

ریاضی ۴ هجرت



# عالی‌جناب ریاضی

فصل اول (تاریخ)

سید امیر میرزوی

ارائه در نامه های فصل به فصل و بیان اشتباهات متداول

  @XY\_Riazi

تمرینات و تستهای آموزشی، تمرین و ارزیابی

سوالات امتحان نهایی، تست های آزمون های بین المللی، کنکور داخل و خارج کشور

VERSION DH 9.8

## مقدمه ای کوتاه

پس از سالها تدریس ریاضی و درس مهندسی عمران و معماری در دانشگاه ، مدارس و آموزشگاه های برتر و شناخت نقاط ضعف و قوت دانش آموزان کنکوری در درس ریاضی، تصمیم گرفتم با تغییر کتاب های درسی جزوه ای کامل و جامع برای دانش آموزان عزیزم گردآوری نمایم. از آنجا که همواره به برابری آموزشی در کشور عزیزمان ایران اعتقاد داشتم مصمم شدم این جزوه را که انشالله به زودی به کتاب تبدیل خواهد شد از طریق فضای مجازی در دسترس تمام دانش آموزان علاقمند کشورم قرار بدهم.

افتخار من تربیت و همراهی شاگردانی با رتبه های برتر کنکور و همچنین دانشجویانی قوی و تملیکر است که همه آنها را اکنون در پست های مدیریتی ، اجرایی مهندسی و پزشکی دوستان خود می دانم. امروز نیز هرکسی از این مکتوب استفاده نماید به گروه بزرگ دوستان من اضافه خواهد شد. شما در انتشار و استفاده از این جزوه آزادی چه با نام و چه بی نام و هیچ عقی بر دوش شما نیست...

تنها در صورتی که هرگونه ابهامی در جزوه مشاهده کردید، به تلگرام یا اینستاگرام شماره زیر پیام داده و آنرا مطرح نمایید و به من کمک کنید هر سال کاملتر از سال قبل باشم...

هرگز فراموش نکنید ترسوها همیشه سیاهپوش آرزوهای خود خواهند بود...

پس برای آرزوهایتان بنگید...

سیدامیر میرمویز

تابستان ۱۳۹۸

Telegram & instageram: @XY\_Riazi

۰۹۱۱-۴۳۲-۲۴۲۲

I ♥ MATH

ریاضی دوازدهم



توابع

تابع:

- توابع چند جمله ای - صعودی

و نزولی

- ترکیب توابع

- توابع وارون



@XY\_Riazi

میرزا ریاضی



**A hero is no  
braver than an  
ordinary man,  
but he is just  
Five Minutes Longer.**



پیرمردی ۹۲ ساله که سر و وضع مرتب داشت در حال انتقال به خانه سالمندان بود. همسرش به تازگی درگذشته بود و او مجبور بود خانمش را ترک کند. پس از چند ساعت انتظار در سرسرای خانه سالمندان، به او گفته شد که آتشی حاضر است. پیرمرد لبخندی بر لب آورد.

همین طور که عشاء زنان به طرف آسانور می‌رفت، به او توضیح دادم که آتشی خیلی کوچک است و به جای پرده، روی پنجره‌هایش کاغذ چباندن شده است. پیرمرد درست مثل پیمای که اسباب‌بازی تازه‌ای به او داده باشند با شوق و اشتیاق فراوان گفت: "خیلی دوستش دارم."

به او گفتم: ولی شما هنوز اتاقتان را ندیده‌اید! چند لحظه صبر کنید اول من می‌روم.

او گفت: به دیدن و ندیدن ربطی ندارد.

شادی چیزی است که من از پیش انتخاب کرده‌ام. این که من اتاق را دوست داشته باشم یا نداشته باشم به مبلغان و دکور بستگی ندارد، بلکه به این بستگی دارد که تصمیم بگیرم چگونه به آن نگاه کنم.

من پیش خورم تصمیم گرفتم که اتاق را دوست داشته باشم. این تصمیمی است که هر روز صبح که از خواب بیدار می‌شوم می‌گیرم.

من دو کار می‌توانم بکنم. یکی این که تمام روز را در رختخواب بمانم و مشکلات قسمت‌های مختلف بدنم که دیگر خوب کار نمی‌کنند را بشمارم، یا آن که از جا برخیزم و به خاطر آن قسمت‌هایی که هنوز درست کار می‌کنند شکرگزار باشم. هر روز، هدیه‌ای است که به من داده می‌شود و من تا وقتی که بتوانم چشمانم را باز کنم، بر روی روز جدید و تمام خاطرات خوشی که در طول زندگی‌ام داشته‌ام تمرکز خواهم کرد.

راهنمایی من به تو این است که هر چه می‌توانی شادی‌های زندگی‌ات را در حساب بانکی حافظات ذخیره کنی تا بتوانی از آن پوله‌ای بازی برای رسیدن به موفقیت و لذت بردن از هر آنچه برای بدست آوردنش جلیده‌ای...



## درس اول: توابع چند جمله‌ای

### تابع درجه سوم:

تابع به شکل  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  یک تابع درجه سوم نامیده می‌شوند. یکی از حالت‌های خاص این تابع  $f(x) = x^3$  می‌باشد. که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد.

**الف)** دامنه و برد آن  $R$  است.

**ب)** نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

**پ)** این تابع یک به یک است.

**نکته ۱:** دامنه همه توابع چند جمله‌ای  $R$  است. اگر درجه آن فرد باشد برد آن نیز  $R$  است.

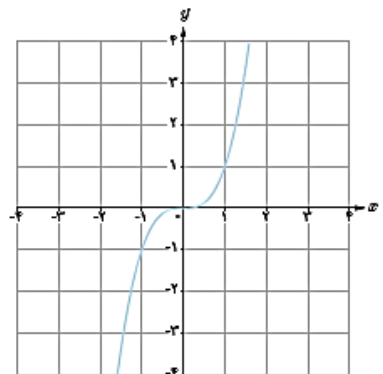
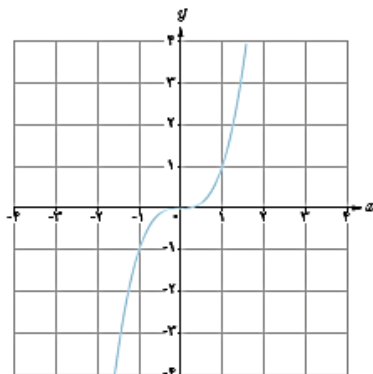
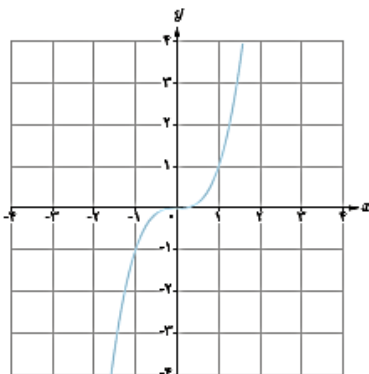
**نکته ۲:** به کمک انتقال می‌توان توابع درجه سوم را رسم نمود.

**مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید (کتاب صفحه ۴)

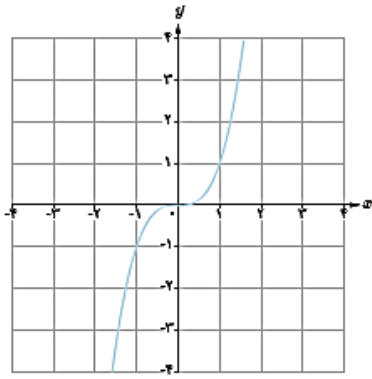
الف)  $y = -x^3 + 1$

ب)  $f(x) = (x + 1)^3 + 2$

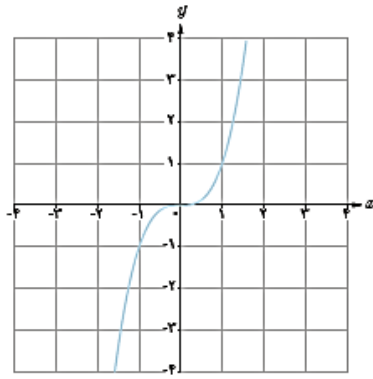
پ)  $y = -(2x + 2)^3 + 1$



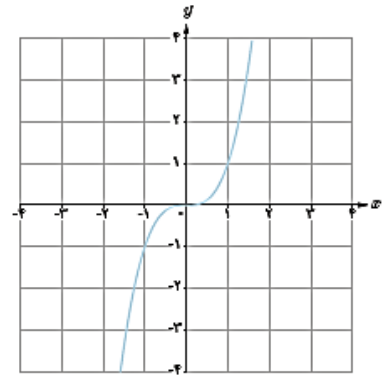
الف)  $f(x) = (-x + 1)^3$



ب)  $f(x) = (-x + 1)^3 - 1$

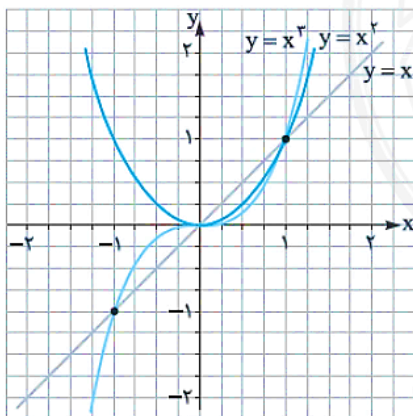


ج)  $y = -(2x + 1)^3 + 1$



**نکته ۳:** اگر پیش از علامت منفی بود ابتدا با  $x$  خالی آنرا رسم کرده و سپس با جاگذاری علامت و یا عدد آنرا تغییر می‌دهیم. (از جمع و تفریق به ضرب می‌رسیم)

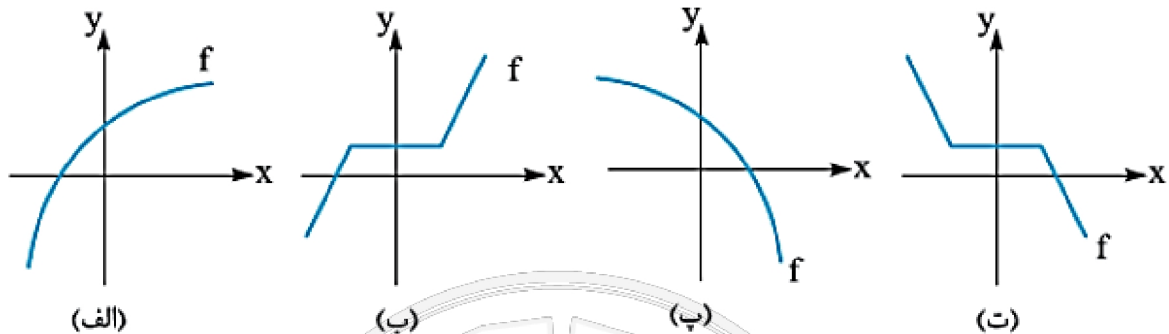
**مثال ۲:** توابع همانی، سهمی و درجه سوم را با هم رسم و مقایسه نمایید. (کتاب صفحه ۴)



میر هوید

## توابع صعودی و نزولی

در سال دوازدهم با شرکت در آزمون های آزمایشی چهار حالت برای شما ممکن است اتفاق بیفتد. هر تابعی در دامنه خود نیز میتواند به یکی از همان چهار حالت باشد:



**(الف) اکیدا صعودی:** شما در هر آزمون جدید به سوی کنتور فقط پیشرفت می کنید و هیچ در پی ترازتان زیاد می شود. در این حالت تراز شما اکیدا صعودی است (چقدر خوبیم ما...).

