

## ریاضی

### سال دهم رشته تجربی و ریاضی

فهرست :

فصل اول :مجموعه ،الگو و دنباله ..... ۳

فصل دوم:مثلثات..... ۳۷

فصل سوم ،توان های گویا و عبارت های جبری..... ۵۴

فصل چهارم:معادله ها و نامعادله ها ..... ۷۶

فصل پنجم ،تابع ..... ۱۰۴

فصل ششم ،شمارش بدون شمردن ..... ۱۲۳

فصل هفتم ،آمار و احتمال..... ۱۳۷

# ریاضی دهم

## رشته های ریاضی و تجربی

جزوه کار

شامل خلاصه مطالب درسی و تعداد زیادی تمرین

تهیه و تنظیم: علی لطفی نژاد

با عضویت در کانال من، می توانید جواب سوالات ریاضی خود را حتی در شب امتحان نیز دریافت کنید

جزوه کامل - معلم همیشه همراه

## فصل اول

مجموعه ، الگو و دنباله

✓ درس اول : مجموعه متناهی و نامتناهی

✓ درس دوم : متمم یک مجموعه

✓ درس سوم : الگو و دنباله

✓ درس چهارم : دنباله های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

❖ **آخر این درس باچی آشنا میشی**

- ✓ آشنایی با مفاهیم مجموعه ها
- ✓ آشنایی با مفهوم بازه
- ✓ آشنایی با مفاهیم مجموعه های متناهی و نامتناهی

## مجموعه های مهم

- a) مجموعه اعداد طبیعی  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$   
 b) مجموعه اعداد حسابی  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
 c) مجموعه اعداد صحیح  $= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$   
 d) اعداد گویا  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$   
 e) تمام اعدادی که گویا نیستند  $Q'$   
 f)  $R = Q \cup Q'$

درسته که بگیم:  $Q' \subset R$  و  $Q \subset R$  و  $Z \subset Q$  و  $W \subset Z$  و  $N \subset W$ ؟ آیا؟

بله درسته. آفرین

## بازه ها

فرض کن  $a, b$  دو عدد حقیقی باشن که  $a < b$  بگو خب! تمام اعداد بین  $a, b$  مجموعه ای تشکیل میدن که به اون بازه میگیریم.

مهمه که اعداد  $a, b$  توی مجموعه باشن یا نه؟

آفرین سوال خوبیه. مهمه و با توجه به این موضوع، بازه ها به سه دسته تقسیم میشن.

مجموعه	بازه	نام بازه
$\{x \in R \mid a < x < b\}$	$(a, b)$	باز
$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم باز
$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته

مجموعه  $R$  را چطوری میشه با بازه نشون داد؟

$$R = (-\infty, +\infty)$$

برای تعیین اجتماع و اشتراک و تفاضل دو بازه به این صورت عمل می کنیم:

ابتدا دو بازه را با فاصله در پایین و بالای یک محور مشخص می کنیم.

✓ اجتماع جایی از محور خواهد بود که حداقل یکی از دو بازه در آن قسمت دیده شود.

✓ اشتراک جایی است که هر دو بازه دیده شوند.

✓ تفاضل جایی است که فقط بازه اول باشد.

✓ متمم نیز جایی است که بازه مورد نظر نباشد

\* برای تعیین مرکز و شعاع بازه  $(a, b)$

- ✓ مرکز  $\frac{a+b}{2}$
- ✓ شعاع  $\frac{b-a}{2}$

### ❖ مجموعه های متناهی :

مجموعه ای است که تعداد آن را بتوان با یک عدد حسابی بیان کرد .

### ❖ مجموعه نامتناهی :

مجموعه ای که متناهی نباشد .

۱. کدام مجموعه زیر تهی است ؟

- (a) مجموعه اعداد فرد بین ۸ و ۱۰
- (b) مجموعه اعداد طبیعی زوج بین ۹ و ۱۱
- (c) مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ بین ۱۳ و ۱۵
- (d) مجموعه اعداد طبیعی ۳ بین ۱۴ و ۱۶

تمرین

۲. حاصل عبارات زیر را بیابید .

- a)  $R - Q = ?$
- b)  $Z - W = ?$
- c)  $N - W = ?$
- d)  $Q' - Q = ?$

۳. کدام گزینه نادرست است ؟

- a)  $N \subset Z$
- b)  $N \cap W = N$
- c)  $Z \cap Q = R$
- d)  $Z - Q = \emptyset$

۴. کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

- a)  $-32 \in \{4k: k \in \mathbb{Z}\}$   
 b)  $0 \notin \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{Z}\right\}$   
 c)  $\frac{4}{3} \notin \left\{\frac{1-a}{-a} + \frac{2}{a}: a \in \mathbb{N}\right\}$   
 d)  $\frac{7}{8} \in \left\{\frac{b}{b+1}: b \in \mathbb{N}\right\}$

۵. اگر  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  باشد، در این صورت  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  کدام است؟

- a)  $A_1$   
 b)  $A_n$   
 c)  $A_n - A_1$   
 d)  $A_n \cap A_1$

۶. اگر  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  باشد، در این صورت  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  و  $n \geq 3$  کدام است؟

- a)  $A_1$   
 b)  $A_n$   
 c)  $A_n - A_1$   
 d)  $A_n \cap A_1$

۷. اگر  $A_i = \left[\frac{-1}{i}, \frac{1}{i}\right]$  باشد، آن گاه  $\bigcap_{i=1}^5 A_i$  کدام است؟

- a)  $\left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right]$   
 b)  $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{5}\right]$   
 c)  $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$   
 d)  $[-1, 1]$

۸. اگر  $A_n = \left[\frac{1}{2}, 2^n\right]$  آن گاه حاصل  $\bigcup_{n=1}^{10} (A_n - A_{n-1})$  کدام گزینه زیر است؟

- a)  $[1, 2^9]$   
 b)  $[1, 2^{10}]$   
 c)  $[1, 2^9)$   
 d)  $(1, 2^{10}]$

۹. اگر  $A_n = \{n, n + 1, \dots, 2n\}$  باشد، مجموعه  $\bigcup_{n=10}^{15} A_n - \bigcap_{n=10}^{15} A_n$  چند عضو دارد؟

- a) ۱۴
- b) ۱۵
- c) ۱۶
- d) ۱۷

۱۰. اگر  $A_i = \{m \in \mathbb{Z} : -1 \leq m \leq 8 - i\}$  مجموعه  $\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i$  چند عضو دارد؟ (خارج ریاضی ۸۷)

- a) ۱۳
- b) ۱۴
- c) ۱۵
- d) ۱۶

۱۱. اگر  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n, 2^m \leq 2n\}$  و  $n \in \mathbb{N}$  آنگاه مجموعه  $(A_6 - A_4) \cup A_1$  چند عضو دارد؟ (ریاضی ۹۴)

- a) ۴
- b) ۵
- c) ۶
- d) ۷

۱۲. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

- (a) مجموعه اعداد هزار رقمی
- (b) مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۱۹۰
- (c) بازه  $[-2, 3]$
- (d) مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک
- (e) مجموعه کلمات کتاب ریاضی دهم
- (f) مجموعه مضارب مثبت عدد ۵
- (g) مجموعه تمام زیر مجموعه های مجموعه  $N$
- (h) مجموعه باقی مانده ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد ۷

۱۳. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- (a) اجتماع دو مجموعه متناهی یک مجموعه ..... است.
- (b) اگر  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی باشد آنگاه  $A \cup B$  ..... است.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد



(c) اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد آنگاه  $A$  یک مجموعه ..... است.

۱۴. برای هر قسمت مثال بزنید.

(a) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها نامتناهی باشد.

(b) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها متناهی باشد.

۱۵. درستی یا نادرستی احکام زیر را بررسی کنید.

a)  $\sqrt{5} \in (-\infty, \sqrt{5})$

b)  $-1395 \in (-\infty, -1396)$

c)  $\emptyset \subset (-\pi, \pi)$

d)  $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \in [3, 4]$

e)  $3 \in [1, \sqrt{10}]$

f)  $[0, 1) \subset \mathbb{Q}$

g)  $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

h)  $\frac{1-\pi}{2} \in (-1, \infty)$

i)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}'$

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

j)  $(-1,4) \cup (0,5) = (-1,5)$

k)  $[-2,4] \cap (4,8) = \emptyset$

l)  $[-2,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

m)  $[-2,3) \cup (-2,3) = (-2,3)$

(n) اگر  $A \subset B$  و  $B$  مجموعه ای نا متناهی باشد آنگاه  $A$  متناهی است.

۱۶. بازه ی  $[5,10] \cap ([-2,6] \cup [6,9])$  را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱۷. حاصل عبارتهای زیر را یافته و جواب را روی محور نشان دهید.

a)  $(-3,2) \cap (-1,4)$

b)  $(-\infty, 5) \cup (-2,7)$

۱۸. اگر  $(-2)$  مرکز بازه  $(a, b)$  باشد و طول این بازه برابر ۷ باشد مقادیر  $a, b$  را بیابید.

۱۹. اگر  $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$  و  $B = \{x \mid x \leq \frac{-3}{2}\}$  باشند هر یک از مجموعه های  $A, B, A \cup B$  را به صورت بازه نمایش

دهید

۲۰. اگر  $A_i = [-2i, 8 - i], i \in N$  باشد حاصل  $\bigcup_{i=1}^4 A_i, \bigcap_{i=1}^4 A_i$  را بیابید.

---

۲۱. اگر  $A_n = \{m \in Z | m \geq -n, 2^m \leq n\}, n \in N$  حاصل  $\bigcup_{i=1}^4 A_i, \bigcap_{i=1}^4 A_i$  را بیابید.

---

۲۲. اگر  $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right]$  باشد حاصل  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  و  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  را رسم کنید

---

۲۳. اگر  $A = \{x \in R | -2 \leq x \leq 5\}, B = \{x \in R | x > 2\}$  باشد حاصل  $A \cap B$  و  $A \cup B$  را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد نمایش دهید.

---

۲۴. اگر  $A = \{x | -3 < x \leq 2\}$  و  $B = \{x | x \leq \frac{-3}{2}\}$  باشند هر یک از مجموعه های  $A, B, A \cup B$  را به صورت بازه نمایش

دهید.

۲۵. اگر  $A = (-3, 5], B = (0, +\infty), C = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\}$  باشد حاصل عبارت های زیر را بیابید.

a)  $(A \cap B) \cup C$

b)  $A \cap B \cap C$

۲۶. اگر  $A_n = (0, \frac{1}{n})$  باشد مطلوب است حاصل :

a)  $A_1$  و  $A_2$

b)  $A_1 \cap A_2$  و  $A_1 \cup A_2$

درس دوم: متمم یک مجموعه

❖ تواین درس چی یاد می گیری

✓ با مفاهیم مجموعه مرجع و متمم آشنا میشی  
 ✓ یاد میگیری چطوری متمم را به دست بیاری  
 ✓ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را بدست میاری

❖ **مجموعه مرجع**: در هر موضوعی که صحبت می کنیم، مجموعه ای که شامل همه مجموعه باشد را مجموعه مرجع گوئیم.

- یادت باشه این مجموعه را مجموعه اصلی یا مادر یا جهانی هم میگویم و با حروف S, U, M نشون میدیم.
- توی نمایش به صورت نمودار ون، این مجموعه به صورت مستطیل نمایش داده می شه.

❖ **تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه**:

$$\circ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

❖ **مجموعه های مجزا یا جدا از هم**: به دو مجموعه که اشتراک نداشته باشن جدا از هم گوئیم.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

## تمرین

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید .

(a) اگر  $A \subset B$  آنگاه  $A' \subset B'$

(b) اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد  $N \cup W$  برابر  $Z$  میشود .

۲. در هر قسمت یک مجموعه و مجموعه مرجع داده شده است . مجموعه متمم را بیابید .

a)  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$  و  $U = N$

b)  $A = N$  و  $U = Z$

c)  $A = (-\infty, -3)$  و  $U = R$

۳. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید .

(a) اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subset U$  در این صورت به  $U - A$  ..... مجموعه  $A$  گوئیم .

(b) اگر جمعیت بالای شش سال یک کشور که را با  $U$  نمایش دهیم و  $A$  مجموعه افراد با سواد باشد آنگاه  $A'$  مجموعه افراد ..... است.

۴. در یک کلاس ۳۵ نفره بیست نفر به شنا و هجده نفر به فوتبال علاقه دارند . اگر هشت نفر به هر دو ورزش علاقه داشته باشند چند نفر فقط به فوتبال علاقه دارند .

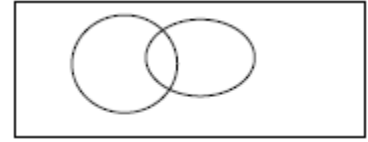
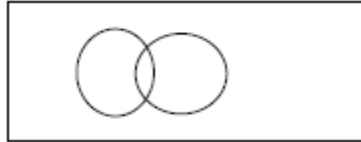
۵. در یک کلاس ۴۵ نفره ۲۲ نفر به خط و ۱۸ نفر به نقاشی علاقمند هستند و ۸ نفر به هیچ کدام از این دو علاقه افرادی را بیابید :

(a) به هر دو رشته علاقمند باشند .

(b) فقط به خط علاقه داشته باشند .

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

(c) با نام گذاری مناسب، جواب هر قسمت را روی شکل مشخص کنید.



۶. اگر داشته باشیم  $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ,  $A = \{3,4,5,6\}$ ,  $B = \{1,2,3,4\}$ ، آنگاه  $A' \cup B$  را بیابید.

۷. اگر داشته باشیم  $n(U) = 50$ ,  $n(A) = 30$ ,  $n(B) = 20$ ,  $n(A' \cap B') = 10$  باشد مقادیر زیر را بیابید.

- a)  $n(A \cup B)$
- b)  $n(A \cap B)$
- c)  $n(A' \cap B)$

۸. فرض کنید که  $U$  مجموعه مرجع باشد در این صورت حاصل هر قسمت را بنویسید.

