases} \Rightarrow ۲\widehat{C}=۱۸۰° \Rightarrow \widehat{C}=۹۰°$$



بنابراین $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث دقیقاً در وسط ضلع $\mathbf{AB}$ وتر مثلث (بزرگ‌ترین ضلع مثلث) قرار دارد.

-داخل مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر O مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) قطر دایره برابر ضلع کوچکتر مثلث است.

۲) نقطه‌ی O محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.

۳) قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.

۴) نقطه‌ی O محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.

مرکز دایره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.

$$OH_۱ = OH_۲ = OH_۳ = r$$