در بازه ای که تابع  $f$  اکیدا صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست همواره رو به بالا خواهیم رفت.

**(ب) صعودی:** شما در هر آزمون جدید به سوی کنتور در حال پیشرفت هستید. یعنی یا همان تراز قبلی را می آورید یا ترازتان افزایش می یابد یعنی از خودتون دارید جلو میزنید. در این حالت تراز شما صعودی است (شکست نپذیرید).

در بازه ای که تابع  $f$  صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست رو به پایین نخواهیم رفت.

**(پ) اکیدا نزولی:** شما در هر آزمون جدید به سوی کنتور پیشرفت نمیکنید که هیچ. همان تراز قبلی را هم نمی آورید و هیچ در پی ترازتان کم می شود. در این حالت تراز شما اکیدا نزولی است (باید زلزله ایجاد کنید).

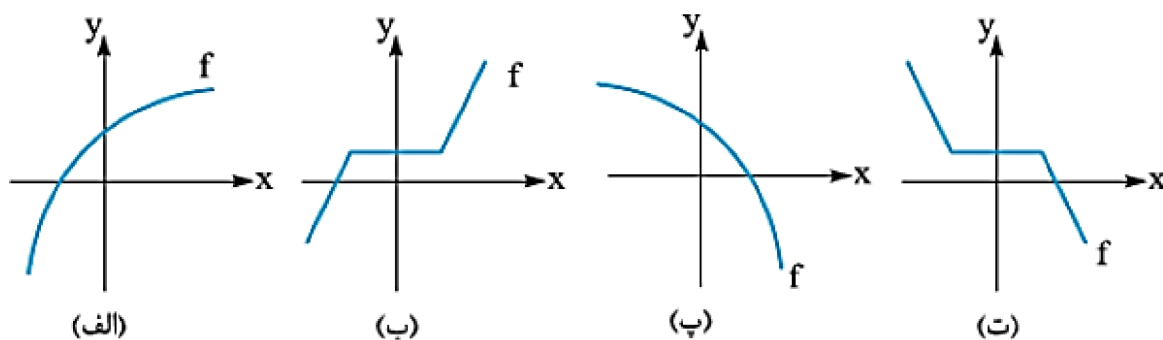
در بازه ای که تابع  $f$  اکیدا نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست همواره رو به پایین خواهیم رفت.

**(ت) نزولی:** شما در هر آزمون جدید به سوی کنتور پیشرفت نمیکنید. یعنی یا همان تراز قبلی را می آورید یا ترازتان کم می شود یعنی ترازتان بالا نمی رود. در این حالت تراز شما نزولی است (باید یکم بچنید).

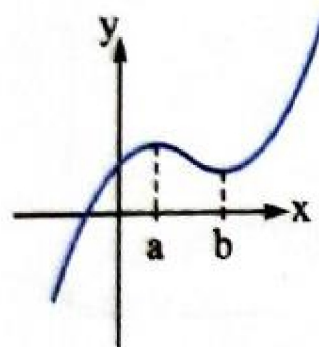
در بازه ای که تابع  $f$  نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست رو به بالا نخواهیم رفت.



**نکته ۴:** اگر تابعی در کل دامنه خود صعودی (آیدای صعودی) یا نزولی (آیدای نزولی) باشد، آنگاه آنرا یکنوا می‌گویند (یعنی در شکل تابع بازگشت نداریم).



**نکته ۵:** اگر تابع  $f$  در کل دامنه خود فقط صعودی یا فقط نزولی نباشد، به آن غیر یکنوا می‌گویند. گاهی با محدود کردن دامنه می‌توان غیر یکنوا را به یکنوا تبدیل کرد. (ترازم کله بالا پایین داشت ولی بعد عید آیدای صعودی بود)

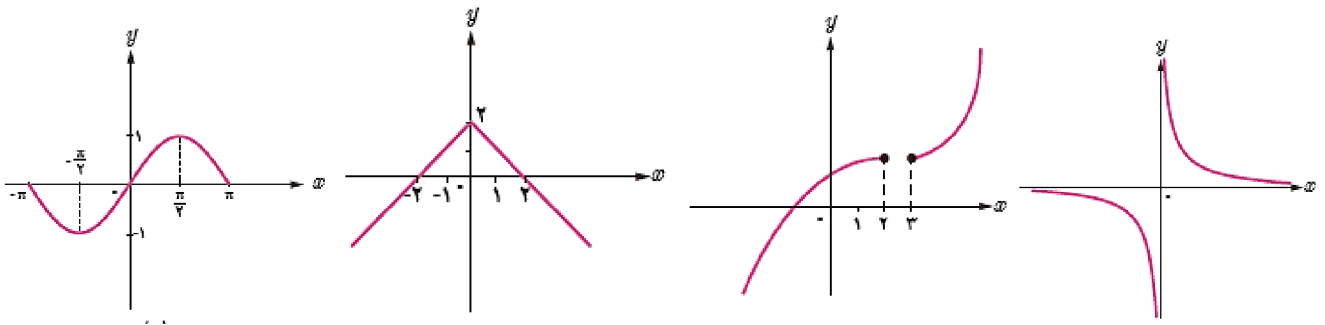


**نکته ۶:** هر تابع آیدای صعودی خود یک تابع صعودی هم محسوب می‌شود (چون بی‌نزولی) و هر تابع آیدای نزولی یک تابع نزولی محسوب می‌گردد (چون بی‌صعوده).

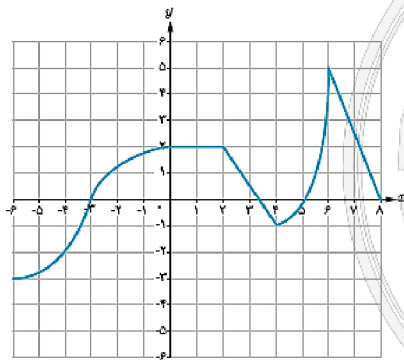
**نکته ۷:** تابع ثابت تابعی است که در دامنه خود همواره یک عدد ثابت بوده، بنابراین هم صعودی و هم نزولی می‌باشد (ترازش خوب باشه خوبه، بد باشه فاشه)

**نکته تستی ۸:** برای تعیین صعودی نزولی بودن تابع یکی از راه‌ها رسم شکل است. راه دیگر تعیین علامت مشتق تابع میباشد که در فصل‌های بعد با آن آشنا خواهیم شد.

**مثال ۳:** هر کدام از توابع زیر در چه بازه هایی آیداً صعودی و در چه بازه هایی آیداً نزولی هستند؟ (کتاب صفحه ۸)



**مثال ۴:** با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی صعودی، نزولی، نزولی آید، یا ثابت است؟ (کتاب صفحه ۱۰)



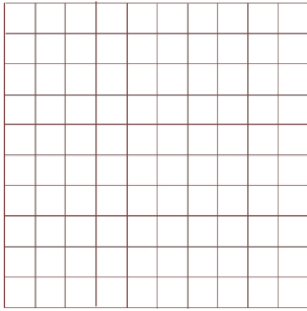
**مثال ۵:** نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی هستند. (کتاب صفحه ۹)

میرمویک

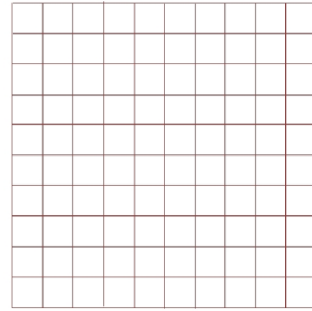
$g(x) = x -  x $	$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), [0, 2\pi]$	$h(x) = -x^3 + 1$

**مثال ۶:** توابع زیر را از نظر صعودی یا نزولی بودن بررسی کنید. (کتاب صفحه ۱۰)

$$f(x) = 2^x - 2$$

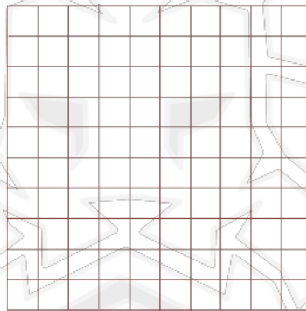


$$f(x) = -\log_2 x + 2$$



**مثال ۷:** نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه های آن را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. (کتاب صفحه ۱۰)

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



**نکته ۹:** تابعی وجود ندارد که آیداً صعودی یا آیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد. بنابراین تمامی توابع یک به یک یکنوا می باشند اما اگر تابعی یک به یک نباشد حتماً آیداً یکنوا نیست.

**مثال ۸:** تابع  $f(x) = x^2|x|$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  چقدر است؟ (کتاب صفحه ۱۰)



**تست ۱:** در بازه  $CI$  که تابع با ضابطه  $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$  آیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع  $g(x) = 2x^2 - x - 10$  در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربین داخل ۹۷)

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴) فاقد نقطه مشترک

**تست ۲:** تابع با ضابطه  $f(x) = |x^3|$  با دامنه  $R$  چگونه است؟ (تجربین خارج ۹۵)

۱ (۱) نزولی ۲ (۲) صعودی

۳ (۳) وارون ناپذیر ۴ (۴) یک به یک

**امتحان نهایی:** درست یا نادرست؟

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود. (ری ۹۷ - ۰۲۵ شماره)

میر مویک



# تست های بخش توابع چند جمله ای صعودی و نزولی

## ریاضی ۳- فصل اول- درس اول

۱ اگر تابع  $f(x) = x^2 - 4x - 1$  در  $[a, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

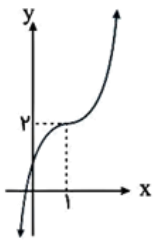
- (۱) ۴
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۴

۲ اگر  $f$  در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه تعریف تابع  $y = \sqrt{f(|x|) - f(2)}$  کدام است؟

- (۱)  $[2, +\infty)$
- (۲)  $[-2, 2]$
- (۳)  $(-\infty, 0]$
- (۴)  $[-3, 2]$

۳ نمودار تابع با ضابطه  $y = (x - a)^3 + b$  به صورت زیر است. حاصل  $a.b$  کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۳
- (۴) -۳



۴ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2x - x|x|$  در بازه  $(-1, 1)$  چگونه است؟

- (۱) ابتدا نزولی، سپس صعودی
- (۲) صعودی
- (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
- (۴) نزولی

۵ تابع  $f(x) = x - [x]$  در کدام بازه صعودی است؟ ([ ] جزء صحیح است)

- (۱)  $(-1, 1)$
- (۲)  $[0, +\infty)$
- (۳)  $\mathbb{R}$
- (۴)  $[-2, -1)$

۶ کدام گزینه در مورد ریشه های معادله  $x^3 = -|x| + 2$  درست است؟

- (۱) فاقد ریشه
- (۲) فقط یک ریشه مثبت
- (۳) فقط یک ریشه منفی
- (۴) دو ریشه مختلف علامه

۷ اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & ; x \geq 0 \\ ax + a + 4 & ; x < 0 \end{cases}$  در تمام دامنه اش نزولی اکید باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\{a \leq 0\}$
- (۲)  $\{-3 \leq a \leq 0\}$
- (۳)  $\{-3 \leq a < 0\}$
- (۴)  $\{a < 0\}$

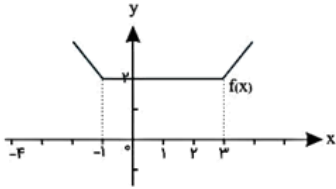
۸ به ازای چند مقدار صحیح  $m$  تابع  $f(x) = \left(\frac{3m+1}{4}\right)^x$  نزولی است؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) هیچ مقدار  $m$

۹ کدام تابع نزولی است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

- (۱)  $y = [x] + [-x]$   
 (۲)  $y = x([x] + [-x])$   
 (۳)  $y = \frac{x}{[x] + [-x]}$   
 (۴)  $y = -\frac{[x] + [-x]}{x}$

۱۰ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، بزرگترین بازه‌ای که تابع  $y = f(2 + |x|)$  در آن صعودی باشد، کدام است؟



- (۱)  $[-2, +\infty)$   
 (۲)  $[1, +\infty)$   
 (۳)  $[-1, +\infty)$   
 (۴)  $[-3, +\infty)$



میرموید



# پاسخبرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

## درس دوم: ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی تابع آشنا شدیم. یعنی می‌توانستیم توابع را جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کنیم. البته با توجه به محاسبه دامنه آنها.