- a)  $A \cup U$
- b)  $A \cap U$
- c)  $A \cap A'$
- d)  $\emptyset'$
- e)  $U'$

۹. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر به زبان انگلیسی، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان صحبت می کنند. در این کلاس چند نفر به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند؟

۱۰. در یک مدرسه از ۸۰ دانش آموز سال اولی، ۳۰ نفر مجله A و ۴۵ نفر مجله B و ۱۲ نفر هیچ یک از دو مجله را نمی خوانند . چند نفر فقط مجله A را می خوانند ؟

- a) 40
- b) 23
- c) 38
- d) 25

۱۱. در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده اند . در صورتی که ۳ نفر در هر دو درس تجدید شده باشند چند نفر در هر دو درس قبول شده اند ؟

- a) ۲۰
- b) ۲۲
- c) ۲۳
- d) ۲۴

۱۲. کلاسی ۳۲ دانش آموز دارد . اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ عضو هیچ کدام از این تیم ها نباشند چند نفر فقط والیبال هستند ؟

- a) ۵
- b) ۶
- c) ۸
- d) ۹

۱۳. مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است . اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد . اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود . از اشتراک آنها ۹ عضو حذف شود تعداد عضو های اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B کدام است ؟

- a) 40
- b) 41
- c) 42
- d) 45



۱۴. اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیر باشد،  $B$  مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی کمتر از  $40$  که بخش پذیر بر ۳ باشند مجموعه  $B-A$  چند عضو دارد؟ (انسانی خارج ۹۵)

- a) ۴
- b) ۵
- c) ۶
- d) ۷

۱۵. اجتماع دو مجموعه  $A, B$  دارای  $40$  عضو است. مجموعه های  $(A-B), (B-A)$  به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه های  $A, B$  ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آنها ۴ عضو کم می شود تعداد عضو های اجتماع دو مجموعه جدید کدام است؟

- a) 22
- b) 23
- c) 24
- d) 26

۱۶. در یک کلاس 40 نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه علمی شرکت کرده اند. اگر 9 نفر آنها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند چند نفر آنان در هر دو برنامه شرکت کرده اند؟

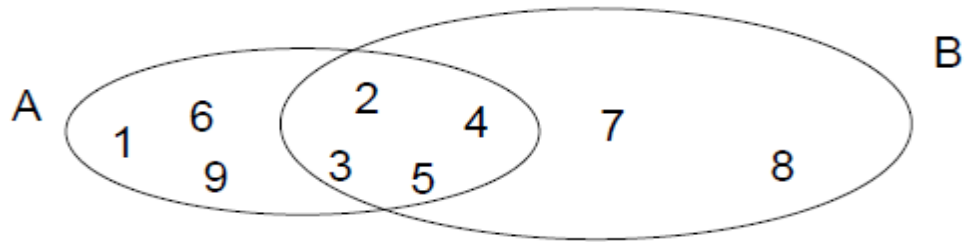
- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8

۱۷. در یک کلاس ۳۲ نفری، ۱۷ نفر در درس ریاضی و ۱۵ نفر در درس عربی قبول شده اند. اگر ۶ نفر هم در درس ریاضی و هم در درس عربی قبول شده باشند چند نفر در هیچ یک از دو درس ریاضی و عربی قبول نشده اند؟

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7

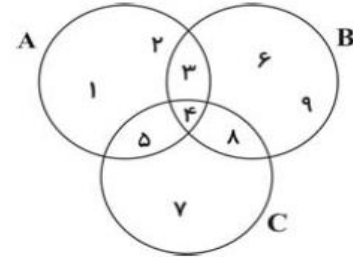
۱۸. با توجه به شکل مقابل اشتراک دو مجموعه  $(B - A) \cup (B \cap A)$  و  $(B - A) \cap (B \cup A)$  چند عضو دارد؟

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5



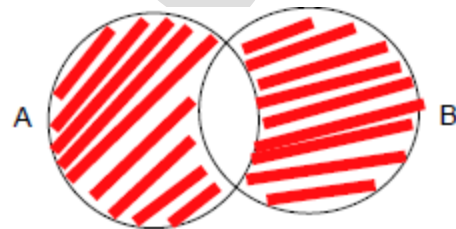
۱۹. با توجه به شکل زیر، اجتماع دو مجموعه  $B - (B - A), C - (C - A)$  کدام است؟

- a) {2,3,4}
- b) {3,4,5}
- c) {4,5,8}
- d) {3,4,8}



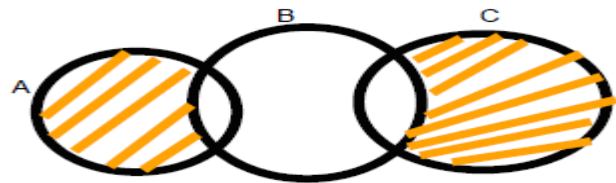
۲۰. در شکل مقابل ناحیه هاشور خورده متناظر کدام عبارات مجموعه ای می باشد؟

- a)  $A - B$
- b)  $B - A$
- c)  $(A \cup B) - (A \cap B)$
- d)  $(A \cup B) - A$



۲۱. عبارت مجموعه ای متناظر ناحیه هاشور خورده در شکل زیر کدام است؟

- a)  $(A - B) \cup C$
- b)  $(C - B) \cup A$
- c)  $(A \cup C) - B$
- d)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$



۲۲. اگر  $A = \{x: x \in N, \frac{2x-1}{3} < 7\}$ ,  $B = \{2^x: x \in W, x \leq 4\}$  باشد مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  چند عضو دارد؟

- a) 4
- b) 5
- c) 7
- d) 11

درس ۳: الگو و دنباله

❖ مطالبی که باید تو این درس به اونها مسلط بشی

آشنایی با مفهوم الگو

الگوی خطی

یافتن جمله عمومی برای الگو

## ❖ به نظر شما الگوچیه ؟

☞ منظور از الگو یک ساختار منظم از اشکال ، تصاویر و نماد ها یا اعداد می باشد .

☞ خیلی خوب .درسته

❖ جمله عمومی : تو بعضی الگو ها میتونیم یه رابطه پیدا کنیم که به اون وسیله هر جمله را پیدا کنیم که به اون میگییم جمله عمومی .

## ❖ الگو خطی

به طور کلی الگو هایی که جمله عمومی به صورت  $a_n = an + b$  دارند الگوی خطی نامیده می شوند .

☞ چرا به این نوع الگو خطی میگییم ؟

☞ چون اگر نمودار این الگو را روی محور های مختصات بکشی شکل یک خط به دست میاد .

❖ دنباله : هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار بگیرند را دنباله میگییم .

تمرین

۱. در یک الگوی خطی جمله چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ است . جمله عمومی این دنباله را بنویسید .

۲. در یک الگوی خطی جمله هشتم و سیزدهم به ترتیب برابر ۴۷ و ۷۲ است . جمله بیستم برابر چند است ؟

۳. در یک دنباله خطی جمله پنجم و دهم به ترتیب برابر ۱۷ و ۳۲ است. جمله بیستم را بیابید.

۴. پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

a)  $a_n = (-1)^n 2^n$

b)  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

c)  $d_n = -n^2 + 8n$

d)  $b_n = (n + 2)^{-2}$

در س چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

❖ مطالبی که باید به اونها مسلط بشی

✓ دنباله حسابی

✓ دنباله هندسی

❖ **دنباله حسابی**

به دنباله ای گفته می شه که هر جمله آن با افزودن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست بیاد. به این مقدار ثابت قدر نسبت میگویم و با حرف  $d$  نشون میدیم

❖ **جمله عمومی**

فرض کن  $a$  جمله اول و  $d$  قدر نسبت و  $a_n$  جمله عمومی یک دنباله حسابی باشه بگو خب! در این صورت داری:

$$* t_n = t_1 + (n - 1) \times d$$

📌 به جز این فرمول باز هم فرمول دیگه هم تو دنباله حسابی پیدا میشه؟ آیا؟

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

بله تعداد زیادی فرمول همیشه پیدا کرد که من اونها را برات تو یه جدول میارم ولی سعی کن فرمول ها را بفهمی. بگو خب

1. قدر نسبت	• $d$
2. جمله اول	• $a$
3. جمله عمومی	• $a_n = a + (n - 1)d$
4. رابطه تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه	• $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$
5. تعداد جمله های دنباله حسابی با داشتن دو جمله	• $n = \frac{a_n - a}{d} + 1$
6. رابطه بین سه جمله متوالی $a, b, c$	• $2b = a + c$
7. درج $n$ واسطه حسابی بین دو عدد $a, b$	• $n = \frac{b - a}{n + 1}$
8. جملات متساوی الفاصله $(m + n = p + q)$	• $a_m + a_n = a_p + a_q$
9. جملات متساوی الفاصله $(m + n = 2p)$	• $a_m + a_n = 2a_p$

منظور از  $a$  دیگه چیه اینجا؟

چرا عصبانی میشی! توی بعضی کتاب ها جمله اول را با  $a$  نشون میدن. منظور همون  $t_1$  یا  $a_1$  میباشد.

۱. در یک دنباله حسابی قدر نسبت  $\frac{-3}{4}$  و جمله بیست و پنجم برابر ۱۲ است. جمله اول را بیابید.

تمرین

۲. در یک دنباله حسابی جمله اول ۲- و قدر نسبت ۱۴ است. نخستین جمله ای که از ۵۰۰ بزرگ تر است را مشخص کنید.

۳. مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۲۱ است. این دنباله را مشخص کنید.

---

۴. در یک مثلث قائم الزاویه اندازه های ضلع ها دنباله حسابی اند اگر مساحت مثلث ۴۸ واحد سطح باشد اندازه هر یک از اضلاع را بیابید.

۵. در یک دنباله حسابی جمله هشتم پانزده برابر جمله اول است. نسبت بین جمله اول و قدر نسبت را به دست آورید.

---

۶. سه عدد تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر مجموع آنها برابر ۱۵ و حاصل ضرب آنها برابر ۱۰۵ باشد این سه عدد را بیابید.

---

۷. در دنباله حسابی .... و ۲۰۰ و ۲۰۴ و ۲۰۸ جمله چندم برابر صفر است؟



۸. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۲۷ و مجموع مربعات آنها برابر ۲۹۳ است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۹. بین دو عدد ۳۶ و ۴ سه واسطه حسابی درج کنید. (به عبارت دیگر بین این دو عدد سه عدد طوری قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.)

۱۰. در یک دنباله حسابی که دارای  $n$  جمله است. مجموع سه جمله اول برابر  $6\sqrt{2}$  و مجموع سه جمله آخر برابر  $60\sqrt{2}$  است. اگر داشته باشیم  $a_{15} = \frac{3}{2}a_{10}$ . این دنباله چند جمله دارد؟

۱۱. در یک دنباله حسابی داریم:  $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$  و  $a_{13} + a_{18} = 18$  است. جمله ۳۰ام دنباله را بیابید.

۱۲. فرض کنید  $r^2$  و  $q^2$  و  $p^2$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد  $\frac{1}{p+q}$  و  $\frac{1}{r+p}$  و  $\frac{1}{q+r}$  نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

۱۳. در دنباله حسابی .... و  $-152$  و  $-161$  و  $-170$  چند جمله منفی وجود دارد؟

۱۴. مجموعه  $A$  شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول  $3$  و قدر نسبت  $4$  است و مجموعه  $B$  شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول  $5$  و قدر نسبت  $6$  است. مطلوب است  $n(A \cup B)$ .

۱۵. در یک دنباله حسابی  $2a_1 + a_2 - 3a_4 = 10$  قدر نسبت این دنباله چقدر است؟ (آزاد ۹۰ تجربی)

$$\triangleright \left(1\right) \frac{5}{4} \quad \left(2\right) \frac{-5}{4} \quad \left(3\right) 2 \quad \left(4\right) -2$$

۱۶. دنباله حسابی  $-20, 92, 100, 96, 92, \dots$  چند جمله دارد؟

- a) ۲۹
- b) ۳۰
- c) ۳۱
- d) ۳۲

## ❖ بیشتر بدانیم

★ مجموع جملات دنباله حسابی

• $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	1. مجموع $n$ جمله اول با داشتن جمله اول و آخر
• $S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$	2. مجموع $n$ جمله اول با داشتن جمله اول و قدر نسبت
• $S_n = na_k$	3. اگر $a_k$ جمله وسط در $n$ جمله اول باشد
• $S_n = An^2 + Bn$	4. صورت کلی مجموع $n$ جمله اول

☞ به چند مجموع مهم توجه کنید.

- a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$   
 b)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$   
 c)  $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$

۱۷. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد. جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

➤ ۴۱۵(۱) ۴۱۹(۲) ۴۲۱(۳) ۴۲۳(۴)

✍

۱۸. اعداد طبیعی فرد را به گونه ای دسته بندی می کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی ام کدام است؟ (تجربی ۹۴)

- a) ۱۷۰۰  
 b) ۱۷۵۰  
 c) ۱۸۰۰  
 d) ۱۸۵۰

۱۹. مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله عددی از رابطه  $S_n = n^2 + 2n$  به دست می آید. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است

- a) ۷۲  
 b) ۵۱  
 c) ۳۶  
 d) ۷۶

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۲۰. در یک دنباله عددی جمله  $n$  ام به صورت  $a_n = \frac{3}{2}n - 5$  است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱۳۵(۴) ۱۲۰(۳) ۱۰۵(۲) ۹۰(۱) >



۲۱. در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۳۸(۴) ۳۶(۳) ۳۴(۲) ۳۲(۱) >

۲۲. مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله عددی به صورت  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۰)

۱۸(۴)  $\frac{49}{3}$ (۳)  $\frac{29}{3}$ (۲) ۹(۱) >



## ❖ دنباله هندسی

به دنباله ای می‌گیم که هر جمله آن با ضرب مقداری ثابت در جمله قبلی به دست بیاد. به این مقدار ثابت قدر نسبت می‌گیم و با حرف  $r$  نشون میدیم.

👉 توجه کن: در بعضی کتاب‌ها قدر نسبت را با حرف  $q$  نشون میدیم.

👉 آیا میتونیم بگیم اگه جمله اول و قدر نسبت را داشته باشیم دنباله مشخص میشه؟

👉 افرین. بله درسته.. با داشتن جمله اول و قدر نسبت میشه همه جمله‌ها را به دست میاد. به عبارت دیگه اگه بهت گفتن که دنباله را مشخص کن یعنی جمله اول و قدر نسبت را مشخص کن. بگو خب!

1. قدر نسبت	• $q$
2. جمله اول	• $a$
3. جمله عمومی	• $a_n = a \times q^{n-1}$
4. رابطه تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه	• $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$
5. رابطه بین سه جمله متوالی $a, b, c$	• $b^2 = a \times c$
6. درج $n$ واسطه هندسی بین دو عدد $a, b$	• $q^{n+1} = \frac{b}{a}$
7. قانون اندیس‌ها $(m + n = p + q)$	• $a_m \times a_n = a_p \times a_q$

تمرین

۱. در دنباله هندسی ... و  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{8}$  جمله دهم دنباله را بنویسید.

۲. جمله دوم یک دنباله هندسی ۶- و جمله پنجم آن ۴۸ است جمله هفتم دنباله را بیابید.

۳. در یک دنباله هندسی جمله هفتم ۸ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم ۱۲ باشد این دنباله را مشخص کنید.

---

۴. جمله عمومی یک دنباله هندسی  $\frac{1}{2^{n-3}}$  است، این دنباله را مشخص کنید.

---

۵. در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم ۲۰ و نسبت جمله پنجم به جمله دوم ۲۷ است. دنباله را مشخص کنید.

۶. در دنباله ... و  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  و  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  جمله چندم برابر  $\frac{1}{128}$  است؟

---

۷. در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۰ و قدر نسبت ۱۵ است نخستین جمله ای که از ۱۰۰۰۰ بزرگ تر است را بیابید.

---

۸. در یک دنباله هندسی جمله یازدهم ۲۷ برابر جمله هشتم است. اگر جمله پنجم ۵۶۷- باشد قدر نسبت و جمله اول را حساب کنید.

---

۹. مقدار  $p$  را چنان بیابید که  $p - 2$  و  $p + 4$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

۱۰. مقدار  $k$  را چنان بیابید که  $k-2, k+1, k+2$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

---

۱۱. سه عدد  $5 + a$  و  $4a + 2$  و  $10a - 4$  تشکیل دنباله هندسی می دهند. مقدار  $a$  را بیابید.

---

۱۲. سه عدد  $81^{\frac{15}{4}}$  و  $3^{b^2}$  و  $3^b$  تشکیل دنباله هندسی می دهند. مقدار  $b$  را بیابید.

---

۱۳. پنج واسطه هندسی بین اعداد ۱ و ۶۴ درج کنید.



۱۴. جمعیت روستایی ۱۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه  $\frac{1}{10}$  جمعیت سال قبل شود پس از ۴ سال چند نفر در این روستا زندگی می کنند؟

---

۱۵. چه عددی به اعداد ۱ و ۷ و ۲۲ می توان اضافه کرد تا عدد های حاصل دنباله هتدسی تشکیل دهند.

---

۱۶. تویی را از ارتفاع ۸ متری رها می کنیم اگر این توپ پس از هر بار زمین خوردن  $\frac{1}{2}$  بار قبلی به بالا بیاید.

الف) دنباله حاصل از پایین آمدن این توپ را بنویسید .

ب) این توپ در مرحله دهم چقدر پایین می آید .

۱۷. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم . یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند . قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ریاضی خازج کشور ۹۰)

$\frac{3}{2}(۴)$      $۲(۳)$      $\frac{5}{4}(۲)$      $\frac{6}{5}(۱)$     ➤



۱۸. در یک دنباله عددی جملات سوم و هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند چندین جمله این دنباله

صفر است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

$۱۲(۴)$      $۱۱(۳)$      $۱۰(۲)$      $۱۹۹$     ➤



۱۹. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ است . تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$۷(۴)$      $۶(۳)$      $۵(۲)$      $۴(۱)$     ➤



۲۰. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$\frac{7}{3}(۴)$      $\frac{9}{4}(۳)$      $\frac{7}{4}(۲)$      $\frac{5}{3}(۱)$     ➤

## ❖ بیشتر بدانیم

★ مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی

$$❖ S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

☞ اگر  $|q| < 1$  آنگاه حد مجموع جملات از رابطه  $S = \frac{a}{1-q}$  به دست می آید.

$$❖ \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

۲۱. در یک دنباله هندسی نزولی مجموع مجذورات تمام جملات برابر  $\frac{2}{3}$  مجذور مجموع تمام جملات آن است قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (تجربی ۹۵ خارج)

- a) 0/2
- b) 0/25
- c) 0/3
- d) 0/4

۲۲. در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت آن کدام است؟ (تجربی ۹۵ داخل)

- a)  $\frac{1}{3}$
- b)  $\frac{1}{2}$
- c)  $\frac{2}{3}$
- d)  $\frac{3}{4}$

۲۳. به ازای یک مقدار  $x$  اعداد  $x^2 + 4$  و  $2x$  و  $x^2 - 2$  به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\triangleright \left(1\right) \frac{117}{16} \quad \left(2\right) \frac{125}{16} \quad \left(3\right) \frac{63}{4} \quad \left(4\right) \frac{127}{8}$$

۲۴. در دنباله هندسی ... و ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

۱۲۹(۴) ۱۲۷(۳) ۶۳(۲) ۶۵(۱) >

۲۵. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱۶(۴) ۹(۳) ۸(۲)  $\frac{81}{16}$ (۱) >

۲۶. در یک دنباله هندسی به صورت ...  $4, a, 9, b, \dots$  مجموع شش جمله اول کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۹)

$83\frac{1}{8}$ (۴)  $82\frac{3}{8}$ (۳)  $81\frac{7}{8}$ (۲)  $81\frac{3}{8}$ (۱) >

## فصل دوم مثلثات

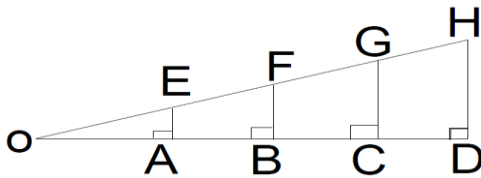
- ✓ نسبت های مثلثاتی
- ✓ دایره مثلثاتی
- ✓ روابط بین نسبتهای مثلثاتی

❖ آخر این درس با چی آشنا میشی

## نسبت های مثلثاتی

❖ آشنایی با نسبت های مثلثاتی

- سینوس
- کسینوس
- تانژانت
- کتانژانت



به شکل مقابل نگاه کن! بگو خب که چی! یه خط کش بردار و با من بیا .....

زاویه دلخواه  $O$  را در نظر بگیر، روی یه ضلع اون نقطه دلخواهی مثل  $A$  را در نظر بگیر و از اون خطی عمود خارج کن تا ضلع دیگر را در  $E$  قطع کند. به همین ترتیب نقاط دلخواه دیگه ای مثل  $B, C, D$  انتخاب کن و همون کارهای قبلی را انجام بده. حالا اندازه پاره خط های روی شکل را به دست بیار خب میدونم به دست نمباری من به جات به دست آوردم. حالا به تساوی های زیر دقت کن. همانطور که میبینی این تساوی ها ربطی به جای قرار گرفتن  $A, B, C, D$  ندارد.... پس هر کدام شایسته نامی برای خود هستن.

$$1. \frac{AE}{OE} = \frac{BF}{OF} = \frac{CG}{OG} = \dots$$

$$2. \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OG} = \dots$$

$$3. \frac{AE}{OA} = \frac{BF}{OB} = \frac{CG}{OC} = \dots$$

$$4. \frac{OA}{AE} = \frac{OB}{BF} = \frac{OC}{CG} = \dots$$

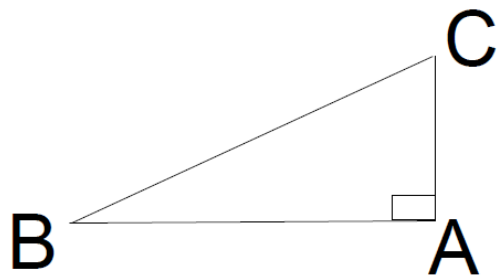
خب حالا به هر کدام از این نسبت ها یه اسم اختصاص میدیم. در هر تساوی مقدار کسر ها با هم برابرند ولی خب مقدار این کسر ها به اندازه زاویه  $O$  بستگی داره. خب حالا به کسر های اول اسم سینوس را میدیم و به صورت  $\sin O$  نشون میدیم. کسر های دوم را با اسم کسینوس نام گذاری می کنیم و به صورت  $\cos O$  نشون میدیم. کسر های سوم را با اسم تانژانت نام گذاری می کنیم و به صورت  $\tan O$  نشان میدیم. در پایان کسر های چهارم را با کتانژانت نام گذاری می کنیم و به صورت  $\cot O$  نشون میدیم. حالا برای اینکه یه کم مطلب را جمع و جور کنیم، یکی از اون مثلث های قائم الزاویه را در نظر میگیریم و مطالب را به صورت زیر خلاصه می کنیم. در اینجا زاویه  $B$  به جای زاویه  $O$  در شکل بالاست.

$$1. \sin B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$2. \cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$3. \tan B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$4. \cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

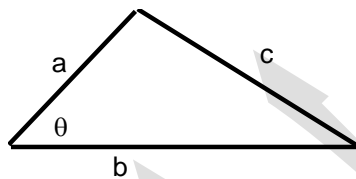


❖ جدول زیر را یاد بگیر

	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

❖ به رابطه خوب برای تعیین مساحت یه مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آنها :

$$* S = \frac{ab \sin \theta}{2}$$



❖ در هر مثلث داریم :

$$\bullet \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

تمرین

۱. یک مربع رسم کرده و با رسم یک قطر آن اندازه نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵ را بیابید.

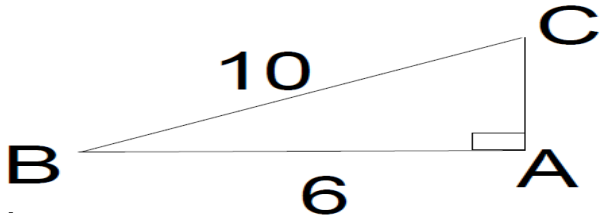
۲. مقدار عددی عبارت های زیر را بیابید .

a)  $\sin^2 60 + \cos^2 60 = ?$

b)  $1 + \sin 30 + \cos^2 45 + 4 \sin 30 \cos 60 = ?$



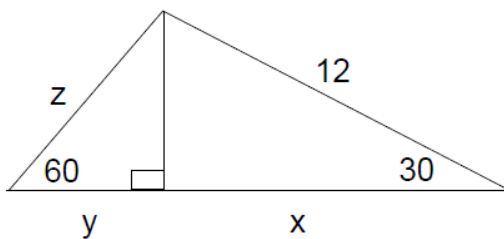
۳. در شکل مقابل نسبت های مثلثاتی زاویه  $B$  را بیابید.



۴. طول وتر یک مثلث قائم الزاویه  $10$  سانتی متر و سینوس یکی از زاویه های  $\frac{3}{5}$  است. محیط مثلث را بیابید.

۵. نردبانی به طول  $8m$  به دیواری تکیه داده شده و زاویه آن با سطح زمین  $60^\circ$  درجه است. نوک نردبان تا زمین چقدر است؟

۶. در شکل مقابل  $x, y, z$  را بیابید.



۷. در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  که  $AB$  وتر مثلث است، اگر  $\angle A = 30^\circ$  و  $AB = 4$  باشد مساحت این مثلث را بیابید .

---

۸. در مثلث  $ABC$  زاویه  $A=90^\circ$  و  $BC = 3\sqrt{2}$  و  $\tan B = \sqrt{2}$  اندازه ضلع  $BC$  را بیابید .

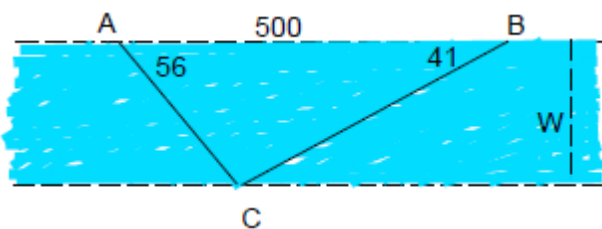
---

۹. سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع  $20$  متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه  $60^\circ$  درجه پرتاب میشود و به حرکت خود با همین زاویه ادامه می دهد. اگر سایه موشک روی زمین  $1000$  متر طی کرده باشد، موشک در چه ارتفاعی است و چه مقدار در خط مسیر خود طی کرده است ؟

۱۰. شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می کند زاویه دید چشمی این شخصی برابر ۳۲ درجه است. ارتفاع چشم شخص از سطح زمین برابر ۱/۸ متر است و فاصله فرد تا میله پرچم برابر ۴۵ است. طول میله پرچم را بیابید.

۱۱. یک مهندس نقشه برداری برای اندازه گیری ارتفاع قله دماوند در نقطه ای از دامنه کوه ایستاده که فاصله آن تا نوک قله برابر ۹۲۱۸ متر می باشد و با دوربین خود نوک قله را با زاویه ۳۰ درجه می بیند. اگر دامنه کوه در ارتفاع ۱۰۰۰ متری سطح دریا واقع باشد این نقشه بردار اندازه ارتفاع قله دماوند را از سطح دریا چه عددی گزارش می کند؟

۱۲. در شکل زیر با توجه به مقادیر داده شده عرض رودخانه را بیابید.



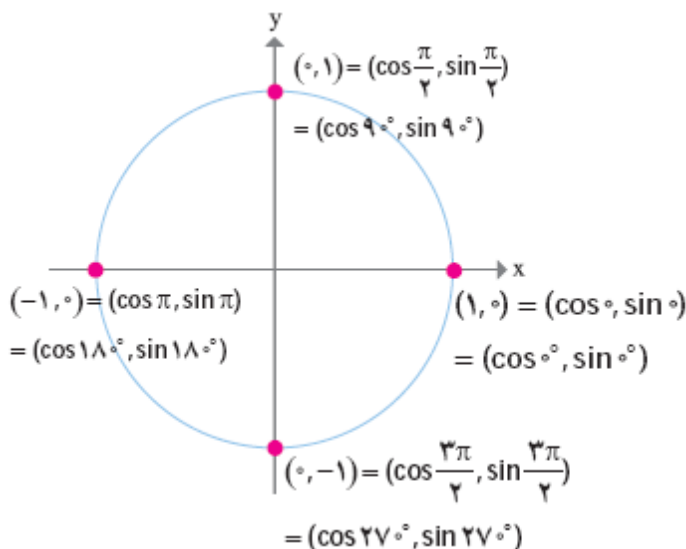
## دایره مثلثاتی

❖ تو این درس چه خبره :

- آشنایی با دایره مثلثاتی
- تعیین نسبت های مثلثاتی زوایای  $0^\circ$  و  $90^\circ$  و  $180^\circ$  و  $270^\circ$  و  $360^\circ$
- رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه برخورد

### ❖ دایره مثلثاتی

❖ دایره ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف جهت عقربه های ساعت است.



در نمودار زیر محور افقی محور کسینوس ها و محور عمودی

محور عمودی محور سینوس ها خواهد بود

همچنین خواهیم داشت:  $\sin \theta = y_B, \cos \theta = x_B$ .

علامت  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  در هر ناحیه به ترتیب از

علامت  $x, y$  به دست می آید.

در شکل مقابل اندازه نسبت های مثلثاتی مضارب  $90^\circ$

درجه را می بینید.

### ❖ رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

- اگر زاویه برخورد خط با جهت مثبت محور  $x$  را برابر  $\theta$  بگیریم و شیب خط را برابر  $m$  بگیریم در این صورت  $m = \tan \theta$

تمرین

مقدار $\theta$	ربع	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
$0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$	اول			
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	دوم			
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	سوم			
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	چهارم			

۱۳. جدول مقابل را برای علامت

نسبت های مثلثاتی کامل کنید.

۱۴. برای هر یک از حالات زیر یک مثال بیاورید .

الف) زاویه ای که کسینوس آن مثبت و تانژانت آن منفی باشد .

ب) زاویه ای که سینوس آن منفی و کتانژانت آن مثبت باشد .

---

۱۵. اگر  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$  و  $\alpha$  ربع چهارم مثلثاتی باشد سایر نسبت های مثلثاتی را بیابید .

---

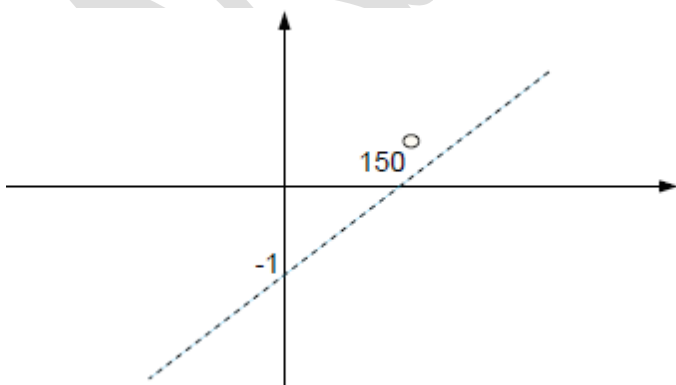
۱۶. اگر  $\sin \theta = \frac{2}{7}$  باشد و  $\theta$  در ربع دوم باشد سایر نسبت های مثلثاتی را بیابید .

۱۷. معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $A$  به طول ۲ واقع بر محور افقی گذشته و با محور افقی زاویه  $30^\circ$  درجه بنویسید.

۱۸. معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور  $x$   $45^\circ$  درجه بوده و از نقطه  $(0,2)$  بگذرد.

۱۹. مقدار  $m$  را طوری بیابید که خط  $(m+2)x + (-2m+1)y = 2$  با محور  $x$  زاویه  $45^\circ$  درجه بسازد.

۲۰. با توجه به شکل معادله خط را بنویسید.



۲۱. اگر  $\theta$  یک زاویه حاده و  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  باشد مقادیر  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  را بیابید.

---

۲۲. اگر  $\tan x = -\frac{1}{2}$  و  $\cos x < 0$  مقدار  $\sin x$  را بیابید.



## روابط بین نسبت های مثلثاتی

❖ چی یاد میگیری توی این درس :

- آشنایی با روابط بین نسبت های مثلثاتی
- آشنایی با تعدادی از کاربرد های انها

## ❖ روابط بین نسبت های مثلثاتی

- ★  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- ★  $\cos\theta \times \tan\theta = \sin\theta$
- ★  $\sin\theta \times \cot\theta = \cos\theta$
- ★  $\tan\theta \times \cot\theta = 1$
- ★  $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$
- ★  $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

۲۳. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع چهارم باشد و داشته باشیم  $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$  باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه را بیابید .

---

۲۴. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم باشد و داشته باشیم  $\sin \alpha = \frac{3}{7}$  باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه را بیابید .

۲۵. ثابت کنید همواره رابطه  $(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 1$  برقرار است.

۲۶. فرض کنید  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  باشد در این صورت مقدار عبارت  $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x - \cos x}$  را بیابید.

۲۷. اگر  $1 - \cos \theta = \frac{3}{5}$  باشد و داشته باشیم  $\tan \theta \times \cos \theta > 0$  باشد معین کنید انتهای کمان  $\theta$  در کدام ناحیه است؟

۲۸. درستی رابطه های زیر را ثابت کنید .

$$a) \frac{1+\cos\theta}{\sin^3x} = \frac{1}{\sin x(1-\cos x)}$$

$$b) 1 - \frac{\cos^2x}{1+\sin x} = \sin x$$

$$c) \frac{1}{\cos x} + \cot x = \frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$$

۲۹. اگر  $\cot x = \frac{3}{4}$  باشد حاصل  $\frac{4}{\sin x} - \frac{3}{\cos x}$  را بیابید .

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۳۰. فرض کنید  $\alpha \geq 60^\circ$  و  $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$  باشد حدود تغییرات  $m$  را بیابید.

---

۳۱. کمترین و بیشترین مقدار  $\frac{10}{4+3 \sin x}$  را بیابید.

## فصل سوم

### توان های گویا و عبارت های جبری

۱. ریشه و توان

۲. ریشه  $n$  ام

۳. توان های گویا

۴. عبارت های جبری

## درس اول و دوم: توان و ریشه گیری

### ❖ یاد آوری فرمول های توان

1.  $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}}$  و  $a^1 = a$ .
2.  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
3.  $a^m \times b^m = (ab)^m$
4.  $a^m \div a^n = a^{m-n}$
5.  $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
6.  $(a^m)^n = a^{mn}$
7.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8.  $a^0 = 1$

### ❖ ریشه گیری

اگر  $a^2 = b$  به  $a$  ریشه دوم عدد  $b$  میگویم. همچنین اگر  $a^3 = b$  به  $a$  ریشه سوم عدد  $b$  میگویم.

۱. اعداد مثبت دارای دو ریشه دوم قرینه هستند.
۲. اعداد منفی ریشه دوم ندارند.
۳. ریشه دوم مثبت اعداد را با رادیکال نمایش می دهیم.
۴. همه اعداد دارای یک ریشه سوم هستند که با خود عدد هم علامت هست و با رادیکال همیشه نمایش داد.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

### ❖ در مورد ریشه های چهارم و پنجم و ..... چی می تونیم بگیم؟

اونها از نظر علامت مثل ریشه دوم و سوم هستند یعنی زوج ها مثل هم و فرد ها مثل هم. فقط به جای توان دو میگی توان چهارم و در جواب همیشه ریشه چهارم و به همین ترتیب برای ریشه های فرد ....

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

❖ عدد حقیقی  $b$  را ریشه  $k$  ام  $a$  می‌گیم هر گاه  $b^k = a$

نکات مهم

$$* 1) (\sqrt[k]{a})^k = a$$

$$* 2) \sqrt[k]{a^k} = a$$

$$* 3) \sqrt[k]{a^k} = |a|$$

$$* 4) \sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{b}$$

$$* 5) \sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$$

$$* 6) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$* 7) \sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$$

\* در ۲ مقدار  $k$  فرد و در ۳ زوج است

نمونه

حاصل عبارت های زیر را بیابید .

1.  $\sqrt[4]{81}$

---

2.  $\sqrt[3]{-128}$

---

3.  $\sqrt[5]{-243}$



4.  $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$

5.  $x\sqrt{-x} \times \sqrt[3]{x}$

6.  $\frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[4]{a^4}}$

7.  $\sqrt[5]{-32(x-y)^{10}}$

8.  $\sqrt{31} \times \sqrt{6-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{5}}} \times \sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

9.  $\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^6}$

10.  $\sqrt[8]{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{12}}$

$$11. 2\sqrt[6]{27a^3} - 2\sqrt[4]{144a^2} + 3\sqrt{12a} - \sqrt{27a}$$

$$12. \sqrt{0/09} + \sqrt[3]{0/008} - \sqrt[4]{0/0001}$$

$$13. \sqrt[21]{128 \times 3^{14}}$$

$$14. \sqrt[3]{1080}$$

$$15. \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6 + 4\sqrt{2}}$$

$$16. \sqrt{(c-1)^2} - \sqrt{(1+c)^2} \quad c \in [-1,1]$$

$$17. \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$$

$$18. \sqrt{11 - 2\sqrt{2}}$$

$$19. \sqrt{13 + \sqrt{48}}$$

$$20. \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{11 + 4\sqrt{6}}$$

## درس سوم: توان های گویا

❖ در این درس چی میبینی :

- آشنایی با مفهوم گویا
- محاسبه آنها

❖ فرض کن  $a$  یک عدد مثبت باشد

$$* a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تمام فرمول های مربوط به توان توی این قسمت نیز برقراره. ➡

حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$$21. \sqrt[4]{\sqrt{5^3} \sqrt{5}}$$

$$22. \sqrt[3]{2^{\frac{2}{5}}}$$

$$23. \sqrt{16^{-0/5}}$$

---

$$24. 81^{0/125}$$

$$25. 16\sqrt{8}$$

---

$$26. \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^5} \sqrt{y^2}}{\sqrt[6]{z^4}}}$$

---

$$27. 0/027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0/75}$$

---

$$28. \left(a^{\frac{1}{4}} \times y^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} \times a^{\frac{10}{3}} \times y^{\frac{4}{5}}$$

---

$$29. \left( \sqrt[3]{\frac{x}{y}} \right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}^{-1}$$

$$30. \frac{\sqrt{\frac{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x}{y}}}}{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^3}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^3}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}}}}$$

## درس چهارم: عبارت های جبری

❖ آنچه در این درس میبینی

- آشنایی با عبارت های جبری
- اتحاد ها
- تجزیه

## از سال گذشته در مورد اتحاد ها چی میدونی ؟

۱. به یک تساوی شامل متغیر گفته می شود که به ازای تمام مقادیر متغیر تساوی برقرار باشد اتحاد گفته می شود.
۲. اتحاد های مهم جبری به صورت زیر هستند.
- (a) اتحاد مربع دو جمله ای : هنگامی از این اتحاد استفاده می شود که یک دو جمله ای به توان ۲ رسیده باشد.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(b) اتحاد مزدوج : زمانی از این اتحاد استفاده می شود که دو تا دو جمله ای که فقط در یک علامت با هم فرق دارند در هم ضرب

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

شوند.

(c) اتحاد جمله مشترک :

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)(a) + (b) \times (c)$$

### ❖ اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

زمانی از این اتحاد استفاده میشه که به دو جمله ای و به سه جمله ای در هم ضرب بشن. ارتباط موجود بین این دو را در تساوی زیر ببین.

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

### ❖ اتحاد مکعب دو جمله ای

زمانی از این اتحاد استفاده میشه که یک دو جمله ای به توان ۳ برسه.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

### ❖ تجزیه

یعنی تبدیل یک چند جمله ای به حاصل ضرب دو یا تجزیه ، چند جمله ای

### 👉 روش های تجزیه

۱. فاکتور گیری : در این روش از عامل مشترک بین جمله ها فاکتور گرفته ، جمله ها را به این عامل تقسیم کرده و در پرانتز می نویسیم .

- (a) فاکتور می تواند یک عدد مخالف ۱ باشد . در این صورت بزرگترین عددی خواهد بود که همه ضرایب بر آن بخش پذیر باشند
  - (b) فاکتور می تواند متغیر باشد. در این صورت متغیر مشترک با توان کمتر خواهد بود.
  - (c) فاکتور می تواند ترکیبی از دو حالت بالا باشد.
۲. استفاده از اتحاد:

- (a) اتحاد مزدوج : زمانی استفاده می شود که یک دو جمله ای به صورت مربع - مربع داشته باشیم.
- (b) اتحاد جمله مشترک : زمانی از این اتحاد استفاده می شود که یک سه جمله ای به صورت  $x^2 + bx + c$  داشته باشیم .

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد



در این صورت جمله مشترک  $x$  خواهد بود و برای تعیین اعداد از جدول زیر کمک می گیریم .

مثبت C	C ضرب دو عدد و b جمع دو عدد	هر دو عدد با b هم علامت
C منفی	C ضرب دو عدد و b تفریق دو عدد	فقط عدد بزرگتر با b هم علامت

(c) اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله: تجزیه را طبق شکل زیر انجام می دهیم .

$$a^3 \pm b^3 = (a + b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

iii. در کنار روش های اصلی که برای تجزیه گفته شد، روش های دیگری نیز مانند روش A یا روش دسته بندی هم وجود دارد که

در تمرین ها به آنها خواهیم پرداخت.



• حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد ها بنویسید .

1.  $(x + 4)^2$

2.  $(x - \frac{1}{4})^2$

3.  $(2x - 1)(2x + 7)$

4.  $(x + y + 1)(x + y - 1)$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

5.  $(\sqrt{12} - \sqrt{3})^2$

6.  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

7.  $(2x + 3)^2 + (3 - 2x)^2$

8.  $(3x - 2)^3$

9.  $(2x - y^2)^2$

10.  $(x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

11.  $\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)^2$

12.  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 2)(2x + 1)$

13.  $(101)^3$

14.  $(1 + x^2 + x^4)(1 - x^2)$

15.  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3)$

16.  $(a - b - c)^2 - (a + b - c)^2$



• عبارات زیر را تجزیه کنید.

17.  $ab - a^2b^2$

18.  $(a + b)^3 + (a - b)^3 - 2b$



19.  $x^2 + 6x + 9$



20.  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$



21.  $x^6 - 27$

22.  $x^3 + 6x^2 + 9x$

23.  $x^6 - y^6$

24.  $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 - 4abcd$

25.  $4a^2 - b^2 - 2b + 4a$

26.  $x^3 - x^2 - x + 1$

27.  $a^4 - 2a^2 + 49$

\_\_\_\_\_

28.  $x^2y^2 - x^2y^3 - 1 + y$

\_\_\_\_\_

29.  $4a^4 - 64$

\_\_\_\_\_

30.  $x^5 + x + 1$

31.  $(x + 1)^3 + 8$

\_\_\_\_\_

32.  $4x^4 + 1$

\_\_\_\_\_

33.  $a + b + a^2 - b^2$

\_\_\_\_\_

34.  $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

35.  $9x^2 - 3x - 2$

---

36.  $8 - 2x - x^2$

---

37.  $2 - by - b^3y^3$

---

38.  $x^2 + \frac{1}{x^2}$

• فرض کنید  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ ، حاصل عبارات زیر را بیابید.

39.  $x^2 - \frac{1}{x^2}$

---

40.  $x^3 + \frac{1}{x^3}$

---

41.  $x^3 - \frac{1}{x^3}$

---

42.  $x^4 + \frac{1}{x^4}$

۴۳. اگر  $a^2 - 14a + 49 = 0$  باشد  $a^6$  را بیابید.

۴۴. در تجزیه  $x^4 + 3x - 2$  یکی از عبارت های  $x^2 - x + 2$  است، عبارت دوم را بیابید.

• حاصل عبارت های زیر را بیابید.

45.  $\frac{x}{x^3-27} + \frac{x-2}{x+3}$

46.  $\frac{3}{x+y} - \frac{1}{x^3+y^3}$

47.  $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x}{x^2-1}$



$$48. \frac{13}{2x-6} - \frac{2x}{x^2-9}$$

$$49. \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \div (x+y)$$

$$50. \frac{m^3-n^3}{(mn-n^2)^2} \div \frac{mn+n^2}{m^2-n^2}$$

$$51. a \div \frac{a-1}{2} - \frac{a^3+3a(a-1)-1}{2a^2+2a} \times \frac{-4a}{a^2-2a+1} - \frac{4a^2}{a^2-1}$$

$$52. \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}$$

$$53. \frac{2}{3-\sqrt{7}}$$

• مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

54.  $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

55.  $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

56.  $\frac{x-2}{x\sqrt{2}-2\sqrt{x}}$

57.  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1}}$

58.  $\frac{1}{\sqrt{x^3y}}$

59.  $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+2}}$

60.  $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

61.  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}$

62.  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$

فصل چهارم :  
معادلات و نامعادله ها

۱. معادله درجه دوم و روش حل آنها

۱۱. سهمی

۱۱۱. تعیین علامت

درس اول معادله درجه دوم و روش حل آنها

• چی باد میگیری تو این درس :

❖ حل معادله درجه دوم به روش

- تجزیه
- ریشه گیری
- مربع کامل
- دلتا

❖ معادله درجه دوم:

معادله ی  $ax^2 + bx + c = 0$  را یک معادله درجه دوم می‌گیریم.

❖ روش های حل معادله درجه دوم :

I. تجزیه : اگه تو تجزیه یک معادله داشته باشیم  $AB = 0$  آنگاه  $A=0$  یا  $B=0$

✓ فاکتور گیری :

معادلاتی به روش  $ax^2 + bx = 0$  را همیشه از این روش حل کرد. در این حالت جواب ها به صورت صفر و  $\frac{-b}{a}$  هستند.

✓ اتحاد: با استفاده از اتحاد مزدوج یا اتحاد جمله مشترک :

II. روش مربع کامل :

معادلاتی به صورت  $x^2 + bx + c = 0$  را همیشه با این روش حل کرد. کافیه نصف ضریب  $x$  را به توان ۲ رسانده و به

دو طرف معادله اضافه کنی. سپس دو طرف را مربع کامل کرده و از دو طرف جذر بگیر و جواب ها را پیدا کن.

III. حل معادله درجه دوم در حالت کلی :

ابتدا مقدار  $\Delta$  را از فرمول  $\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  یافته با توجه به مقدار آن ریشه ها را می یابیم.

- $\Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$  ریشه ندارد

IV. روش ریشه گیری: در این روش معادله را به صورت  $x^2 = a$  نوشته و سپس جواب را از روابط  $\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$  بدست می آوریم.

### تمرین

• معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

1.  $x^2 - 8x = 9$

2.  $x^2 - 7x = 0$

3.  $25x^2 + 5x = 0$

4.  $x^3 + x^2 = 56x$

5.  $\frac{-1}{2}x = \frac{8}{3}x^2$

6.  $8x^2 - 7x - 1 = 0$

• معادلات زیر را به روش ریشه گیری (ریشه زوج) حل کنید .

7.  $(5x - 4)^2 - 9 = 0$

8.  $(2x - 1)^2 + 16 = 0$

9.  $x^2 - 4x = 21$

10.  $x^2 + 6x = -25$

• معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید .



11.  $5x^2 - 6x = 8$

12.  $3x^2 + 2x = 5$

13.  $x^2 + 5x = 1$

14.  $2x^2 - 5x - 3 = 0$

• معادلات زیر را به روش دلتا حل کنید .

15.  $4x^2 + 4x = 7$

16.  $7x^2 - 5x + 2 = 0$

17.  $(x + 1)^3 - x^3 = 1$

18.  $14x^2 + 2x = 150$

• معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید .

19.  $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

20.  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

21.  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$

۲۲. معادله  $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$  را حل کنید.

۲۳. یکی از ریشه های معادله درجه دوم  $2x^2 + mx + 3m - 5 = 0$  برابر یک است. ریشه دیگر را بیابید.

۲۴. مقدار  $m$  را طوری بیابید که معادله  $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$  دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه را بیابید.

۲۵. حدود  $m$  را طوری بیابید که معادله درجه دوم  $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$  ریشه حقیقی نداشته باشد.

---

۲۶. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود حاصل برابر  $\frac{5}{6}$  می شود؟

۲۷. طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای به صورت  $2x + 2$  و  $2x + 1$  و  $2x$  است. محیط مثلث را بیابید.

۲۸. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوریکه فاصله آن تا هر طرف اتاق با هم برابر است. اگر نساخت قالی برابر ۸ متر مربع باشد فاصله قالی تا هر طرف اتاق را بیابید.

۲۹. به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه های حقیقی معادله  $mx^2 + 3x + m^2 = 2$  معکوس یکدیگرند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- ۱) ۲-   
  ۲) ۱-   
  ۳) ۱   
  ۴) ۲

۳۰. به ازای کدام مقدار  $m$  عدد  $\frac{1}{8}$  واسطه ی عددی بین دو ریشه حقیقی معادله  $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$  است؟

- ۱) ۳   
  ۲) ۳-   
  ۳) ۴   
  ۴) ۴-

۳۱. ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  یک واحد کمتر است؟ (سراسری تجربی ۹۴)

a)  $x^2 - 3x + 1 = 0$

b)  $x^2 + 3x + 1 = 0$

c)  $x^2 - 5x + 2 = 0$

d)  $x^2 + 5x + 2 = 0$

درس دوم: سهمی

❖ چی قراره یاد بگیری :

- معادله سهمی
- رسم نمودار سهمی



← بررسی نمودار تابع  $y = ax^2 + bx + c$

(a) بهش می گن سهمی قائم

(b) مختصات نقطه راس در این تابع به صورت زیر همیشه :

$$\diamond S \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

(c) هر تابع درجه دوم دارای یک محور تقارن به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  و خطی که محور تقارن را روی خود منحنی قطع می کند خط  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  است .

(d) هر تابع درجه دوم محور  $y$  را در نقطه  $(0, c)$  قطع می کند . محل برخورد تابع با محور افقی همون ریشه های تابع را نشون میده .

### ❖ روش رسم سهمی

اگر یک تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  باشد ابتدا از رابطه  $x = -\frac{b}{2a}$  طول نقطه راس سهمی را

می یابیم و با جایگذاری آن در معادله عرض این نقطه نیز بدست می آید. سپس دو نقطه در دو طرف راس انتخاب کرده و راس را به

آنها وصل می کنیم.

تمرین

• نمودار سهمی های زیر را رسم کنید .

32.  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

33.  $y = 2x - 3 - x^2$

34.  $y = 6x^2 - 6x + 24$

۳۵. اگر  $x + 2y = 30$  باشد ماکزیمم مقدار  $xy$  را بیابید .

۳۶. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است . با این طناب می خواهیم زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن به رودخانه است را حصار کنیم بیشترین مساحتی که محصور میشود را بیابید .

۳۷. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می توان محصور کرد ۶۴۸ مترمربع است. طول طناب را بیابید.

۳۸. مقدار  $m$  را طوری بیابید که ماکزیمم سهمی  $y = mx^2 + 4x + 5$  برابر ۹ باشد.

۳۹. مستطیلی به ابعاد ۲۰ و ۶۰ مفروض است. اگر یک واحد به عرض آن اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می شود. در بین مستطیل هایی که به این صورت ساخته میشود بیشترین مساحت را بیابید.

۴۰. اگر خط  $x=2$  محور تقارن سهمی به معادله  $y = x^2 + mx + m$  باشد مختصات رأس سهمی را بیابید.

۴۱. در صورتی که منحنی تابع  $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$  محور افقی را در دو طرف محور عرض ها قطع کند آنگاه حدود تغییرات  $a$  چگونه است؟

- a)  $a > 6$  یا  $a < 2$
- b)  $2 < a < 6$
- c)  $a < \frac{3}{2}$
- d)  $a > \frac{3}{2}$

۴۲. اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد مقادیر  $a, b, c$  را طوری بیابید که این سهمی محور  $y$  را در نقطه ای به عرض ۳ و محور  $x$  را در نقطه ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه  $A(2,3)$  بگذرد.

۴۳. تابع  $y = ax^2 + x + b$  مفروض است. ضرایب  $a, b$  را چنان بیابید که منحنی از نقطه  $A(2, -2)$  بگذرد و محور  $y$  ها را در نقطه ای به عرض 3 قطع کند.

۴۴. در تابع  $y = ax^2 + bx - 2$  مقادیر  $a, b$  را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه  $A(-1, 2)$  بگذرد و محور  $x$  را در نقطه ای به طول 1 قطع کند.

۴۵. اگر  $f(x) = x^2 + ax - 3b$  مقادیر  $a, b$  را طوری بیابید که این سهمی محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه  $(1, -4)$  بگذرد.

۴۶. اگر  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد  $a, b, c$  را به گونه ای بیابید که این سهمی محور  $y$  را در نقطه ای به عرض ۴ و محور  $x$  را در نقطه ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه  $(1, 2)$  نیز بگذرد.

## درس سوم: تعیین علامت

❖ هدف این درس چیه:

- یادگیری تعیین علامت چند جمله ای درجه اول
- یادگیری تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم
- حل نامعادله

دو جمله ای درجه اول  $y = ax + b$ : کافی است عبارت را مساوی صفر قرار داده، ریشه آن را بیابیم. سپس با استفاده از جدول زیر تعیین علامت را انجام می دهیم .

$x$	ریشه
$y$	مخالف علامت $a$ 0      موافق علامت $a$

سه جمله ای درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$ : عبارت را مساوی صفر قرار داده، مقدار  $\Delta$  را می یابیم.  
 $\Delta = b^2 - 4ac$

سپس با توجه به مقدار  $\Delta$  یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت :

1) اگر  $\Delta > 0$  معادله دارای دو ریشه  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  است و جدول تعیین علامت به صورت زیر است :

$x$	ریشه کوچکتر	ریشه بزرگتر
$y$	مخالف علامت $a$ 0      موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$ 0      موافق علامت $a$

2) اگر  $\Delta = 0$  معادله دارای یک ریشه  $x = \frac{-b}{2a}$  است .

$x$	ریشه
$y$	مخالف علامت $a$ 0      موافق علامت $a$

3) اگر  $\Delta < 0$  باشد معادله ریشه ندارد .

$x$	
$y$	مخالف علامت $a$

اگر عبارتی دارای توان بود یا تو قدر مطلق بود به این صورت عمل کن .

- i. توان های فرد را اصلن نگاه نکن .
- ii. توان های زوج همیشه علامت را مثبت میکنند .
- iii. قدر مطلق هم مثل توان زوج عمل کن .

❖ حل نامعادله: برای حل نامعادله کافی است که عبارت را تعیین علامت کنیم و سپس با توجه به جهت نامساوی، جواب را انتخاب می کنیم



• ویژگی های زیر برای حل نامعادله به دردت می خوره

- I.  $a < b, b < c \Rightarrow a < c$
- II.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- III.  $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$
- IV.  $a < b \xrightarrow{c>0} ac < bc$
- V.  $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- VI.  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
- VII.  $a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$
- VIII.  $a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$

❖ حل نامعادلات قدر مطلق

• ویژگی های زیر به دردت می خوره

- I.  $|a| > 0$
- II.  $|a| = |-a|$
- III.  $\sqrt{a^2} = |a|$
- IV.  $|a||b| = |ab|$
- V.  $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$
- VI.  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- VII.  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- VIII.  $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$
- IX.  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$
- X.  $|a + b| \leq |a| + |b|$

• عبارات زیر را تعیین علامت کنید .

## تمرین

$$47. y = 2x^2 - x - 3$$

$$48. y = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

$$49. y = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 3)}$$

$$50. y = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

51.  $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

• نامعادله های زیر را حل کنید.

52.  $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$

53.  $-1 < \frac{x+1}{1-x} \leq 2$

54.  $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$

$$55. \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} > \frac{2x+4}{x-2}$$

$$56. \frac{-1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2}$$

$$57. A = \sqrt{-7x^2 - 3x + 4}$$

• حدود  $x$  را چنان بیابید که عبارات زیر با معنی باشد.

$$58. B = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

- حدود  $m$  را طوری بیابید که نامساوی زیر همواره برقرار باشد .

$$59. \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -1$$

- معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید .

$$60. |x^3 - 9x| = 0$$

$$61. |3x - 5| = 4$$

$$62. |1 - x| \geq 2$$

63.  $|2x - 1| < 1$

64.  $|2x - 1| < x$

65.  $|x| + x = 2$

66.  $|x^2 - 1| < 1$

67.  $|x - 1| + |x + 1| = 2$

68.  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

# فصل پنجم

## تابع

- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن
- درس دوم دامنه و برد تابع
- درس سوم: انواع تابع



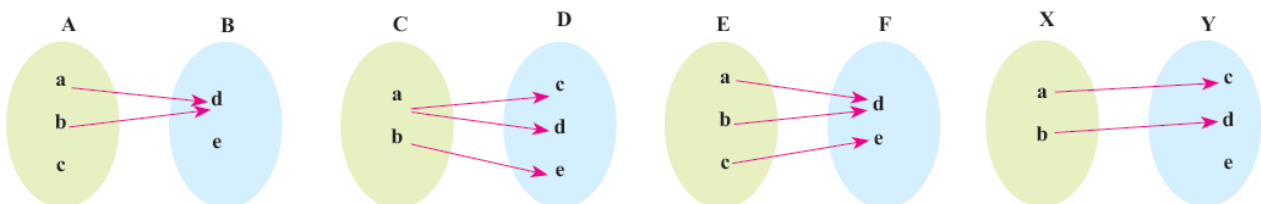
## درس اول تابع و بازنمایی های آن

### تابع

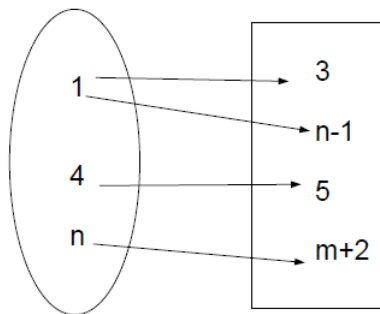
- **تعریف تابع:** قانون یا ضابطه ای است که بین دو مجموعه تعریف می شود و به هر عضو از مجموعه اول یک و تنها یک عضو از مجموعه دوم را نسبت می دهد. تابع را به صورت های مختلف می توان نمایش داد.
- در هر یک از موارد زیر رابطه ای بین دو پدیده ذکر شده است. توضیح دهید کدام تابع است؟ با دلیل؟
  ۱. الف) رابطه بین افراد و سن آنها
  ۲. ب) رابطه بین دانش آموزان یک کلاس و نمره ریاضی پایان ترم آنها
  ۳. ج) رابطه بین سال های مختلف و میزان بودجه اختصاص یافته به آنها در یک کشور
  ۴. د) رابطه بین افراد و دمای بدن آنها در یک زمان خاص
  ۵. ه) رابطه بین ضلع یک مثلث و مساحت آن
  ۶. و) رابطه بین افراد و غذا های مورد علاقه آنها
- **باز نمایی های مختلف تابع**
  - **نمودار پیکانی:** در این روش از هر عضو مجموعه اول یک فلش به سمت اعضای مجموعه دوم خارج می شود. نموداری تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک فلش خارج شود.

### تمرین

۱) در نمودارهای زیر کدام تابع هست و کدام تابع نیست؟



شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد



۲) اگر نمودار بیکانی مقابل یک تابع را نشان دهد آنگاه  $m + n$  چقدر است ؟

### • نمایش تابع به صورت زوج مرتب

به دوتایی  $(a, b)$  زوج مرتب می‌گوییم. دقت کنید که ترتیب قرار گرفتن اعداد در پرانتز مهم است. به این دلیل به آن مرتب‌گوئیم. یک زوج مرتب در واقع مختصات یک نقطه در صفحه را نشان می‌دهد.

### • یک مجموعه شامل زوج مرتب‌ها هنگامی تابع را نشان می‌دهد که مولفه (مختص) های اول زوج‌های مرتب با هم مساوی نباشند.

مثال) مجموعه  $f$  تابع است

$$\diamond f = \{(4,5), (3,2), (7,1)\}$$

$g$  تابع نیست

$$\diamond g = \{(7,3), (2,1), (7,4)\}$$

### تمرین

۱) رابطه  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$  چند زوج مرتب دارد؟ آنها را بنویسید.

۲) کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را نشان می‌دهد.

- A.  $\{(-1,0), (0,1), (2,3), (\sqrt{-1}, 4)\}$
- B.  $\{(-1,2)\}$
- C.  $\{(0,0), (2,1), (3,2), (-1,0), (2,-2)\}$
- D.  $\{(1,1), (2,3), (-1,-1), (-2,5)\}$

۳) مقادیر  $a, b$  را به گونه ای بیابید که مجموعه زیر تابع باشد

$$f = \{(1,3), (a-2,6), (1,2a-3), (1,b)\}$$

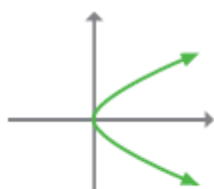
۴) مقدار  $m$  را طوری بیابید که رابطه  $A = \{(3, m^2), (2,1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  تابع باشد.

## • بررسی تابع از روی نمودار

یک نمودار هنگامی یک تابع را نشان می دهد که هر خط عمودی حداکثر یک بار نمودار را قطع کند.

### تمرین

۱) کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می دهند



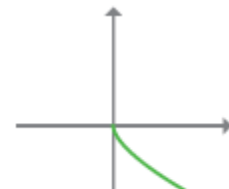
(ج)



(د)



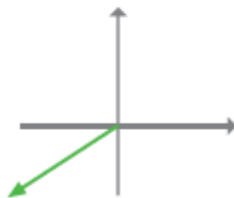
(هـ)



(و)



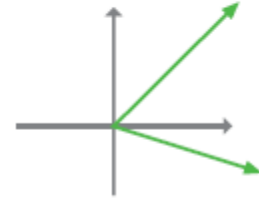
(ز)



(ح)



(ط)



(ی)

## درس دوم: دامنه و برد تابع

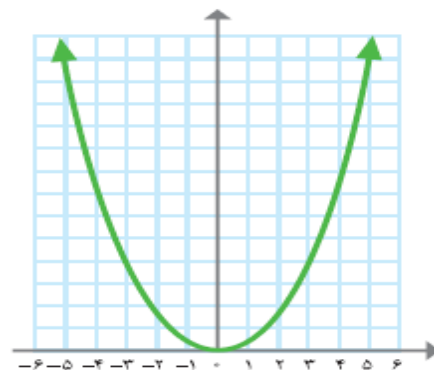
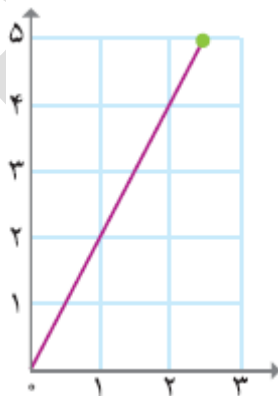
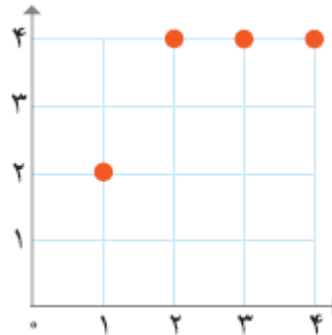
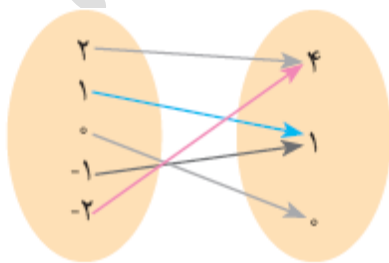
### ○ دامنه و برد تابع

- دامنه تابع: مجموعه تمام مولفه های اول زوج های مرتب تابع را دامنه می گوئیم .
- برد تابع: مجموعه تمام مولفه های دوم زوج های مرتب تابع را برد گوئیم .

- (۱) نمودار ون: اعضای که از آنها پیکان خارج می شود دامنه و اعضای که به آنها پیکان وارد می شود برد نامیده می شود.
- (۲) زوج مرتب: مولفه های اول دامنه و مولفه های دوم برد هستند
- (۳) نمودار: تصویر نمودار روی محور افقی دامنه و روی محور عمودی برد است.

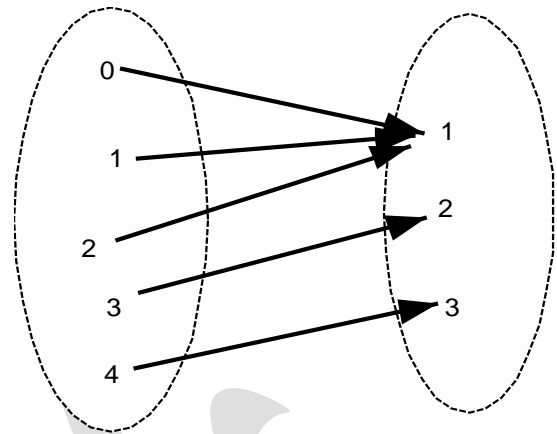
### تمرین

(۱) دامنه توابع زیر را بیابید.



- $f = \{(1,4), (2,5), (5,2), (4,3)\}$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

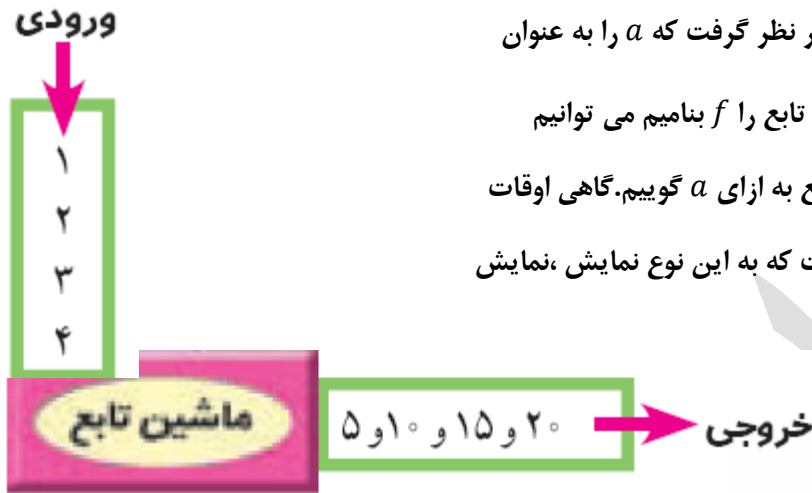


۲) رابطه ای بنویسید که دامنه آن بی نهایت عضو داشته باشد ولی برد آن تک عضوی باشد آیا این رابطه تابع است؟

۳) رابطه ای بنویسید که دامنه آن شامل دو عضو بوده ولی برد آن بی نهایت عضو داشته باشد. آیا این رابطه، تابع است؟

۴) رابطه ای بنویسید که دامنه آن بینهایت عضو داشته باشد ولی برد آن تک عضوی باشد. آیا این رابطه، تابع است؟

## • نمایش جبری تابع



❖ یک تابع را می توان به عنوان یک ماشین در نظر گرفت که  $a$  را به عنوان

ورودی گرفته و  $b$  را به عنوان خروجی تولید می کند اگر تابع را  $f$  بنامیم می توانیم

بنویسیم:  $f(a) = b$  که در این حالت  $b$  را مقدار تابع به ازای  $a$  گوئیم. گاهی اوقات

یک تابع را می توان برحسب یک مقدار جبری نوشت که به این نوع نمایش، نمایش

جبری گوئیم و می نویسیم:  $y = f(x)$

برای تعیین مقدار تابع در یک نقطه کافیست به جای  $x$ ، عدد داده شده را قرار دهیم تا مقدار تابع بدست آید.

• مثال) اگر تابع  $f(x) = 4x^2 - 5$  داده شده باشد مقدار  $f(0), f(2), f(-1)$  را بیابید.

❖  $f(0) = 4 \times (0)^2 - 5 = -5$

❖  $f(2) = 4 \times 2^2 - 5 = 11$

❖  $f(-1) = 4 \times (-1)^2 - 5 = -1$

• مثال) اگر تابع  $f(x+1) = x^2$  آن گاه  $f(x)$  را بیابید. سپس  $f(1)$  را بیابید.

❖  $x+1 = a \Rightarrow x = a-1 \Rightarrow f(a) = (a-1)^2$

➤  $f(1) = 0$

تمرین

۱) تابع  $f(x) = x^2 - 4$  داده شده است، مقادیر زیر را حساب کنید .

❖  $f(3), f(5), f(f(3))$

۲) مقادیر  $a, b$  را چنان بیابید که مجموعه  $g = \{(-1, b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$  یک تابع باشد. (خرداد ۹۰)

۳) اگر  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  باشد،  $f(-\frac{1}{x})$  را یافته و درستی تساوی  $f(x) \times f(-\frac{1}{x}) = -1$  را بررسی کنید.

۴) اگر  $f(x-1) = \frac{x+3}{x+1}$  باشد ضابطه تابع  $f(x)$  را بیابید.

۵) اگر تابع  $f(x-1) = \frac{x}{x+1}$  باشد ضابطه  $f(x)$  را یافته و  $f(3)$  را بیابید.

۶) تابع  $f(x) = 3^x$  است مقدار  $f(1-x) + f(x+1)$  را بیابید.

۷) هرگاه  $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{2-x}}$  باشد مقادیر  $f(1), f\sqrt{x+3}$  را بیابید.

## توابع خطی

❖ توابعی هستند که معادله آنها به صورت  $y = ax + b$  باشد. تذکر: ممکن است یک تابع خطی بخشی از یک خط باشد.

یادآوری: معادله خط گذرنده از یک نقطه با داشتن شیب

$$* y - y_A = m(x - x_A)$$

فرمول شیب هنگامی که دو نقطه از خط را داریم

$$* m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

## تمرین

(۱) برای یک تابع خطی می دانیم می دانیم که  $f(2) = 5, f(-3) = -5$  نمایش جبری تابع را بنویسید .

(۲) هرگاه سه نقطه  $A(-2,1), B(K, K - 1), C(1,0)$  از یک تابع خطی حاصل شده باشند مقدار  $K$  را بیابید .

(۳) معادله خطی را مشخص کنید که محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول  $\frac{-3}{2}$  قطع کند و از نقطه  $(1,5)$  بگذرد .



۴) سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت تولیدی حاصل می شود از رابطه  $y = -200 + 5x$  به دست می آید. که

در آن  $x$  تعداد کالای تولیدی و  $y$  سود حاصل بر حسب میلیون تومان است

الف) نمودار خط  $y = -200 + 5x$  را برای  $x \geq 0$  رسم کنید.

ب) این شرکت چند کالا باید تولید کند تا سود ۱۰۰ میلیون تومان به دست آورد؟

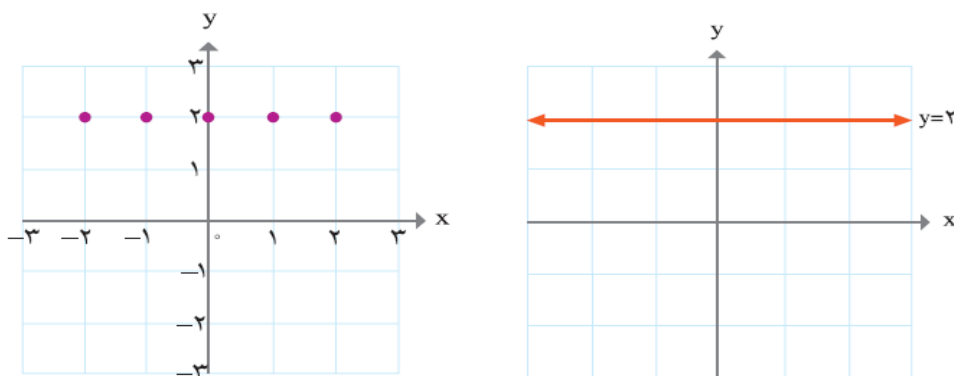
ج) محل برخورد این خط با محور  $x$  چه چیزی را نشان می دهد؟

۵) آیا جدول زیر می تواند یک تابع خطی را نشان دهد .

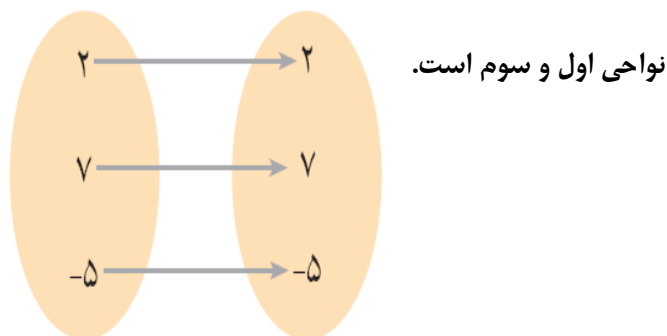
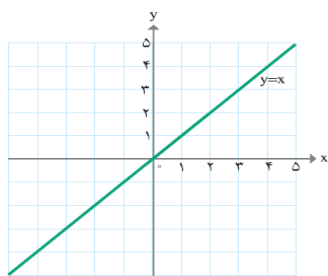
$x$	1	3	4	7	11
$y$	8	14	17	20	38

## درس سوم: انواع تابع

❖ توابع ثابت: فرم این توابع به صورت  $y = k$  است که در آن  $k$  یک عدد حقیقی است. مانند  $y = 3$  نمودار این توابع به صورت خط راستی موازی محور افقی است.



❖ توابع درجه اول (خطی): قبلاً مورد بررسی قرار گرفت یکی از مهم ترین آنها آن ها تابع همانی است  $y = x$  که نیمساز



❖ توابع درجه دوم: نمودار این توابع سهمی نامیده می شود. ساده ترین این توابع به صورت  $y = x^2$  است.

نمودار های زیر مربوط به دو تابع درجه ۲ هستند.

معادله کلی این توابع به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  می باشد.

اگر  $a > 0$  باشد دهانه این توابع به سمت بالا است و نقطه راس آنها نقطه  $min$  و در غیر این صورت دهانه به سمت پایین و نقطه راس آنها نقطه  $max$  است.

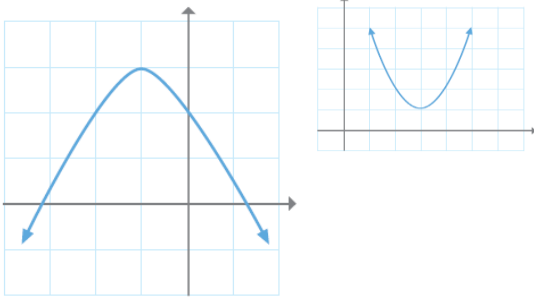
طول نقطه راس از رابطه  $x = \frac{-b}{2a}$  به دست می آید. برای تعیین

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

عرض نقطه یا مستقیماً طول نقطه را جایگزین می کنیم یا از

$$\text{رابطه } y = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ به دست می آوریم.}$$

دامنه همه توابع چند جمله ای در حالت کلی  $R$  است مگر آنکه خلاف آن بیان شود



## تمرین

(۱) توابع زیر را رسم کنید

- $y = x^2 - x - 2$
- $y = x^2 + 6x + 5$

(۲) تابع  $y = ax^2 + x + b$  مفروض است. ضرایب  $a, b$  را چنان بیابید که منحنی از نقطه  $A(2, -2)$  بگذرد و محور  $y$  ها را در

نقطه ای به عرض 3 قطع کند.

(۳) دو تابع  $y = x^2 + ax + b$  و  $y = x + 2b$  مفروضند.  $a, b$  را طوری بیابید که نمودارهای این دو تابع روی محور  $x$  هادر نقطه ای

به طول 2 یکدیگر را قطع کنند.

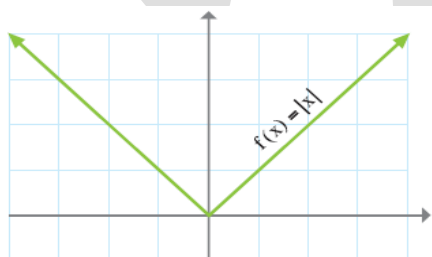
۴) در سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مقادیر  $a, b, c$  را به گونه ای بیابید که سهمی خط  $y = x + 1$  را در نقاطی به طول های  $۱$  و  $۲$  و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض  $-۱$  قطع کند.

۵) در تابع  $y = ax^2 + bx - 2$  مقادیر  $a, b$  را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه  $A(-1, 2)$  بگذرد و محور  $x$  را در نقطه ای به طول  $۱$  قطع کند

❖ **توابع گویا:** توابعی هستند کسری که صورت و مخرج آنها به صورت چند جمله ای می باشد. (چند جمله ای مخرج باید حداقل از درجه  $۱$  باشد)

دامنه این توابع از رابطه مقابل به دست می آید

$$* D = R - \{\text{ریشه مخرج}\}$$



❖ **تابع قدر مطلق:** ساده ترین نوع این توابع به صورت  $y = |x|$  است

که به هر عضو دامنه قدر مطلق آنرا نسبت می دهد.

❖ دامنه این تابع  $R$  و برد آن اعداد حقیقی نامنفی است

❖ توابع چند ضابطه ای: در بعضی توابع، دامنه تابع به چند قسمت تقسیم شده و برای هر یک

به تنهایی یک ضابطه تعریف می شود. این توابع را چند ضابطه ای گوئیم.

اگر بخواهیم مقدار تابع را در این توابع بیابیم باید مقدار متغیر را در ضابطه مربوط به ناحیه خودش قرار دهیم.

$$\text{مثال) در تابع } f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x < 2 \\ x^2 - 3 & 2 \leq x \leq 5 \\ 1 + 2x & x > 5 \end{cases} \text{ مقادیر زیر را بیابید.}$$

- A)  $f(3) = 3^2 - 3 = 6$
- B)  $f(6) = 1 + 2 \times 6 = 13$

### تمرین

$$\text{(۱) اگر } f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ باشد مقدار عددی عبارت } \frac{f(f(-2))}{f(1)+f(-1)} \text{ را بدست آورید.}$$

$$\text{(۲) در تابع } f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & x \geq 1 \\ 1 + x^2 & x < 1 \end{cases} \text{ مقدار } f(f(-1)) \text{ را بیابید.}$$

$$\text{(۳) تابع } f \text{ به صورت } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + x & x \geq 1 \\ \sqrt{2} - x & x < 1 \end{cases} \text{ داده شده است. برابری های زیر را کامل کنید.}$$

- $f(\sqrt{2} - 1) = \dots$      $f(3 - \sqrt{2}) = \dots$      $f(-\sqrt{2}) = \dots$
- $f(0) = \dots$      $f(f(-1)) = \dots$

۴) نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$  را رسم کنید.

۵) تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ 1 + \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$  مفروض است. این تابع را رسم کنید و  $f(f(-1))$  را بیابید.

۶) نمودار تابع  $y = -2|x - 3|$  را رسم کنید.

۷) در تابع  $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 2 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$  مقدار  $f(1 - \sqrt{3})$  را بیابید.

۸) اگر  $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$  باشد  $f(f(-4))$  را بیابید.

۹ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & x > 0 \\ 7 & x = 0 \\ 7x - 4 & x < 0 \end{cases}$  باشد مطلوب است حاصل  $f(f(f(0)))$ .

۱۰ اگر  $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 0 \\ 2bx^2 & x \geq 0 \end{cases}$  را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه  $A(2, -3)$  بگذرد و داشته باشیم  $f(-2) = 3$ .

۱۱ نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} + x^2$  را رسم کنید.

۱۲ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

• A)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$

• B)  $f(x) = -|3x + 1|$

۱۳) تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$  داده شده است

الف) نمودار تابع را رسم کنید .

ب) حاصل  $f(f(-1))$  را بیابید .

۱۴) نمودار  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ 1 - \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$  را رسم کرده و  $f(f(-4))$  را به دست آورید

۱۵) تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$  داده شده است .

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید . ب) مقدار  $f(f(-2))$  را محاسبه کنید .



(۱۶) تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید .

الف) نمودار تابع  $f$  را رسم کنید . ب) دامنه تابع  $f$  را به دست آورید .

### رسم نمودار توابع به کمک انتقال

❖ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  در دست باشد

- ① تابع  $y = f(x + a)$ : به اندازه  $a$  واحد نمودار به سمت چپ می رود.
- ② تابع  $y = f(x - a)$ : به اندازه  $a$  واحد نمودار به سمت راست می رود.
- ③ تابع  $y = f(x) + a$ : به اندازه  $a$  واحد نمودار به سمت بالا می رود.
- ④ تابع  $y = f(x) - a$ : به اندازه  $a$  واحد نمودار به سمت پایین می رود.
- ⑤ تابع  $y = -f(x)$ : تابع نسبت به محور  $x$  قرینه می شود.
- ⑥ تابع  $y = kf(x)$ : عرض تمام نقاط در  $k$  ضرب می شود.
- ⑦ ممکن است تابع داده شده ترکیبی از چند حالت بالا باشد.

تمرین

با استفاده از روش انتقال، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

①  $y = -|x - 2| + 3$

②  $y = -(x + 2)^2$

فصل ششم :

شمارش بدون شمردن

- درس اول : شمارش
- درس دوم : جایگشت
- درس سوم : ترکیب و تبدیل

## درس اول و دوم: اصل شمارش و جایگشت

• **اصل جمع:** اگر عمل  $A$  را بتوان به  $m$  روش و عمل  $B$  را به  $n$  روش انجام داد، آنگاه  $A$  یا  $B$  به  $m + n$  روش انجام می شود. دقت کن وقتی از عمل جمع استفاده می کنی که اگر یک عمل انجام شود عمل دیگری قابل انجام نباشد.

مثلاً پدرت بهت گفته چون نمره ریاضیت خوب شده فردا با هم بریم پارک یا سینما. منظورش اینه که یا پارک را انتخاب کن یا سینما را چون وقت نداریم جفتش را بریم. تو، شهرتون ۴ تا سینما و ۱۰ تا پارک دارین که می تونی بری اونجا. پس طبق اصل جمع شما به ۱۴ حالت می تونی انتخاب خودت را داشته باشی.

مثال) شخصی می خواهد از یک شهر به شهر دیگری سفر کند جهت انجام سفر ۳ مسیر زمینی و ۴ مسیر هوایی و ۲ مسیر دریایی وجود دارد این شخص به چند طریق می تواند سفر خود را انجام دهد؟

1. 24
2. 9
3.  $2^9$
4.  $2^{24}$

• **اصل ضرب:** اگر عمل  $A$  را بتوان به  $m$  روش و عمل  $B$  را به  $n$  روش انجام داد، آنگاه  $A$  و  $B$  به  $m \times n$  روش انجام می شود. دقت کن وقتی از اصل ضرب استفاده می کنی که بروزر عمل مانع انجام اون یکی نشه و اعمال یکی پس از دیگری رخ بده

مثال) از شهر اول به شهر دوم ۴ راه و از شهر دوم به شهر سوم ۳ راه وجود دارد. یک مسافر به چند طریق می تواند از شهر اول به شهر سوم و از طریق شهر دوم سفر کند؟

1. 12
2. 7
3.  $2^{12}$
4.  $2^7$

دقت کن که حل تمرینات این فصل از ترکیب دو اصل قبل انجام میشوند.

جایگشت: به هر روش کنار هم قرار گرفتن  $n$  شی متمایز جایگشت گوئیم. تعداد کل جایگشت های  $n$  شی برابر است با:

$$\diamond n! = n \times (n - 1)(n - 2) \times \dots \times 1$$

## تمرین

(۱) معادله  $(2x - x^2)! = 1$  چند جواب طبیعی دارد؟

(۲) با حروف (الف، ب، پ، ت، ر، و) چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت که فقط حرف وسط آن نقطه دار باشند؟

(۳) با ارقام 0,1,2,3,4,5 چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان نوشت به طوری که

الف) تکرار مجاز باشد

ب) تکرار مجاز نباشد.

(۴) ارقام 1,2,3,4,5 را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی های حاصل را بیابید.

۵) اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد حاصل  $A = (n-1)((n-1)! + (n-2)!)$  را بیابید.

۶) حروف کلمه *LAGRANGE* را با جایگشتهای مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

۷) با حروف کلمه *DADRAS* چند کلمه شش حرفی می توان ساخت به طوریکه حروف یکسان کنار هم باشند؟

۸) با اعداد ۲ و ۵ و ۹ چند عدد سه رقمی می توان ساخت به شرطی که هر یک از آنها رقمی تکراری داشته باشند؟

۹) یک قفل رمزی دارای یک رمز ۳ رقمی با ارقام  $\{1,2,3, \dots, 9\}$  است. اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز دو دقیقه طول بکشد حداکثر چقدر طول می کشد تا قفل باز شود؟

۱۰) با ارقام 0,2,3,5 چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام و بخش پذیر بر ۵ می توان نوشت؟

۱۱) چند جایگشت با حروف کلمه TRIANGLE وجود دارد که با حروف بیصدا شروع می شود؟

۱۲) با ارقام صفر تا نه چند عدد زوج سه رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟

۱۳) در پرتاب ۳ تاس سفید و ۱ تاس قرمز ب چند طریق ممکن است تاس های سفید زوج و تاس قرمز مضرب ۳ باشد؟

۱. ۱۱
۲. ۱۸
۳. ۲۷
۴. ۵۴

۱۴) تعداد کلمات ۴ حرفی که می توان با حروف با واژه HISTORY ساخت به طوریکه از حرف بیصدا شروع شده و به حرف بی صدا ختم شوند کدام است؟

۱. ۶۲۵
۲. ۴۰۰
۳. ۱۲۰
۴. ۳۲۰

۱۵) با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان ساخت ؟

1. ۱۶۰
2. ۲۸۰
3. ۳۶۰
4. ۴۲۰

۱۶) با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی کوچک تر از ۵۰۰۰ بدون تکرار می توان ساخت ؟

1. ۴۸۰
2. ۶۲۰
3. ۵۴۰
4. ۳۶۰

۱۷) با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی زوج و کوچک تر از ۵۰۰۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت ؟

1. ۱۲۰
2. ۱۶۰
3. ۲۸۰
4. ۳۲۰

۱۸) با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی کوچک تر از ۵۳۰۰ بدون تکرار می توان ساخت ؟

1. ۵۴۰
2. ۴۸۰
3. ۴۶۰
4. ۵۸۰

۱۹) با استفاده از سه رنگ مختلف به چند طریق می توان یک ساختمان ۵ طبقه را زنگ زد به طوری که هر طبقه یک رنگ و رنگ طبقات مجاور متمایز باشد ؟

1. ۳۲
2. ۴۸
3. ۷۲
4. ۲۴۰

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد



## درس سوم: ترکیب و تبدیل

## ترکیب

انتخاب  $k$  شی از بین  $n$  شی متمایز که ترتیب انتخاب مهم نیست .

- $C(n, k) = C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(a) انتخاب  $k$  شی از بین  $n$  شی به طوری که شی خاصی در انتخاب باشد:

- $\binom{n-1}{k-1}$

(b) انتخاب  $k$  شی از بین  $n$  شی به طوری که شی خاصی در انتخاب نباشد:

- $\binom{n-1}{k}$

☞ از این نکات استفاده کن :

- $\binom{n}{0} = 1$

- $\binom{n}{1} = n$

- $\binom{n}{n} = 1$

- $\binom{n}{n-1} = n$

1.

## تبدیل

تبدیل: انتخاب  $k$  شی از بین  $n$  شی متمایز که ترتیب انتخاب مهم است

- $P(n, k) = P_n^k = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

## تمرین

۱) یک سکه را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای چهارمین بار پشت بیاید در چند حالت ممکن است در پرتاب نهم به این هدف برسیم؟

۳) به چند طریق می توان ۳ تا از حروف کلمه DELAVARAN را انتخاب کرد؟

۴) اگر  $\frac{1}{4}$  زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  شامل عدد ۵ باشند مقدار  $n$  را بیابید.

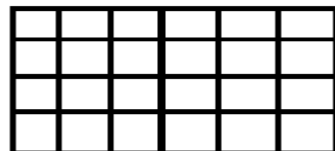
۵) به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه ای چید؟

۶) در چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز رقم های هزارگان و صدگان اعداد فرد هستند؟

۷) می خواهیم به ۵ نفر هر کدام یک جایزه بدهیم. به چند صورت این کار امکان پذیر است به طوری که فرد A قبل از B جایزه بگیرد؟

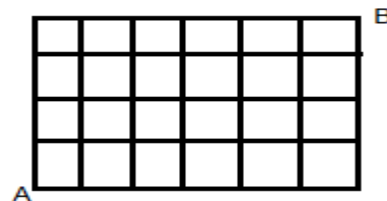
1. ۲۱۰
2. ۳۰۰
3. ۱۵۰
4. ۲۰۰

۸) در جدول شطرنجی مقابل چند مستطیل می توان یافت؟



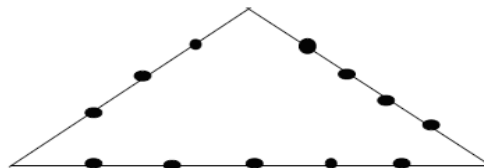
۹) در شبکه مقابل به چند طریق می توان از نقطه A به نقطه B رفت مشروط بر آنکه فقط حرکت به سمت راست و بالا مجاز باشد

1. ۸۰
2. ۱۰۵
3. ۱۶۰
4. ۲۱۰



۱۰) دوازده نقطه روی اضلاع مثلثی مطابق شکل زیر قرار دارد با این ۱۲ نقطه چند مثلث می توان ساخت به طوری که این نقاط رئوس مثلث ها باشند؟

1. ۱۱۰
2. ۱۴۵
3. ۲۰۵
4. ۲۲۰



۱۱) در چند عدد هشت رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ دقیقاً سه رقم ۲ و دو رقم ۴ وجود دارد؟

1.  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times 8!$
2.  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times 2!$
3.  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times 2^3$
4.  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{2}$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۱۲) از هر یک از ۶ منطقه کشوری ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند . به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آنها که دوبدو غیر هم منطقه ای هستند انتخاب کرد ؟

۱. ۵۷۶۰۰
۲. ۶۷۵۰۰
۳. ۷۵۶۰۰
۴. ۷۶۵۰۰

۱۳) شخصی می خواهد از میان ۱۱ دوست خود ۵ نفر را برای صرف شام دعوت کند اگر دو نفر از آنها با یکدیگر قهر باشند و نخواهند با هم در میهمانی حاضر شوند دعوت آن ها به چند طریق امکان پذیر است ؟

۱. ۱۲۶
۲. ۲۵۲
۳. ۳۷۸

۱۴) شخصی می خواهد از میان ۱۱ دوست خود ۵ نفر را برای صرف شام دعوت کند اگر دو نفر از آنها با یکدیگر دوست باشند و بخواهند با هم در میهمانی حاضر شوند دعوت آن ها به چند طریق امکان پذیر است ؟

۱. ۲۱۰
۲. ۸۴
۳. ۱۲۰
۴. ۱۸۴

۱۵) از میان ۶ جفت کفش به چند طریق می توان ۴ لنگه انتخاب کرد به طوری که هیچ جفتی در میان آنها نباشد ؟

۱. ۱۲۰
۲. ۲۴۰
۳. ۶۰
۴. ۳۰

۱۶) از میان ۶ جفت کفش به چند طریق می توان ۴ لنگه انتخاب کرد به طوری که فقط یک جفت میان آنها باشد ؟

۱. ۱۲۰
۲. ۲۴۰
۳. ۶۰
۴. ۳۰

۱۷) از میان ۶ جفت کفش به چند طریق می توان ۴ لنگه انتخاب کرد به طوریکه دقیقا دو جفت میان آنها باشد؟

1. ۱۵
2. ۳۰
3. ۶۰
4. ۱۲۰

۱۸) از میان ۶ جفت کفش که درون کیسه ای ریخته شده به چند طریق می توان ۴ لنگه کفش را انتخاب نمود به طوری که حداقل یک جفت در میان آن ها باشد؟

1. ۶۰
2. ۱۲۰
3. ۲۴۰
4. ۲۵۵

۱۹) به چند طریق می توان از میان ۸ کتاب علمی ۳ کتاب را برگزید و در یک ردیف کتابخانه جای داد؟

1. ۵۶
2. ۲۱۰
3. ۳۳۶
4. ۵۰۴

۲۰) آسانسور یک ساختمان ۸ طبقه از طبقه همکف با ۶ نفر شروع به حرکت می کنند این ۶ نفر به چند طریق می توانند از آسانسور خارج شوند در صورتی که در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود؟

1. ۳۵
2. ۱۶۵
3. ۳۴۰
4. ۸۴۰

۲۱) به چند طریق می توان از میان ۴ نفر دانش آموز تجربی و ۶ دانش آموز ریاضی ۵ نفر را انتخاب نمود و در یک صف قرار داد به

طوری که حداقل ۳ دانش آموز تجربی باشند؟

1.  $66 \times 5!$
2.  $60 \times 50!$
3.  $36 \times 5!$
4.  $30 \times 5!$

۲۲) به چند طریق می توان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب فیزیک متمایز را در یک ردیف کتابخانه جای داد به طوریکه کتب ریاضی و کتب فیزیک یک در میان باشند؟

1.  $11!$
2.  $5!7!$
3.  $5!6!$
4.  $2!5!6!$

۲۳) به چند طریق از میان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب فیزیک متمایز ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فیزیک را انتخاب نمود و در یک ردیف کتابخانه جای داد؟

1.  $5!$
2.  $30 \times 5!$
3.  $90 \times 5!$
4.  $150 \times 5!$

۲۴) به چند طریق از میان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب فیزیک متمایز ۳ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را انتخاب نمود و به طور یک در میان در یک ردیف کتابخانه جای داد؟

1.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}3!3!$
2.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}2!3!3!$
3.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}6!$
4.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}2!6!$

۲۵) به چند طریق از میان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب فیزیک متمایز ۳ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را انتخاب نمود و در یک ردیف جای داد به طوریکه کتب هر مبحث کنار هم باشند؟

1.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}3!3!$
2.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}2!3!3!$
3.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}6!$
4.  $\binom{6}{3}\binom{5}{3}2!6!$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۲۶) در یک همایش ۵ نفر برای سخنرانی ثبت نام کرده اند. به چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد به طوریکه بین سخنرانی دو نفر مورد نظر فقط یک نفر سخنرانی کند؟

1. ۲۰
2. ۲۴
3. ۳۶
4. ۴۰

۲۷) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت که در آن هیچ دو عدد زوجی متوالی نباشند؟

1.  $\binom{6}{4} 4! 5!$
2.  $\binom{6}{4} 9!$
3.  $4! 5!$
4.  $\binom{9}{5} 4! 5!$

۲۸) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ چند عدد ۹ رقمی زوج می توان نوشت که در آن هیچ دو عدد زوجی متوالی نباشند؟

1.  $\binom{6}{4} 5 \times 4$
2.  $\binom{6}{4} 5! \times 4!$
3.  $\binom{5}{3} 5 \times 4$
4.  $\binom{5}{3} 4! 5!$

۲۹) در یک آپارتمان که ۱۰ خانوار زندگی می کنند قرار است یک شورای چهار نفره متشکل از اعضای آن تشکیل شود. از هر خانواده تنها زن یا شوهر می تواند عضو شورا بشود. به چند طریق ممکن است شورای چهار نفره تشکیل شود؟

1.  $\binom{10}{4} 2^4$
2.  $\binom{10}{4} 4!$
3.  $\binom{20}{4} 4!$
4.  $\binom{20}{4} 2^4$

۳۰) اگر  $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$  باشد، حاصل  $P(n, 3)$  کدام است؟

1. ۲۱۰
2. ۳۳۶
3. ۵۰۴
4. ۷۲۰
- 1.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

(۳۱) با ارقام ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان می توان نوشت؟ (سراسری ۹۱)

۱. ۸
۲. ۹
۳. ۱۰
۴. ۱۲

علی لطفی نژاد



فصل هفتم :

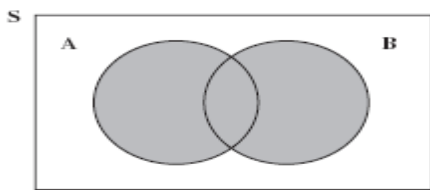
آمار و احتمال

- درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس
- درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
- درس سوم: متغیر و انواع آن

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

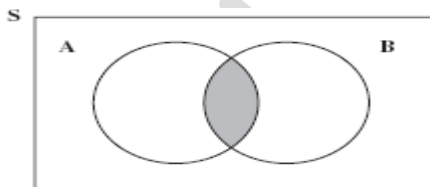
- ✓ آزمایش یا پدیده تصادفی: آزمایشی است که نتیجه آن معلوم نباشد
- ✓ فضای نمونه ای: مجموعه ای است که شامل تمام حالت های ممکن در یک آزمایش تصادفی باشد
- ✓ پیشامد تصادفی: هر نتیجه ممکن از فضای نمونه ای یعنی هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد گویند.
- ✓ اگر تعداد فضای نمونه  $n(S)$  باشد تعداد پیشامد ها یعنی تعداد زیر مجموعه های  $S$  برابر است با  $2^{n(S)}$

• پیشامد ها و برخی اعمال روی آنها

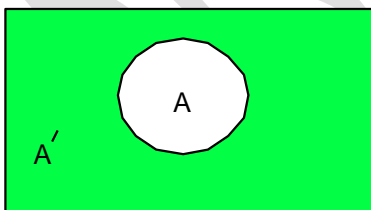


(۱)  $A \cup B$ : این پیشامد زمانی رخ می دهد که هر کدام از دو پیشامد

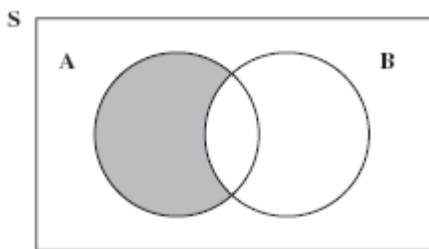
به تنهایی یا با هم رخ دهند.



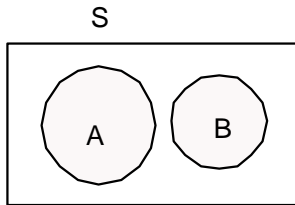
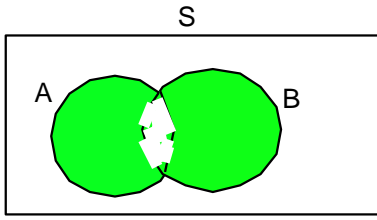
(۲)  $A \cap B$ : این پیشامد زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد با هم رخ دهند.



(۳)  $A'$ : این پیشامد زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد. (متمم)



(۴)  $A - B$ : این پیشامد زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی پیشامد  $B$  رخ ندهد.



۵)  $(A - B) \cup (B - A)$ : زمانی رخ می دهد که یا فقط  $A$  رخ دهد

یا  $B$ . (به آن تفاضل متقارن دو پیشامد هم می گوئیم)

۶) اگر  $A \cap B = \emptyset$  در این صورت دو پیشامد نا سازگار خواهند بود.

مثال ۱) یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای  $S$  (ب) پیشامد  $A$  که تاس عدد اول و یاسکه رو بیاید. ج) پیشامد  $B$  که تاس عدد اول و سکه رو بیاید.

د) پیشامد  $C$  که سکه پشت یا تاس مضرب ۴ بیاید. ه)  $A' \cap B$  و  $B' \cap C'$

(الف)

$$S = \{(ر, 1), (ر, 2), (ر, 3), (ر, 4), (ر, 5), (ر, 6), (پ, 1), (پ, 2), (پ, 3), (پ, 4), (پ, 5), (پ, 6)\}$$

(ب)

$$A = \{(ر, 1), (ر, 2), (ر, 3), (ر, 4), (ر, 5), (ر, 6), (پ, 2), (پ, 3), (پ, 5)\}$$

(ج)

$$B = \{(ر, 2), (ر, 3), (ر, 5)\}$$

(د)

$$C = \{(ر, 4), (پ, 1), (پ, 2), (پ, 3), (پ, 4), (پ, 5), (پ, 6)\}$$

(ه)

$$A' \cap B = B - A = \emptyset$$

(و)

$$B' \cap C' = (B \cup C)' = \{(ر, 1), (ر, 6)\}$$

مثال ۲) دو تاس را با هم می ریزیم، مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای. ب) پیشامد  $A$  که اعداد ظاهر شده مساوی باشند. ج) پیشامد  $B$  که اعداد ظاهر شده اول باشند.

د) پیشامد  $C$  که  $A$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد. ه) پیشامد  $D$  که مجموع اعداد رو شده برابر با ۸ باشد.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

(و) پیشامد  $E$  که حاصل ضرب اعداد رو شده برابر با ۱۵ شود.  $D \cap E$  (ز)

(الف)

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\}$$

(ب)

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

(ج)

$$B = \{(2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

(د)

$$C = A - B = \{(1,1), (4,4), (6,6)\}$$

(ه)

$$D = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$$

(و)

$$E = \{(3,5), (5,3)\}$$

(ز)

$$D \cap E = E$$

۳) سکه ای رابه هوا پرتاب می کنیم اگر رو بیاید یک تاس می اندازیم و اگر پشت بیاید سکه را دو بار دیگر پرتاب می کنیم مطلوب است :

(الف) فضای نمونه ای (ب) پیشامد  $A$  که سکه یک بار رو بیاید. (ج) پیشامد  $B$  که سکه حداقل دو بار پشت بیاید.

(د) پیشامد  $A \cap B'$  (ه) پیشامد این که نه  $A$  رخ دهد و نه  $B$ .

(الف)

$$S = \{(ر, 1), (ر, 2), (ر, 3), (ر, 4), (ر, 5), (ر, 6), (پ, ر, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

(ب)

$$A = \{(ر, 1), (ر, 2), (ر, 3), (ر, 4), (ر, 5), (ر, 6), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر)\}$$

(ج)

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

$$B = \{(پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

(د)

$$A \cap B' = A - B = \{(ر, 1), (ر, 2), (ر, 3), (ر, 4), (ر, 5), (ر, 6)\}$$

(ه)

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{(ر, ر, ر)\}$$

### تمرین

(۱) یک تاس را پرتاب می کنیم و به تعداد رقم رو شده در تاس سکه پرتاب می کنیم فضای نمونه ای حاصل از این آزمایش چند عضوی است؟

(۲) اعداد 1,2,3,4,5,6 بر روی ۶ مهره یکسان نوشته شده اند اگر دو مهره را با هم بیرون بیاوریم احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ باشد.

(۳) در پرتاب دو تاس می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. احتمال آن را بیابید که هر دو عدد رو شده فرد باشند.

۴) سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا بریا پهارمین بار رو بیاید تعداد حالاتی را که در ۱۱ پرتاب به این منظور می رسمیم را بیابید .

۵) برای انجام مسابقه ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده اند . اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند ؟

۶) بر روی یک تاس اعداد ۱و۱و۱و۲و۳ نوشته شده است . احتمال آن را بیابید که در پرتاب دو تاس مجموع سه ظاهر شود ؟

۷) اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز  $0+1و2و3و4$  به وجود آید احتمال این که عددزوج باشد را بیابید .

۸) از بین مجموعه اعداد متوالی  $101,102,\dots,250$  عددی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن را بیابید که لااقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۵ بخش پذیر باشد .

۹) در جعبه ای ۴ مهره سفید ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم احتمال آن را بیابید که فقط یکی از مهره ها سفید باشد .

۱۰) در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است ۲ مهره از کیسه خارج می کنیم احتمال آن را بیابید که این دو مهره هم رنگ نباشند .

۱۱) در طرفی شش مهره را با شماره های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ ریخته شده اند دو مهره را با هم بیرون می آوریم احتمال آن را بیابید که این دو مهره متوالی باشند .

۱۲) در کیسه ای ۵ مهره آبی ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم احتمال آن را بیابید که حداکثر دو مهره از مهره های خارج شده با هم هم رنگ باشند .

۱۳) اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به وجود آید احتمال اینکه این عدد زوج باشد کدام است

1.  $\frac{3}{8}$
2.  $\frac{1}{2}$
3.  $\frac{3}{5}$
4.  $\frac{5}{8}$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۱۴) یکی از مقسوم علیه های عدد  $45000$  را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که عدد زوج باشد چقدر است؟

1.  $\frac{3}{4}$
2.  $\frac{3}{8}$
3.  $\frac{1}{2}$
4.  $\frac{1}{4}$

۱۵) از  $4$  دانش آموز سال اول و  $5$  دانش آموز سال دوم  $6$  نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده اند. احتمال آن که  $2$  نفر از سال اول و  $4$  نفر از سال دوم انتخاب شوند کدام است؟ (سراسری ۹۱ ریاضی)

1.  $\frac{3}{14}$
2.  $\frac{2}{7}$
3.  $\frac{5}{14}$
4.  $\frac{3}{7}$

۱۶) در یک خانواده  $4$  فرزند با کدام احتمال  $2$  فرزند پسر یا  $3$  فرزند دختر است؟



## • درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

### تعریف آمار و علم آمار :

**آمار**، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد **پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی** می‌شود.

#### ❖ جامعه آماری:

به مجموعه ای از اشیا که می‌خواهیم اطلاعاتی درباره آنها به دست آوریم جامعه آماری گوئیم .

• **اندازه جامعه:** به تعداد اعضای جامعه، اندازه ی جامعه گوئیم .

• **آمار گیری**

به کلیه فعالیت‌هایی و روش‌هایی که برای جمع آوری داده‌ها به کار می‌رود .

• سر شماری :جمع آوری اطلاعات از تمام افراد جامعه .

• نمونه گیری :جمع آوری اطلاعات از بخشی از جامعه .

• تعداد اعضای نمونه را اندازه ی نمونه می‌گوئیم .

#### ❖ یک نمونه چه خصوصیتی باید داشته باشد

۱. نمونه باید طوری انتخاب شود که نمایانگر خصوصیات جامعه باشد.
۲. اعضای نمونه باید به طور تصادفی انتخاب شوند یعنی هر یک از اعضای جامعه امکان حضور در آن را داشته باشد .
۳. هر چه اندازه ی جامعه بزرگ تر شوند ،یعنی هر یک از اعضای جامعه امکان حضور در آن را داشته باشد .
۴. هر چه اندازه ی جامعه بزرگ تر باشد اندازه ی نمونه نیز باید بزرگ تر باشد .
۵. قبل از انتخاب نمونه نتوانیم با اطمینان در مورد حضور یا عدم حضور عده ای در نمونه قضاوت کنیم .

شما می‌توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

## تمرین

(۱) تفاوت آمار و علم آمار را بنویسید .

(۲) کدام یک از موارد زیر مهم ترین قسمت آمار محسوب می شود؟

(۱) جمع آوری اطلاعات (۲) موضوع مورد مطالعه (۳) تفسیر اطلاعات (۴) مدل نمونه گیری

(۳) برای انتخاب یک نمونه تصادفی مناسب کدام یک از عملیات زیر لازم نیست؟

(۱) هر عضوی امکان حضور در نمونه را داشته باشند (۲) شانس اعضا برای حضور در نمونه یکسان باشد

(۳) برای انتخاب اعضای نمونه باید با اعضای جامعه مشورت کنیم (۴) اعضای نمونه باید همگی افراد تحصیل کرده باشند .

(۴) می خواهیم ضریب هوشی دانش آموزان سال دهم را در کشور بررسی کنیم . بدین منظور از میان تمام آنها که فرض می کنیم ۱۰۰۰۰۰ نفر هستند از هر مدرسه یک نفر را انتخاب می کنیم تا ۱۰۰۰ نفر گرد هم آیند بهد از اندازه گیری های تخصصی معلوم می شود که میانگین آنان عدد ۱۲۰ است . در این مثال جامعه و نمونه و اندازه های آنان و متغیر و مقدارش را بیابید .

## درس سوم: متغیر و انواع آن

### ❖ متغیر تصادفی:

مشخصه ویژه ای از یک جامعه آماری که مورد مطالعه قرار می گیرد را متغیر تصادفی گوئیم.

۱. **متغیر کمی:** این متغیرها با عدد بیان می شوند.
  - **متغیر کمی پیوسته:** بین هر دو عدد می توان عدد دیگری یافت. (قابل اندازه گیری هستند)
  - **متغیر کمی گسسته:** متغیر کمی که پیوسته نباشند. (قابل شمارش هستند)
۲. **متغیر کیفی:** این متغیرها با عدد بیان نمی شوند و قابل اندازه گیری و شمارش نیستند، بلکه قابل توضیح یا وصف هستند.
  - **متغیر کیفی ترتیبی:** در این نوع متغیرها نوعی ترتیب مطرح است.
  - **متغیر کیفی اسمی:** در این نوع متغیرها ترتیب مطرح نیست.

👉 تقسیم بندی متغیرها را در نمودار زیر ببینید.



تمرین

۱) رنگ مورد علاقه و طول شاهراه های کشور ایران به ترتیب از راست به چپچه نوع متغیر هایی هستند؟

۱) کیفی ترتیبی - کمی پیوسته ۲) کیفی اسمی - کمی پیوسته ۳) کیفی ترتیبی - کمی گسسته ۴) کیفی اسمی - کمی گسسته  
 ۲) گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱. کیفی - اسمی

۲. کیفی - ترتیبی

۳. کمی - پیوسته

۴. کمی - گسسته

۳) قطر تنه درختان یک باغ کدام نوع متغیر است؟ (انسانی ۹۳)

1. کمی پیوسته
2. کمی گسسته
3. کیفی ترتیبی

۴) جدول زیر متغیر های دانش آموزان را نشان می دهند. مانند نمونه جدول را کامل کنید.

متغیر اسمی	متغیر ترتیبی	متغیر پیوسته	متغیر گسسته	متغیر کیفی	متغیر کمی	متغیر های دانش آموزان
		×			×	سن
						نمره ریاضی نهم
						جنسیت (دختر و پسر)
						قد
						وزن
	×			×		میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)
						میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)
						شاخص توده بدن

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد