

به نام خدا

جزوه ریاضی دهم

فصل ۲

مثلثات

تهیه و تنظیم:

بوربور

درس اول: نسبت های مثلثاتی

❖ یادآوری

- شکل های متشابه:
- هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی باهم متشابه اند.
- نسبت تشابه:
- به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.

مثلث های متشابه: دو مثلث را متشابه گوئیم هرگاه، زاویه های نظیر در آن ها باهم برابر و اضلاع متناظر باهم متناسب باشند.

دو مثلث به سه حالت میتوانند با هم متشابه باشند، که یکی از حالت ها به صورت زیر است:

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه اند.

نکته: دو مثلث قائم الزاویه که یک زاویه حاده ی برابر داشته باشند، باهم متشابه اند.

$\hat{A} = \hat{A}'$

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \\ \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \\ \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \end{array} \right.$

حل کاردرکلاس کتاب ص ۳۰

❖ نسبت های مثلثاتی

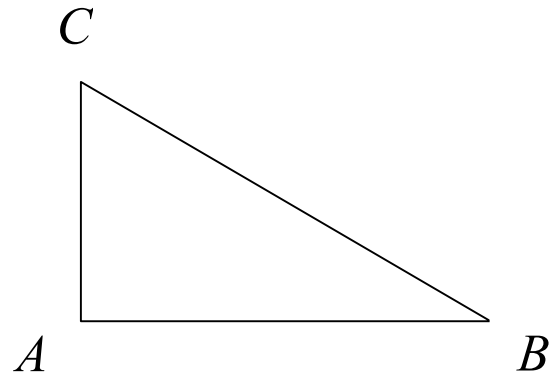
در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

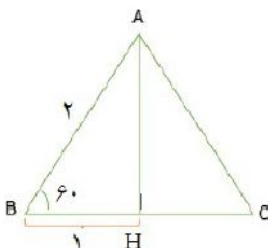


با رسم یک مثلث قائم الزاویه که یکی از زوایای حاده اش θ باشد، نشان دهید.

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad ; \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

در یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع زاویه قائمه ۱۲ و ۵ واحد، تمام نسبت های مثلثاتی زوایای حاده (تند) را محاسبه کرده و مقایسه کنید.

با رسم یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ واحد، نسبت های مثلثاتی زاویه های ۳۰° و ۶۰° را بیابید.



در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{C} = 90^\circ$)، اگر $c = 25 \text{ cm}$ و $\cos B = \frac{3}{5}$ باشند، اندازه ضلع b را بیابید.

حل فعالیت کتاب ص ۳۱

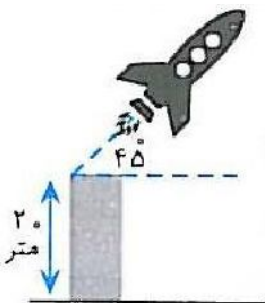
با رسم یک مربع به ضلع ۱ واحد و رسم یکی از قطرهای آن نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° را بیابید.

جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها

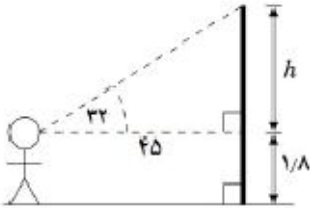
	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه 60° درجه پرتاب می‌شود و به حرکت خودتحت همین زاویه ادامه می‌دهد. اگر سایه موشک روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد، خود موشک در چه ارتفاعی و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویه 45° پرتاب می‌شود. اگر موشک با همین زاویه ۴۰۰۰ متر طی کنید موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟



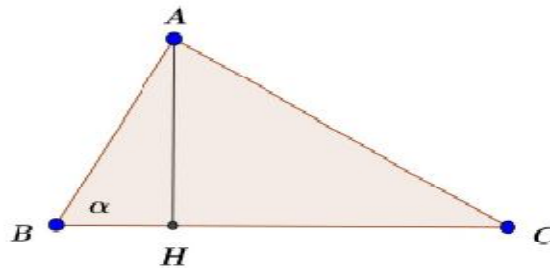
شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می کند. زاویه دید چشمی این شخص برابر ۳۲ درجه است. ارتفاع چشم این شخص از سطح زمین برابر ۱/۸ متر است و فاصله این شخص تا میله پرچم ۴۵ متر می باشد. طول میله پرچم را بیابید