امال با مفهوم ترکیب توابع آشنا می‌شویم. یعنی یک تابع را داخل کاهه  $x$  تابع دیگر بریزیم و هم بریزیم تا ساره شود. ترکیب تابع را با نماد زیر نشان می‌دهند و به این مفهوم است که تابع  $g$  را به جای  $x$  در  $f$  جاگذاری کنیم.

$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$	$g$ داخل $f$ جاگذاری شود ( $g$ توی ریگ $x$ )
$g(f(x)) = (g \circ f)(x)$	$f$ داخل $g$ جاگذاری شود ( $f$ توی ریگ $g$ )

**مثال ۹:** در توابع  $f = \{(1,2), (2,3), (5,6), (-1,3)\}$  و  $g = \{(2,5), (3,3), (6,3), (1,3)\}$  مقادیر  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را بدست آورید (کتاب صفحه ۱۳)

**مثال ۱۰:** در توابع  $f = \{(7,8), (5,3), (9,8), (11,4)\}$  و  $g = \{(5,7), (3,5), (7,9), (9,11)\}$  مقادیر  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را بدست آورید (کتاب صفحه ۲۲)

**مثال ۱۱:** هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع  $h(t) = 2t^2 + 3$  بدست می‌آید. همچنین آلتریک ماده غذایی را با دمای  $2$  درجه سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم. میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع  $f(a) = 30a + 100$  بدست می‌آید (کتاب صفحه ۱۱).

الف) تعداد باکتری‌های موجود در یک ماده غذایی،  $2$  ساعت پس از خروج از یخچال چقدر افزایش یافته است؟  
 ب) ضابطه‌ای بنویسید که با توجه به زمان خارج شدن از یخچال تعداد باکتری‌های افزایش یافته بدست بیاید.

## مقدار عددی ترکیب تابع $(fog)_x$ یا $(gof)_x$

ابتدا عدد را در تابع درونی وارد می‌کنیم و جواب تابع درونی را وارد تابع بیرونی می‌کنیم. یعنی حتما لازم نیست ضابطه تابع را بدست آوریم چون در درس دامنه تابع را هم داریم.

**مثال ۱۲:** در توابع  $f = \{(1,2), (2,3), (5,6), (-1,3)\}$  و  $g = \{(2,5), (3,3), (6,3), (1,-1)\}$  جواب عبارات خواسته شده را محاسبه کنید و مقادیر  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را بدست آورید (کتاب صفحه ۱۳)

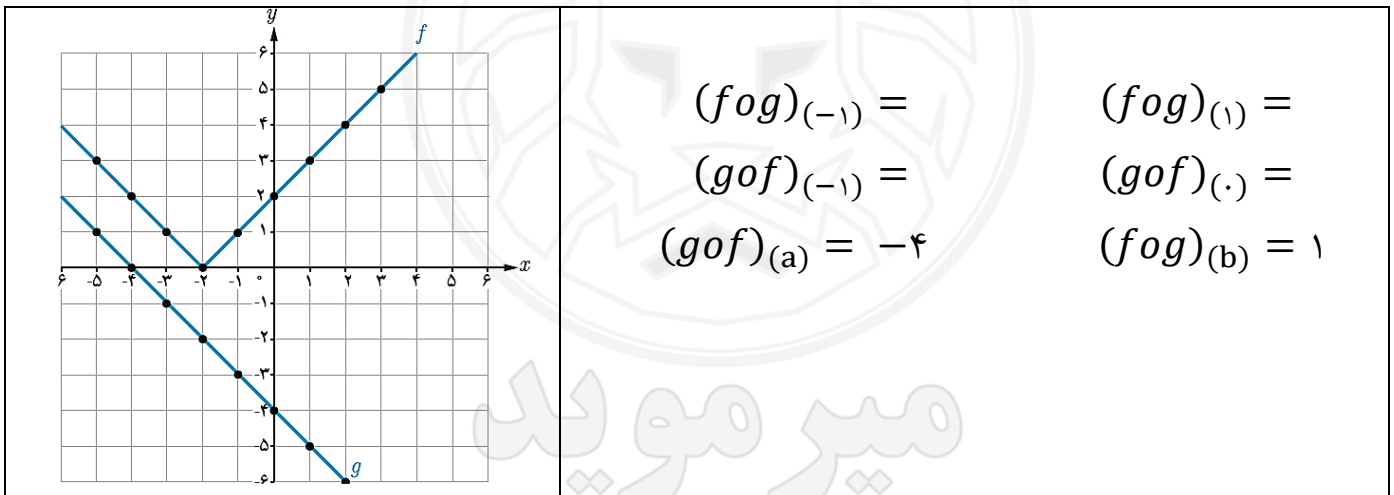
$$(fog)_1 =$$

$$(gof)_1 =$$

$$(fog)_a = 6$$

$$(gof)_b = 3$$

**مثال ۱۳:** با توجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید. (کتاب صفحه ۲۳)



$$(fog)_{(-1)} =$$

$$(fog)_{(1)} =$$

$$(gof)_{(-1)} =$$

$$(gof)_{(0)} =$$

$$(gof)_{(a)} = -4$$

$$(fog)_{(b)} = 1$$

**مثال ۱۴:** جای خالی را پر کنید. (کتاب صفحه ۲۲)

الف) اگر  $f(x) = x^2 - 4$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  باشد مقدار  $(fog)(5)$  برابر ..... است.

ب) اگر  $f(v) = 5$  و  $g(4) = v$  باشد مقدار  $(fog)(4)$  برابر ..... است.

پ) اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = 2x - 1$  و  $(fog)(a) = g(2)$  باشد آنگاه  $a$  برابر ..... است.



**مثال ۱۵:** الفز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مابقه ای برگزار کرده و به بردگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الفز نیز در این مابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الفز است؟ (کتاب صفحه ۲۲)

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

**تست ۳:** اگر خروجی از ماشین شکل زیر  $\frac{4}{3}$  باشد. مقدار ورودی کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۶)

$$\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \rightarrow 2x-2 \rightarrow \text{ورودی}$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{11}{9} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

**تست ۴:** تابع  $f(x) = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$  و  $g(x) = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$  مفروض اند. اگر

$(4,2) \in fog$  و  $(4,1) \in gof$  باشند. روی  $(a,b)$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۰)

$$(4,3) \quad (2)$$

$$(3,4) \quad (1)$$

$$(5,4) \quad (4)$$

$$(4,5) \quad (3)$$

## ضابطه و دامنه ترکیب تابع

برای پیدا کردن  $(f \circ g)x$  اول  $x$  را داخل تابع درونی  $g$  گذاشته و بعد حاصل این جاگذاری (مقدار  $g(x)$ ) را داخل تابع  $f$  میگذاریم. اما  $x$  باید قابل جاگذاری در  $g$  (دامنه  $g$ ) باشد و مقدار تابع  $g$  (قابل جاگذاری در  $f$  (دامنه  $f$ )) باشد. به زبان ریاضی:

$$D_{(f \circ g)} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

بنابراین برای پیدا کردن دامنه تابع مرکب:

**الف) دامنه هر یک را پیدا میکنیم**

**ب) نتیجه هر کدام از قسمت های تعریف را پیدا کرده و اشتراک میگیریم.**

$$D_{(f \circ g)} = \{x \in \text{درونی} \mid \text{بیرونی} \in \text{درونی}\}$$

**مثال ۶:** اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = x^2 - 1$  دامنه و ضابطه تابع  $f \circ g$  را به دست آورید (کتاب صفحه ۱۴)

**مثال ۷:** اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  دامنه و ضابطه تابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست آورید (کتاب صفحه ۱۴)

میر مویک

**هشدار:** دامنه را باید از روی این تعریف بیاییم. پیدا کردن آن از روی ضابطه تابع مرکب ممکن است جواب اشتباه بدهد.

**مثال ۸:** اگر  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{3}{x}$  دامنه و ضابطه تابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست آورید (کتاب صفحه ۱۴)

مثال ۱۹: در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید. (کتاب صفحه ۲۲)

الف)  $f_x = x^2 + 5$        $g_x = \sqrt{x+2}$

$f \circ g =$

$D_{f \circ g}$

ب)  $f_x = \sqrt{3-2x}$        $g_x = \frac{2}{3x-5}$

$f \circ g =$

$D_{f \circ g}$

پ)  $f_x = \sqrt{x+2}$        $g_x = \sqrt{x^2-16}$

$g \circ f =$

$D_{g \circ f}$

د)  $f_x = \sin x$        $g_x = \sqrt{x}$

$g \circ f =$

$D_{g \circ f}$

مثال ۲۰: تابع  $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$  ترکیب کدام دو تابع زیر است؟ (کتاب صفحه ۲۲)

$f(x) = \sqrt[5]{x}$        $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f(x) = x^5$        $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

مثال ۲۱: توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید؟ (کتاب صفحه ۲۲)

$g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

$g(x) = \sqrt{x^2+5}$

امتحان نهایی ۲: جای خالی را پر کنید:

الف) تابع  $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$  به صورت ترکیب دو تابع  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  و  $g(x) = \dots$  است. (دی ۹۷-۱۳۵/نمره)

**تست ۵:** اگر  $f(x) = 2 - |x - 2|$  ضابطه تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

(۱)  $x$

(۲)  $4 - x$

(۳)  $f(x)$

(۴)  $2 - f(x)$

**تست ۶:** اگر  $g(x) = 2x + 1$  و  $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$  باشند، تابع  $f(x)$  برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

(۱)  $2x^2 + 3x + 1$

(۲)  $2x^2 - 2x + 3$

(۳)  $2x^2 - x + 4$

(۴)  $2x^2 + x + 3$

**تست ۷:** اگر  $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه  $f(x)$  برابر کدام است؟ (تجربی داخل ۹۷)

(۱)  $x^2 - x + 3$

(۲)  $x^2 - 2x - 1$

(۳)  $x^2 - 2x + 1$

(۴)  $x^2 - x + 1$

**تست ۸:** اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  و  $g(x) = x + 4$  باشند، جواب معادله  $(f \circ g)x = (g \circ f)x$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۷)

(۱)  $-1, -7$

(۲)  $1, -7$

(۳)  $7, -1$

(۴)  $1, 7$

**تست ۹:** اگر  $f(x) = 2x + 3$  و  $f(x) = 8x^2 + 22x + 20$  باشند، ضابطه تابع  $f \circ g$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)

(۱)  $2x^2 - 7x + 3$

(۲)  $2x^2 - 3x + 7$

(۳)  $4x^2 - 2x + 13$

(۴)  $4x^2 - 4x + 11$

**تست ۱۰:** اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x - x^2}$  باشند، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۶)

(۱)  $[0, 1)$

(۲)  $\{0\}$

(۳)  $(-1, 1)$

(۴)  $R - \{1, -1\}$

**امتحان نهایی ۳:** تابع  $f(x) = \frac{x+3}{2x}$  و  $f(x) = 3x - 1$  را در نظر بگیرید. دامنه  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(رک ۹۷ - انصره)

## معادله با ترکیب توابع $(f \circ g)_x$

در این سوالات گاهی پیدا کردن ضابطه ترکیب تابع سخت است. بنابراین بهتر است در دو گام زیر حل کنیم:

**گام اول:** معادله  $f_x = a$  را حل می‌کنیم

**گام دوم:**  $g_x$  را برابر ریشه‌های بدست آمده از مرحله قبل می‌گذاریم و جواب را بدست آوریم.

**مثال ۲۲:** اگر  $f_x = x - 4$  و  $g_x = 2x$  باشد و عبارت  $(f \circ g)_a = -2$  برقرار باشد، آنگاه مقدار  $a$  چقدر است؟

**مثال ۲۳:** اگر  $f_x = x^2 - 4$  و  $g_x = \sqrt{x^2 - 4}$  باشد و عبارت  $(f \circ g)_a = -3$  برقرار باشد، آنگاه مقدار  $a$  چقدر است؟

**مثال ۲۴:** اگر  $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$  و  $f(x) = 3x - 4$  آنگاه ضابطه تابع  $g(x)$  چقدر است. (کتاب صفحه ۲۲)

**مثال ۲۵:** با توجه به ضابطه‌های توابع  $f$  و  $g$  معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید. (کتاب صفحه ۲۳)

$$\text{الف) } f_x = 2x - 5 \quad g_x = x^2 + 3x - 8$$

$$(f \circ g)(x) = 7$$

$$\text{ب) } f_x = 3x^2 + x - 1 \quad g_x = 1 - 2x$$

$$(g \circ f)(x) = -5$$

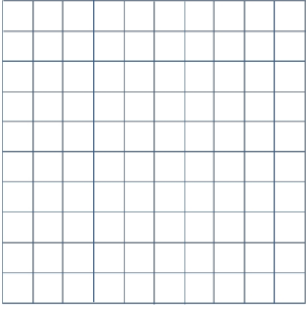
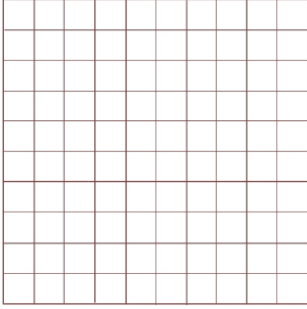
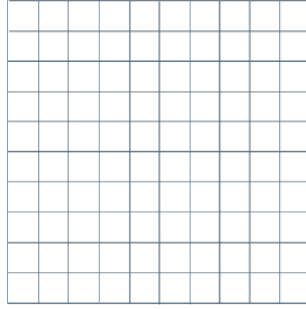


## انتقال تابع

تغییر	تأثیر	تقدیر (نتیجه)	مختصات
$f_x \rightarrow f_{(x+a)}$	محور X	انتقال قرینه علامت a در محور X	$(x - a, y)$
$f_x \rightarrow f_{(kx)}$	محور X	انبساط یا انقباض به اندازه $\frac{1}{k}$ در محور X	$(\frac{x}{k}, y)$
$f_x \rightarrow f_{(-x)}$	محور X نسبت به y	قرینه نسبت به محور y	$(-x, y)$
$f_x \rightarrow f_{(x)} + a$	محور y	انتقال هم علامت a در محور y	$(x, y + a)$
$f_x \rightarrow kf_{(x)}$	محور y	انبساط یا انقباض به اندازه k در محور X	$(x, ky)$
$f_x \rightarrow -f_{(x)}$	محور y نسبت به X	قرینه نسبت به محور X	$(x, -y)$
$f_x \rightarrow  f_{(x)} $	محور y	قسمت زیر محور y قرینه شود به بالا	$(x,  y )$

مثال ۲۶: در شکل زیر نمودار تابع f داده شده است. نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید. (کتاب صفحه ۱۵)

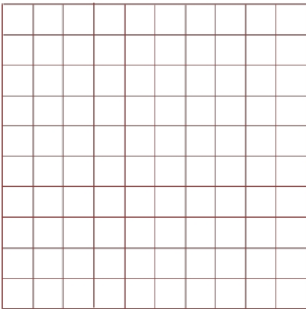
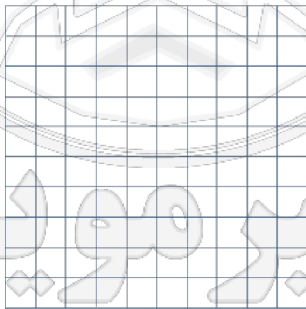
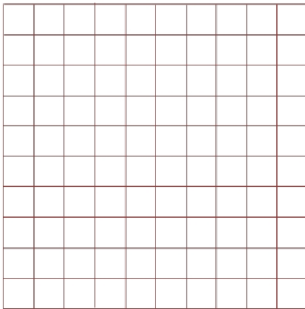
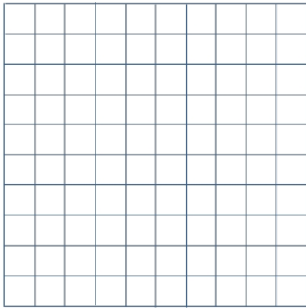
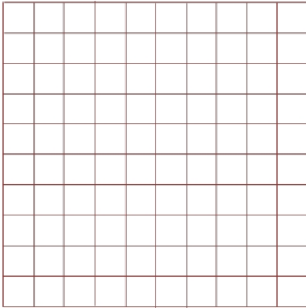
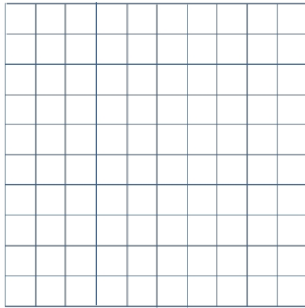
$y = f_x$	$y = f_{(x+2)}$	$y = 2f_x - 3$
$y = -2f_x$	$y = -f_{(-x)}$	$y = f_{(-2x)}$

		
$y = f(2x)$	$y = f(2x+1)$	$y = \left  \frac{1}{2} f(x-1) \right $

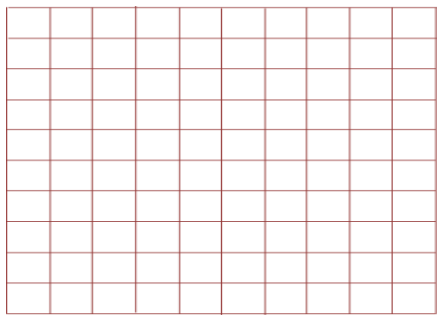
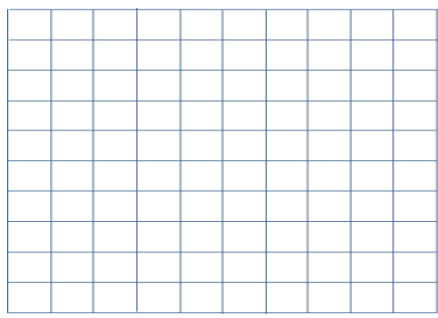
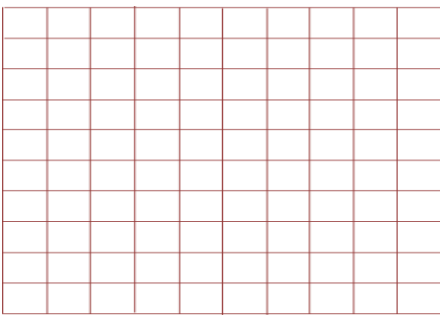
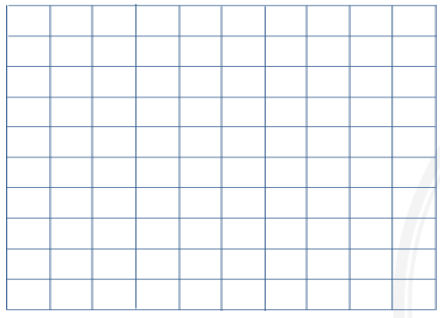
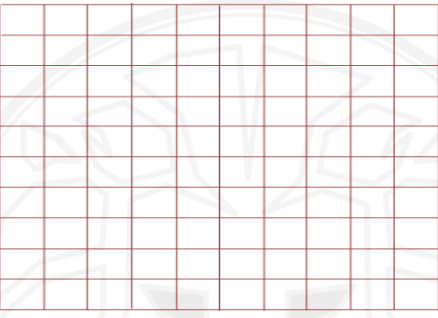
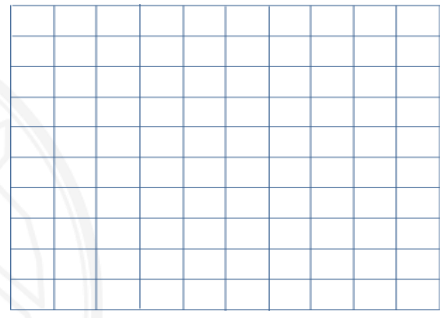
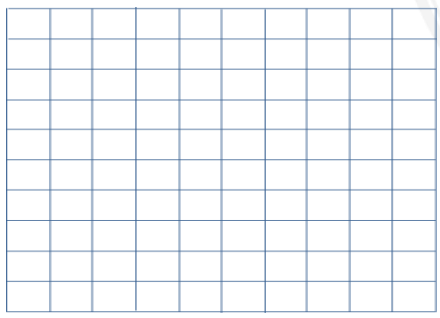
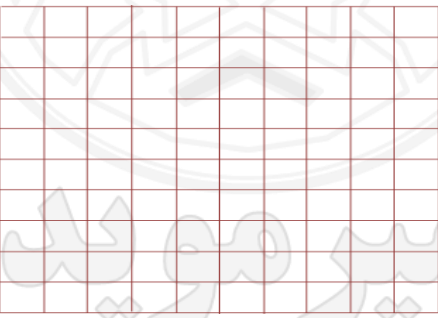

**نکته ۱۰:** محل تلاقی نمودارهایی که  $x$  آنها تغییر نکنند، با هم یکجاست. در مورد دامنه نیز این موضوع وجود دارد و تغییر نمیکنند.

برد توابعی که  $f_x$  دچار تغییر نشود (با چیزی جمع یا ضرب نشود) نیز ثابت میماند.

**مثال ۲۷:** نمودار تابع  $f_x = |x - 2|$  را در بازه  $[-2, 3]$  رسم کنید و با توجه به آن نمودار توابع خواسته شده را رسم نمایید.  
(کتاب صفحه ۱۶)

		
$f_x =  x - 2 $	$f_x = - x - 2 $	$f_x = -\frac{1}{2}  2 - x $
		
$f_x =  2x - 2 $	$f_x =  -x - 2 $	$f_x =  -2x - 2 $

**مثال ۲۸:** نمودار تابع  $f_x = \sin x$  را در بازه  $[0, \pi]$  رسم کنید و با توجه به آن نمودار توابع خواسته شده را رسم نمایید.  
(کتاب صفحه ۱۶)

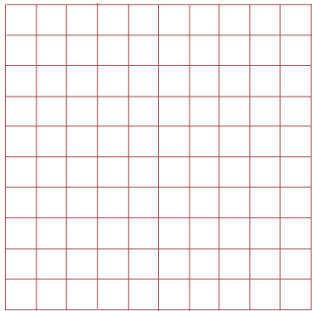
		
$f_x = -\sin x$	$f_x = 2\sin x$	$f_x = \sin 2x$
		
$f_x = \sin(-x)$	$f_x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$f_x =  -2\sin x - 1 $
		
$f_x = 2\sin\left(-\frac{1}{3}x\right)$	$f_x = -\sin(2x - 1)$	$f_x = -\sin 2x - 1$

**مثال ۲۹:** تابع  $f_x$  با دامنه  $[-2, 3]$  مفروض است. دامنه توابع زیر را بدست آورید (کتاب صفحه ۱۸)

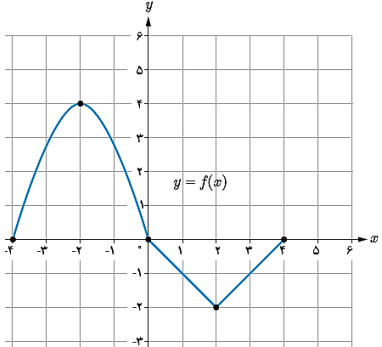
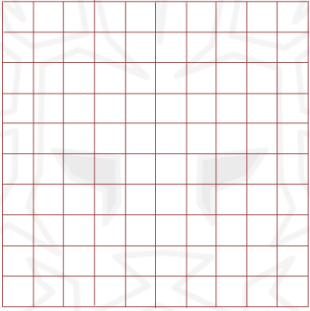
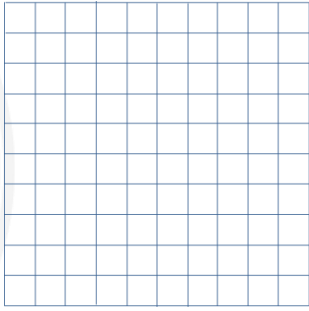
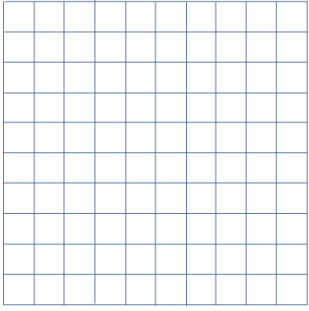
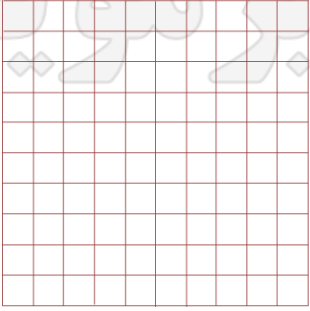
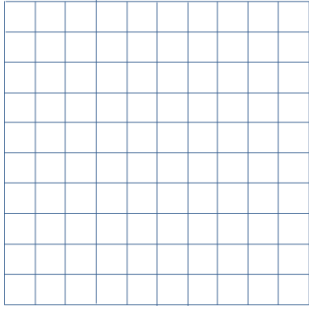
$$f(2x+1) \rightarrow$$

$$f(2x+1) + 1 \rightarrow$$

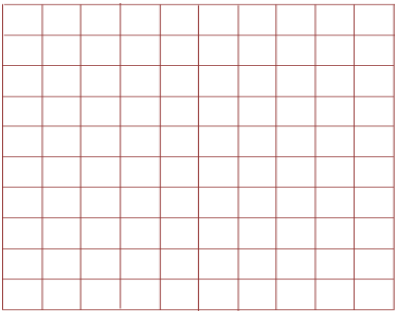
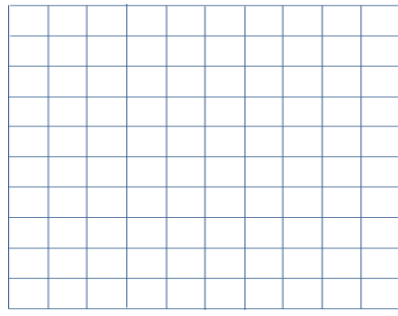
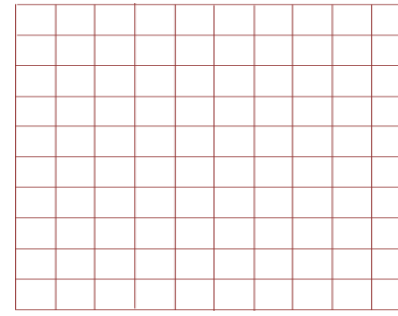
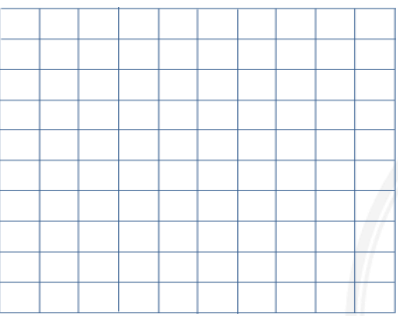
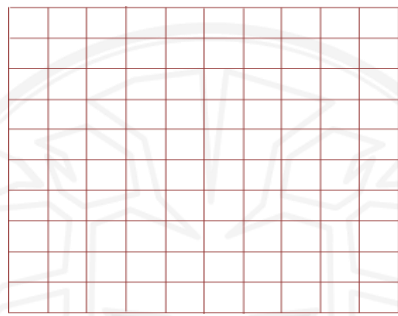
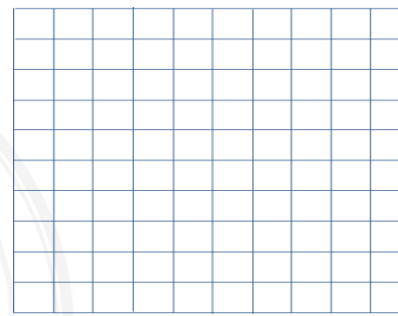
مثال ۳۰: دامنه و برد توابع زیر را بیابید. (کتاب صفحه ۱۹)

$f_x = \sqrt{x}$ $f_x = \sqrt{-x}$ $f_x = -\sqrt{x}$ $f_x = -\sqrt{-x}$	
--	---

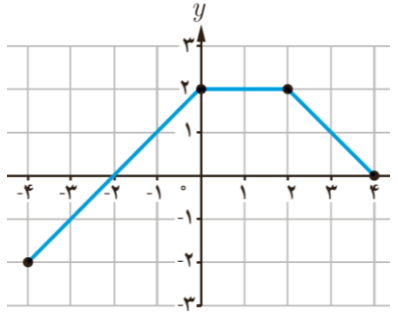
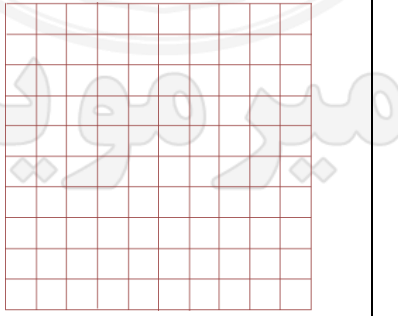
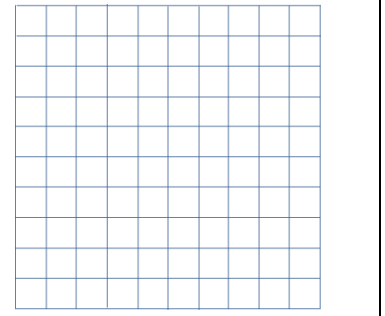
مثال ۳۱: با توجه به تابع شکل  $y = f_x$  سایر توابع را کشیده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید. (کتاب صفحه ۲۰)

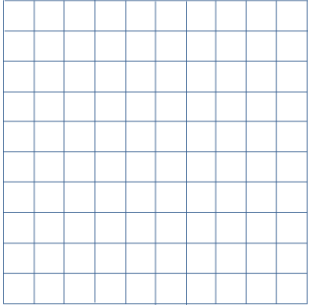
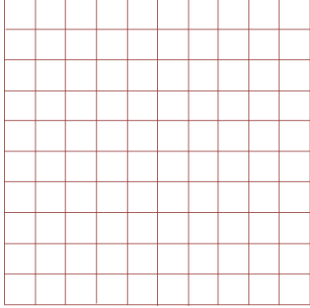
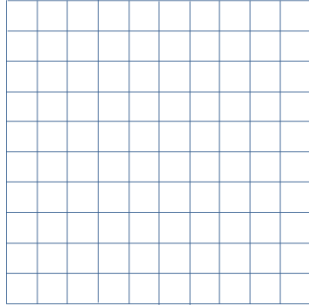
		
$y = f_x$ $D =$ $R =$	$y = f(x+1) - 1$ $D =$ $R =$	$y = -f(-x)$ $D =$ $R =$
		
$y = -2f(x-1)$ $D =$ $R =$	$y = \frac{1}{2}f(x+1) - 1$ $D =$ $R =$	$y = -f(-2x-1)$ $D =$ $R =$

مثال ۳۲: نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید. (کتاب صفحه ۲۳)

		
$f_x = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$	$f_x = 2 \cos(2x)$	$f_x = \sin \frac{1}{2}x$
		
$f_x = -\cos(2x)$	$f_x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$f_x =  -2 \cos x - 1 $

مثال ۳۳: با استفاده از نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

		
$y = f_x$ $D =$ $R =$	$y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$ $D =$ $R =$	$y = -f(-x) + 2$ $D =$ $R =$

		
$y = 2f(x-1) - 3$ $D =$ $R =$	$y = \frac{1}{4}f(x+1) - 1$ $D =$ $R =$	$y = 2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ $D =$ $R =$

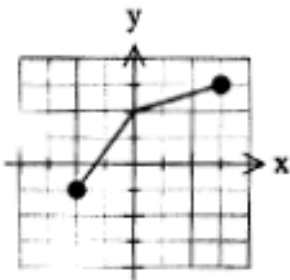
**تست ۱:** قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل، نیمه ناحیه اول و سوم را کدام طول قطع می کند؟ (تجربین خارج ۹۷)

- (۱) -۲  
(۲) ۰/۵  
(۳) ۱  
(۴) ۱/۵

**تست ۲:** مساحت ناحیه محدود به نمودارهای  $y = |x-1|$  و  $y = |x|$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۷)

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲

**امتحان نهایی ۴:** با استفاده از نمودار تابع  $f(x)$  نمودار تابع  $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$  را رسم کنید. (ری ۹۷ - ۰/۱۷۵ نمره)







# تست های بخش ترکیب توابع

## ریاضی ۳- فصل اول- درس دوم

۱ اگر  $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  و  $g(x) = |x|$  حاصل  $f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2}))$  کدام است؟ ( [ ] علامت جزء صحیح است)

- ۱) صفر
- ۲) ۵
- ۳) -۱
- ۴)  $-\frac{1}{2}$

۲ اگر  $y = f(x)$  تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع  $f \circ f(x)$  کدام یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

- ۱)  $y = 3 + x$
- ۲)  $y = x^9$
- ۳)  $y = 4 - x$
- ۴)  $y = 2x - 1$

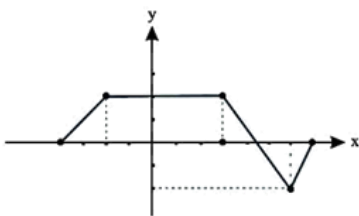
۳ اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  باشد، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- ۱)  $(0, +\infty)$
- ۲)  $[0, +\infty)$
- ۳)  $\mathbb{R}$
- ۴)  $\mathbb{R} - \{0\}$

۴ اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

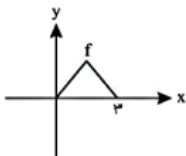
- ۱)  $4(1 - \sqrt{2})$
- ۲)  $4(\sqrt{2} - 1)$
- ۳) ۴
- ۴)  $4\sqrt{2}$

۵ نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر است. دامنه تابع  $y = 2f(2x - 1)$  شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱) ۴
- ۲) ۱۲
- ۳) ۶
- ۴) ۸

۶ اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، نمودار تابع  $y = -f(-x)$  در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد؟



- ۱) اول
- ۲) دوم
- ۳) سوم
- ۴) چهارم

۷ معادله  $|x| + 2|\sin x| = 1$  چند جواب دارد؟

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

باتوجه به ماشین زیر، اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  و  $g$  یک‌به‌یک باشد و داشته باشیم  $g(m) = 2$  مقدار  $m$  کدام است؟

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$$

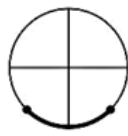
(۱) ۲

(۲) ۲/۵

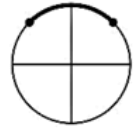
(۳) ۱/۵

(۴) ۱

۹ اگر  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$  باشد، دامنه  $g \circ f$  چه قسمتی از دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد؟



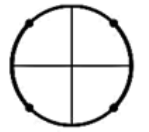
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۱۰ تابع  $f(x) = 3x + 1$  با دامنه  $[0, a]$  مفروض است. حداقل مقدار  $a$  برای اینکه تابع  $f \circ f$  با دامنه غیرتهی قابل تعریف باشد، کدام است؟

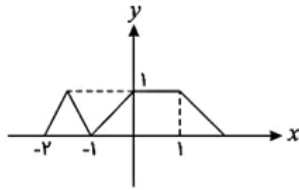
(۲) ۴

(۱) ۱

(۴) ۲

(۳) ۲

۱۱ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، برد تابع  $f \circ f(x)$  کدام است؟



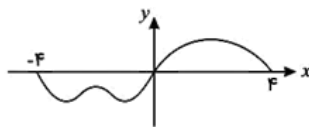
(۱)  $[0, 1]$

(۲)  $[0, 1]$

(۳)  $(0, 1)$

(۴)  $\{1\}$

۱۲ نمودار تابع  $y = f(2x)$  به شکل زیر است. دامنه تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  کدام است؟



(۱)  $[4, 16]$

(۲)  $[0, 64]$

(۳)  $[0, 4]$

(۴)  $[4, 64]$

۱۳ اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  آنگاه در کدام تابع زیر، دامنه و برد برابر نیستند؟

(۲)  $f(x-1) + 1$

(۱)  $f(x+1) - 1$

(۴)  $f(x)$

(۳)  $f(x-2) - 2$

۱۴ سطح محدود به نمودار تابع  $f(x) = ||x| - 2| - 2$  و محور  $x$ ها کدام است؟

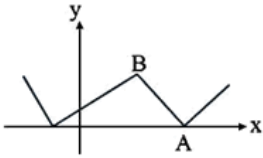
(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) ۱۲

(۳) ۸

۱۵ اگر شکل زیر نمودار تابع  $y = ||x - ۳| - ۴|$  باشد، فاصله دو نقطه A و B کدام است؟



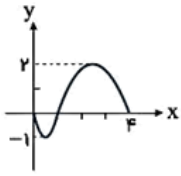
(۱)  $۸\sqrt{۲}$

(۲)  $۲\sqrt{۲}$

(۳)  $۴\sqrt{۲}$

(۴) ۴

۱۶ نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. با فرض  $g(x) = \sqrt{x^2 - ۹}$ ، دامنه تابع  $f \circ g(x)$  شامل چند عدد طبیعی است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۷ تابع با ضابطه  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و  $-\frac{1}{۴}$  قطع کند، آنگاه نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$ ها را با کدام طولها قطع می‌کند؟

(۲)  $\frac{1}{۴}$  و ۹

(۴) ۴ و ۹

(۱)  $\frac{1}{۹}$  و ۴

(۳)  $\frac{1}{۴}$  و ۴

۱۸ اگر  $f$  و  $g$  توابعی چندجمله‌ای باشند طوری که  $(f + g)(x) = ۴$  و  $(f \circ g)(x) = ۷ - ۴x$ ، حاصل جمع مقادیر ممکن برای  $g(۲)$  کدام است؟

(۲) ۳

(۴) -۲

(۱) ۲

(۳) -۳

۱۹ اگر  $f(x + ۳) = x + \frac{۵}{x}$ ، نمودار تابع  $y = ۳ - f(۲x)$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۲) (۲, ۲)

(۴) (۸, -۳)

(۱) (۲, ۵)

(۳) (۴, -۳)

۲۰ معادله  $||x| - ۲| = \sqrt{x - k}$  به ازای مقادیر مختلف  $k$ ، حداکثر چند جواب دارد؟

(۲) ۴

(۴) ۶

(۱) ۳

(۳) ۵

# پس خیرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

# پاسخبرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

## درس سوم: وارون پذیری و تابع وارون

### تعریف تابع وارون

اگر در تابعی مثل  $f_x$  موضعی هر زوج مرتب مثل  $A(a, b)$  را با هم عوض کنیم که بشود  $A'(b, a)$  تابع دگرگونی به وجود می آید که به آن تابع وارون می گویند و با  $f^{-1}(x)$  نشان می دهند.

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

بنابراین در  $f_x$  و  $f^{-1}(x)$  که آنها را وارون هم می نامیم، جای برد و دامنه به صورت زیر با یکدیگر عوض می شود:

$$D_{f^{-1}(x)} = R_{f_x}$$

$$R_{f^{-1}(x)} = D_{f_x}$$

### وارون پذیری یک تابع

تابعی را وارون پذیر یا همان معکوس پذیر می گویند اگر فقط یک به یک باشد یعنی برای هر  $x$  فقط یک  $y$  وجود داشته باشد. می دانیم تابعی که آیداً یکنوا باشد یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر.

**دیکشنری کنکور:** هر جا درستی گفته "تابع آیداً یکنوا" به معنی "یک به یک" و همچنین "وارون پذیر" می باشد

میرموید

**مثال ۳۴:** از توابع  $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$  و  $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$  معکوس تابعی را که وارون پذیر است بیابید و سپس  $f \circ f^{-1}$  را بدست آورید (کتاب صفحه ۲۴)

**تست ۳۳:** دو تابع  $f(x) = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$  و  $g(x) = \frac{x}{x-1}$  مفروض اند. اگر  $f^{-1}(g(2a)) = 6$  باشد،  $a$  کدام است؟ (تجربین داخل ۹۶)

$\frac{3}{4} (2)$	$\frac{1}{2} (1)$
$\frac{5}{2} (4)$	$\frac{3}{2} (3)$



تست ۱۴: اگر  $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = f(3x - 4)$ ، آنگاه حاصل  $g^{-1}(۱۶)$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۹)

۵ (۱)

۷ (۳)

۶ (۲)

۸ (۴)

تست ۱۵: اگر  $f(x) = \{(۱,۲)(۲,۵), (۰,۳)(۴,-۱)\}$  و  $g(x) = \{(۲,۳)(-۱,۴), (۴,۱)(۳,۰)\}$  باشد، تابع  $g \circ f^{-1}$

کدام است؟ (تجزیه داخل ۸۵)

۱ (۱)  $\{(۱,۳)(۰,۰)\}$

۳ (۳)  $\{(۲,۰)(-۱,۴)\}$

۲ (۲)  $\{(۲,۴)(۳,۵)\}$

۴ (۴)  $\{(۵,۳)(-۱,۱)\}$



میر هوید

## نمودار تابع وارون

نقطه  $A(a, b)$  روی تابع  $f(x)$  در این صورت نقطه  $A'(b, a)$  روی تابع معکوس  $f^{-1}(x)$  قرار دارد. میدانیم نقاط  $A$  و  $A'$  قرینه نسبت به نیم‌خط ناحیه اول و سوم  $y = x$  می‌باشند بنابراین:

نمودار تابع معکوس  $f^{-1}(x)$  قرینه نمودار تابع  $f(x)$  به یک به یک نسبت به نیم‌خط ناحیه اول و سوم است، یا به عبارتی برای رسم تابع  $f^{-1}(x)$  آن را نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم.

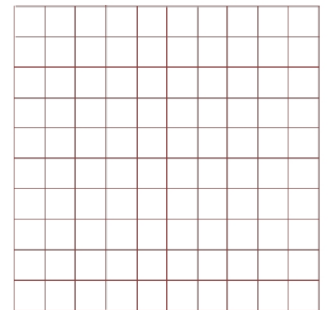
در توابع صعودی برای پیدا کردن محل های برخورد یا تلاقی دو تابع  $f(x)$  و  $f^{-1}(x)$  که یقیناً بر روی خط  $y = x$  می‌باشد، کافیست یکی از آنها را با  $y = x$  تلاقی بدهیم یعنی بنویسیم

$$f(x) = x$$

$$f^{-1}(x) = x$$

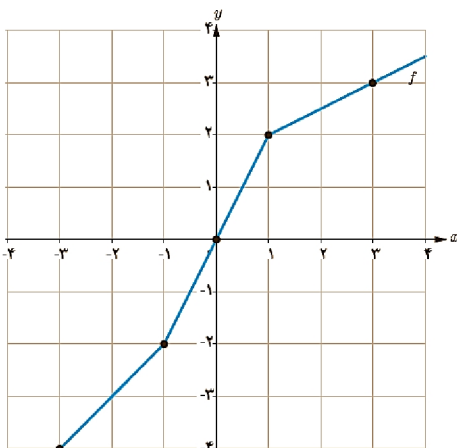
در توابع نزولی ممکن است این نقاط روی این خط قرار نداشته باشند.

**مثال ۳۵:** تابع  $f(x) = (x+1)^3$  را رسم کرده و تعیین نمایید وارون پذیر می‌باشد یا خیر. سپس تابع وارون آن را رسم کرده و ضابطه تابع وارون را بدست آورید. (کتاب صفحه ۲۶)



میر مویک

**مثال ۳۶:** از نمودار تابع  $f$  برای تکمیل جدول استفاده کنید. (کتاب صفحه ۲۹)



$x$	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

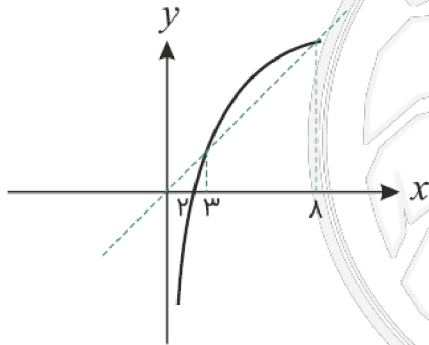
**تست ۱۶:** دو تابع با ضابطه های  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$  مفروض اند. اگر  $g^{-1}(f(a)) = 3$  باشند، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) -۴  
(۲) -۱  
(۳) ۲  
(۴) ۴

**تست ۱۷:** فاصله نقطه برخورد تابع نمایی  $y = 2^x$  با محور  $x$  ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور  $x$  ها کدام است؟ (تجربی داخل ۸۲)

- (۱) ۱  
(۲)  $\sqrt{2}$   
(۳) ۲  
(۴)  $2\sqrt{2}$

**تست ۱۸:** شکل زیر، نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیم ستر ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$  کدام است؟ (تجربی داخل ۹۶)



- (۱)  $[0, 2]$   
(۲)  $[2, 3]$   
(۳)  $[2, 8]$   
(۴)  $[3, 8]$

میر مویک

## یافتن ضابطه تابع وارون

برای یافتن ضابطه وارون یک تابع یک به یک به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

**گام اول:** برد تابع را می‌یابیم

**گام دوم:** جای حروف انگلیسی  $x$  و  $y$  را عوض می‌نماییم

**گام سوم:** با جابجا کردن حروف و اعداد در دو طرف مساوی  $y$  را در سمت چپ تنها می‌کنیم.

**گام چهارم:** به جای  $y$  نماد  $f^{-1}(x)$  قرار می‌دهیم سپس برد تابع  $f(x)$  را به عنوان دامنه تابع معکوس در مقابل آن قرار می‌دهیم.

**نکته ۱۱:** حتما دامنه تابع معکوس را جلوی ضابطه آن بنویسید.

**نکته ۱۲:** وارون تابع خطی با معادله  $y = ax + b$  به وسیله برعکس کردن اعمال ریاضی به سرعت به دست می‌آید.

**مثال ۳۷:** رابطه بین درجه سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت رابطه تابع  $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$  می‌باشد. که در آن  $x$  میزان درجه سانتی‌گراد و  $f(x)$  میزان درجه فارنهایت است. تابع معکوس آنرا بدست آورده و بنویسید چه چیزی را نشان می‌دهد.

## میر مویک

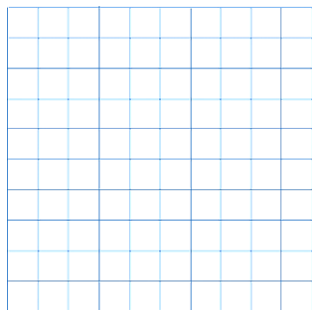
**نکته تستی ۱۳:** در تست‌هایی که ضابطه وارون سوال شده می‌توانیم نقطه یا نقاطی از  $f(x)$  را یافته و با عوض کردن جای طول و عرض و جاگذاری در گزینه‌ها، در صورت برقراری تساوی، جواب درست را انتخاب کنیم. چون اگر نقطه  $A(a, b)$  در تابع  $f_x$  وجود داشته باشد آنگاه نقطه  $A'(b, a)$  در تابع معکوس آن  $f^{-1}(x)$  وجود دارد. یعنی اینکه

$$A(a, b) \in f(x)$$

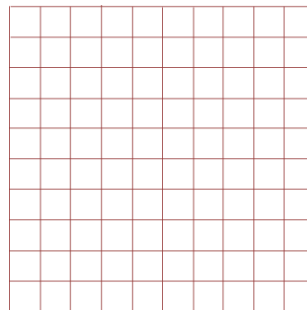
$$A'(b, a) \in f^{-1}(x)$$

**مثال ۳۸:** تابع های زیر را رسم کرده و تعیین نمایید وارن پذیر میباشد یا خیر. سپس تابع وارون آنرا رسم کرده و ضابطه تابع وارون را بدست آورید. (کتاب صفحه ۲۷ و ۲۹)

$$f(x) = \frac{-8x + 3}{2}$$

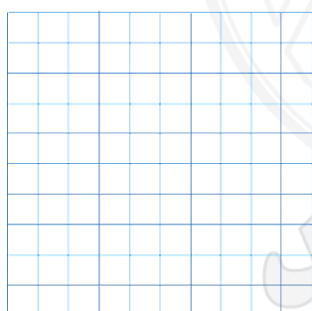


$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

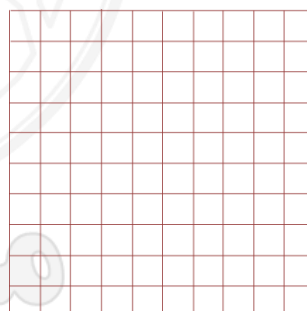


**مثال ۳۹:** ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید. (کتاب صفحه ۲۷)

$$f(x) = x^2 + 1$$



$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$$



**تست ۱۹:** ضابطه معکوس تابع  $y = 2 - \sqrt{x-1}$  به کدام صورت است؟ (تجربی داخل ۹۲)

(۱)  $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$  (۲)  $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$

(۳)  $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$  (۴)  $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

**تست ۲۰:** اگر  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  دقیقاً ضابطه  $f^{-1}(x)$  برابر کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۳)

(۱)  $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x \in R$  (۲)  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right), x \in R$

(۳)  $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 0$  (۴)  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right), x > 0$

**تست ۲۱:** ضابطه وارون تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$  کدام است؟ (تجربی داخل ۹۱)

(۱)  $y = \frac{x}{1+|x|}, |x| < 1$  (۲)  $y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1$

(۳)  $y = \frac{|x|}{|x|-1}, |x| > 1$  (۴)  $y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1$

**تست ۲۲:** ضابطه وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

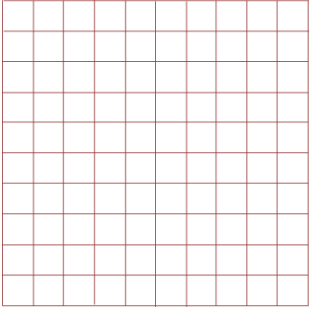
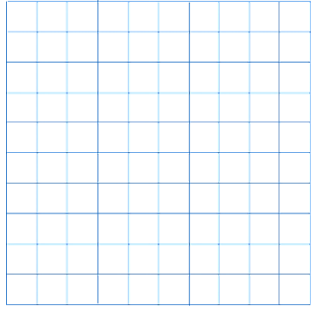
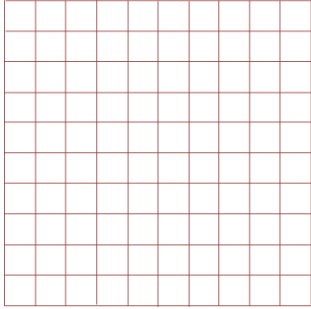
(۱)  $y = x|x|; x \in R$  (۲)  $y = -x^2; x < 0$

(۳)  $y = \pm x^2; x \in R$  (۴)  $y = \pm x|x|; x \in R$

**نکته ۱۱۴:** گاهی توابع در کل دامنه خود وارون پذیر نیستند. با محدود کردن دامنه می توان از آنها تابع یک به یک بسازیم

**مثال ۴۰:** نمودار تابع  $h(x) = x^2 - 2x + 2$  رسم کنید. می توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود

کرد که تابعی یک به یک به دست آید و سپس وارون آن را معاینه کرد. (کتاب صفحه ۲۹ و ۲۸)

$f(x) = -x^2$	$g(x) =  x $	$h(x) = x^2 - 2x + 2$
		



**تست ۲۳:** نمودار تابع  $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$  در یک بازه آیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۴)

(۱)  $-x + 6; x < -4$       (۲)  $-x + 5; x > 2$

(۳)  $-\frac{1}{3}x + 1; -4 < x < 3$       (۴)  $-\frac{1}{4}x + 1; -4 < x < 10$

**تست ۲۴:** تابع با ضابطه  $y = |2x - 6| - |x + 1|$  در یک بازه، صعودی است. ضابطه معکوس آن، در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

(۱)  $-x + 7; x > 8$       (۲)  $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$

(۳)  $x + 7; x > -4$       (۴)  $\frac{1}{2}x - 2; -4 < x < 8$

**تست ۲۵:** تابع با ضابطه  $y = x|x - 2|$  در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟ (تجربی داخل ۹۴)

(۱)  $1 - \sqrt{1+x}; x < 0$       (۲)  $1 - \sqrt{1-x}; x < 1$

(۳)  $1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$       (۴)  $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

میر هوید

## وارون ترکیب توابع

اگر  $f(x)$  تابعی وارون پذیر و  $f^{-1}(x)$  وارون آن باشد آن گاه داریم

$$(f^{-1} \circ f)_x = x$$

$$(f \circ f^{-1})_x = x$$

یعنی آنکه ترکیب هر تابع با تابع وارون خودش همواره یک تابع همانی می شود فقط باید دامنه تابع بر اساس دامنه ترکیب مورد بررسی قرار گیرد.

**نکته ۱۵:** دامنه ترکیب هر تابع با معلوس خودش یعنی  $f^{-1} \circ f$  یا  $f \circ f^{-1}$  همان دامنه تابع درونی است.

$$f^{-1} \circ f \Rightarrow x \in D_f$$

$$f \circ f^{-1} \Rightarrow x \in D_{f^{-1}}$$

**نکته ۱۶:** بنابراین اگر توابعی مثل  $f$  و  $g$  داشته باشیم که دو شرط زیر را داشته باشند، آن دو تابع وارون یکدیگرند.

$$g \circ f \Rightarrow x \in D_f$$

$$f \circ g \Rightarrow x \in D_g$$

**مثال ۴۱:** نشان دهید توابع  $f$  و  $g$  وارون یکدیگرند. (کتاب صفحه ۲۶)

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x + 4}{3}$$

**مثال ۴۲:** نشان دهید توابع  $f$  و  $g$  وارون یکدیگرند. (کتاب صفحه ۲۹)

$$f(x) = -\sqrt{x - 8}$$

$$g(x) = 8 + x^2, x \leq 0$$

نکته ۱۷۸: اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  توابع وارون پذیر باشند روابط زیر در ساده کردن تست ها بسیار کارایی دارد

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ f^{-1} &= (f \circ g)^{-1} & f^{-1} \circ g^{-1} &= (g \circ f)^{-1} \\ f^{-1} \circ g &= (g^{-1} \circ f)^{-1} & f \circ g^{-1} &= (g \circ f^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

مثال ۴۳: اگر  $f(x) = \frac{1}{x} - 3$  و  $g(x) = x^3$  مقدار زیر را به دست آورید. (کتاب صفحه ۲۹)

$$(f \circ g)^{-1}(5) =$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(6) =$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) =$$

امتحان نهایی ۵: اگر  $f(x) = \frac{1}{x} - 3$  و  $g(x) = x^3$  باشد مقدار  $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$  را بدست آورید. (رک ۹۷-

۰/۷۵ نمره)

تست ۲۶: دو تابع با ضابطه های  $f(x) = \{(1,2)(2,3)(4,5)(3,4)\}$  و  $g(x) = \{(2,1)(3,2)(5,4)\}$  مفروض اند. تابع  $g^{-1} \circ f^{-1}$  کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

$$(1) \{(4,4)(2,2)(3,4)\} \quad (2) \{(3,3)(5,5)(4,3)\}$$

$$(3) \{(4,4)(2,2)(1,1)\} \quad (4) \{(5,5)(2,2)(3,3)\}$$

تست ۲۷: اگر  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2$  و  $x > 0$ ، آنگاه ضابطه تابع  $g^{-1} \circ f^{-1}$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۱)

$$(1) x - 1 \quad (2) x + 1$$

$$(3) x^2 - 1 \quad (4) x^2 + 1$$

جمع بندی فصل یک:



میر هوید



# تست های بخش تابع وارون

## ریاضی ۳ - فصل اول - درس سوم

میرموید

۱ به ازای کدام مقادیر  $m$  نمودار تابع معکوس  $f(x) = \frac{x-4}{2x-1}$  از نقطه  $(m+2, m)$  می‌گذرد؟

(۱) هیچ مقدار

(۲) ۱ و ۲

(۳) ۱ و ۲ -

(۴) ۱ و ۲ -

۲ اگر  $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 1 - 3x$  باشد، ضابطه تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-3x^2 + 12x - 14$

(۲)  $x^2 - 6x + 8$

(۳)  $-2x^2 - 5x + 10$

(۴)  $4x^2 - 6x + 3$

۳ اگر تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  با دامنه  $[2, 4]$  را معکوس کنیم، دامنه تابع معکوس کدام است؟

(۱)  $[0, 5]$

(۲)  $[-1, 3]$

(۳)  $[0, 3]$

(۴)  $[-1, 5]$

۴ در تابع خطی  $f$ ، اگر  $f(2) = 5$  و نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  غیرمتقاطع باشند، آنگاه  $f(4)$  برابر کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۵ فاصله نقطه برخورد منحنی  $y = 2x^3 + x + 54$  با معکوس خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱)  $\sqrt{6}$

(۲)  $\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۴)  $3\sqrt{2}$

۶ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4 & ; x \geq 1 \\ 2x - a & ; x < 1 \end{cases}$  می‌تواند یک‌به‌یک باشد؟

(۱) -۷

(۲) -۸

(۳) -۶

(۴) -۴

۷ اگر  $f(x) = \sqrt{4-x} + 2$  و نقاط  $A$  و  $B$  ابتدا و انتهای نمودار تابع  $h(x) = (f \circ f^{-1})(x) + (f^{-1} \circ f)(x)$  باشند، طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{5}$

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۳)  $4\sqrt{5}$

(۴)  $9\sqrt{5}$

۸ اگر  $f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$ ، مساحت محدود بین نمودار  $f \circ f^{-1}(x)$  با محور  $x$ ها و خطوط  $x = 1$  و  $x = 2$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{5}{2}$

(۴)  $\frac{7}{2}$

ضابطه وارون تابع  $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  کدام است؟

- (۱)  $y = \log_2^{-1} \frac{x+1}{x-1}$   
 (۲)  $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$   
 (۳)  $y = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$   
 (۴)  $y = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$

ضابطه وارون تابع  $f(x) = |x|\sqrt{x}$  کدام است؟

- (۱)  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}; x \in \mathbb{R}$   
 (۲)  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}; x \geq 0$   
 (۳)  $f^{-1}(x) = x\sqrt[3]{x}; x \in \mathbb{R}$   
 (۴)  $f^{-1}(x) = x\sqrt[3]{x}; x \geq 0$

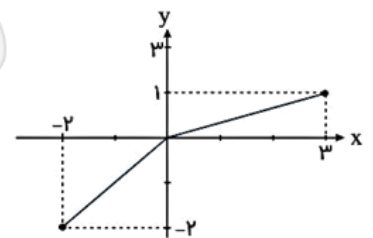
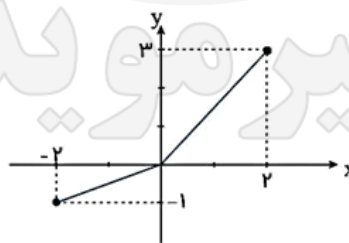
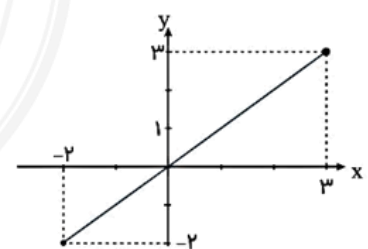
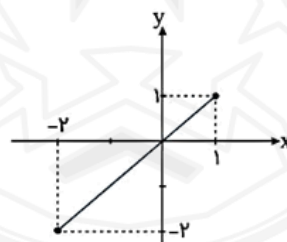
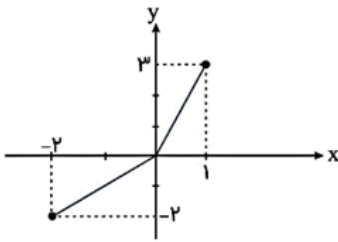
نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$  با دامنه  $\mathbb{R} - \{2\}$  نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -۱ و -۴  
 (۲) ۱ و ۴  
 (۳) -۱ و ۴  
 (۴) ۱ و -۴

اگر به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم:  $(f \circ g)^{-1}(2x - 4) = \frac{x}{2}$  و  $g(x) = 2x^3 + 1$ ، آنگاه نمودار وارون تابع  $f(x)$  محور  $y$ ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  به شکل زیر است. نمودار تابع  $y = (f^{-1} \circ f)(x)$  کدام است؟



ضابطه وارون تابع  $y = x^2 (x < 0)$  کدام است؟

- (۱)  $y = \sqrt{x}$   
 (۲)  $y = -\sqrt{x}$   
 (۳)  $y = \sqrt{-x}$   
 (۴)  $y = -\sqrt{-x}$

ضابطه وارون تابع  $f(x) = x^2 - 6x$  در بازه‌ای که صعودی اکید است، کدام است؟

- (۱)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+9} + 3, x \geq 3$   
 (۲)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+9} + 3, x \geq 3$   
 (۳)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+9} + 3, x \geq -9$   
 (۴)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+9} + 3, x \geq -9$



۱۶ اگر  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$  باشد، برد تابع  $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳ بی‌شمار

۱۷ اگر  $f(x) = 1 - 3g\left(\frac{6}{x}\right)$  و  $g^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(2)$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۱

(۴) ۷

۱۸ اگر داشته باشیم  $f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x$  و  $g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$  و  $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$ ، آنگاه  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۸

۱۹ تابع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$  مفروض است. تابع  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  با کدام یک از انتقال‌های زیر بر تابع  $f^{-1}$  منطبق می‌شود؟

(۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

(۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

(۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

(۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۲۰ تابع  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  را با دامنهٔ محدودشدهٔ  $D_f = (-\infty, 0)$  در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

(۱)  $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x < 3$

(۲)  $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x > 3$

(۳)  $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x < 3$

(۴)  $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x > 3$

میرمویک

# پاسخبرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

# پاسخبرگ تست

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

## مراحل تحصیل پزشکی چگونه است؟

۱. علوم پایه

تو امروز وارد دانشکده شدی. یا ورودی مهر هستی یا پهن ماه. فرق چندانی ندارد. درگیر آن‌ها نشو. شاید پهن بهتر هم باشد. چند ماه وقت داری که به یک سری کارهای دیگر برسی که در دوره دانش آموزی نشده بود.

از امروز که وارد می‌شوی دانشجوی علوم پایه (Basic Sciences) هستی. به طور معمول دروس علوم پایه، ۵ ترم طول می‌کشد. البته با برنامه‌ی جدید وزارت‌خانه قرار هست که به ۴ ترم تقلیل یابد. درس اصلی‌ای حذف نمی‌شود. فقط کمی چاب‌چایی صورت می‌گیرد و کمی از این‌ور و آن‌ور می‌زنند تا بشود آن را در ۴ ترم ارائه داد.

این چهار یا پنج ترم، به این می‌گذرد که تو یک سری مبانی را یاد می‌گیری. ساده بگویم، تو یاد می‌گیری که بدن در حالت طبیعی چگونه کار می‌کند و باکتری و ویروس و قارچ و انگل چی هستند.

تو باید یاد بگیری که حالت طبیعی این سیستم چگونه است تا بتوانی حالت غیرطبیعی آن را درک کنی.

آناتومی، فیزیولوژی، بیوشیمی، متابولیسم، بافت و چین و باکتری و ... که احتمالاً قبل از ورود به پزشکی نیز نام آن‌ها را شنیده‌ای، در این چند ترم تدریس می‌شوند.

در آناتومی به تو شکل ظاهری بدن را توضیح می‌دهند. این که می‌چ از چند استخوان تشکیل شده و هر استخوان آن چگونه خون‌رسانی می‌شود، در آناتومی یاد داده می‌شود. این که مسیر هر عصب در بدن چگونه است، ناحیه‌های مختلف مغز چه هستند، عضلات چشم چند تا هستند و هر کدام چه کار می‌کنند، دستگاه گوارش از چه قسمت‌هایی تشکیل شده است و مواردی از این قبیل، موضوعات آناتومی هستند.

بافت‌شناسی، آناتومی میکروسکوپی است. به زبان ساده، اگر قسمتی از بدن را بگذاریم زیر میکروسکوپ و آن‌چه را که می‌بینیم توصیف کنیم، همان بافت‌شناسی است. حالا که تو دانستی پانکراس قسمتی از دستگاه گوارش است، بهتر است که بدانی از چه سلول‌هایی تشکیل ساخته شده است. شکل این سلول‌ها چگونه است و چطور در کنار هم قرار گرفته‌اند. این مباحث در بافت‌شناسی بحث می‌شوند.

در چنین‌شناسی می‌خوانی که هر قسمت دستگاه گوارش، تنفس، قلب و عروق، عصبی و ... چگونه در طول رشد چنین انسان، شکل گرفته است. از لحظه‌ای که اسپرم و تخمک مخلوط شده، تا زمانی که بچه به دنیا می‌آید، چه اتفاقاتی برای او می‌افتد؟ یادم هست اولین باری که چنین‌شناسی را خواندم، فقط به این فکر می‌کردم که خیلی عجیب است که با وجود این همه بیماری در دوران جنینی، چنان سالم به در بدم.

خودت هم متوجه شدی که تا الان درباره‌ی عملکرد آن‌ها صحبت نکردیم. عملکرد، موضوع فیزیولوژی است. معده‌ی من و تو چگونه اسید تولید می‌کند، چگونه آنزیم می‌سازد و آنزیم چه کار می‌کند، چگونه منقبض می‌شود و با غذا چه کار می‌کند در فیزیولوژی بحث می‌شود. یکی از دروس مورد علاقه‌ام فیزیولوژی است. درس شیرینی است و درک فوق‌العاده‌ای از بدن به تو می‌دهد. بقیه ماجرا رو در انتهای فصل بعد پیگیری کنی

ادامه دارد...