فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)

۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج

۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی مبتکران

۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان مبتکران

۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه

۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه

۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه

۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه

۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل

۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)

۱۱) طراح تست آزمون های مبتکران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان

۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸

Rahim.ghahreman

درسنامه های آموزش ریاضی

وِیژه کنکور تجربی

(دهم،یازدهم ،دوازدهم و جامع)

مولف : رحیم قهرمان

تلفن سفارش: ۰۹۱۲ ۰۷۲ ٦۴ ۴۰

کانال ریاضی اندیشه قهرمان

@andishe_gh

اینستاگرام:

Rahim.ghareman

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه (۱) ترکیب توابع (فصل اول ریاضی دوازدهم ریاضی تجربی‌ها)

دو تابع f و g مفروض اند، در صورتی که $R_g \cap D_f \neq \phi$ باشد آنگاه تابع مرکب $y=(f\circ g)(x)$ یا $y=f(g(x))$ را می‌توان با جایگزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی f تشکیل داد. داریم:

$$x \xrightarrow{\text{در } g} g(x) \xrightarrow{\text{در } f} f(g(x))=f\circ g(x)$$

تست: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴) برای آنکه $g(f(a))=5$ باشد، باید مقدار $f(a)$ یعنی ورودی تابع g برابر با ۶ باشد چون $g(6)=5$ است. برای این منظور ضابطه‌ی تابع f را برابر ۶ قرار می‌دهیم، داریم:

$$f(a)=6 \Rightarrow a+\sqrt{a}=6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2+t-6=0 \xrightarrow{t>0} t=2 \Rightarrow a=4$$

تست: اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$ ، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟

(سراسری تجربی ۹۲)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

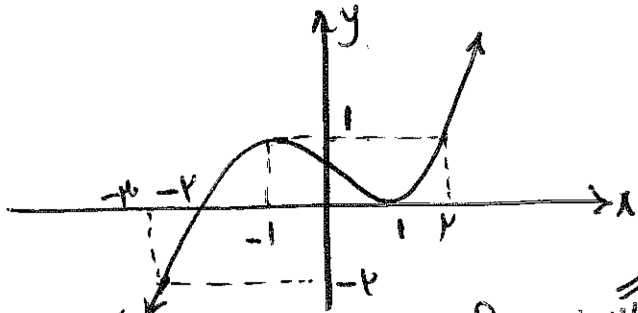
پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^2 \\ g(x)=x+2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^2=(\underbrace{2(x+2)-3}_{2x+1})^2=4x^2+4x+1$$

$$\begin{cases} y_1=f(x)=(2x-3)^2=4x^2-12x+9 \\ y_2=f(g(x))=4x^2+4x+1 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{متقاطع اند}} 4x^2-12x+9=4x^2+4x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر نمودار تابع f بصورت مقابل باشد، معادله‌ی $f(f(x))=0$ چند جواب دارد؟



۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴) با توجه به شکل بدیهی است اگر $f(-2)=f(1)=0$ اگر $f(x)=1$ یا $f(x)=-2$ باشد، آنگاه حاصل $f(f(x))$ برابر صفر می‌شود. حال برای آنکه معادله‌ی $f(x)=1$ یا $f(x)=-2$ را حل کنیم، کافیست ببینیم به ازای چه مقادیری از x (با توجه به شکل) مقدار f برابر ۱ یا ۲- شده است:

$$\begin{cases} f(x)=1 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x=2 \text{ و } x=-1 \\ f(x)=-2 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

معادله‌ی $f(f(x))=0$ دارای سه جواب است.

تست: اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع gof که بالای محور xها قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $(-4,1)$　　۲) $(-4,2)$　　۳) $(-2,1)$　　۴) $(1,4)$

پاسخ: گزینه ۱)

$$\begin{cases} f(x)=x^2+3x \\ g(x)=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=-\frac{1}{2}f(x)+2=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

حال برای تعیین نقاطی که تابع gof بالای محور xها قرار گیرد کافی است تا معادله‌ی $(gof)(x)>0$ را حل کنیم:

$$(gof)(x)>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0 \Rightarrow -4<x<1$$

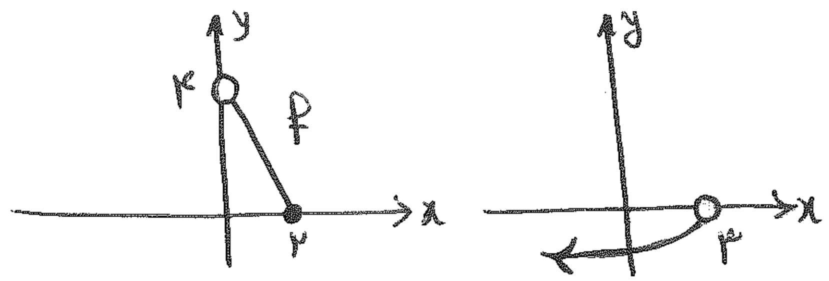
محاسبه دامنه‌ی ترکیب توابع: (درسنامه ۲)

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع مرکب fog دستور زیر را داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست : اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشند، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟



۱) $(0,2]$ ‏ ۲) $(0,2)$

۳) $[\frac{1}{2},2]$ ‏ ۴) $(\frac{1}{2},2]$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) ضابطه‌ی تابع f ، معادله‌ی خطی است که از نقاط $(2,0)$ و $(0,4)$ می‌گذرد. پس $f(x)=-2x+4$. با توجه به نمودارها داریم:

$$D_f=(0,2],\ D_g=(-\infty,3) \Rightarrow D_{gof}=\{x\in(0,2] \mid -2x+4<3\}$$

$$=\{x\in(0,2] \mid x>\frac{1}{2}\}=(\frac{1}{2},2]$$

تست: اگر $f(x)=\sqrt{6+x-x^2}$ و $g(x)=\log(x-1)$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (سنجش تجربی ۹۲)

۱) $[2.01, 101]$ ‏ ۲) $[1.01, 1001]$

۳) $[1.001, 401]$ ‏ ۴) $[2.001, 102]$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) دامنه‌ی تابع fog ، $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ ، ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را می‌یابیم

$$D_f:\ 6+x-x^2\geq 0 \Rightarrow (3-x)(2+x)\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 3 \Rightarrow D_f=[-2,3]$$

$$D_g:\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_g=(1,+\infty)$$

داریم:

$$D_{fog}=\{x\in(1,+\infty) \mid \log(x-1)\in[-2,3]\}$$

حال برای حل نامعادله‌ی $\log(x-1)\in[-2,3]$ یا $-2\leq \log(x-1)\leq 3$ ، با کمک این نکته

نکته: $\log_b a\geq k \xrightarrow[\text{حفظ جهت}]{b>1} a\geq b^k$ به صورت زیر عمل می‌کنیم، داریم:

$-2 \le \log(x-1) \le 3 \xrightarrow[\text{حفظ جهت}]{10>1} 10^{-2} \le x-1 \le 10^{3} \Rightarrow 0/01 \le x-1 \le 1000 \Rightarrow$

$1/01 \le x \le 1001$

در نتیجه:

$$D_{fog} = \{\underbrace{x \in (1,+\infty)}_{\text{اشتراک}} \mid \underbrace{x \in [1/01, 1001]}_{\text{اشتراک}}\} \Rightarrow D_{fog} = [1/01, 1001]$$

تست: اگر $f(x)=2+\frac{x}{2}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ و $h(x)=\sqrt{x}$ باشند دامنه تابع $ho(fxg)$ کدام است؟

۱) $x>1$ ۲) $x\le -4$ ۳) $-4\le x<1$ ۴) $x\le -4$ یا $x>1$

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا دامنه تابع fxg را می‌یابیم:

$$D_{fxg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

حال دامنه تابع $ho(fxg)$ را می‌یابیم:

$$D_{ho(fxg)} = \{x \in D_{fxg} \mid (fxg)(x) \in D_h\} = \{x \neq 1 \mid (fxg)(x) \ge 0\}$$

$$= \{x \neq 1 \mid \frac{4+x}{2x-2} \ge 0\} = \{x \neq 1 \mid x \le -4 \text{ یا } x>1\} = (-\infty,-4] \cup (1,+\infty)$$

محاسبه‌ی $f(x)$ ها (درسنامه‌ی ۳)

۱) مراحل سوالی که $f(u(x))$ داده شده و $f(v(x))$ خواسته شده است، متداول ابتدا با گرفتن $u(x)=t$، x را بر حسب t به دست آورده و با تشکیل $f(t)$، $f(v(x))$ را نیز یافت.

تست: اگر $f\left(\frac{x^2+2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+4 ۲) $x-2$ ۳) x^2-2 ۴) x^2-4

پاسخ گزینه ۴)

$$f\left(\frac{x^2+2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2} \Rightarrow f\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+4-4$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{x+\frac{2}{x}}_{u})=(\underbrace{x+\frac{2}{x}}_{u})^2-4 \Rightarrow f(x)=x^2-4$$

۲) اگر $f(u(x))$ را داشته باشیم، برای یافتن $f(\alpha)$ دو راه داریم:

۱) با حل معادله $u(x)=\alpha$، جواب معادله را در تابع قرار داده و مقدار $f(\alpha)$ را می‌یابیم.

۲) ضابطه f را بر حسب $u(x)$ نوشته و سپس با گرفتن $u(x)=t$، $f(t)$ و سپس $f(\alpha)$ را می‌یابیم.

تست: اگر $f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(2)+f(1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ گزینه ۳) روش اول:

$$\begin{cases}\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=1} f(\sqrt{1})=1+\sqrt{1} \Rightarrow f(1)=2 \\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \xrightarrow{x=4} f(\sqrt{4})=4+\sqrt{4} \Rightarrow f(2)=6\end{cases} \Rightarrow f(1)+f(2)=8$$

روش دوم:

$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\sqrt{x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} f(t)=t^2+t \Rightarrow \begin{cases} f(2)=4+2=6 \\ f(1)=1+1=2\end{cases} \Rightarrow$$

$$f(2)+f(1)=8$$

۳) برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی تابع $g(x)$، با داشتن fog و f، ابتدا یک ضابطه‌ی f را برحسب g تشکیل داده و سپس آن را برابر با ضابطه‌ی fog داده شده قرار می‌دهیم و در نهایت g را بدست می‌آوریم.

تست: اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x))=\frac{g+1}{g-1}$$

$$fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g+1}{g-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow gx^2+g+x^2+1=gx^2+2g-x^2-2$$

$$\Rightarrow g(x)=2x^2+3 \Rightarrow g(1)=2(1)^2+3=5$$

تست: رنگی را در استخری می‌اندازیم. موج‌هایی به شکل دایره‌های هم‌مرکز ایجاد می‌شود. شعاع موج خارجی از رابطه‌ی $r(t)=0/6t$ به دست می‌آید که t زمان (برحسب ثانیه) پس از برخورد رنگ با سطح آب است. مساحت دایره با تابع $A(r)=\pi r^2$ حساب می‌شود. ضابطه‌ی تابع $(Aor)(t)$ کدام است؟

۱) $0/36\pi t^2$ ۲) $0/036\pi t^2$ ۳) $0/6\pi t^2$ ۴) $0/006\pi t^2$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) صحیح است (مثال تمرین کتاب درسی)

$(Aor)(t)=A(r(t))$ و با توجه به $r(t)=0/6t$ و $A(r)=\pi r^2$ می‌توان تابع مرکب $(Aor)(t)$ را محاسبه کرد.

$$(Aor)(t)=\pi(0/6t)^2=0/36\pi t^2$$

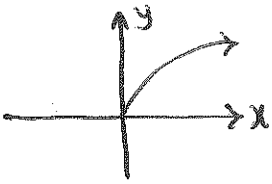
درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

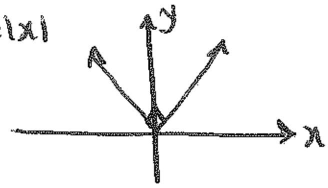
انتقال، انعکاس و انقباض نمودار توابع (درسنامه ۴)

برای رسم نمودار توابع به کمک انتقال، باید نمودارهای توابع زیر را به خاطر بسپاریم:

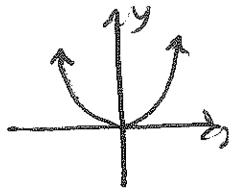
۱) $y=\sqrt{x}$



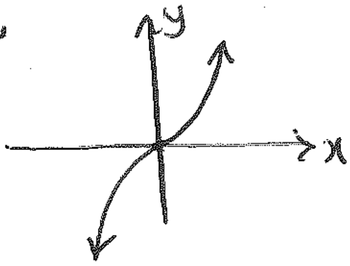
۲) $y=|x|$



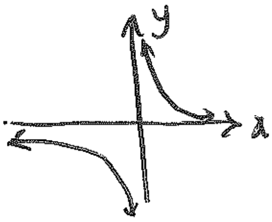
۳) $y=x^2$



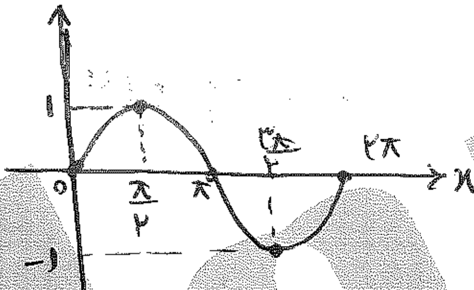
۴) $y=x^3$



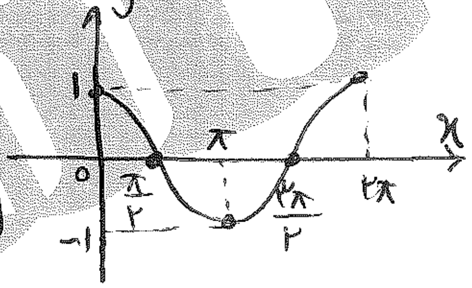
۵) $y=\frac{1}{x}$



۶) $y=\sin x$ ، $x\in[0,2\pi]$



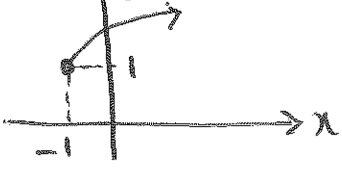
۷) $y=\cos x$ ، $x\in[0,2\pi]$



انتقال در راستای محور xها و محور yها

برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه a به سمت راست و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه a به سمت چپ منتقل می‌کنیم. همچنین برای رسم نمودار $f(x)+a$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه a به بالا و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه a به پایین منتقل می‌کنیم.

تست: نمودار روبه‌رو بیانگر تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ می‌باشد. اگر $f(c)=3$ باشد مقدار abc کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۳

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ تمرین ۴) نمودار داده شده مربوط به تابع $y=\sqrt{x+1}+1$ می‌باشد (چون نمودار $\sqrt{x}$ یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل شده است) در نتیجه داریم که $a=1$ و $b=1$

$$f(x)=\sqrt{x+1}+1 \xrightarrow{f(c)=3} \sqrt{c+1}+1=3 \Rightarrow \sqrt{c+1}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} c+1=4 \Rightarrow c=3$$

کشش و فشار عمودی

نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌شود. اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود سپس با ضریب $|k|$ در جهت عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

تست: با کدام تبدیلات بر روی تابع $g(x)=2\cos x$ تابع $f(x)=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$ حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور xها و سه واحد انتقال قائم به پایین

۲) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور xها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۳) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور yها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۴) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور xها و سه واحد انتقال قائم به بالا

پاسخ تمرین ۲)

$$y=2\cos x \xrightarrow{\text{انتقال } \frac{\pi}{3} \text{ در جهت مثبت محور xها}} y=2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}$$

$$y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{سه واحد در جهت مثبت محور yها}} y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$$

تست: اگر $f(x)=\sin x$ باشد، خروجی ماشین مقابل کدام است؟

$\sin x \rightarrow$ $\boxed{\text{بازتاب نسبت به محور xها}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{انبساط عمودی با ضریب ۳}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ واحد انتقال به بالا}}$ $\rightarrow$ خروجی

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**
مولف:رحیم قهرمان

۱) $y=\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ۲) $y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$ ۳) $y=-\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ۴) $y=3\sin x-\frac{\pi}{4}$

پاسخ گزینه ۲)

$y=\sin x \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{بازتاب نسبت به}} y=\sin(-x)=-\sin x \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۳}} y=-3\sin x$

$\xrightarrow{\frac{\pi}{4}\text{ واحد انتقال به بالا}} y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$

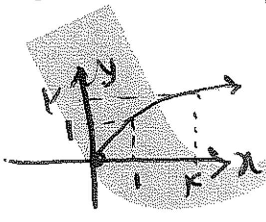
کشش وفشار افقی

نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ بدست می‌آید: اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها بدست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

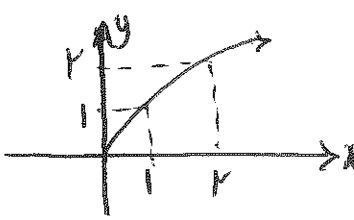
مثال: نمودار تابع $y=1+\sqrt{6-2x}$ شبیه کدام است؟

پاسخ گزینه ۳)

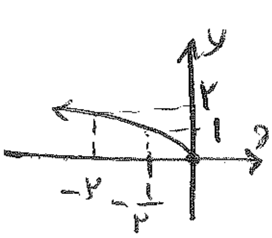
$y=1+\sqrt{6-2x}=1+\sqrt{-2x+6}=1+\sqrt{-2(x-3)}$



$y=\sqrt{x}$ $\xrightarrow{\text{طول نقاط } \frac{1}{2}x}$

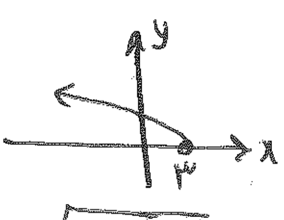


$y=\sqrt{2x}$ $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$

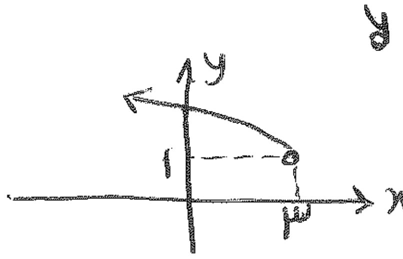


$y=\sqrt{-2x}$

$\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}$



$y=\sqrt{-2(x-3)}$ $\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}$



$y=1+\sqrt{-2(x-3)}$

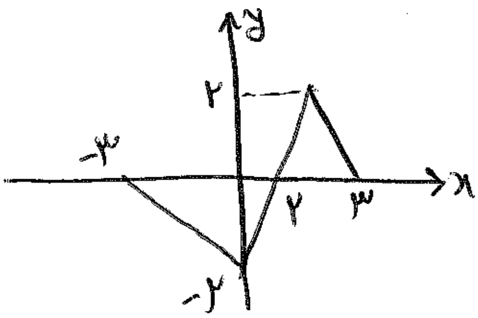
درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

تست: نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل است، دامنه تابع $\sqrt{-f(-\frac{x}{3})}$ کدام است؟

۱) $[-6,9]$ ۲) $[-\frac{3}{2},2]$

۳) $[-6,\frac{3}{2}]$ ۴) $[-6,3]$



پاسخ: گزینه (۱) با توجه به رادیکال تا منفی نباشد عبارت زیر رادیکال $-f(-\frac{x}{3})$ وجود دارد، رادیکال است، حالت‌هایی از نمودار $f(-\frac{x}{3})$ را در نظر بگیریم که عرض آن‌ها منفی یا صفر باشد، در نمودار تابع f در $[-3,2]$ عرض منفی یا صفر است که این بازه در $f(-\frac{x}{3})$ منبسط شده و $[-6,9]$ تبدیل می‌شود.

توضیح:

$$-3 \le -\frac{x}{3} \le 2 \xrightarrow{\times(3)} -9 \le -x \le 6 \xrightarrow{\times(-1)} -6 \le x \le 9$$

رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی که نمودار تابع $y=f(x)$ زیر محور xها قرار دارد، قرینه آن‌ها را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

تست: طول خط شکسته تابع $y=\sqrt{x^2-2|x|+1}$ در بازه $[-1,3]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

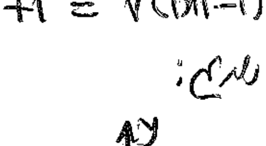
پاسخ: گزینه (۳)

$$y=\sqrt{x^2-2|x|+1} \xrightarrow{|x|^2=x^2} \sqrt{|x|^2-2|x|+1}=\sqrt{(|x|-1)^2}=||x|-1|$$

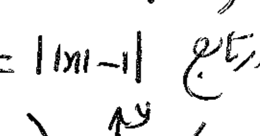
نمودار تابع $y=||x|-1|$ را رسم می‌کنیم، داریم:

$y=|x|$

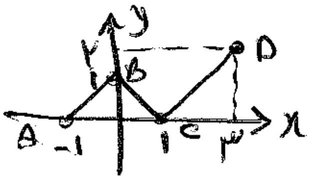
$\Rightarrow y=|x|-1$



$\Rightarrow y=||x|-1|$



پس نمودار تابع داده شده در بازه $[-1,3]$ به صورت زیر است:



$$AB+BC+CD=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

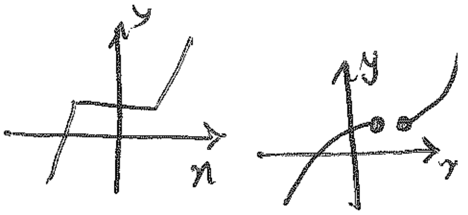
درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف: رحیم قهرمان

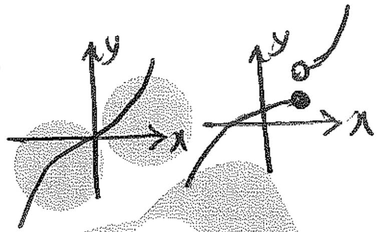
درسنامه (۵) توابع یکنوا و اکیداً یکنوا

تابع حقیقی f را در نظر بگیرید. اگر x_1 و x_2 اعضای D_f باشند، تعاریف چهارگانه زیر را می‌توان نوشت:

1) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ f را یک تابع صعودی گویند (با افزایش x ها، y ها کاهش نمی‌یابند)

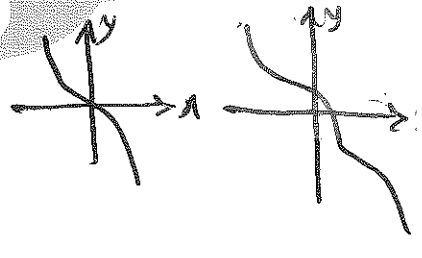


2) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ f را تابع اکیداً صعودی گویند (با افزایش x ها، y ها افزایش می‌یابند).



3) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ f را تابع نزولی گویند (با افزایش x ها، y ها افزایش نمی‌یابند).

4) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ f را یک تابع اکیداً نزولی گویند (با افزایش x ها، y ها کاهش می‌یابند).



تست: تابع $f=\{(3,a^2-4),(-2,1),(b+1,a-1),(3,a+2),(-2,-b)\}$ اکیداً صعودی است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱) برای تابع بودن لازم است زوج مرتب‌های $(-2,1)$ و $(-2,-b)$ یکسان باشند. همین طور زوج مرتب‌های $(3,a+2)$ و $(3,a^2-4)$ پس داریم:

$$\begin{cases} -b=1 \Rightarrow b=-1 \\ a^2-4=a+2 \Rightarrow a^2-a-6=0 \Rightarrow a=-2,3 \end{cases}$$

مولف:رحیم قهرمان

حال دو حالت ایجاد شده را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a=2,\ b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,2),(2,5)\} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ a=-2,\ b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,-3),(2,0)\} \Rightarrow \text{غیر یکنوا} \end{cases}$$

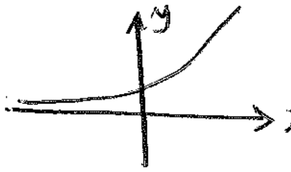
پس $a=2$ و $b=-1$ جواب صحیح هستند.

تست: کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=5^x$ ۲) $y=-x^3$ ۳) $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$ ۴) $y=\sqrt{x-2}$

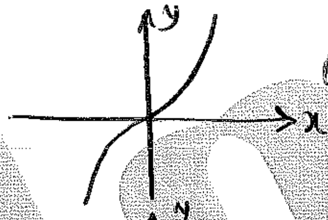
پاسخ: گزینه ۲؛ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $y=5^x$

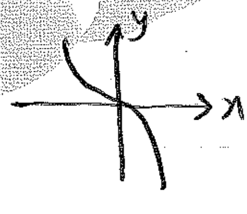


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۲): $y=x^3$



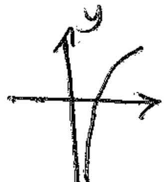
$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y=-x^3$



$\Rightarrow$ تابع نزولی

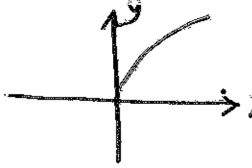
گزینه (۳): $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

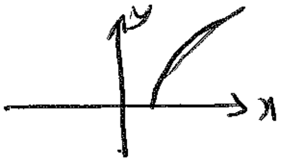


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۴): $y=\sqrt{x}$



$\xrightarrow[\text{راست}]{\text{دو واحد به سمت}} y=\sqrt{x-2}$



$\Rightarrow$ تابع صعودی

تست: کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} -x^2 & ; x<0 \\ x^2-1 & ; x\geq 1 \end{cases}$ صادق است؟

۱) تابع f روی D_f صعودی است.

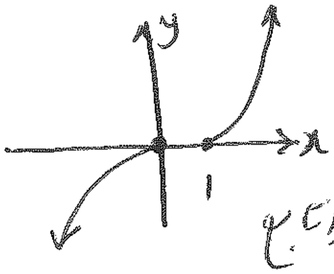
۲) تابع f روی D_f نزولی است.

۳) تابع f روی D_f اکیداً صعودی است.

۴) تابع f روی D_f اکیداً نزولی است.

پاسخ: گزینه (۱) تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; x\le 0\\ x^2-1 & ; x\ge 1\end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع f، با افزایش مقادیر x، y نیز افزایش می‌یابد. لذا تابع f در دامنه‌ی تعریف خود همواره صعودی است، چون $f(0)=f(1)=0$ پس تابع صعودی است نه اکیداً صعودی.

نکات

۱) اگر f بر دامنه‌اش صعودی (یا فقط نزولی) باشد، f را تابعی یکنوا گوییم.

۲) اگر f بر دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی (یا فقط اکیداً نزولی) باشد، f را اکیداً یکنوا می‌گویند.

۳) هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم هست ولی عکس مطلب لزوماً صحیح نمی‌باشد.

۴) توابع ثابت $f(x)=k$ $(x\in\mathbb{R})$ هم در تعریف تابع صعودی و هم در تعریف تابع نزولی صدق می‌کنند.

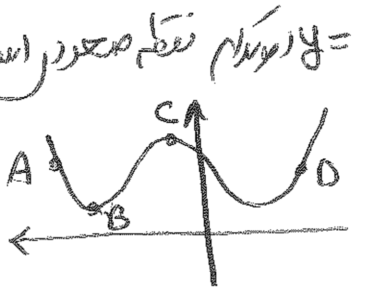
۵) در منحنی تابع اکیداً یکنوا هیچ دو نقطه‌ای هم عرض نباید وجود داشته باشد. این مطلب می‌تواند کمک مناسبی برای تشخیص تابع اکیداً یکنوا از روی منحنی باشد.

۶) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد، آنگاه $-f$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۷) اگر تابع f صعودی (نزولی) و همواره مثبت یا همواره منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۸) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد آنگاه برای nهای فرد f^n ، $\sqrt[n]{f}$ صعودی (نزولی) خواهد بود.

تست: منحنی تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو است. تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در کدام نقطه صعودی است؟

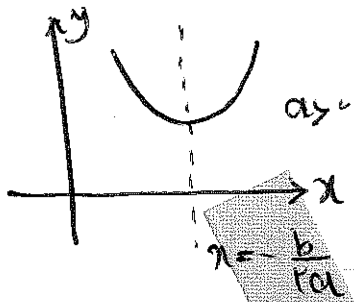


۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

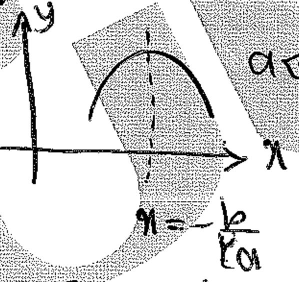
پاسخ تست ۱۵) اگر f روی مجموعه A صعودی و مثبت باشد، آنگاه $\frac{1}{f}$ روی A نزولی و مثبت است. به همین ترتیب این مطلب در مورد نزولی یا نزولی اکید برقرار است و نیز اگر f صعودی و منفی باشد $\frac{1}{f}$ نزولی و منفی است، زیرا در معکوس کردن علامت تغییر نمی‌کند بنابراین تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در نقطه‌ای صعودی است که $f(x)$ حول آن نقطه نزولی باشد و با توجه به نمودار تابع این نقطه، نقطه‌ی A است.

۹) بررسی یکنوایی تابع $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

الف) اگر $a>0$، در این صورت تابع روی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



ب) اگر $a<0$، در این صورت تابع روی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



تست: حدود a برای آنکه تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ صعودی باشد کدام است؟

۱) $a\geq\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\leq\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

پاسخ تست ۲) اولاً باید $a>2$ باشد. ثانیاً برای اینکه f روی $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، باید بازه‌ی $[1,+\infty)$ زیرمجموعه‌ی $[-\frac{b}{2a},+\infty)=[\frac{1}{2(a-2)},+\infty)$ باشد. در نتیجه:

$$\frac{1}{2(a-2)} \le 1 \Rightarrow 2a-4 \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} a \ge \frac{5}{2} \\ a > 2 \end{cases} \Rightarrow a \ge \frac{5}{2}$$

۱۰) اگر f و g دو تابع مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشند، آنگاه $f \times g$ تابعی مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

۱۱) اگر f و g دو تابع صعودی باشند، آنگاه $f+g$ نیز تابعی صعودی خواهد بود.

تست: اگر تابع $f(x)$ یک تابع اکیداً صعودی باشد کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $|x|+f(x)$ ۲) $xf(x)$ ۳) $x+f(x)$ ۴) $|x|f(x)$

پاسخ: گزینه (۳) در این تست f صعودی اکید و $x=y$ نیز صعودی اکید است. لذا جمع آن‌ها یعنی $x+f(x)$ نیز صعودی اکید می‌باشد پس گزینه (۳) صحیح است.

تست: اگر f صعودی و g نزولی باشد، آنگاه توابع $f \circ g$ و $f \circ g \circ f$ به ترتیب:

۱) نزولی، نزولی است ۲) صعودی و نزولی است ۳) نزولی و صعودی است ۴) صعودی و صعودی است.

پاسخ: گزینه (۱) می‌توانیم تابع نزولی g را با علامت منفی (-1) و تابع صعودی f را با علامت $(+1)$ نشان دهیم و در ترکیب‌های پی در پی g و f برای هر کدام علامت مناسب را در نظر بگیریم و آن‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{cases} f \text{ صعودی} \Rightarrow + \\ g \text{ نزولی} \Rightarrow - \end{cases} \Rightarrow \underset{+}{f} \circ \underset{-}{g} \circ \underset{+}{f} \xrightarrow[(-)]{\text{ضرب علامت‌ها}}$$

$f \circ g$ و $f \circ g \circ f$ نزولی هستند.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x^3$ آنگاه کدام گزینه در مورد تابع $g \circ f$ درست است؟ $(x>0)$

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) نه صعودی و نه نزولی ۴) نمی‌توان مشخص کرد

پاسخ: گزینه (۲)

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \text{ صعودی اکید} \\ g(x)=-x^3 \text{ نزولی اکید} \end{cases} \Longrightarrow \underset{-}{g} \circ \underset{+}{f} \Rightarrow (-)$$

$g \circ f$ نزولی اکید

تست: کدام تابع زیر وارونه‌اش نزولی است؟

۱) $y=\frac{1}{[x]}$; $x\geq 1$ ۲) $y=-[-x]$ ۳) $y=\frac{1}{x^2+1}$; $(x\leq 0)$ ۴) $y=-2^{-x}$

پاسخ: گزینه «۲» بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $y=[x]$ یک تابع صعودی است و عکس آن یک تابع صعودی نزولی می‌باشد

گزینه «۲»: تابع $y=[-x]$ نزولی است و بنابراین قرینه آن صعودی می‌باشد.

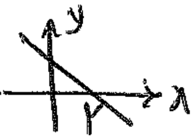
گزینه «۳»: $y=x^2+1$ وقتی $x\leq 0$، نزولی است و بنابر این عکس آن صعودی باشد

گزینه «۴»: $y=(\frac{1}{2})^x$ یک تابع نزولی است زیرا $\frac{1}{2}<1$ و در نتیجه قرینه آن صعودی می‌باشد.

تست: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۲» چون $f(2)=0$ و تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است، می‌توان حالت کلی آن را به صورت



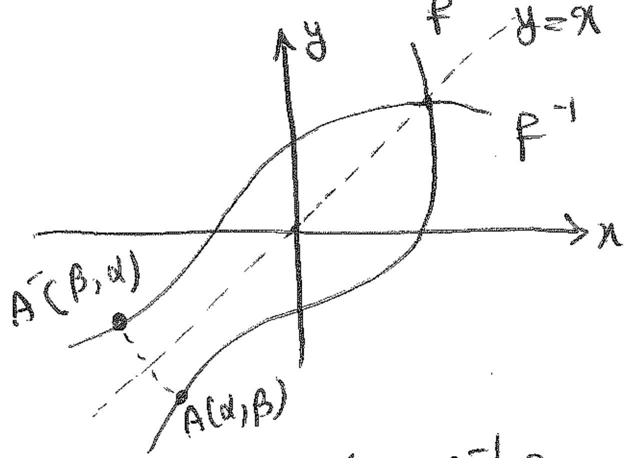
فرض کرد. مخرج عبارت زیر رادیکال یعنی $(2+x^2)$ همواره مثبت است، لذا برای با معنی بودن $\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کافی است $xf(x)\geq 0$ باشد. با توجه به نمودار تابع f سه حالت داریم:

$$\begin{cases} x<0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)>0 \Rightarrow xf(x)<0 \\ 0\leq x\leq 2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)\geq 0 \Rightarrow xf(x)\geq 0 \\ x>2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)<0 \Rightarrow xf(x)<0 \end{cases}$$

فقط x هایی قابل قبول هستند که به ازای آن‌ها $xf(x)\geq 0$ برقرار باشد. لذا $D_y=[0,2]$ است.

درسنامه (۴) وارون تابع

۱) تابع معکوس (وارون) f، تابعی است که با نماد f^{-1} نشان داده و شرایط زیر را دارد:

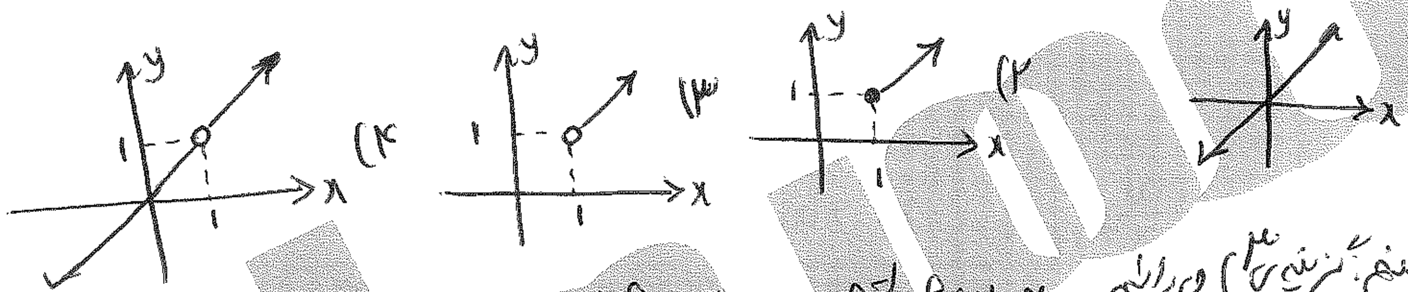


الف) $x\in D_{f^{-1}} : f\circ f^{-1}(x)=x$

ب) $x\in D_f : f^{-1}\circ f(x)=x$

ج) $D_{f^{-1}}=R_f$, $R_{f^{-1}}=D_f$

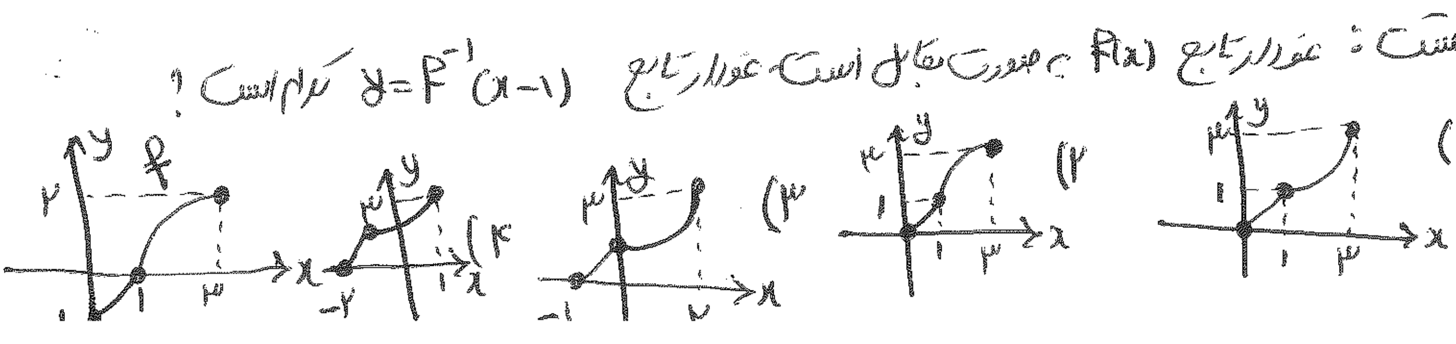
تست: اگر $f(x)=\log(x-1)$، آنگاه نمودار $y=f^{-1}\circ f(x)$ کدام است؟



پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $f^{-1}\circ f(x)=x$ روی دامنه f است، دامنه $f(x)=\log_{10}(x-1)$ برابر $(1,+\infty)$ باشد، بنابراین نمودار $y=f^{-1}\circ f(x)$، نمودار تابع همانی (نیمساز ربع اول و سوم) روی $(1,+\infty)$ می‌باشد. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند درست باشد.

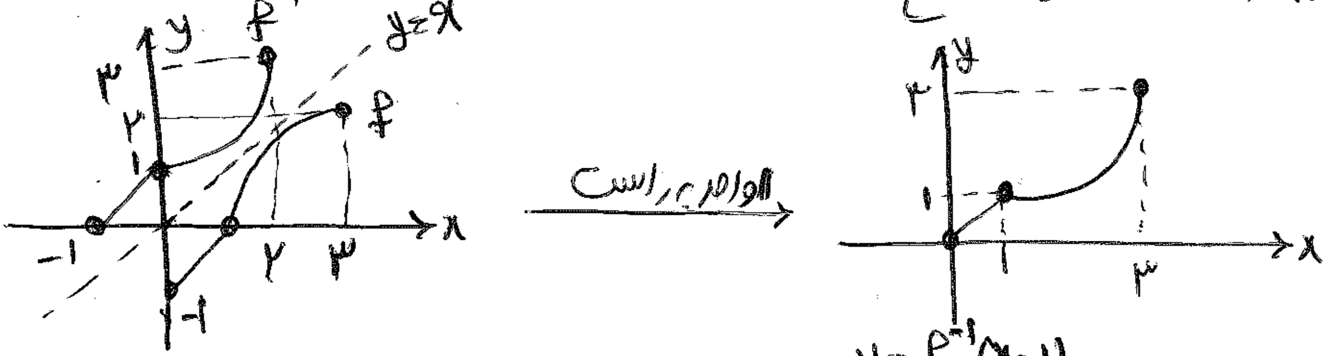
۲) اگر $A(\alpha,\beta)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد آنگاه $A'(\beta,\alpha)$ نقطه‌ی متناظر با A، روی نمودار f^{-1} است. پس به طور کلی نمودار f^{-1}، قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$) می‌باشد.

تست: نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f^{-1}(x-1)$ کدام است؟



مولف:رحیم قهرمان

پاسخ گزینه‌ی ۱) ابتدا نمودار f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم:



$y = f^{-1}(x-1)$

۳) تابع f معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

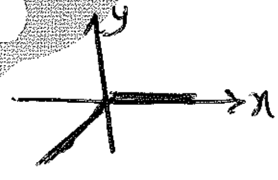
۴) برای یافتن ضابطه‌ی تابع معکوس تابع f، ابتدا در تابع $y = f(x)$، x را برحسب y یافته سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

تست: کدام یک از توابع زیر وارون پذیر است؟

۱) $y = x-|x|$ ۲) $y = x+|x|$ ۳) $y = x|x|$ ۴) $y = \frac{|x|}{x}$

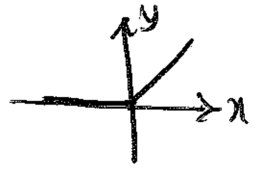
گزینه‌ی ۳) برای پاسخ به این تست، نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱: $y = x-|x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$



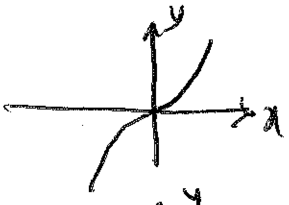
تابع یک به یک نیست.
پس وارون پذیر نیست.

گزینه‌ی ۲: $y = x+|x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



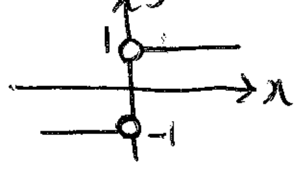
تابع یک به یک نیست
پس وارون پذیر نیست

گزینه‌ی ۳: $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$



تابع یک به یک است
بنابراین وارون پذیر است

گزینه‌ی چهار: $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



تابع یک به یک نیست.
پس وارون پذیر نیست.

مولف: رحیم قهرمان

تست: تابع $f(x)=2x^2-4x+2$ با دامنه‌ی $(-\infty,1)$ مفروض است، ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ کدام است؟
(سنجش تجربی ۹۲)

۱) $1-\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۲) $1+\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۳) $2-\sqrt{x}$ ۴) $2+\sqrt{x}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) در تابع $x<1$ و $y=2x^2-4x+2$ داریم $y=2(x-1)^2$ پس $y>0$ و $(x-1)^2=\frac{y}{2}$ با درنظر گرفتن $x<1$ داریم:

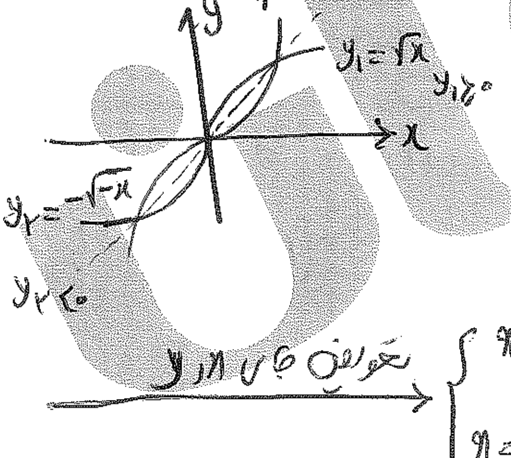
$$x-1=-\sqrt{\frac{y}{2}} \Rightarrow x=1-\sqrt{\frac{y}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{\frac{x}{2}}$$

تست: ضابطه‌ی وارون تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟
(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۱) $y=x\sqrt{|x|} ; x\in\mathbb{R}$ ۲) $y=x\sqrt{|x|} ; x\in\mathbb{R}-\{0\}$

۳) $y=x|x| ; x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $y=x|x| ; x\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)



$$y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=\sqrt{x} & ; x\geq 0 \\ y_2=-\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} \begin{cases} x=\sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2=y \;,\; \overbrace{x\geq 0}^{\text{برد } y_1} \\ x=-\sqrt{-y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2=-y \Rightarrow y=-x^2 \;;\; \overbrace{x<0}^{\text{برد } y_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & ; x\geq 0 \\ -x^2 & ; x<0\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|$$

۵) اگر f یک تابع معکوس پذیر باشد، آنگاه $(f^{-1})^{-1}=f$ یعنی معکوسِ معکوسِ یک تابع برابر خود تابع است

تست: اگر معکوس تابع $f(x)=\frac{ax}{bx+c}$ به صورت $f^{-1}(x)=\frac{4x}{2-x}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۳) با توجه به $(f^{-1})^{-1}=f$ کافی است معکوس $f^{-1}(x)=\frac{4x}{2-x}$ را بدست آوریم.

$$y=\frac{4x}{2-x}\longrightarrow 2y-xy=4x\Rightarrow x(y+4)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{y+4}\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{x+4}$$

درنتیجه:

$$\frac{2x}{x+4}=\frac{ax}{bx+c}\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=4\Rightarrow a+b+c=7$$

۶) اگر f و g دو تابع معکوس پذیر باشند، آنگاه $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

تست: اگر $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=x^3$ آنگاه ضابطه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $y=x-1$ ۲) $y=x+1$ ۳) $y=x+2$ ۴) $y=x-2$

پاسخ گزینه ۱)

$$(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)\ ,\ f(x)=1+\sqrt[3]{x}\ ,\ g(x)=x^3$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=1+\sqrt[3]{x^3}=1+x$$

$$y=1+x\Rightarrow y^{-1}=x-1\Rightarrow (fog)^{-1}(x)=x-1$$

۷) **محل تلاقی نمودارهای f و f^{-1}**

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، در این صورت ریشه های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله $f(x)=x$ بدست می آیند. در غیر این صورت باید به طور مستقیم معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کرد

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

ضمناً ریشه‌های معادله $f(x)=x$ و $f^{-1}(x)=x$ ریشه‌های معادله $f^{-1}(x)=f(x)$ هستند. توجه کنید که برای توابع اکیداً نزولی ریشه‌های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله $f(x)=x$ ممکن است به دست نیاید. به عنوان مثال تابع $y=-x$ و یا تابع چندضابطه‌ای $f(x)=-x^3$ را در نظر بگیرید.

تست: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x}+1$، نمودار معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) قطع نمی‌کند.

پاسخ: گزینه (۱) تابع f اکیداً صعودی است، زیرا جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x+1$ و $f(x)=\sqrt[3]{x}$ می‌باشد. پس ریشه‌های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله $f(x)=x$ به دست می‌آیند:

$$x+\sqrt[3]{x}+1=x \Rightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Rightarrow x=-1$$

۸) در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $ad\neq bc$ و $c\neq 0$ باشد به شرط $a+d=0$ رابطه‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ برقرار است.

تست: اگر نمودارهای دو تابع $f(x)=\frac{2x+a}{-x+b}$، $y=f(x)$ بر هم منطبق باشند، مجموعه مقادیر a و b کدام است؟

۱) $b=2$ ، $a\in\mathbb{R}$ ۲) $b=-2$ ، $a\in\mathbb{R}$ ۳) $b=2$ ، $a\in\mathbb{R}-\{4\}$ ۴) $b=-2$ ، $a\in\mathbb{R}-\{-4\}$

پاسخ: گزینه (۴)

$$f(x)=\frac{2x+a}{-x+b} \xrightarrow{f=f^{-1}} 2+b=0 \Rightarrow b=-2 \quad (*)$$

شرط دیگر: ($ad\neq bc$)

$$\begin{cases} -1\neq 0 \\ 2b\neq -a \xrightarrow{(*)} 2\times(-2)\neq -a \Rightarrow a\neq -4 \end{cases}$$