❖ مساحت مثلث بر حسب نسبت های مثلثاتی

از گذشته می دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر به آن ارتفاع. حال در شکل زیر می‌خواهیم مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم. برای این منظور می‌نویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times \sin \alpha \times BC}{2} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \alpha$$



$$AH = AB \times \sin B = AB \times \sin \alpha$$

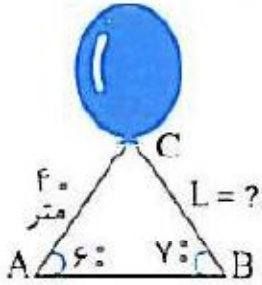
مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



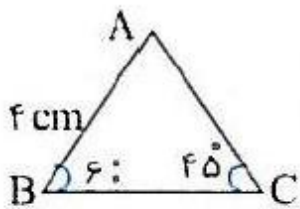
مساحت متوازی‌الاضلاع زیر را بدست آورید.



۱۳- طبق شکل مقابل، بالنی به هوا فرستاده شده و توسط دو طناب به زمین متصل شده است. با توجه به اطلاعات روی شکل طول طناب BC یعنی L را بیابید. ($\sin 70^\circ = 0.94$)



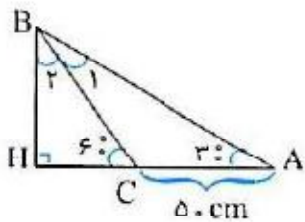
مساحت مثلث شکل مقابل را بیابید.



[@Faragiri10](https://www.instagram.com/Faragiri10)
ghadam.com

۷- در شکل مقابل مطلوب است:

الف) اندازه ارتفاع BH



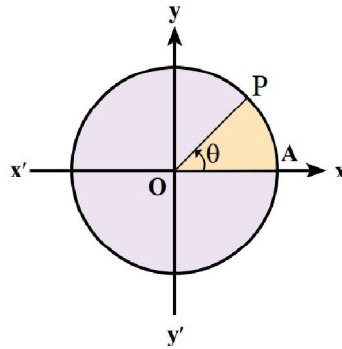
ب) مساحت مثلث های AHB و ABC

* حل فعالیت کتاب ص ۳۳ و کاردر کلاس ص ۳۴

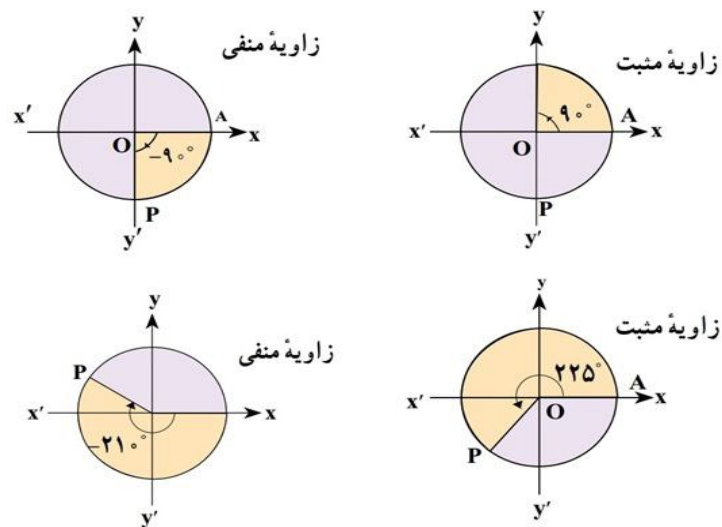
* حل تمرین ص ۳۵

درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ای به شعاع یک و مرکز مبدا مختصات. اگر از نقطه $(1, 0)$ و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت شروع به حرکت کنیم زاویه ای مثبت تولید خواهد شد. در صورت چرخش در جهت عقربه های ساعت زاویه منفی حاصل می شود. چنین دایره ای را یک دایره مثلثاتی می نامیم.

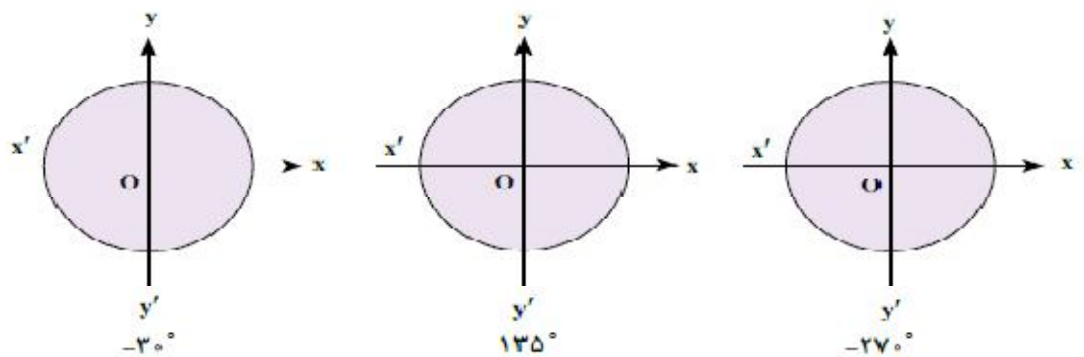


در شکل زیر چند زاویه مثبت و منفی در دایره مثلثاتی دیده می شود.

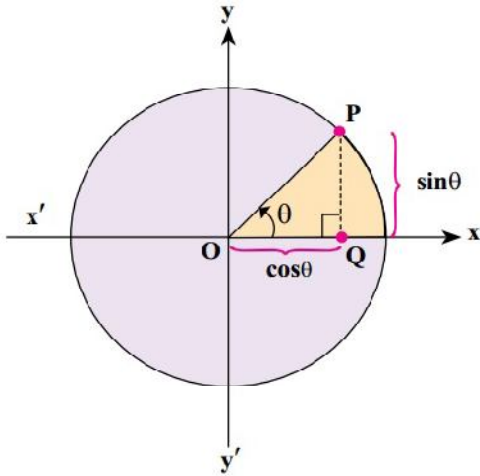


*حل فعالیت کتاب ص ۳۶

هر یک از زاویه های زیر را روی دایره های مثلثاتی داده شده نشان دهید.



حال نقطه $p(x, y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه p عمودی بر محور طول‌ها رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی حاصل نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را محاسبه می‌کنیم.



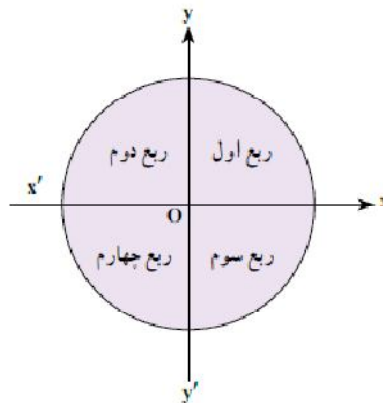
$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = y \qquad \cos \theta = \frac{OQ}{OP} = x$$

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} \qquad \cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}$$

بنابر این در دایره‌ی مثلثاتی، محور x ‌ها را محور \cos ‌ها و محور y ‌ها را محور \sin ‌ها می‌نامیم.

$$y = \sin \theta \text{ و } x = \cos \theta$$

با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xOy را ربع اول ناحیه $x'Oy'$ را ربع دوم، ناحیه $x'Oy'$ را ربع سوم و ناحیه xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.



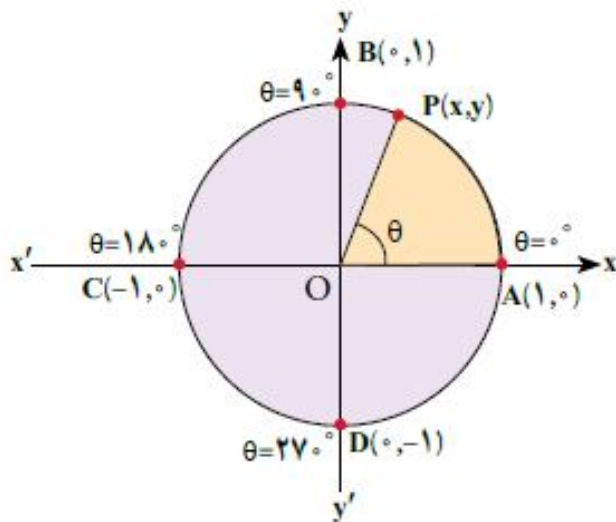
*حل کاردرکلاس ص ۳۷

۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

- الف) -۳۰° ب) ۶۵° ج) ۱۸۲° د) -۹۵°

*** حل فعالیت و کاردرکلاس ص ۳۸**

نسبت های مثلثاتی زوایای ۰° و ۹۰° و ۱۸۰° و ۲۷۰° و ۳۶۰° را بدست آورید.



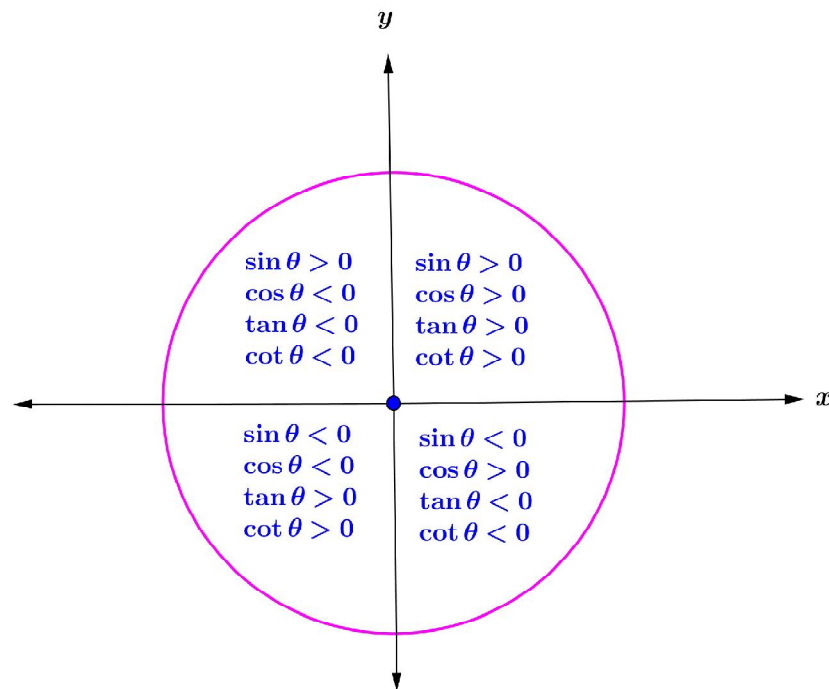
تکمیل جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

α در ربع اول است $\Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
 α در ربع دوم است $\Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$
 α در ربع سوم است $\Rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 α در ربع چهارم است $\Rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

علامت نسبت های مثلثاتی با توجه به هر ناحیه:

مقدار	ربع اول $x > 0, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
sin	+	+	-	+
cos	+	-	-	-
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-



۲. با توجه به دایره مثلثاتی و تعریف نسبت های مثلثاتی متوجه می شویم که همواره $-1 < \sin \theta < 1$ و همین طور $-1 \leq \cos \theta \leq 1$. اما در مورد دو نسبت دیگر یعنی $\tan \theta$, $\cot \theta$ این گونه نیست. در واقع این دو نسبت هر مقداری می توانند باشند، چه مثبت و چه منفی. به زبان ریاضی:

$$\sin \theta \in [-1, 1], \cos \theta \in [-1, 1], \tan \theta, \cot \theta \in (-\infty, +\infty)$$

نکته: با توجه به دایره مثلثاتی که شعاع آن ۱ واحد است و همچنین رابطه فیثاغورس داریم: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

زاویه θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و $\sin \theta = \frac{5}{7}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بدست آورید.

مثال: اگر $P(x, y)$ نقطه‌ای در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و θ ، زاویه‌ی بین قسمت مثبت محور x ها و نیم‌خط \vec{OP} باشد و داشته باشیم $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ، مختصات نقطه‌ی P و همچنین سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید. (رابطه‌ی فیثاغورث)

با توجه به اطلاعاتی که در همه‌ی موارد داده شده است، تعیین کنید که α در کدام ربع‌های مثلثاتی است؟

الف) $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$

ب) $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هم علامت باشند.

پ) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$

زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$.
زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\cot \alpha > \tan \alpha$.

حل فعالیت ص ۳۹

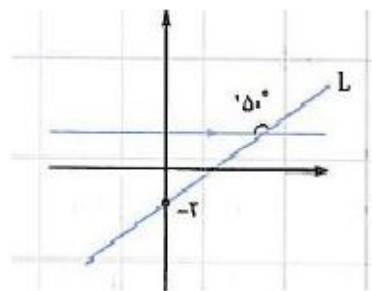
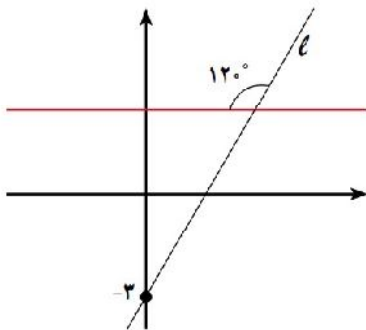
❖ رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی است. به عبارت دیگر، اگر زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

با توجه به شکل معادله خط l را بنویسید.



معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه 30° می‌سازد و از نقطه $(-2, 0)$ عبور می‌کند.

خط $y - x = 3$ محور x را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(0, 2)$ بگذرد و زاویه‌ی آن با محور x ها 45° باشد.

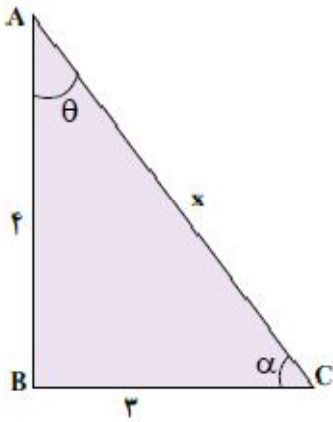
حل کاردرکلاس و تمرین ص ۴۰ و ۴۱

درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

با توجه به شکل مقادیر زیر را به دست آورید و نتیجه بگیرید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$



$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

با توجه به فرمول بالا درستی هریک از روابط زیر را ثابت کنید:

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} ; (\cos \theta \neq 0)$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} ; (\sin \theta \neq 0)$$

نکته: با داشتن هر یک از نسبت‌های مثلثاتی و ناحیه‌ای که انتهای زاویه θ در آن قرار دارد، می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورد.

فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

اگر α زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan \alpha$ ، $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.

اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۳ اگر $9^\circ < \alpha < 18^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

*حل کاردرکلاس ص ۴۳

❖ اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

را که به ازای هر α (که عبارت‌های تعریف شده بامعنی هستند) همواره برقرار است، یکاتحاد مثلثاتی می‌نامیم ($\cos \alpha, \sin \alpha \neq 0$).

برای اثبات اتحادهای مثلثاتی، باید از یک طرف تساوی شروع کرده و به کمک روابط مثلثاتی که بلد هستیم به طرف دیگر برسیم.

مثال: درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

۲) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

۳) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

۴) $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$

۵) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

۶) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

۷) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

۸) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

۹) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

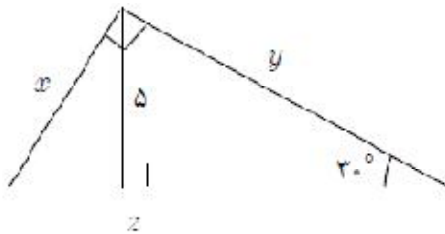
۱۰) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

نمونه سوال

فصل دوم (مثلثات)

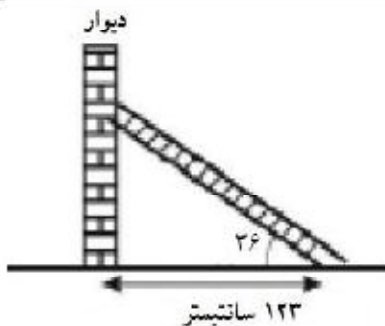
۱ در یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع زاویه قائمه ۱۲ و ۵ واحد، تمام نسبت های مثلثاتی زوایای حاده (تند) را محاسبه کرده و مقایسه کنید.

۲ در مثلث قائم الزاویه ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ داریم: $\frac{1}{3} AC - 2 \sin B$ حاصل $\tan B, \cos B$ را به دست آورید.



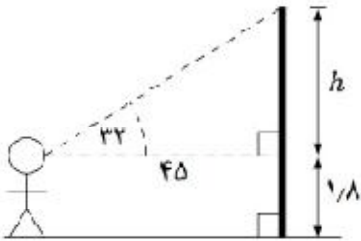
۳ در مثلث روبرو مقادیر مجهول را بیابید.

۴ در شکل روبرو طول نردبان را بیابید ($\cos 36^\circ = 4/5$)

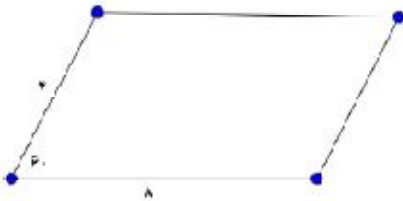


۵ سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاب می شود و به حرکت خود تحت همین زاویه ادامه می دهد. اگر سایه موشک روی سطح زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد، خود موشک در چه ارتفاعی و چه مسافتی در امتداد خط سیر خود طی کرده است؟

۶ شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می کند. زاویه دید چشمی این شخص برابر ۳۲ درجه است. ارتفاع چشم این شخص از سطح زمین برابر ۱/۸ متر است و فاصله این شخص تا میله پرچم ۴۵ متر می باشد. طول میله پرچم را بیابید.



۷ مساحت متوازی الاضلاع زیر را بدست آورید.

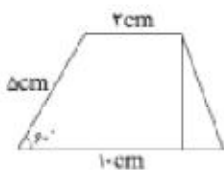


۸ طول یک ضلع لوزی ۵ سانتی متر و زاویه کوچک بین آن ها ۳۰ درجه می باشد. طول قطر کوچک لوزی را بیابید.

۹ طول قطر کوچک یک پنج ضلعی منتظم را بیابید که طول اضلاع آن ۶ واحد باشد.



۱۰ در شکل روبرو مساحت ذوزنقه را بیابید.



۱۱ زاویه θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و $\sin \theta = \frac{5}{7}$ سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را به دست آورید.

۱۲ حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sin 30^\circ \times \tan 30^\circ =$$

$$\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 30^\circ =$$

$$\sqrt{3} \tan 60^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{\sqrt{3}} =$$

$$(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ) =$$

۱۳ درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

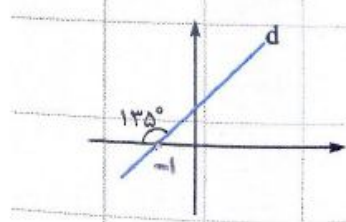
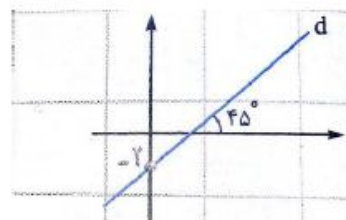
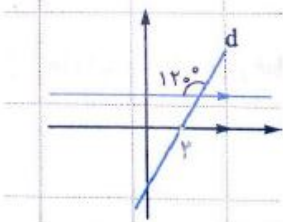
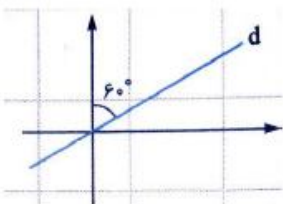
$$2 \sin 30^\circ \times \cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ = \sin 30^\circ$$

$$1 + \tan^2 60^\circ = \frac{1}{\cos^2 60^\circ}$$

۱۴ اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد و $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$ باشد، سایر نسبت های مثلثاتی α را بیابید.

۱۵ با توجه به هر شکل معادله خط d را بنویسید.



۱۶ درستی هر یک از اتحاد های زیر را بررسی کنید.

$$\sin x \times \tan x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$(\tan \alpha - 1)(\cot \alpha + 1) = \tan \alpha - \cot \alpha$$

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = \cos^2 x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1 + 2 \sin x \cos x$$

۱۷ اگر $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه 15° درجه را بدست آورید.

۱۸ اگر $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه 120° درجه را بدست آورید.

سوالات تستی فصل ۲

ساده شده‌ی عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟

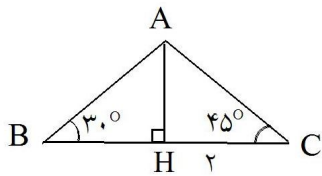
- $2 \cot^2 \theta$ (۱) $2 \tan^2 \theta$ (۲) $1 - 2 \cos^2 \theta$ (۳) $1 - 2 \sin^2 \theta$ (۴)

حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

- $\sin^2 \theta$ (۱) $\cos^2 \theta$ (۲) $\tan^2 \theta$ (۳) $\cot^2 \theta$ (۴)

با فرض $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ حاصل عبارت $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)



در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟

- $2\sqrt{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴)

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $BC = 5$ و $AC = 3$ می‌باشد. حاصل $(\cos B - \sin B)$ کدام است؟

- $\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴)

حاصل $\tan^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$ کدام است؟

- $\frac{1}{12}$ (۱) $\frac{10}{12}$ (۲) $\frac{13}{12}$ (۳) $\frac{8}{12}$ (۴)

اگر $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم واقع باشد، $\sin \theta$ کدام است؟

- $-\frac{3}{5}$ (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴)