به نام خدایی که در این نزدیکیست

جمع بندی ۲۰ ریاضی تجربی

ریاضی نهایی فقط ۲۰

۲۰ نمره ی قطعی ظرف ۶ ساعت

تکمیل این جزوه در کلاس های جمع بندی کنکور ۱۴۰۰

قسمت های کنکوری ریاضی تجربی مونده تا روش های منحصر به فرد

مهندس کلانتریان رو سر کلاس ببینی تا احساس کنی

ریاضی چقدر آسون بوده و تو بیخودی پَرپَر می زدی!!!

مثـال ۱: درستی یا نادرستی عبارات را مشخص کنید

الف) تابع ثابت در یك بازه ، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود (دی ۹۷ و ۹۸)

ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه‌ی ۰ مشتق پذیر است. (دی ۹۷)

پ) دو تابع $f(x)=-\frac{2x+6}{7}$ و $g(x)=-\frac{7}{2}x-3$ وارون یکدیگرند (فرداد۹۸)

ت) دو ره‌ی تناوب تابع $y=\tan x$ برابر 2π است (فرداد و دی ۹۸)

ث) برد تابع با ضابطه‌ی $y=kf(x)$ ، همان برد تابع $y=f(x)$ است. (دی ۹۸)

ج) چند جمله ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-0$ بر دو جمله ای $x+2$ بخش پذیر است (دی۹۸)

چ) دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند هرگاه باهم رُخ ندهند (دی۹۸)

ح) تابع $y=-x^3+2$ در دامنه‌ی تعریفش صعودی است (شهریور ۹۸)

خ) دامنه‌ی تابع $y=\tan x$ برابر $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ است (شهریور ۹۸)

د) اگر صفحه‌ی p در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یك هذلولی است (شهریور ۹۸)

ذ) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر است (فرداد۹۹)

ر) تابع $y=x^3-3x$ در بازه‌ی $(-1,1)$ اکیداً صعودی است (فرداد۹۹)

س) دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=kf(x)$ ، همان دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ است. (شهریور و دی ۹۹)

ش) برد تابع $y=\tan x$ برابربازه‌ی $[-1,1]$ است (شهریور ۹۹)

ص) هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یك نقطه‌ی بحرانی است (شهریور ۹۹)

ض) در تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x-a$ ، باقیمانده برابر $P(a)$ است (دی ۹۹)

ط) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\operatorname{Sin}x$ باشند ، آنگاه $gof(x)=\sqrt{\operatorname{Sin}x}$ خواهد بود (خارج از کشور فرداد ۹۹ صبح)

ظ) تابع $f(x)=|x|$ در تمام دامنه اش صعودی است (خارج فرداد ۹۹ صبح)

ع) مقدار مینیمم تابع $y=3\operatorname{Sin}(2x)-2$ برابر -5 است (خارج فرداد ۹۹ صبح)

غ) تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ی ۰ مماس قائم دارد . (خارج فرداد ۹۹ صبح)

ف) اگر تابع f پیوسته باشد لزوما مشتق پذیر است . (خارج فرداد ۹۹ صبح)

ق) دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوییم هرگاه A و B باهم رخ ندهند (خارج فرداد ۹۹ صبح)

ك) دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=-kf(\frac{x}{2})$ همان دامنه‌ی تابع $y=-kf(x)$ می باشد (خارج فرداد ۹۹عصر)

گ) تابع $y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$ یك تابع چند جمله ای نیست (خارج فرداد ۹۹عصر)

ل) منظور از احتمال $P(A|B)$ این است که احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است (خارج فرداد ۹۹عصر)

پاسـخ :

الف) درست

ب) نادرست

پ) درست

ت) نادرست

ث) نادرست

ج) درست

چ) نادرست

ح) نادرست

خ) درست

د) نادرست

ذ) نادرست

ر) نادرست

س) درست

ش) نادرست

ص) درست

ض) درست

ط) نادرست

ظ) نادرست

ع) درست

غ) درست

ف) نادرست

ق) درست

ك) نادرست

گ) نادرست

ل) درست

مثال ۲: در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید

الف) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و ...... $g(x) =$ ...... است (دی ۹۷)

ب) حد تابع $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; x > \\ \dfrac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & ; x \le 0 \end{cases}$

وقتی $x \to -\infty$ برابر................ است (دی ۹۷)

پ) اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر .... است (دی ۹۷)

ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر .... است (دی ۹۷)

ث) تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود .... است (صعودی ، نزولی) (خرداد ۹۸)

ج) هر چه خروج از مرکز بیضی .... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد (خرداد ۹۸)

چ) دو پیشامد که باهم رخ ندهند ، دو پیشامد .... (مستقل ، ناسازگار) هستند(خرداد ۹۸)

ح) حد تابع $f(x) = \dfrac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \to -\infty$ میل می کند برابر .... می باشد (شهریور ۹۸)

خ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن .... است (شهریور ۹۸)

د) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود ، .... آن نامیده می شود (دی ۹۸)

ذ) بُرد تابع $y = \tan x$ برابر .... است (خرداد ۹۹)

ر) حد تابع $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$ وقتی $x \to -\infty$ میل می کند برابر .... می باشد (خرداد۹۹)

ز)تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در ۰ مشتق پذیر نیست . خط $x = 0$ را .... منحنی می نامیم(خرداد۹۹)

ژ)در بازه‌ی $(0,1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، .... نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد (دی۹۹)

س) اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه (1) برابر ...... است (دی ۹۹)

ش) توابع اکیداً یکنوا ، همواره .... هستند(شهریور ۹۹)

ص) اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه در $x = a$ .... است (شهریور۹۹)

ض) تابعی که در بازه ، هم صعودی و هم نزولی تعریف می شود تابع .... گفته می شود (خارج خرداد ۹۹عصر)

ط) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد .... است (خارج خرداد ۹۹عصر)

ظ) وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه به طور عمودی برش داده می شود سطح مقطع یک .... است (خارج خرداد ۹۹عصر)

ع) اگر برد تابع $f(x)$ برابر $[-1,4]$ باشد، آنگاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با .... است (خارج خرداد ۹۹ صبح)

غ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ باشد ، آنگاه .... $= fog(4)$ (خارج خرداد ۹۹ صبح)

ف)دوره‌ی تناوب $y = \tan x$ برابر .... می باشد (خارج خرداد ۹۹ صبح)

ق) باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر با .... است (خارج خرداد ۹۹ صبح)

ک) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است (خارج خرداد ۹۹ صبح)

گ) با محدود کردن تابع $f(x) = x^2 - 5$ در بازه‌ی .... تابعی وارون پذیر داریم

ل) دامنه‌ی تابع $f(x) = Tan(2x)$...................... است (دی ۹۷)

م) اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروط موازی نشود و از رأس نگذرد ، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی .... خواهد بود (شهریور ۹۹)

ن) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود ، شکل بیضی به شکل .... نزدیک خواهد شد(شهریور ۹۹)

و) دو پیشامد A و B را .... گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (شهریور ۹۹)

ه) احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است ، به صورت .... نمایش داده می شود(شهریور ۹۹)

پاسخ :

الف) $g(x) = x^3$	ب) -5	پ) ۷
ت)کره‌ی توخالی	ث) صعودی (اکیداً صعودی)	
ج)کوچکتر	چ) ناسازگار	
ح) $-\infty$	خ) استوانه	
د)سطح مقطع	ذ) $\mathbb{R}$	
ر) صفر	ز) مماس قائم	
ژ) پایین تر	س) ۰	
ش) یکنوا	ص) پیوسته	
ض) ثابت	ط) اکیداً صعودی	
ظ) دایره	ع) $[-2,8]$	
غ) ۵	ف) π	
ق) ۴	ک) نیم کره	

گ) $(\ ,0)$ یا $(0,+\infty)$

ل) $2x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \xRightarrow{\div 2} x \neq \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

م)بیضی	ن)دایره
و) مستقل	ه) $P(A\|B)$

مثال ۳: توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید

ب) اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را بدست آورید (دی ۹۷)

پاسخ: الف) ابتدا دامنه ی توابع داده شده را بدست می آوریم

$$f(x)=\frac{x+3}{2x} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\} \ , \ g(x)=3x-1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x \in \mathbb{R}, \underbrace{3x-1 \in \mathbb{R}-\{0\}}\}=\left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{3}\right\}=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$$

$$3x-1 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 1 \Rightarrow x \quad \frac{1}{3}$$

ب) می دانیم برای تولید مثلاً $f^{-1}(5)$ باید خروجی $f(x)$ را برابر ۵ قرار دهیم یعنی:

$$f(x)=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow \frac{1}{8}x-3=5 \Rightarrow \frac{1}{8}x=8 \Rightarrow x=64$$

$$\Rightarrow f^{-1}(5)=64 \Rightarrow g^{-1}of^{-1}(5)=g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(5)}_{64}\right)=g^{-1}(64)$$

حالا باید خروجی $g(x)$ رو برابر ۶۴ بزاریم:

$$g(x)=x^3 \Rightarrow x^3=64 \Rightarrow x=4$$

مثال ۴: دو تابع $f(x)=\sqrt{x \quad 4}$ و $g(x)=\frac{\quad}{x \quad -1}$ را در نظر بگیرید دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید (خرداد ۹۸)

پاسخ: ابتدا دامنه ی توابع داده شده را بدست می آوریم

$$f(x)=\sqrt{x-4} \Rightarrow D_f: x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow x \in [4,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{1}{x \quad -1} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$$D_{gof}=\{x \in D_f \ , f(x) \in D_g\}$$

$$D_{gof}=\{x \in [4,+\infty) \ , \ \underbrace{\sqrt{x-4} \in \mathbb{R}-\{\pm 1\}}\}$$

$$\sqrt{x-4} \neq \pm 1 \Rightarrow x-4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$$

$$D_{gof}=\{x \in [4,+\infty) \ , \ x \neq 5\} \Rightarrow D_{gof}: x \in [4,+\infty)-\{5\}$$

مثال ۵: اگر $f(x)=\sqrt{x \quad 1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد دامنه‌ی تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید (شهریور ۹۸ و ۹۹)

پاسخ: ابتدا دامنه ی توابع داده شده را بدست می آوریم

$$f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow D_f: x \geq 1, \ g(x)=2x^2-1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog}=\left\{x \in \mathbb{R} \ , \ \underbrace{2x^2-1 \in x \geq 1}\right\}$$

$2x^2-1 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ یا ۱

$$\Rightarrow D_{fog}: x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

مثال ۶: اگر $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x \quad 6}$ باشد دامنه‌ی تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید (دی ۹۸)

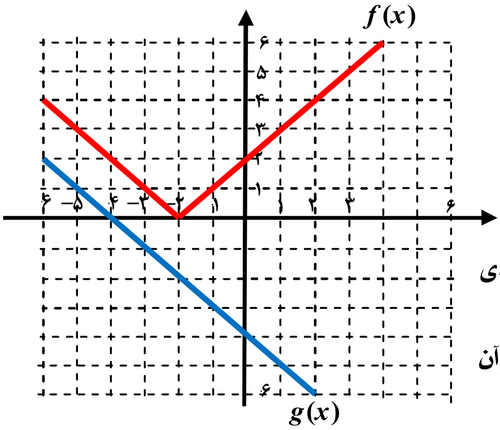
پاسخ: ابتدا دامنه ی توابع داده شده را بدست می آوریم

$$f(x)=x^2-5 \Rightarrow D_f=\mathbb{R} \ , \ g(x)=\sqrt{x+6} \Rightarrow D_g=[-6,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x \in [-6,+\infty) \ , \ \underbrace{\sqrt{x+6} \in \mathbb{R}}_{x \in [-6,+\infty)}\} \Rightarrow D_{fog}: [-6,+\infty)$$

مثال ۷: با توجه به نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به سوالات زیر پاسخ دهید (دی ۹۹)



الف) مقدار $(\ 1)$ را محاسبه کنید

ب) اگر $g(3t-1)=0$ باشد مقدار t را به دست آورید

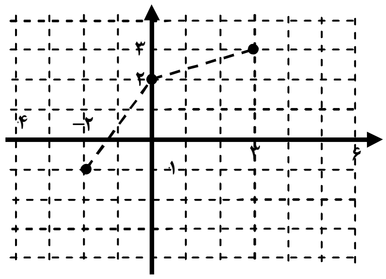
پ) با محدود کردن دامنه‌ی $f(x)$؛ بازه ای را مشخص کنید که تابع $f(x)$ در آن یک به یک باشد

پاسخ:

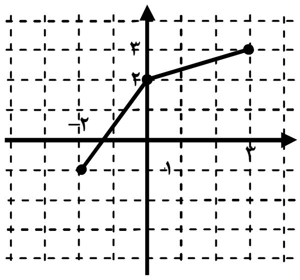
نکته نامه

مثال ۸: با استفاده از نمودار $f(x)$ نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید (دی ۹۷)

$y=f(\frac{x}{2})-2$

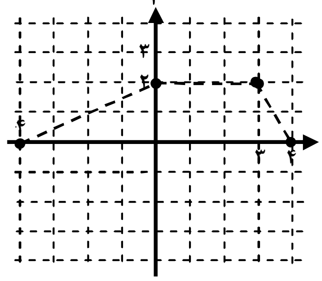


$f(x)$

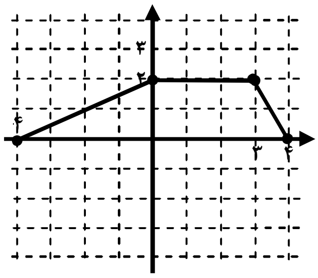


مثال ۹: با استفاده از نمودار $f(x)$ نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید (خرداد ۹۸)

$y=\frac{1}{2}f(4x)$

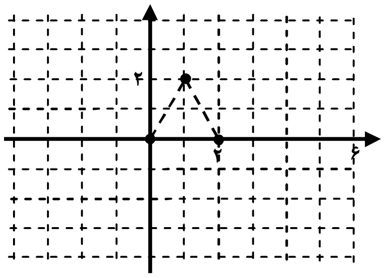


$f(x)$

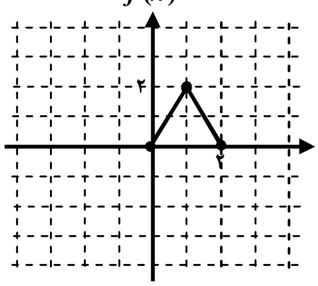


مثال ۱۰: با استفاده از نمودار $f(x)$ نمودار تابع $y=-2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید (شهریور ۹۸)

$y=-2f(\frac{1}{3}x)$

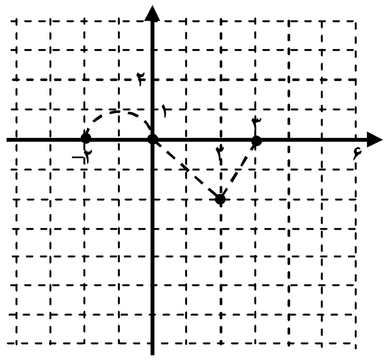


$f(x)$

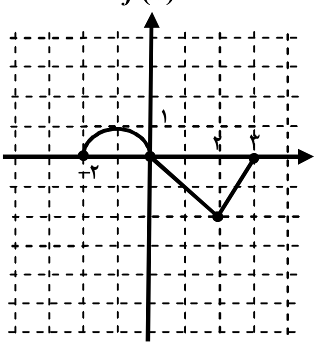


مثال ۱۱: با استفاده از نمودار $f(x)$ نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید (خرداد ۹۹)

$y=3f(\frac{1}{2}x)$



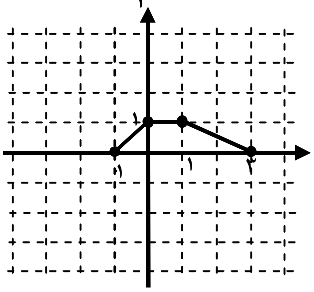
$f(x)$



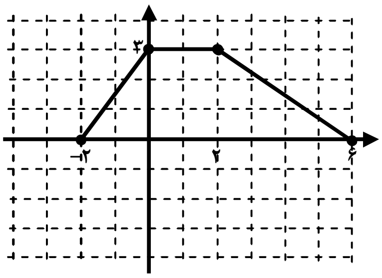
مثال ۱۲: با استفاده از نمودار $f(x)$ نمودار تابع $y=\frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید (شهریور ۹۹)

پاسخ: طول نقاط باید نصف بشه و عرض نقاط $\frac{1}{3}$ برابر بشود

$y=\frac{1}{3}f(2x)$



$y=f(x)$



نکته نامه

مثال ۱۳: نشان دهید توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند (دی ۹۸ و خرداد ۹۹ خارج عصر)

پاسخ: متن کتاب در صفحه ی ۲۵ میگه ترکیب هر تابع با وارون خودش تابع همانی خواهد بود . پس باید ترکیب این دو تابع را بدست آوریم

$$\begin{cases} f(x)=3x-4 \\ g(x)=\frac{x+4}{3}\end{cases} \Rightarrow fog(x)=f(g(x))=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4=x$$

$$\begin{cases} f(x)=3x-4 \\ g(x)=\frac{x+4}{3}\end{cases} \Rightarrow gof(x)=g(f(x))=\frac{(3x-4)+4}{3}=x$$

مثال ۱۴: اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطه ی $g(x)$ را به دست آورید (خرداد ۹۹ خارج عصر)

پاسخ:

$$f(x)=3x-4 \Rightarrow f(g(x))=3g(x)-4$$

تابع $f(g(x))$ که خودمون تولید کردیم رو برابر اونی قرار می دیم که تو سوال گفته بود یعنی:

$$3g(x)-4=3x^2-6x+14 \Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18$$

$$\xRightarrow{\div 3} g(x)=x^2-2x+6$$

مثال ۱۵: ضابطه ی وارون تابع $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ را به دست آورید (دی ۹۹)

پاسخ:

گام اول: $g(x)=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=-5-\sqrt{3x+1}$

گام دوم: $y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y+5=-\sqrt{3x+1} \Rightarrow$

$$(y+5)^2=3x+1 \Rightarrow (y+5)^2-1=3x \xRightarrow{\div 3}$$

$$\frac{(y+5)^2-1}{3}=x \Rightarrow x=\frac{(y+5)^2-1}{3}$$

گام سوم: $y=\frac{(x+5)^2-1}{3}$

گام چهارم: $g^{-1}(x)=\frac{(x+5)^2-1}{3}$

درانتها همیشه باید دامنه ی تابع وارون رو حتما بگی . که برابر است با بُرد تابع اولیه یعنی:

$$D_{g^{-1}}:(-\infty,-5]$$

مثال ۱۶: وارون تابع $y=\sqrt{x+2}$ را به دست آورید (خرداد ۹۹ خارج صبح)

پاسخ:

مثال ۱۷: با محدود کردن دامنه ی تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک به دست آورید (خرداد ۹۹ خارج صبح)

مثال ۱۸: با محدود کردن دامنه ی تابع $f(x)=x^2-5$ تابعی وارون پذیر بسازید (دی ۹۸)

نکته نامه

مثـال۱۹: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید

الف) $y = ۲ - ۳Sin۴x$ (دی ۹۷)

$y = -۳Sin۴x + ۲$

ب) $y = ۱ - ۲Sin(-\frac{\pi}{۳}x)$ (خرداد ۹۹)

$y = -۲Sin(-\frac{\pi}{۳}x) + ۱$

پ) $y = -\pi Sin(\frac{x}{۲}) - ۲$ (دی ۹۸)

ت) $y = -۳Cos(۲\pi x) + ۱$ (شهریور ۹۸)

ث) $y = \sqrt{۳} - Cos(\frac{\pi}{۲}x)$ (خردا ۹۹)

$y = -Cos(\frac{\pi}{۲}x) + \sqrt{۳}$

ج) $y = ۸Cos(\frac{x}{۳})$ (دی ۹۹)

چ) $y = \pi Sin(-x)$ (شهریور ۹۹) ۱

ح) $y = ۳Sin(۲x) - ۲$ (خرداد خارج ۹۹ عصر)

مثـال۲۰: اگر در یک تابع مثلثاتی دوره‌ی تناوب ۴π و مقدار ماکزیمم -۱ و مقدار مینیمم -۷ باشد ؛ تابع سینوسی آن را بنویسید (خارج خرداد ۹۹ صبح)

نکتــه نامه

مثال ۲۱: معادله های مثلثاتی زیر را حل کنید

الف) $Sinx - Cos2x = 0$ (دی ۹۷) و $Cos2x - Sinx + 1 = 1$ (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$Sinx - (1 - 2Sin^2x) = 0 \Rightarrow 2Sin^2x + Sinx - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Sinx = -1 \\ Sinx = -\frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sinx = -1 \\ Sinx = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$$

ب) $Cos2x - Cosx + 1 = 0$ (دی ۹۸)

پاسخ:

$$(2Cos^2x - 1) - Cosx + 1 = 0 \Rightarrow 2Cos^2x - Cosx = 0$$

$$2Cos^2x - Cosx = 0 \Rightarrow Cosx(2Cosx - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cosx = 0 \\ Cosx = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

پ) $Sinx.Cosx = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (شهریور ۹۸ و دی ۹۹)

پاسخ:

$$Sinx.Cosx = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Sin2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \xRightarrow{\times 2} Sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sin2x = Sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{4})}_{\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \xRightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

ت) $Cosx(2Cosx - 9) = 5$ (خرداد ۹۹)

پاسخ:

ج) $Cos^2x - Sinx = \frac{1}{4}$ (شهریور ۹۹)

پاسخ:

$$Cos^2x - Sinx = \frac{1}{4} \Rightarrow (1 - Sin^2x) - Sinx = \frac{1}{4}$$

$$-Sin^2x - Sinx + \frac{3}{4} = 0 \xRightarrow{\times -4} 4Sin^2x + 4Sinx - 3 = 0$$

$$4Sin^2x + 4Sinx - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} Sinx = \frac{1}{2} \\ Sinx = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

سینوس وکسینوس همواره بین ۱− و ۱ هستند

$$Sinx = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

حل معادلات مثلثاتی :

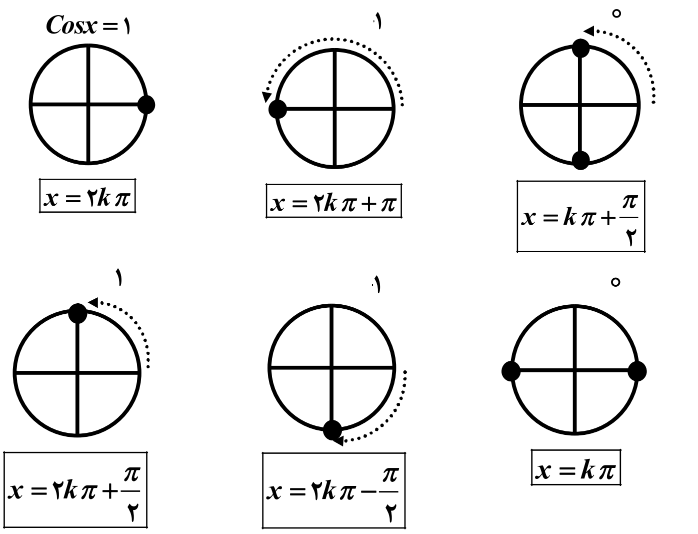
$$\boxed{Sinx = Sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (\alpha) \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}}$$

مثال: $2Sin3x - \sqrt{2} = 0$ (خرداد ۹۹ خارج صبح)

$$\boxed{Cosx = Cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm (\alpha)}$$

مثال: $Cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (خرداد ۹۹ خارج عصر)

حالت های خاص :



مثال۲۲: حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $Sin 15^\circ$ (دی ۹۹)

$$1-Cos2x = 2Sin^2x \xRightarrow{x=15^\circ} 1-Cos30^\circ = 2Sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\sqrt{3}}{2} = 2Sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 2Sin^2 15^\circ$$

$$\xRightarrow{\div 2} Sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow Sin15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

ب) $Cos 15^\circ$

$$1+Cos2x = 2Cos^2x \xRightarrow{x=15^\circ} 1+Cos30^\circ = 2Cos^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2Cos^2 15^\circ \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 2Cos^2 15^\circ$$

$$\xRightarrow{\div 2} Cos^2 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow Cos15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

پ) $Sin 22/5^\circ$ (شهریور ۹۸)

$$1-Cos2x = 2Sin^2x \xRightarrow{x=22/5^\circ} 1-Cos45^\circ = 2Sin^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2Sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 2Sin^2 22/5^\circ$$

$$\xRightarrow{\div 2} Sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow Sin22/5^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

ت) $Cos 22/5^\circ$

$$1+Cos2x = 2Cos^2x \xRightarrow{x=22/5^\circ} 1+Cos45^\circ = 2Cos^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{2}}{2} = 2Cos^2 22/5^\circ \Rightarrow \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 2Cos^2 22/5^\circ$$

$$\xRightarrow{\div 2} Cos^2 22/5^\circ = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow Cos22/5^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

نسبت های مثلثاتی $2x$:

۱ $\boxed{Sin2x = 2Sinx\,.Cosx}$ $\Rightarrow Sinx\,.Cosx = \frac{1}{2}Sin2x$

۲
$$Cos2x = Cos^2x - Sin^2x$$
$$Cos2x = 2Cos^2x - 1$$
$$Cos2x = 1 - 2Sin^2x$$

۳
$$1+Cos2x = 2Cos^2x$$
$$1-Cos2x = 2Sin^2x$$

$$Cos^2x = 1-Sin^2x \qquad Sin^2x = 1-Cos^2x$$

دسته اول(چند جمله ای های کسری)

در حد های کسری که عبارتهای صورت و مخرج توابع چند جمله ای هستند ، وقتی $x \to a$ می رود منظور از عامل ابهام $(x-a)$ می باشد که بایدآنرا از صورت و مخرج کسر حذف کرد (با استفاده از تقسیم ، تجزیه ، گویا کردن و .....) و سپس حد را محاسبه کرد.

مثال : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

پاسخ :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{4-10+6}{4-4} = \frac{-}{0}$$

$x \to 2 \Rightarrow (x-2)$ عامل ابهام

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{(2-3)}{(2+2)} = \frac{-1}{4}$$

دسته دوم (کسری های رادیکالی)

فرجه زوج دیدی، در کسرِ $\frac{\text{مزدوج}}{\text{مزدوج}}$ ضرب کن

فرجه فرد دیدی، در کسرِ $\frac{\text{چاق}}{\text{چاق}}$ ضرب کن

مثال : $\lim\limits_{x\to 4} \frac{-\sqrt{x}}{x^2-16}$ (شهریور ۹۸)

پاسخ :

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} = \frac{2-\sqrt{4}}{4^2-16} = \frac{-}{0}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{-1}{(x+4)(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{(4+4)(2+\sqrt{4})} = \frac{-1}{32}$$

یه لِــــم واسه حفظ کردن اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مثال : $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ (صفحه ی ۵۲ ریاضی ۳)

پاسخ :

دسته سوم (کسری هایی به صورت $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$)

در این دسته بعد از جایگذاری، مقدار صورت کسر عدد و مخرج آن صفر حدی می شود با توجه به علامت صورت ومخرج حاصل $\pm\infty$ است

مثال: $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{5}{0\ \text{حدی}}$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{(-2)^2+1}{(-2^+)+2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}$ (خرداد ۹۹ و دی ۹۷ و ۹۹)

دسته ی پنجم حد در بینهایت

وقتی دو یا چند جمله به سمت ∞ میل می‌کنند جمله‌ای که توان بزرگتری دارد اهمیت پیدا می‌کند یعنی:

$$\lim_{u\to\pm\infty} au^n+bu^{n-1}+\dots+k \sim \lim_{u\to\pm\infty} au^n$$

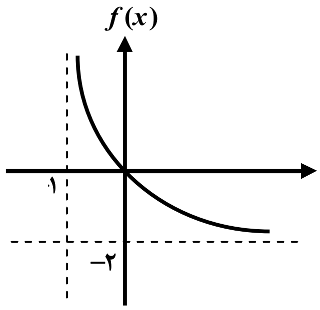
مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+1}{6x^3-11x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{6x^3}=\frac{1}{3}$ (شهریور ۹۹)

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x-3}$ (خرداد خارج ۹۹صبح)

مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x-1}$ (خرداد خارج ۹۹صبح)

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(9+\frac{7}{x^3})$ (خرداد خارج ۹۹عصر)

مثال ۲۳: با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، حدهای خواسته شده را بنویسید (خرداد ۹۸)



الف: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$

مثال ۲۴: حد توابع زیر را به دست آورید

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ (شهریور ۹۹ و دی ۹۷)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=24$$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{Sinx}$ (خرداد ۹۸)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{Sinx}=$$

پ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$ (خرداد ۹۸)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+2)(x+\sqrt{x})}=\frac{\ }{6}$$

ت) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$ (دی ۹۸)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}\times\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(2x+3)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-2x-3}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x-3)}=\frac{(-2)(-2)}{-4}=-1$$

ث) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}$ (دی ۹۸)

$$\lim_{x\to 3}\frac{2}{|x-3|}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ }{1-Cosx}$ (شهریور ۹۸)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ }{1-Cosx}$$

چ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-}{x-\sqrt{x+6}}$ (خرداد ۹۹)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}}\times\frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}}=$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3)(x+\sqrt{x+6})}{x^2-(x+6)}=$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2-x-6}=$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)}=\frac{24}{5}$$

ح) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ (دی ۹۹)

$$\lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{(5-x)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{-1}{(2+\sqrt{x-1})}=-\frac{-}{4}$$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{[x]-3}{|2x-1|}$ (شهریور ۹۹)

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$$

د) $\lim\limits_{x\to (-2)^-} \dfrac{-3x}{x^2-4}$ (خرداد ۹۹ خارج صبح)

$$\lim_{x\to (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}=$$

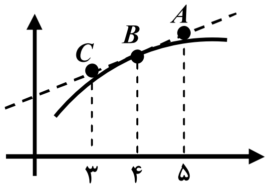
ذ) $\lim\limits_{x\to (-\frac{1}{3})} \dfrac{[x]}{|3x+1|}$ (خرداد ۹۹ خارج عصر)

$$\lim_{x\to (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x+1|}=$$

ر) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2x}{x-5}$ (خرداد ۹۹ خارج عصر)

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{2x}{x-5}=$$

مثال ۲۵: برای تابع f در شکل زیر داریم $f(4)=24$ و $f'(4)=1/5$ است، با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید (دی ۹۷)



پاسخ: این که گفته $f'(4)=1/5$ است یعنی شیب خط مماس ۱/۵ است. نقطه ای که خط داره از اونجا می‌گذرد برابر $(4,24)$ است و معادله ی خط مماس برابر خواهد بود با:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-24=1/5(x-4)\Rightarrow$$

$$y-24=1/5x-6\Rightarrow y=1/5x+18$$

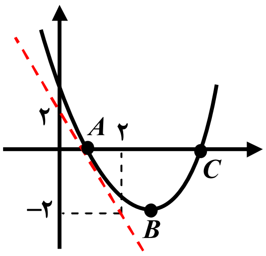
حالا دیگه می تونیم عرض نقاطه به طول ۳ و ۵ رو بدست بیاریم

$$y=1/5x+18 \overset{x=3}{\Rightarrow} y=1/5(3)+18=22/5\Rightarrow C:(3,22/5)$$

$$y=1/5x+18 \overset{x=5}{\Rightarrow} y=1/5(5)+18=25/5\Rightarrow B:(3,25/5)$$

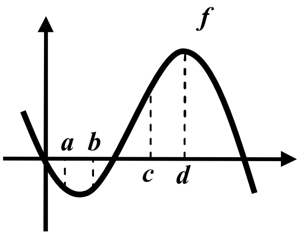
مثال ۲۶: در نمودار مقابل خط d در نقطه ی ۱ x برنمودار f مماس شده است. الف: مشتق تابع f را در نقطه ی ۱ x محاسبه کنید
ب: شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید

پاسخ:



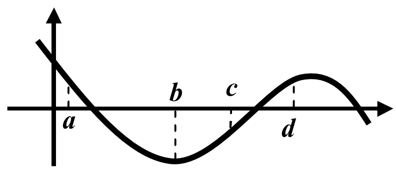
مثال ۲۷: با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید(دی ۹۸)

x	$f'(x)$
	0
	$0/5$
	2
	$-0/5$



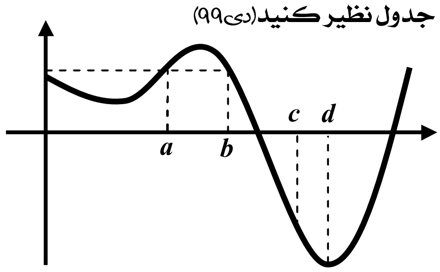
مثال ۲۸: نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های داده شده در جدول نظیر کنید(شهریور ۹۸)

x	شیب
	۱
	۰
	۰/۵
	-۲



مثال ۲۹: نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های داده شده در جدول نظیر کنید(دی ۹۹)

x	شیب
	-۳
	۱
	۰
	۱



مثال ۳۰: اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد. مقدار (۱ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید (دی ۹۷)

پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{(1-2x^2)-(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-2x^2+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{-2(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-2(x-1)(x+1)}{x+1}=4$$

مثال ۳۱: مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول ۱ به دست آورید (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-2)-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}x^2-x+1=3$$

مثال ۳۲: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ;x<\\ x^2-1 & ;x\ge 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید

الف: نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد

ب: ضابطه ی تابع مشتق را بنویسید و آن را رسم کنید (خرداد و دی ۹۸)

پاسخ: مشتق چپ و راست را در $x=0$ بدست آوریم

$$\text{مشتق راست}: f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow$$

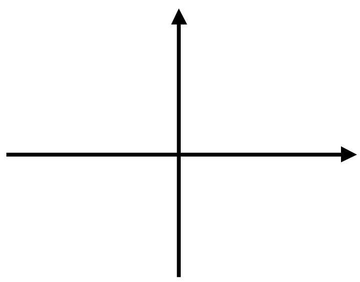
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$\text{مشتق چپ}: f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow$$

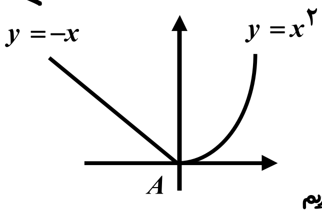
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2x-1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

مشتق چپ و راست در $x=0$ برابر نبوده و درنتیجه در $x=0$ مشتق نداریم و $f'(0)$ وجود ندارد

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ;x<0\\ x^2-1 & ;x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2 & ;x<\\ 2x & ;x>0\end{cases}$$



مثال ۳۳: با محاسبه ی مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه ی A، نشان دهید این تابع در نقطه ی $(0,0)$ مشتق پذیر نیست (دی ۹۹)



پاسخ: مشتق چپ و راست را در $x=0$ بدست آوریم

$$\text{مشتق راست}: f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2)-(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$\text{مشتق چپ}: f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)-(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

مشتق چپ و راست در $x=0$ برابر نبوده و درنتیجه در $x=0$ مشتق نداریم

مثال ۳۴: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+x & ;x\ge 1\\ 3x-1 & ;x<1\end{cases}$ را درنقطه ۱ بررسی کنید (شهریور ۹۸)

پاسخ: مشتق چپ و راست را در ۱ x بدست آوریم

$$\text{مشتق راست}: f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Rightarrow$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+x)-(2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+2=3$$

$$\text{مشتق چپ}: f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Rightarrow$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(3x-1)-(2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

مشتق چپ و راست در ۱ x برابر نبوده و درنتیجه در ۱ x مشتق نداریم

مثال ۳۵: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-4|$ را درنقطه ی $x=-2$ بررسی کنید (خرداد ۹۹)

پاسخ:

مثال ۳۶: مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=(\frac{x}{2x-1})^2$ (دی ۹۷)

$\Rightarrow f'(x)=2\times(\frac{(1)(2x-1)-(2)(x)}{(2x-1)^2})\times(\frac{x}{2x-1})^1$

ب) $f(x)=x^2(\sqrt{x}+1)$ (دی ۹۷)

$\Rightarrow f'(x)=(2x)\times(\sqrt{x}+1)+(\frac{1}{2\sqrt{x}+1})(x^2)$

پ) $f(x)=(x^4-3x)^5$ (خرداد ۹۸)

$\Rightarrow f'(x)=5\times(4x^3-3)\times(x^4-3x)^4$

ت) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ (خرداد ۹۸)

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1-x)-(-1)(\sqrt{x})}{(1-x)}$

ت) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$ (دی ۹۸)

$\Rightarrow f'(x)=(3(2x)(x^2+1)^2)(5x-1)+(5)(x^2+1)^3$

ث) $f(x)=\frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ (دی ۹۸)

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(9)(\sqrt{x})-(\frac{1}{2\sqrt{x}})(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

ج) $f(x)=\frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$ (شهریور ۹۸)

$\Rightarrow f'(x)=(-\frac{1}{x^2})(2\sqrt{x}-1)^4+(4(\frac{2}{2\sqrt{x}})(2\sqrt{x}-1)^3)(\frac{1}{x})$

چ) $f(x)=(\frac{-3x+1}{x^2+5})^8$ (خرداد ۹۹)

$\Rightarrow f'(x)=$

ح) $f(x)=(\frac{1}{x})(\sqrt{3x+2})$ (خرداد ۹۹)

$\Rightarrow f'(x)=$

خ) $f(x)=(\frac{x^2}{3x-1})^5$ (دی ۹۹)

$\Rightarrow f'(x)=5\times(\frac{(2x)(3x-1)-(3)(x^2)}{(3x-1)^2})\times(\frac{x^2}{3x-1})^4$

د) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$ (دی ۹۹)

$\Rightarrow f'(x)=(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$

ذ) $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ (شهریور ۹۹)

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(3)(\sqrt{x})-(\frac{1}{2\sqrt{x}})(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}$

ذ) $f(x)=(\frac{1}{x})(x^2+5x)^7$ (شهریور ۹۹)

$f'(x)=(\frac{-1}{x^2})\times(x^2+5x)^7+7(2x+5)(x^2+5x)^6\times(\frac{1}{x})$

نکته نامه

آهنگ متوسط و لحظه‌ای:

برای تابع f آهنگ متوسط تغییر تابع f بین دو نقطه‌ی t_1 و t_2 از رابطه $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ بدست می‌آید

برای تابع f آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر تابع f در t_0 همان مشتق تابع یا $f'(t_0)$ خواهد بود

مثال ۳۷: یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3,4]$ چقدر است؟ (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(4)-x(3)}{4-3}=\frac{(\sqrt{4}+2(4)^3)-(\sqrt{3}+2(3)^3)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t}=(130)-(\sqrt{3}+54)=76-\sqrt{3}$$

مثال ۳۸: معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t$، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0,4]$ با هم برابرند. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{(2(4)^2-(4))-(2(0)^2-(0))}{4-0}=\frac{28}{4}=7$$

حالا باید ببینیم درکدام لحظه آهنگ لحظه ای برابر ۷ خواهد شد

$$f(t)=2t^2-t \Rightarrow f'(t)=4t-1 \overset{f'(t)=7}{\Rightarrow} 4t-1=7$$

$$4t=8 \Rightarrow t=2$$

مثال ۳۹: تابع $f(x)=7\sqrt{x}+\ 0$، قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود شصت ماهگی نشان می دهد. که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.
آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی $[0,25]$ چقدراست. (دی ۹۸)

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط}:\frac{f(25)-f(0)}{25-0}=\frac{(7\sqrt{25}+50)-(7\sqrt{0}+50)}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$$

مثال ۴۰: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$، را وقتی متغییر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می کند را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{(\sqrt{9})-(\sqrt{4})}{5}=\frac{1}{5}$$

مثال ۴۱: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله‌ی $d(t)=-5t^2+\ 0t$ حرکت می کند، که در آن $0\le t\le 5$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه ای در $t=2$ چقدر است. (شهریور ۹۹)

پاسخ:

$$d(t)=-5t^2+20t \Rightarrow d'(t)=-10t+20 \Rightarrow d'(2)=0$$

مثال ۴۲: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. (خرداد ۹۹)

الف) جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $1\le t\le 4$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه‌ی ۴ چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$\Delta m=m(4)-m(1)=\left(\sqrt{4}+2(4)^3\right)-\left(\sqrt{1}+2(1)^3\right)$$

$$\Rightarrow \Delta m=130-3=127$$

ب)

$$m(t)=\sqrt{t}+2t^3 \Rightarrow m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \overset{t=4}{\Rightarrow} \frac{1}{4}+$$

مثال ۴۳: معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+\ 0$، برحسب متر در بازه‌ی $[0,5]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی $[0,5]$ با هم برابر ند. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{((5)^2-(5)+10)-((0)^2-(0)+10)}{5}$$

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{20}{5}=4$$

حالا باید ببینیم درکدام لحظه آهنگ لحظه ای برابر ۴ خواهد شد

$$f(t)=t^2-t+10 \Rightarrow f'(t)=2t-1 \overset{f'(t)=4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2t-1=4 \Rightarrow 2t=5 \Rightarrow t=2/5$$

مثال ۴۴: جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$، را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق تابع را در بازه‌ی $[-1,3]$ مشخص کنید (دی ۹۷ و خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x \Rightarrow f'(x)=6x^2+6x-12$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2+6x-12=0 \xrightarrow{\div 6} x^2+x-2=0$$

$$(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-2 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-2		1	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
		صعودی		نزولی		صعودی

برای تولید اکسترمم های مطلق تابع باید طول ریشه های مشتق (که در بازه ی مورد بررسی باشد) و نقاط ابتدای بازه را در تابع قرار دهیم . بیشترین مقدار ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق تابع است

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x \begin{cases} \xrightarrow{1} f(1)=-7 \\ \xrightarrow{-1} f(-1)=13 \\ \xrightarrow{x=3} f(3)=45 \end{cases}$$

در نتیجه ماکسیمم و مینیمم مطلق برابر است با:

$$\Rightarrow Min:(1,-7) \quad , \quad Max:(3,45)$$

مثال ۴۵: در تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x-0$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید (دی ۹۸و۹۹)

پاسخ:

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-10 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-9$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x-9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+2x-3=0$$

$$(x-1)(x+3)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-3 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-3		1	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
			Max		Min	

$$f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-9(-3)-10=17 \Rightarrow Max:(-3,17)$$

$$f(1)=(1)^3+3(1)^2-9(1)-10=-15 \Rightarrow Min:(1,-15)$$

مثال ۴۶: اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^3-3x+7$، را در بازه‌ی $[-1,3]$ در صورت وجود به دست آورید (شهریور ۹۹)

پاسخ:

$$f(x)=x^3-3x+7 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=\pm 1$$

هر دو ریشه ی بدست آمده در فاصله ی $[-1,3]$ هستند.

$$f(x)=x^3-3x+7 \begin{cases} \xrightarrow{1} f(1)=5 \\ \xrightarrow{-1} f(-1)=9 \\ \xrightarrow{x=3} f(3)=25 \end{cases}$$

در نتیجه ماکسیمم و مینیمم مطلق برابر است با:

$$\Rightarrow Min:(1,5) \quad , \quad Max:(3,25)$$

مثال ۴۷: جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$، را رسم و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب) اکسترمم های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازه‌ی $[-2,1]$ مشخص کنید (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$f(x)=x^3-3x+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow$$

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
			Max		Min	

$$f(1)=(1)^3-3(1)+4=2 \quad Min:(1,2)$$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+4=6 \Rightarrow Max:(-1,6)$$

ب)

$$g(x)=x^3+2x-5 \Rightarrow g'(x)=3x^2+2\neq 0$$

تابع در هیچ نقطه ای صفر نشد . پس ابتدا و انتهای بازه را برای ماکسیمم و مینیمم نسبی بررسی می کنیم

$$g(-2)=(-2)^3+2(-2)-5=-17\ Min$$

$$g(1)=(1)^3+2(1)-5=-2\ Max$$

مثال ۴۸: تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$، را در نظر بگیرید

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[0,3]$ در صورت وجود مشخص کنید (خرداد ۹۹)

پاسخ:

$$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9 \Rightarrow f'(x)=-6x^2+6x+12$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+6x+12=0 \xrightarrow{\div(-6)} x^2-x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
			Min		Max		

$$f(-1)=-2(-1)^3+3(-1)^2+12(-1)-9=-16 \Rightarrow Min:(-1,-16)$$

$$f(2)=-2(2)^3+3(2)^2+12(2)-9=11 \Rightarrow Max:(2,11)$$

ب) ریشه های مشتق -1 و 2 بودند که ریشه ی -1 در بازه ی $[0,3]$ نیست و بررسی نمی شود

$$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9 \begin{cases} \xrightarrow{0} f(0)=-9 \\ \xrightarrow{x=2} f(2)=11 \\ \xrightarrow{x=3} f(3)=0 \end{cases}$$

در نتیجه ماکسیمم و مینیمم مطلق برابر است با:

$$\Rightarrow Min:(0,-9) \quad , \quad Max:(2,11)$$

مثال ۴۹: اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$، در ۱ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید (خرداد ۹۸ و شهریور ۹۹)

پاسخ: نقطه ی اکسترمم دارای دو تا ویژگی است . اولا طول و عرض آن در تابع صدق می کند و دوم اون که مشتق تابع به ازای طول اکسترمم صفرمی شود

$$f(x)=ax^2+bx \xRightarrow{f(1)=7} a(1)^2+b(1)=7 \Rightarrow a+b=7$$

$$f'(x)=2ax+b \xRightarrow{f'(1)=0} 2a(1)+b=0 \Rightarrow 2a+b=0$$

حالا دو تا رابطه ی بدست آمده را در یک دستگاه حل می کنیم تا مقادیر a و b رو بدست بیاریم

$$\begin{cases}a+b=7\\2a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a-b=-7\\2a+b=0\end{cases} \xRightarrow{+} a=-7\ ,\ b=14$$

مثال ۵۰: اگر نقطه ی $(2,1)$ نقطه ی اکسترمم تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر d و b را بدست آورید (خرداد ۹۹)

پاسخ: نقطه ی اکسترمم دارای دو تا ویژگی است . اولا طول و عرض آن در تابع صدق می کند و دوم اون که مشتق تابع به ازای طول اکسترمم صفرمی شود

$$f(x)=x^3+bx^2+d \xRightarrow{f(2)=1} (2)^3+b(2)^2+d=1 \Rightarrow 4b+d=-7$$

$$f'(x)=3x^2+2bx \xRightarrow{f'(2)=0} 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow 12+4b=0$$

$$12+4b=0 \Rightarrow b=-3 \xRightarrow{4b+d=-7} d=5$$

مثال ۵۱: اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود (دی ۹۷)

پاسخ: طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y درنظرمی گیریم و داریم:

محیط: $2x+2y=24 \xRightarrow{\div 2} x+y=12 \Rightarrow y=12-x$

مساحت: $S=x\times y \xRightarrow{y=12-x} S(x)=x\times(12-x)$

$$\Rightarrow S(x)=-x^2+12x$$

از تابع تک متغیره ی مساحت مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم تا اکسترمم رو ببینیم

$$\Rightarrow S'(x)=-2x+12=0 \Rightarrow x=6 \xRightarrow{x+y=12} y=6$$

همین سوال در دی ماه ۹۹ با این مضمون مطرح شد که نشان دهید در بین مستطیل های با محیط ثابت ۲۴ سانتی متر، مستطیلی بیش ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند. که دقیقاً راه حل بالا رو باز هم خواهیم داشت

مثال ۵۲: دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن باشد (دی ۹۸)

پاسخ: دو عدد حقیقی را به ترتیب x و y درنظرمی گیریم و داریم:

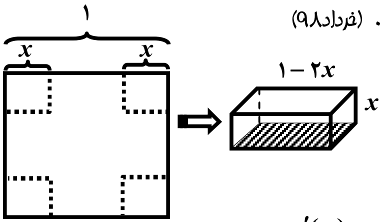
$y-x=0 \Rightarrow$ حاصلضرب $=x\times y \xRightarrow{y=0+x}$ حاصلضرب $=x\times(0+x)$

حاصلضرب $=x^2+10x$

از حاصلضرب تک متغییره شده مشتق گرفته برابر صفر قرار می دهیم

مشتق $=2x+10=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow y=5$

مثال ۵۳: ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید . می خواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم و سپس لبه جعبه را به اندازه ی x بر می گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود . مقدار x چقدر باشد تا حجم حداکثر مقدار ممکن باشد. (خرداد ۹۸)



پاسخ:

$$v(x)=(1-2x)^2\times x$$

$$v(x)=(1-4x+4x^2)\times x$$

$$v(x)=x-4x^2+4x^3$$

$$v'(x)=1-8x+12x^2 \xRightarrow{v'(x)=0} 12x^2-8x+1=0$$

مثال ۵۴: دو عدد حقیقی a و b بیابید که داشته باشیم $2a+b=0$ و حاصل ضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد (دی ۹۸)

پاسخ:

$$2a+b=60 \Rightarrow b=60-2a$$

حاصلضرب $=a\times b=a\times(60-2a)=-2a^2+60a$

از حاصلضرب تک متغییره شده مشتق گرفته برابر صفر قرار می دهیم

مشتق $=-4a+60=0 \Rightarrow a=15 \Rightarrow b=60-2(15)=30$

مثال ۵۵: هر صفحه ی مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود . هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه $2cm$ و حاشیه های $1cm$ در نظر گرفته شود . ابعاد متن این صفحه را طوری تعیین کنید تا مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد (خرداد ۹۹)

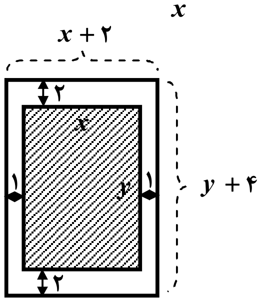
پاسخ:

مساحت متن: $x\times y=32$

$$xy=32, y=\frac{32}{x}$$

مساحت صفحه: $(x+4)\times(y+2)=xy+2x+4y+8 \Rightarrow$

مساحت صفحه $=\frac{128}{x}+40+2x \Rightarrow$ مشتق $=-\frac{128}{x^2}+2=0$



$$\frac{128}{x^2}=2 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=4$$

درنتیجه مساحت صفحه برابر است با: 12×6

مثال ۵۶: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور x ها و دو راس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی به معادله ی $y=12-x^2$ باشند. (خارج خرداد ۹۹)

پاسخ:

مثــال ۵۷: در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است . خروج از مرکز این بیضی چقدر است ؟ (دی ۹۷ و خرداد ۹۸)

پاســخ :

قطر بزرگ: $۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$ و قطر کوچک: $۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$

رابطه ی پارامترهای a و b و c : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۴^۲ = ۳^۲ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۷ \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{}}{۴}$

مثــال ۵۸: کانون های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است.

الف) فاصله ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید

ب) اگر a ۶ باشد ، اندازه ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید(دی ۹۸ و خرداد و شهریور ۹۹)

پاســخ : الف) فاصله ی بین کانون ها ، فاصله ی کانونی یا همان $۲c$ است

$$۲c = ۳ - (-۵) = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

مرکز بیضی دقیقا وسط کانون هاست

$$\begin{cases} F : (۱,۳) \\ F' : (۱,-۵) \end{cases} \Rightarrow O : (\frac{۱+۱}{۲}, \frac{-۵+۳}{۲}) = (۱,-۱)$$

رابطه ی پارامترهای a و b و c : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶^۲ = b^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b^۲ = ۲۰ \Rightarrow b = ۲\sqrt{۵}$$

طول قطر کوچک بیضی $۲b$: $۲b = ۴\sqrt{۵}$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

مثــال ۵۹: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ و مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است

الف) طول قطر کانونی را محاسبه کنید

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید (دی ۹۹)

پاســخ :

$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$ خروج از مرکز : $\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow c = \frac{۴}{۵}a$

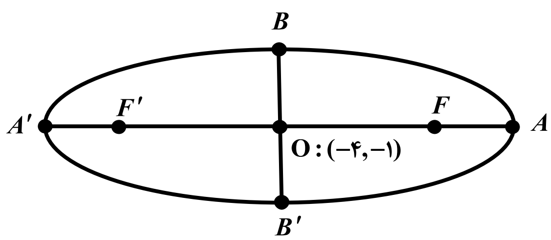
رابطه ی پارامترهای a و b و c : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$a^۲ = ۳^۲ + (\frac{۴}{۵}a)^۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ + \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ \Rightarrow a^۲ - \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ = ۹$$

$$\frac{۲۵}{۲۵}a^۲ - \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ = ۹ \Rightarrow \frac{۹}{۲۵}a^۲ = ۹ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow c = ۴$$

الف) طول قطر کانونی: $۲c = ۸$

ب)



مثــال ۶۰: در یک بیضی قائم قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک آن ۴ واحد است . اگر مختصات مرکز آن $(۴,۵)$: O باشد

الف) فاصله ی کانونی بیضی را پیدا کنید

ب) مختصات دو سر قطر بزرگ آن را بنویسید ؟ (خارج خرداد ۹۹ عصر)

پاســخ :

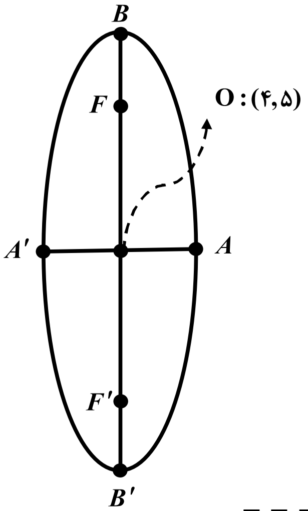
قطر بزرگ: $۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$ و قطر کوچک: $۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$

رابطه ی پارامترهای a و b و c : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۳^۲ = ۲^۲ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

فاصله ی کانونی: $۲c = ۲\sqrt{۵}$

ب)



نکتــه نامه

:

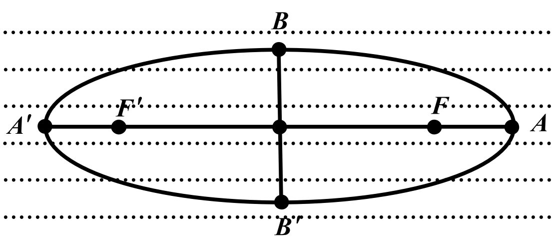
$۲a$: قطر بزرگ

$۲b$: طول قطر کوچک

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a}$

فاصله ی بین کانون ها ، فاصله ی کانونی یا همان $۲c$ است

رابطه ی پارامترهای a و b و c : $a^۲ = b^۲ + c^۲$



معادلهٔ دایره:

معادلهٔ دایره به دو صورت استاندارد و گسترده بیان می‌شود:

استاندارد	گسترده
$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲}$	$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$
مرکز: $O(\alpha,\beta)$	مرکز: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$
شعاع: r	شعاع: $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$

مثال ۶۱: معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۲y+۶=۰$ می باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید (دی ۹۷)

پاسخ:

$$x^{۲}+y^{۲}\underbrace{-۶}_{۶}x+\underbrace{۲}_{b=۲}y+\overset{۶}{۶}=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۶ \\ b= \\ c=۶ \end{cases}$$

مختصات مرکز: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-\frac{-۶}{۲},-\frac{۲}{۲})=(۳,-۱)$

شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۲۴}=۲$

مثال ۶۲: وضعیت دو دایره به معادلات $(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید (خرداد ۹۸)

پاسخ: مختصات مرکز و شعاع دایره ی اول برابر است:

$(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۱\Rightarrow$ مرکز: $O(-۱,۲)$ و شعاع: $r=۱$

مختصات مرکز و شعاع دایره ی دوم برابر است

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b= \\ c=۱ \end{cases}$$

مختصات مرکز: $O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(-\frac{-۲}{۲},-\frac{۴}{۲})=(۱,-۲)$

شعاع $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$

در مرحله ی بعد فاصله ی بین مرکز دایره ها رو تولید کنیم:

$$\begin{cases} O:(-۱,۲) \\ O':(۱,-۲) \end{cases} \Rightarrow OO'=\sqrt{(-۱-۱)^{۲}+(۲-(-۲))^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

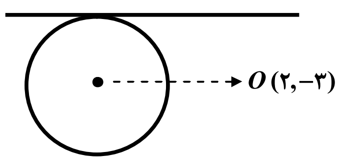
چون فاصله ی بین مرکزها بیشتر از مجموع شعاع دو دایره است. پس دو دایره متخارج هستند

مثال ۶۳: وضعیت دایره‌ی $(x-۲)^{۲}+(y+۳)^{۲}=۴$ وخط
۱ را نسبت به هم مشخص کنید (دی ۹۸)

پاسخ: مختصات مرکز و شعاع دایره ی اول برابر است:

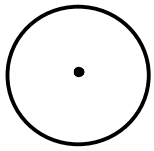
$(x-۲)^{۲}+(y+۳)^{۲}=۴\Rightarrow$ مرکز: $O(۲,-۳)$ و شعاع: $r=۲$

۱



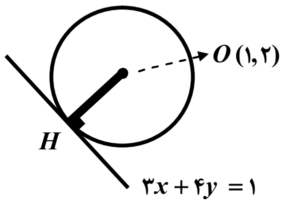
مثال ۶۴: وضعیت خط $x+y=۳$ دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۳=۰$ مشخص کنید (شهریور ۹۸)

پاسخ:



مثال ۶۵: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y=۱$ مماس بوده و مرکز آن $(۱,۲)$ باشد (شهریور ۹۸)

پاسخ:



فاصله ی بین مرکز دایره و خط مماس برابر شعاع دایره است. پس:

$۳x+۴y=۱\Rightarrow ۳x+۴y-۱=۰$

$$\begin{cases} ۳x+۴y-۱=۰ \\ O(۱,۲) \end{cases} \Rightarrow OH=\frac{|۳(۱)+۴(۲)-۱|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

با داشتن شعاع $r=۲$ و مرکز $(۱,۲)$، معادله ی دایره برابر است با:

$(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۴$

ب) مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید

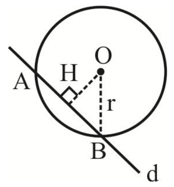
$(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۴ \overset{y=۰}{\Rightarrow} (x-۱)^{۲}+(۰-۲)^{۲}=۴$

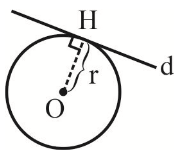
$(x-۱)^{۲}+۴=۴ \Rightarrow (x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=۱$

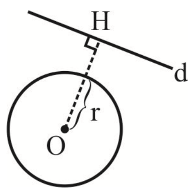
نکته نامه

وضعیت نسبی خط و دایره

خط و دایره سه تا وضعیت نسبت به هم دارن. می‌توانند صفر، یك و یا دو نقطهٔ برخورد داشته باشند:

حالت اول	شرط	تعداد برخورد	شکل
متقاطع باشند.	$OH < r$	دو نقطه	
نکات و توضیحاتش	۱− طول وتر AB: $۲BH^۲ = ۲\sqrt{r^۲-(OH)^۲}$ ۲− معادلهٔ تقاطع آن‌ها دو ریشه دارد. (باید معادلهٔ درجه دو بسازیم و Δ را بزرگتر از صفر قرار دهیم.)		

حالت دوم	شرط	تعداد برخورد	شکل
مماس باشند.	$OH = r$	یك نقطه	
نکات و توضیحاتش	۱− خط d در نقطهٔ H بر شعاع دایره عمود است. ۲− معادلهٔ تقاطع آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد. ۳− فاصلهٔ نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ از خط $d: ax+by \quad c \quad \circ$ برابر است با: $OH = \dfrac{\lvert a(\alpha)+b(\beta)+c \rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$		

حالت سوم	شرط	تعداد برخورد	شکل
قطع نکنند.	$OH > r$	صفر نقطه	
نکات و توضیحاتش	۱− معادلهٔ تقاطع، ریشه ندارد.		

تذکر: برای به‌دست آوردن مختصات نقاط تقاطع یك خط و یك دایره، دو معادله را مساوی قرار داده (معادلهٔ تقاطع) و معادلهٔ درجه دوم به‌دست آمده را حل می‌کنیم.

نکته مهم: خطوط گذرنده از مرکز دایره بر دایره عمودند.

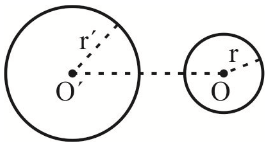
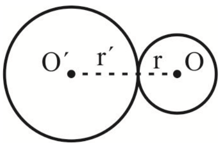
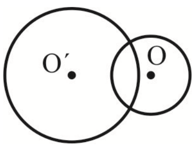
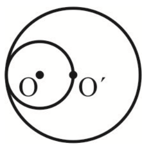
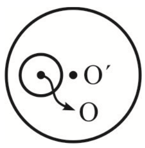
وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای بررسی وضعیت دو دایره C و C' نسبت به هم مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) مرکزهای دو دایره یعنی O و O' و شعاع‌هایشان یعنی r و r' است به‌دست می‌آوریم.

۲) فاصلهٔ OO' را یافته و آن را با $r+r'$ و $\lvert r-r' \rvert$ (مجموع و تفاضل شعاع ها) مقایسه می‌کنیم.

بعد از مقایسهٔ OO' با $r+r'$ یا $\lvert r-r' \rvert$ حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

وضعیت دو دایره	شرط	شکل
متخارج	$OO' > r+r'$	
مماس خارج	$OO' = r+r'$	
متقاطع	$\lvert r-r' \rvert < OO' < r+r'$	
مماس داخل	$OO' = \lvert r-r' \rvert$	
متداخل	$OO' < \lvert r-r' \rvert$	

مثال ۶۶: دو دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۱۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۱$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاسخ: ابتدا باید O، O'، r و r' (مرکزها و شعاع ها) را به‌دست آوریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۳=\circ \Rightarrow O(۱,-۲),$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲-۴(-۱۳)}=\frac{۱}{۲}(۶\sqrt{۲})=۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۱=\circ \Rightarrow O'(-۱,\circ),$$

$$r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۳)^۲+(\circ)^۲-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})=\sqrt{۲}$$

حالا باید OO' (فاصلهٔ بین مرکزها) را با $r+r'$ و $\lvert r-r' \rvert$ مقایسه کنیم:

$$OO'=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(-۲-\circ)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

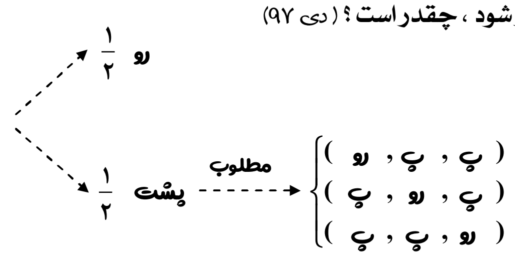
$$r+r'=۴\sqrt{۲} \quad , \quad \lvert r-r' \rvert=۲\sqrt{۲}$$

پس $OO'=\lvert r-r' \rvert$ است. درنتیجه دو دایره مماس داخل‌اند.

احتـــــــمال کل

؟ مثـال ۶۷: یك سكه را پرتاب می كنیم و اگر پشت بیاید ۳ سكه دیگر را با هم پرتاب می كنیم. در این آزمایش احتمال این كه دقیقاً یك سكه "رو" ظاهر شود ، چقدر است ؟ (دی ۹۷)

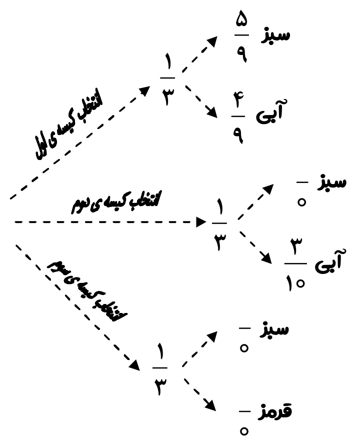
پاسـخ :



$$P(A)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 3=\frac{11}{16}$$

؟ مثـال ۶۸: سه ظرف یكسان داریم . ظرف اول شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی است . ظرف دوم شامل ۷ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی آبی است . ظرف سوم شامل ۶ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی قرمز است . با چشم بسته یكی از ظرف ها را انتخاب كرده و یك مهره از آن بیرون می آوریم . با چه احتمالی این مهره آبی است ؟ (خرداد ۹۸ و دی ۹۹)

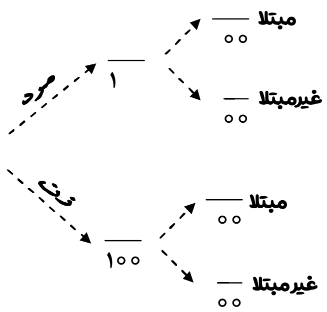
پاسـخ :



$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{67}{270}$$

؟ مثـال ۶۹: فرض كنید جمعیت یك كشور متشكل از ۰ درصد مرد و ۰ درصد زن باشند واحتمال شیوع یك بیماری خاص در این دو گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد ، اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود ، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است ؟ (دی ۹۸)

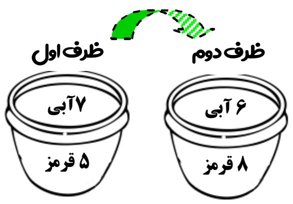
پاسـخ :

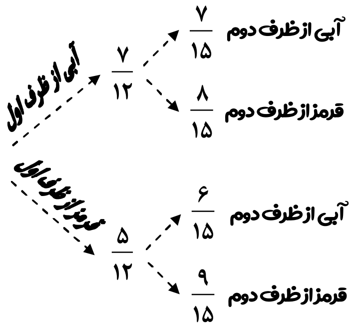


$$P(A)=\frac{40}{100}\times\frac{3}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{42}{1000}$$

؟ مثـال ۷۰: دو ظرف یكسان داریم . ظرف اول شامل ۷ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهره‌ی آبی و ۸ مهره‌ی قرمز است و از ظرف اول به تصادف یك مهره انتخاب كرده و در ظرف دوم قرار می دهیم . سپس یك مهره از ظرف دوم انتخاب می كنیم . با چه احتمالی این مهره آبی است ؟ (شهریور ۹۸)

پاسـخ :

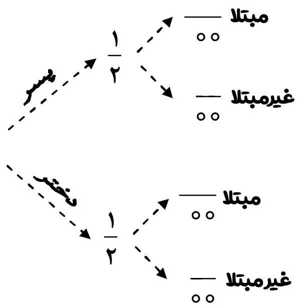




$$P(A)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}+\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}=\frac{79}{0}$$

؟ مثـال ۷۱: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزادپسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد ، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذكور مبتلا خواهد شود ؟ (خرداد ۹۹ و شهریور ۹۹)

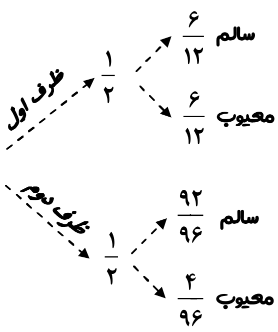
پاسـخ :



$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{100}=\frac{11}{200}$$

؟ مثـال ۷۲: دو جعبه داریم . درون یكی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد كه ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه‌ی دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد كه ۴ تا از آنها معیوب هستند . به تصادف جعبه ای انتخاب كرده ، یك لامپ از آن بیرون می آوریم . چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد ؟ (خرداد خارج صبح ۹۹)

پاسـخ :



$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{24}=\frac{13}{48}$$