جزوه مفهومی

ریاضی یازدهم

تهیه و تنظیم

مهندس محمدخانی

۰۹۱۴۹۱۹۷۷۸۳

در پشت چارچرخه فرسوده ای / کسی خطی نوشته بود:

"من گشته ام نبود ! تو دیگر نگرد

نیست!"... گر خسته ای بمان و اگر خواستی بدان:

ما را تمام لذت هستی به جستجوست.

پویندگی تمامی معنای زندگی ست.

هرگز "نگرد! نیست"

سزاوار مرد نیست...

باسلام به دوستان عزیزم در سر تا سر ایران مخصوصا دوستان سال یازدهمی.امیدوارم حالتون روبراه باشه و سال دهم رو به خوبی و بانمرات عالی تموم کرده باشین مخصوصا درس ریاضی و آماده باشین تا ریاضی یازدهم رو با همدیگه شروع کنیم. پس بهتره بدون فوت وقت یراست بریم سراغ مطالب جزوه.بچه ها تواین جزوه سعی کردم تا مطالب ریاضی یازدهم رو بطور کامل ومفهومی بهتون یاد بدم تا اولا از خوندن ریاضی خسته نشین دوما بتونین بهترین نمره رو تو امتحان نهایی کسب کنین و نکات تستی هر بخشو هم خوب یاد بگیرین. تو قسمت اول هر فصل ، ابتدا درس رو آموزش میدیم تو قسمت آخر هم به حل تمرینات با پاسخ تشریحی میپردازیم. من مطمینم همه ی دوستان عزیز با خوندن جزوه به ریاضی یازدهم مسلط میشن چون این جزوه اولین جزوه ای هستش که تو کشور برای ریاضی یازدهم نوشته شده سعی کردم ازسابقه ی چندین سال تدریس تو بهترین مدارس تبریز بهره برده وتا حد توانم مطالب رو بطور کامل بنویسم تا همه بتونن ازش استفاده کنن. هزینه استفاده از جزوه هم نثار فاتحه ای برای پدر عزیزم هستش.ممنونم.راستی بچه ها تا یادم نرفته پارسال بعد از اینکه جزوه ریاضی دهم رو تو اینترنت منتشر کردیم دوستان عزیزی از سراسر کشور برای برگزاری کلاس تماس گرفتن ضمن اینکه از همه ی این عزیزان ممنونم ولی لازمه همینجا یادآوری کنم که بعلت مشغله ی کاری و بعد مسافت فقط تو آذربایجان شرقی و تبریز میتونم در خدمتتون باشم.بازم از لطف همه ی شما که انرژی فراوانی بهم میده ممنونم.

محمد خانی خرداد ۹۶

بخش اول

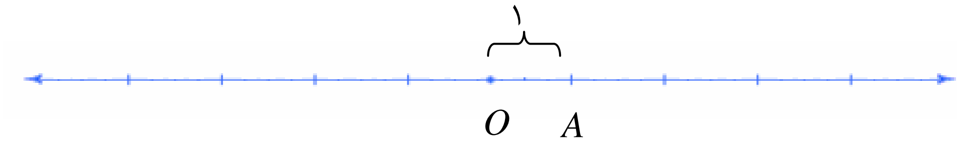
آموزش مفهومی و کامل کتاب درسی

هندسه تحلیلی و معادله خط

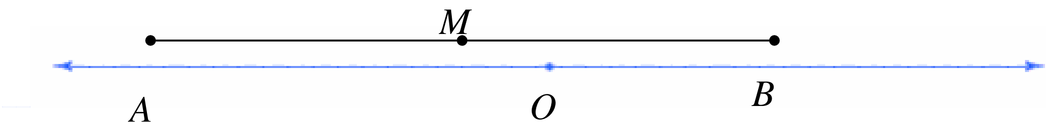
دراین قسمت مطالب و نکات کتاب درسی رو بطور کامل آموزش میدیم.حتما این بخش رو چندین بار با دقت بخونید تا به درس مسلط بشین.میتونین پس از اینکه این مطالبو خوب یاد گرفتین نکات تکمیلی رو مطالعه کرده سپس به حل تمرینات تشریحی که در انتهای فصل قرار دادیم بپردازین.

محور اعداد حقیقی (فضای یک بعدی)

یک خط جهت دار که نقطه ای به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه گیری روی آن تعیین شده باشد را محوراعداد حقیقی یا به اختصار محور می نامند. محور $x'Ox$ را محور طول ها و نقطه ی O را مبدأ می گویند. بین مجموعه ی نقاط محور و مجموعه ای اعداد حقیقی تناظر یک به یک وجود دارد، یعنی هر نقطه روی محور با یک عدد حقیقی و هر عدد حقیقی با یک نقطه روی محور متناظر است. عدد حقیقی متناظر با هر نقطه را طول آن نقطه می نامند که با فاصله ی آن نقطه از مبدأ برابر است.



طول نقطه ی A روی محور طول ها را با x_A نمایش می دهند.



فاصله ی دو نقطه ی B و A روی محور

$$AB = |x_B - x_A|$$

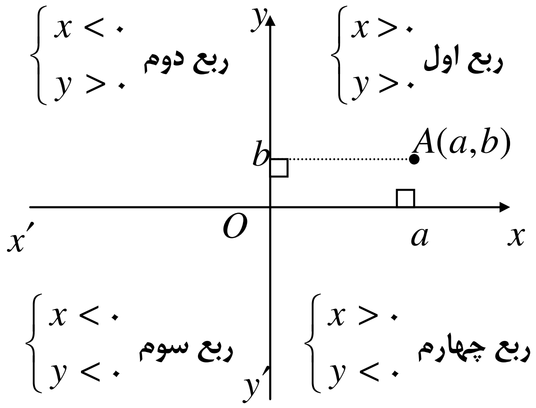
طول نقطه ی M وسط پاره خط AB روی محور

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

تمرین : اگر B و A دو نقطه از محور طول ها و $x_A = -۱$ و $x_B = ۱۵$. اندازه ی پاره خط AB و طول نقطه ی میانی آن را بدست آورید.

دستگاه مختصات در صفحه ($R^۲$)

هر دو محور عمود بر هم تشکیل یک دستگاه دو بعدی (دستگاه دکارتی) در فضای $R^۲$ می دهند. این دو محور صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند. هر ناحیه را یک ربع می نامند. محور افقی ($x'Ox$) را محور طول ها و محور قـائم ($y'Oy$) را محور عرض ها و نقطه ی O محل تقاطع دو محور را مبدأ مختصات می نامند. بین نقاط صفحه و زوج های مرتب (x,y) از اعداد حقیقی تناظر یک به یک وجود دارد. یعنی هر نقطه روی صفحه با یک زوج مرتب از اعداد حقیقی به شـکل (x,y) و هر زوج از اعداد حقیقی با یک نقطه از صفحه متناظر است.



توجه :

۱ : هر نقطه روی محور طولها ، عرض آن صفر است.

۲ : هر نقطه روی محور عرض ها ، طول آن صفر است.

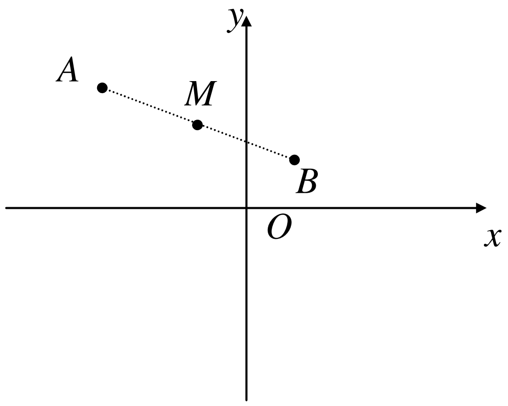
فاصله ی دو نقطه در صفحه

فاصله ی دو نقطه ی B و A در صفحه از رابطه زیر بدست می آید.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

حالت خاص : فاصله ی هر نقطه مانند $A(a,b)$ از مبـدأ مختصات به صورت زیر است.

$$OA = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$



مختصات نقطه ی وسط پاره خط

طول نقطه ی M وسط پاره خط AB در صفحه از رابطه زیر بدست می آید.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

تمرین : در صورتی که $A(-۲,۳)$ و $B(۱,-۱)$. اندازه ی پاره خط AB و مختصات نقطه ی میانی آن را بدست آورید.

تمرین : در صورتی که $A(۱,۰)$ و $B(-۲,۳)$. دو رأس مقابل مربعی باشند، مساحت و محیط مربع را بدست آورید.

تمرین : دو نقطه ی $A(۵,۷)$ و $B(-m,m-۲)$ داده شده اند، مقدار m را به قسمی تعیین کنید که طول پاره خط AB برابر ۱۰ باشد.

تمرین : فاصله ی نقطه ی $P(۳\sqrt{۲},-\sqrt{۷})$ از مبدأ مختصات را بدست آورید.

تمرین : نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۲,-۲)$ رئوس مثلث ABC می باشند.

الف : مثلث را رسم کنید.

ب : طول اضلاع مثلث را بدست آورده و نوع آن را تعیین کنید.

ج :اندازه ی میانه ی[1] AM را بیابید.

تمرین : سه نقطه ی $A(۰,-۱)$ و $B(۳,۱)$ و $C(۲,-۴)$ رئوس مثلث ABC می باشند.

الف : مثلث را رسم کنید.

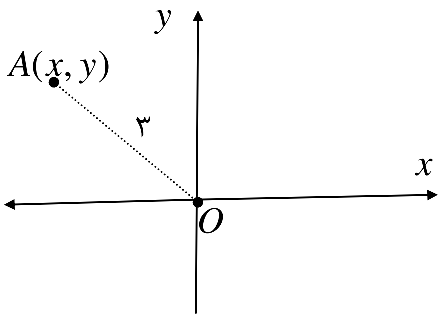
ب : طول اضلاع مثلث را بدست آورده و نوع آن را تعیین کنید.

ج : مساحت مثلث را محاسبه کنید.

تمرین : مجموعه ی نقاطی از صفحه را طوری پیدا کنید که فاصله ی آنها از مبدأ مختصات برابر ۳ باشد.

[1] . در هر مثلث ، میانه پاره خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل آن وصل می کند.

حل:



$OA=۳$

$\rightarrow\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۳\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۹$

دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳

معادله ی خط راست در صفحه

از هر دو نقطه همواره یک خط راست می گذرد. معادله ی هر خط راست به یکی از صورت های زیر است.

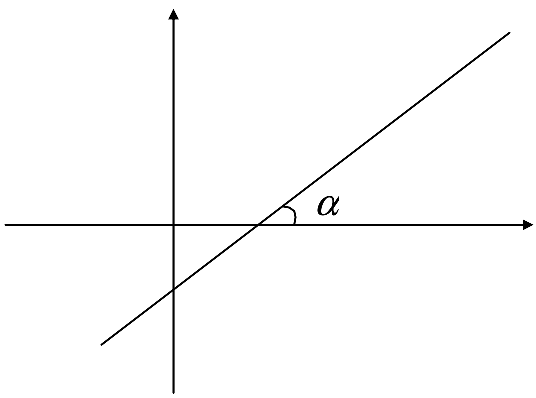
معادله ی استاندارد خط راست $y=mx+h$

ضریب x یعنی m را **شیب خط** (ضریب زاویه) می نامند که برابر تفاضل عرض ها به تفاضل طول های هر دو نقطه از آن خط است. عدد حقیقی h برابر عرض نقطه ی تقاطع خط با محور عرض ها می باشد و آن را عرض از مبدأ خط می نامند.

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید ، که شیب آن ۵ و عرض از مبدأ آن ۳– باشد.

تانژانت زاویه ای که خط با محور طولها در جهت مثبت می سازد را شیب خط می نامند

$m=\tan\alpha$



بدیهی است که شیب خطی که از دو نقطه ی A و B می گذرد به شکل زیر بدست می آید.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

نتیجه :

۱ : شیب هر خط موازی محور طولها صفر است .

۲ : شیب هر خط موازی محور عرض ها تعریف نمی شود.

۳ : معادله ی هر خط موازی محور طولها $y=k$

۴ : معادله ی هر خط موازی محور عرض ها $x=k$

۵ : معادله ی نیمساز ربع اول و سوم $y=x$

۶ : معادله ی نیمساز ربع دوم و چهارم $y=-x$

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که با محور طولها در جهت مثبت محور زاویه ی ۳۰ درجه می سازد و از نقطه ی $A(۰,۵)$ بگذرد.

تمرین : ثابت کنید که سه نقطه ی $A(-۴,۲)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(۱,-۳)$ روی یک خط راست واقع اند.

تمرین : سه نقطه ی $A(-۲,۴)$ و $B(a+۱,-۲)$ و $C(۳,۲)$ روی یک خط راست قرار دارند، مقدار a را بیابید.

تمرین : دو نقطه ی $A(۲,\sqrt{۳})$ و $B(۰,-\sqrt{۳})$ داده شده اند. زاویه ی خط با محور طول ها را بیابید.

معادله ی کلی خط راست

$$ax+by+c=۰$$

بدیهی است که شیب و عرض از مبدأ خط در این حالت به صورت زیر بدست می آیند.

شیب $m=-\frac{a}{b}$

عرض از مبدأ $h=-\frac{c}{b}$

تمرین: معادله ی خط راستی را بنویسید که از نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ بگذرد.

تمرین: زاویه ای که خط $\sqrt{3}x-3y+1=0$ با جهت مثبت محور طول ها می سازد را تعیین کنید.

تمرین : خط $ax+(2a-1)y+2=0$ داده شده است. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ی ۱۳۵ درجه بسازد.

تمرین: دو نقطه ی $A(a-1,2a)$ و $B(3a+5,a-1)$ داده شده اند. مقدار a را به قسمی تعیین کنید که این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ی ۴۵ درجه بسازد.

روش تعیین معادله ی خط

واضح است که هر خط راست با یک نقطه و امتدادش مشخص می شود. در این صورت

معادله ی خطی که از نقطه ی $A(x_0,y_0)$ می گذرد و شیب آن m باشد، به صورت زیر است.

$$y=m(x-x_0)+y_0$$

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $M(1,2)$ می گذرد و شیب آن برابر ۵ باشد.

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(-2,3)$ می گذرد و با جهت مثبت محور طول ها زاویه ی ۱۳۵ درجه می سازد[3].

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,2)$ می گذرد.

تمرین : نقاط $A(1,2)$ و $B(-3,3)$ و $C(0,-1)$ رئوس مثلث ABC می باشند.

الف : مثلث ABC را رسم کنید.

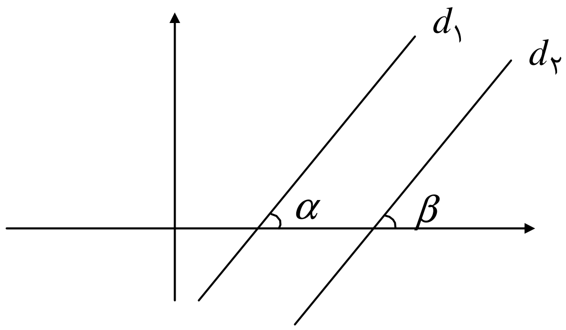
ب : معادله ی میانه ی AM را بنویسید.

---

[3] . توجه $\tan 135^\circ=-1$

شرط موازی بودن دو خط

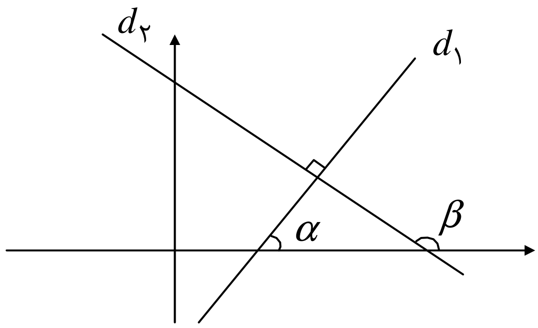
دو خط را موازی می نامند هرگاه با محور طولها در جهت مثبت زاویه های برابر ایجاد کنند. به عبارت دیگر دو خط موازیند ، هرگاه شیب های برابر داشته باشند و برعکس



$$\angle\alpha=\angle\beta \leftrightarrow m_1=m_2 \leftrightarrow d_1 \parallel d_2$$

شرط عمود بودن دو خط

دو خط بر هم عمودند ، هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها برابر ۱− باشد و برعکس



$$m_1 \times m_2=-1 \leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

تمرین : در هر مورد ، وضع نسبی دو خط را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases} 2y-x=1 \\ 4y=2x+3 \end{cases}$　　ب) $\begin{cases} 2y=3x-5 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases}$　　ج) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-4y=1 \end{cases}$

نتیجه : اگر دو خط موازی باشند، شیب یکی با عکس و قرینه ی شیب دیگری برابر است. ($m_2=-\frac{1}{m_1}$)

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(-1,2)$ می گذرد و با خط $2y-3x=2$ موازی است.

تمرین : معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(2,-3)$ می گذرد و بر خط $2x+y+3=0$ عمود باشد.

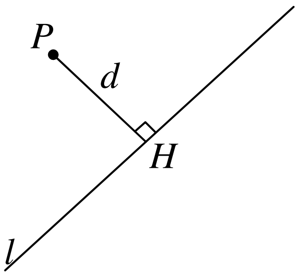
تمرین : دو خط به معادلات $(k+1)x - y = 2k-1$ و $kx + 2y - 1 = 0$ موازی یکدیگرند. مقدار k را تعیین کنید.

تمرین : مقدار k را چنان بیابید که دو خط $y + 2x - 1 = 0$ و $(2k-1)x + y - 2 = 0$ بر هم عمود باشند.

فاصله ی نقطه از خط

فاصله ی یک نقطه از یک خط طول عمودی است که از آن نقطه بر آن خط فرود می آید و محصور بین آن نقطه و پای عمود است.

بدیهی است که فاصله ی هر نقطه ی روی خط تا همان خط برابر صفر است.



برای محاسبه ی فاصله ی نقطه ی $P(x_1, y_1)$ از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ از دستور زیر استفاده می شود.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حالت خاص : فاصله ی مبدأ مختصات از خط به معادله ی $ax + by + c = 0$ به صورت زیر است.

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین: فاصله ی نقطه ی $M(1,-1)$ را از خط $3x - 4y + 3 = 0$ به دست آورید.

تمرین : فاصله ی مبدأ مختصات را از خط $3x + 4y = -20$ به دست آورید.

تمرین: نقاط $A(3,2)$ و $B(-2,3)$ و $C(0,-3)$ رئوس مثلث ABC می باشند.

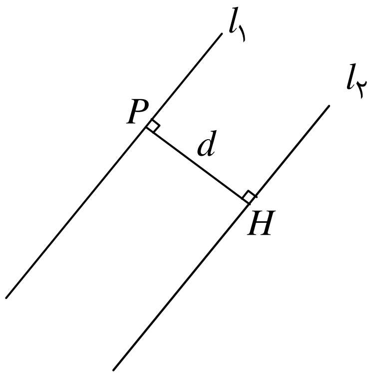
الف : طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را تعیین کنید.

ب : مساحت مثلث را محاسبه کنید.

تمرین: نقطه ی $A(-۳,-۱)$ یک رأس مربعی است که قطرش خط $۳x-۴y+۱=۰$ می باشد. مساحت این مربع را بدست آورید.

فاصله ی دو خط موازی

فاصله ی بین دو خط متوازی همواره مقداری است ثابت و برابر است با فاصله ی یک نقطه ی دلخواه یک خط از خط دیگر.



بنابر تعریف فوق واضح است که برای تعیین فاصله ی بین دو خط موازی کافی است نقطه ای دلخواه از یک خط را به دست آورده و فاصله ی این نقطه را تا خط دیگر محاسبه کنیم.

تمرین :

فاصله ی بین دو خط زیر را بدست آورید. $۴x+۳y-۸=۰$ و $۴x+۳y+۷=۰$

نتیجه : فاصله ی بین دو خط موازی $ax+by+c_۱=۰$ و $ax+by+c_۲=۰$ از دستور زیر نیز قابل محاسبه است.

$$d=\frac{|c_۱-c_۲|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تمرین: فاصله ی بین دو خط مقابل را بدست آورید. $۳x-۴y+۱=۰$ و $۶x-۸y-۷=۰$

مقدار k را طوری بیابید که فاصله ی بین دو خط موازی $۳x+۲y+۴=۰$ و $۳x+۲y+k-۱=۰$ برابر $۲\sqrt{۱۳}$ باشد.

بخش دوم

آموزش مفهومی و کامل کتاب درسی

جبر وحساب

دراین قسمت مطالب و نکات کتاب درسی رو بطور کامل آموزش میدیم.حتما این بخش رو چندین بار با دقت بخونید تا به درس مسلط بشین.میتونین پس از اینکه این مطالبو خوب یاد گرفتین نکات تکمیلی رو مطالعه کرده سپس به حل تمرینات تشریحی که در انتهای فصل قرار دادیم بپردازین.

معادله ی درجه ی دوم

هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $ax^{۲}+bx+c=۰$ (که در آن $a\neq ۰$ باشد) درآید، را معادله ی درجه ی دوم می نامند.

در این معادله c و b و a را ضرایب معادله می نامند.

تمرین: کدام یک از معادله های زیر درجه ی دوم است. ضرایب آنرا مشخص کنید.

۱) $(x-۱)(x+۲)=x(۳+x)+۱$

۲) $x^{۲}-۲x+۲=(x-۳)(۲x-۱)+۳$

۳) $(x-۱)(x+۱)=۵$

حل:

۱)

$$x^{۲}+۲x-x-۲=۳x+x^{۲}+۱\rightarrow -۲x-۳=۰$$

معادله درجه ی اول است.

۲)

$$x^{۲}-۳x+۲=۲x^{۲}-x-۶x+۳\rightarrow -x^{۲}+۳x-۱=۰$$

معادله درجه ی دوم است. $c=۱$ و $b=-۱$ و $a=-۱$

۳)

$$x^{۲}-۱=۵\rightarrow x^{۲}-۶=۰$$

معادله درجه ی دوم است. $c=-۶$ و $b=۰$ و $a=۱$

تمرین: اگر در یک معادله ی درجه ی دوم داشته باشیم: $c=۰$ و $b=-۳$ و $a=۲$ معادله را بنویسید.

حل:

$$ax^{۲}+bx+c=۰\xrightarrow{a=۲\text{ و }b=-۳\text{ و }a=۰}۲x^{۲}-۳x+۰=۰$$

هر عدد که یک معادله ی درجه ی دوم به ازای آن برقرار باشد را ریشه ی معادله می نامند.

تمرین: کدام یک از اعداد زیر ریشه ی معادله ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ می باشد.

الف) $x = ۱$

ب) $x = -۳$

حل:

الف)

$$۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۲(۱)^۲ - ۳(۱) + ۱ = ۰ \rightarrow ۲ - ۳ + ۱ = ۰ \rightarrow ۰ = ۰$$

پس $x = ۱$ ریشه ی معادله ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ است.

ب)

$$۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow{x=-۳} ۲(-۳)^۲ - ۳(-۳) + ۱ = ۰ \rightarrow ۱۸ + ۹ + ۱ = ۰ \rightarrow ۲۸ = ۰$$

وپس $x = -۳$ ریشه ی معادله ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ نیست.

تمرین: مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله ی $- ۲x^۲ - kx + ۱ = ۰$ برابر ۲ باشد.

حل:

$$- ۲x^۲ - kx + ۱ = ۰ \xrightarrow{x=۲} -۲(۲)^۲ - k(۲) + ۱ = ۰ \rightarrow -۸ - ۲k + ۱ = ۰$$
$$\rightarrow -۲k = ۷ \rightarrow k = \frac{۷}{-۲}$$

منظور از حل یک معادله ی درجه ی دوم تعیین ریشه های آن است. برای حل یک معادله ی درجه ی دوم روش های مختلفی وجود دارد. در اینجا ، دو روش متداول را به طور خلاصه توضیح می دهیم.

روش اول: تجزیه

می دانیم که اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد. حداقل یکی آنها صفر است.

$$A\times B=0\rightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$$

بر این اساس اگر تمام جملات معادله را به طرف اول منتقل کنیم و سپس در صورت امکان به کمک یکی از روش های تجزیه عبارت طرف اول را تجزیه کنیم. به کمک الگوی فوق می توان ریشه های معادله را تعیین کرد.

تمرین: معادله ی $x^2-3x=-2$ را حل کنید.

حل : پس از منتقل کردن تمام جملات به طرف اول معادله، به کمک اتحاد جمله ی مشترک عبارت طرف اول را تجزیه می کنیم.

$$x^2-3x=-2\rightarrow x^2-3x+2=0\rightarrow(x-1)(x-2)=0$$

پس داریم:

$$\begin{cases}x-1=0\rightarrow x=1\\x-2=0\rightarrow x=2\end{cases}$$

تمرین: معادله های زیر را به کمک تجزیه حل نمایید.

۱) $5x^2+30x=0$ ۳) $25t^2+10t+1=0$ ۵) $10x^3-15x^2+4x-6=0$

۲) $m^2-36=0$ ۴) $7x^2+5x-2=0$ ۶) $4k^2-9=0$

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن ۳ و ۱− باشند.

حل:

$$\begin{cases}x=-1\rightarrow x+1=0\\x=3\rightarrow x-3=0\end{cases}\rightarrow(x+1)(x-3)=0\rightarrow x^2-2x-3=0$$

روش دوم: مربع کامل کردن

واضح است که برای هر عدد حقیقی A و هر عدد حقیقی و غیر منفی B می توان نوشت:

$$A^{۲} = B \rightarrow A = \pm\sqrt{B}$$

توجه: اگر عدد B یک عدد منفی باشد. تساوی نادرست است.(چرا ؟)

تمرین: در هر مورد مقدار x را بیابید.

۱) $x^{۲} = ۲۵$

۲) $(x-۳)^{۲} = ۱۶$

۳) $(x+۲)^{۲} = ۰$

۴) $(۲x-۱)^{۲} = ۸$

۵) $(x+۵)^{۲} = -۹$

حل:

۱)

$$x^{۲} = ۲۵ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲۵} \rightarrow \begin{cases} x = +۵ \\ x = -۵ \end{cases}$$

۲)

$$(x-۳)^{۲} = ۱۶ \rightarrow x-۳ = \pm\sqrt{۱۶} \rightarrow \begin{cases} x-۳ = ۴ \rightarrow x = ۷ \\ x-۳ = -۴ \rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

۳)

$$(x+۲)^{۲} = ۰ \rightarrow x+۲ = ۰ \rightarrow x = -۲$$

۴)

$$(۲x-۱)^{۲} = ۸ \rightarrow ۲x-۱ = \pm\sqrt{۸} \rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ = ۲\sqrt{۲} \rightarrow x = \dfrac{۱+۲\sqrt{۲}}{۲} \\ ۲x-۱ = -۲\sqrt{۲} \rightarrow x = \dfrac{۱-۲\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

۵) تساوی درست نیست. لذا نمی توان مقداری برای x با این شرایط پیدا کرد.

بر این اساس اگر با انجام عملیاتی ، شرایطی فراهم شود که طرف اول معادله مربع باشد، می توان به کمک الگوی فوق ریشه های معادله را تعیین کرد.

تمرین: معادله ی $x^{۲} = ۶x + ۷$ را حل کنید.

حل:

$$x^{۲} = ۶x + ۷ \rightarrow x^{۲} - ۶x = ۷ \xrightarrow{+۹} x^{۲} - ۶x + ۹ = ۷ + ۹ \rightarrow (x-۳)^{۲} = ۱۶$$

$$\rightarrow x - ۳ = \pm ۴ \rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۴ \rightarrow x = ۷ \\ x - ۳ = -۴ \rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

تمرین: معادله ی $۴x^{۲} - ۱۲x + ۵ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$۴x^{۲} - ۱۲x + ۵ = ۰ \xrightarrow{+۹} ۴x^{۲} - ۱۲x + ۹ = -۵ + ۹ \rightarrow (۲x-۳)^{۲} = ۴ \rightarrow ۲x - ۳ = \pm ۲$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲x - ۳ = ۲ \rightarrow ۲x = ۵ \rightarrow x = \frac{۵}{۲} \\ ۲x - ۳ = -۲ \rightarrow ۲x = ۱ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

توجه: برای هر معادله به صورت $x^{۲} + px = q$ می توان با اضافه کردن مقدار $(\frac{p}{۲})^{۲}$ به دو طرف تساوی، طرف اول را به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^{۲} + px = q \xrightarrow{+(\frac{p}{۲})^{۲}} x^{۲} + px + (\frac{p}{۲})^{۲} = q + (\frac{p}{۲})^{۲} \rightarrow (x + \frac{p}{۲})^{۲} = \frac{p^{۲} + ۴q}{۴}$$

حال اگر مقدار $\frac{p^{۲} + ۴q}{۴}$ منفی نباشد، معادله دارای جواب است. در این صورت می توان نوشت:

$$x + \frac{p}{۲} = \pm\sqrt{\frac{p^{۲} + ۴q}{۴}} \rightarrow x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^{۲} + ۴q}{۴}} \rightarrow x = \frac{-p \pm \sqrt{p^{۲} + ۴q}}{۲}$$

تمرین: معادله ی $x^{2}-3x+2=0$ را حل کنید.

حل:

$$x^{2}-3x+2=0 \rightarrow x^{2}-3x=-2 \xrightarrow{+(\frac{-3}{2})^{2}=\frac{9}{4}} x^{2}-3x+\frac{9}{4}=-2+\frac{9}{4} \rightarrow (x-\frac{3}{2})^{2}=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{2}=+\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \\ x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1 \end{cases}$$

تمرین: ریشه ها ی معادله ی زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x^{2}+6x+12=0$$

حل:

$$x^{2}+6x+12=0 \rightarrow x^{2}+6x=-12 \xrightarrow{+(\frac{6}{2})^{2}=9} x^{2}+6x+9=-12+9 \rightarrow (x+3)^{2}=-3$$

و لذا معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

تمرین برای حل: معادله های زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

۱) $x^{2}+4x=8$

۲) $m^{2}-3m+5=0$

۳) $2x^{2}-x-10=0$

۴) $25t^{2}=-40t-16$

حل معادله ی درجه ی دوم در حالت کلی (روش کلاسیک)

با توجه به آنچه که در روش دوم یعنی مربع کامل کردن بحث شد ، می توان هر معادله ی درجه دوم به شکل

$$ax^۲+bx+c=۰$$

را به روش زیر حل کرد.

$$ax^۲+bx+c=۰\xrightarrow{\div a}\frac{ax^۲}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{۰}{a}\rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

$$\rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\xrightarrow{\div(\frac{b}{a}\div ۲)^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}}x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲}$$

$$\rightarrow(x+\frac{b}{۲a})^۲=-\frac{۴ac}{۴a^۲}+\frac{b^۲}{۴a^۲}\rightarrow(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}\rightarrow x+\frac{b}{۲a}=\pm\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}}$$

$$\rightarrow x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}\rightarrow x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

حال اگر عبارت $b^۲-۴ac$ را برابر Δ قرار دهیم و آنرا مبین معادله بنامیم، واضح است که در صورتی معادله دارای جواب است که Δ منفی نباشد.

بطور کلی در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم.

۱) ضرایب یعنی c و b و a را تعیین می کنیم.

۲) مبین معادله یعنی $\Delta=b^۲-۴ac$ را تعیین کنید.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه ی مضاعف) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله دارای ریشه ی حقیقی نیست.

تمرین: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $۲x^{۲}-۵x+۲=۰$ ۲) $۲۵t^{۲}=-۴۰t-۱۶$ ۳) $m^{۲}-۳m+۵=۰$

حل:

۱)

$a=۲$ و $b=-۵$ و $c=۲$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۵)^{۲}-۴(۲)(۲)=۲۵-۱۶=۹$$

لذا معادله دارای دو ریشه ی حقیقی است.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)+\sqrt{۹}}{۲(۲)}=\frac{۵+۳}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)-\sqrt{۹}}{۲(۲)}=\frac{۵-۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۲) ابتدا با مرتب کردن جملات ، معادله را به صورت کلی (استاندارد) می نویسیم.

$$۲۵t^{۲}=-۴۰t-۱۶\rightarrow ۲۵t^{۲}+۴۰t+۱۶=۰$$

$a=۲۵$ و $b=۴۰$ و $c=۱۶$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۴۰)^{۲}-۴(۲۵)(۱۶)=۱۶۰۰-۱۶۰۰=۰$$

لذا معادله دارای یک ریشه (ریشه ی مضاعف) است.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴۰}{۲(۲۵)}=\frac{-۴۰}{۵۰}=-\frac{۴}{۵}$$

۳)

$m^{۲} - ۳m + ۵ = ۰$

$a = ۱$ و $b = -۳$ و $c = ۵$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۳)^{۲} - ۴(۱)(۵) = ۹ - ۲۰ = -۱۱$

لذا معادله دارای ریشه ی حقیقی نیست.

تمرین: مقدار m را طوری بیابید که معادله ی زیر ریشه ی حقیقی نداشته باشد.

$$۲x^{۲} - ۵x + m = ۰$$

حل:

$a = ۲$ و $b = -۵$ و $c = m$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۵)^{۲} - ۴(۲)(m) = ۲۵ - ۸m$

$\Delta < ۰ \rightarrow ۲۵ - ۸m < ۰ \rightarrow m > \frac{-۲۵}{-۸} \rightarrow m > \frac{۲۵}{۸}$

***

تمرین برای حل: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $۳r^{۲} - ۷r + ۲ = ۰$

۲) $p^{۲} + \quad = ۶p$

۳) $k^{۲} + ۵ = ۰$

۴) $kx^{۲} + ۸kx + ۷ = ۰ \quad , \quad k \neq ۰$

۵) $۴m^{۲}x^{۲} + ۲mx - ۲ = ۰ \quad , \quad m \neq ۰$

۶) $x^{۲} - (k + ۲)x + ۲k = ۰$

۷) $nx^{۲} - (m + n^{۲})x + mn = ۰ \quad , \quad n \neq ۰$

۸) $mnx^{۲} - (m^{۲} + n^{۲})x + mn = ۰ \quad , \quad mn \neq ۰$

تمرین برای حل:

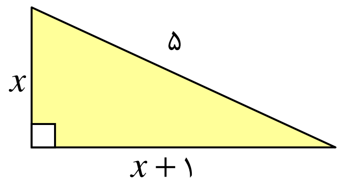
۱: تعیین کنید که هر کدام از معادله های زیر ریشه دارند یا نه، درصورت وجود ، تعداد آنها را نیز تعیین کنید.

الف) $۵x^{۲} + ۴x + ۱ = ۰$ ب) $t^{۲} + ۴t = -۱$ ج) $x^{۲} + ۲x = -۱$

۲ : دو برابر یک عدد به علاوه ی عدد چهار، مساوی با مجذور همان عدد است. آن عدد را پیدا کنید.

۳ : به کمک تشکیل معادله و حل آن یک عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب اعداد طبیعی قبل و بعد از آن ۲۴ باشد.

۴ : با توجه به شکل زیر مقدار x را بدست آورید.



۵ : مساحت باغچه ای مستطیل شکل۳۲۰ متر مربع است. اگر طول این باغچه ۴ متر بیشتر از عرض آن باشد، طول و عرض باغچه را پیدا کنید.

۶ : دو عدد صحیح متوالی پیدا کنید که مجموع مربعات آنها ۶۱ باشد.

۷ : دو عدد زوج متوالی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۷۲۸ باشد.

۸ : تفاضل دو عدد صحیح ۴ است و مجموع مربعات آنها ۱۳۶ است. آن دو عدد را حساب کنید.

۹ : طول ضلع مربعی را پیدا کنید که عدد مربوط به مساحت آن با عدد مربوط به محیط آن برابر باشند.

۱۰: مقدار m را طوری بیابید که معادله ی $x^۲-(m+۲)x+۲m=۰$ دارای ریشه ی مضاعف باشد.

۱۱ : مقدار k را طوری پیدا کنید که معادله ی زیر دو ریشه ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$x^۲-x-۲k=۰$$

۱۲ : مقدار m را طوری پیدا کنید که معادله ی زیر دو ریشه ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$(m-۱)x^۲-۲mx+m+۲=۰$$

۱۳: معادله ی درجه ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که

الف) اگر $a+c=b$ باشد،آنگاه معادله دارای دو ریشه به شکل $x_۲=-\frac{c}{a}$ و $x_۱=-۱$ است.

ب) اگر $a+c=-b$ باشد،آنگاه معادله دارای دو ریشه به شکل $x_۲=\frac{c}{a}$ و $x_۱=۱$ است.

معادله ی درجه ی دوم

☑ **مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله ی درجه دوم**

اگر x_2 و x_1 ریشه های معادله ی درجه ی دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند. در این صورت:

۱. مجموع ریشه ها $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

۲. حاصل ضرب ریشه ها $P=x_1.x_2=\frac{c}{a}$

تمرین: مطلب فوق را ثابت کنید.

اثبات:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

....

$$P=x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

تمرین: مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله ی درجه ی دوم زیر را بدست آورید.

$$2x^2-7x+12=0$$

توجه: قدر مطلق تفاضل ریشه های معادله ی $ax^{2}+bx+c=0$ به شکل زیر است.

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

تمرین: قدر مطلق تفاضل ریشه های معادله ی $2x^{2}-7x+6=0$ را بدست آورید.

تمرین: با توجه به معادله ی درجه ی دوم زیر اگر x_2 و x_1 ریشه های آن باشند،مقدار عبارت های زیر را تعیین کنید.

$$-2x^{2}+4x+9=0$$

1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$
2. $x_1^{2}+x_2^{2}$
3. $\frac{x_1^{2}+x_2^{2}}{3x_1x_2}$
4. $x_1^{3}x_2+x_1x_2^{3}$
5. $x_1^{3}+x_2^{3}$
6. $x_1^{4}+x_2^{4}$

تمرین: با توجه به معادله ی درجه ی دوم زیر اگر x_2 و x_1 ریشه های آن باشند،مقدار عبارت های زیر را تعیین کنید.

$$3x^{2}-24x+27=0$$

1. $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$
2. $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$

حل:

.1

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}\rightarrow(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{2}=\sqrt{x_1}^{2}+2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}+\sqrt{x_2}^{2}$$

$$\rightarrow(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^{2}=x_1+2\sqrt{x_1.x_2}+x_2\rightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1+2\sqrt{x_1.x_2}+x_2}$$

$$\rightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{-\frac{-24}{3}+2\sqrt{\frac{27}{3}}}=\sqrt{8+6}=\sqrt{14}$$

.2

$$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}\rightarrow(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})^{۲}=\sqrt{x_۱}^{۲}-۲\sqrt{x_۱}.\sqrt{x_۲}+\sqrt{x_۲}^{۲}$$
$$\rightarrow(\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲})^{۲}=x_۱-۲\sqrt{x_۱.x_۲}+x_۲\rightarrow\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=\sqrt{x_۱-۲\sqrt{x_۱.x_۲}+x_۲}$$
$$\rightarrow\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}=\sqrt{-\frac{-۲۴}{۳}-۲\sqrt{\frac{۲۷}{۳}}}=\sqrt{۸-۶}=\sqrt{۲}$$

تمرین: با توجه به معادله ی درجه ی دوم زیراگر $x_۲$ و $x_۱$ ریشه های آن باشند،مقدار عبارت $\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}$ را تعیین کنید.

$$x^{۲}+۴x+۸=۰$$

حل:

$$S=\frac{-b}{a}=-۴,P=\frac{c}{a}=۸$$
$$(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})^{۳}=\sqrt[۳]{x_۱}^{۳}+۳\sqrt[۳]{x_۱}^{۲}\sqrt[۳]{x_۲}+۳\sqrt[۳]{x_۱}\sqrt[۳]{x_۲}^{۲}+\sqrt[۳]{x_۲}^{۳}$$
$$\rightarrow(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})^{۳}=x_۱+۳\sqrt[۳]{x_۱}\sqrt[۳]{x_۲}(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})+x_۲$$
$$\rightarrow(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})^{۳}=x_۱+x_۲+۳\sqrt[۳]{x_۱x_۲}(\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲})$$
$$\xrightarrow{\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}=k}k^{۳}=S+۳k\sqrt[۳]{P}\rightarrow k^{۳}=-۴+۳k\sqrt[۳]{۸}\rightarrow k^{۳}=-۴+۶k$$
$$\rightarrow k^{۳}-۶k+۴=۰\rightarrow k^{۳}-۴k-۲k+۴=۰\rightarrow k(k^{۲}-۴)-۲(k-۲)=۰$$
$$\rightarrow k(k-۲)(k+۲)-۲(k-۲)=۰\rightarrow(k-۲)(k^{۲}+۲k-۲)=۰$$
$$\therefore\rightarrow k-۲=۰\rightarrow k=۲$$

$$\therefore\rightarrow k^{۲}+۲k-۲=۰\xrightarrow{\Delta=۴+۸=۱۲}\left\langle\begin{array}{l}k=\frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{۲}=-۱+\sqrt{۳}\\ k=\frac{-۲-۲\sqrt{۳}}{۲}=-۱-\sqrt{۳}\end{array}\right.$$

توجه : گاهی روابط بین ریشه های معادله ی درجه دوم را به شکل یک رابطه ی کلی اثبات می کنند. به چند نمونه زیر توجه کنید.

۱. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{S}{P}$

۲. $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$

۳. $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

۴. $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

۵. $x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2$

۶. $x_1^6+x_2^6=(S^3-3PS)^2-3P^3$

۷. $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

تمام این روابط قابل اثبات هستند. برای مثال مورد ۶ را ثابت می کنیم.

$$x_1^6+x_2^6=(x_1^3)^2+(x_2^3)^2=(x_1^3)^2+(x_2^3)^2+2x_1^3x_2^3-2x_1^3x_2^3$$
$$=(x_1^3+x_2^3)^2-2x_1^3x_2^3=(x_1^3+x_2^3)^2-2(x_1x_2)^3=(S^3-3PS)^2-3P^3$$

تمرین: مقدار m را چنان بیابید که مجموع ریشه های معادله ی درجه ی دوم زیر برابر ۵ باشد.

$$2x^2+(m-1)x=3$$

تمرین: در معادله ی $2x^2-mx+n=2$ مقدار n و m را چنان بیابید که حاصل جمع دو ریشه ی آن ۱۲ و حاصل ضرب آنها ۲۷ باشد.

تمرین: اگر β و α ریشه های معادله ی درجه ی دوم $x^2-2x+m=0$ باشند و داشته باشیم $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1}{2}$. مقدار m را بیابید.

تمرین: مقدار m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه های معادله ی $x^2+6x+m=0$ دو برابر دیگری باشد.

حل: طبق مسئله داریم:

$$\alpha=2\beta\xrightarrow{+\beta}\alpha+\beta=3\beta\rightarrow\frac{-b}{a}=3\beta\rightarrow-6=3\beta\rightarrow\beta=-2$$

حال مقدار β بدست آمده به عنوان یک ریشه باید در معادله صدق کند.پس:

$$(-2)^2+6(-2)+m=0\rightarrow m=8$$

تمرین: مقدار m را طوری بیابید که یکی از ریشه ها ی معادله ی $x^2 - mx + ۴ = ۰$ سه برابر دیگری باشد.

تمرین: اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c = ۰$ باشد.نشان دهید که می توان این معادله را به شکل $x^2 - Sx + P = ۰$ نیز نوشت.

اثبات:

$$ax^2 + bx + c = ۰ \to a[x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a}] = ۰ \xrightarrow{a \neq ۰} x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a} = ۰ \to x^2 - Sx + P = ۰$$

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسیدکه مجموع ریشه های آن ۵ و حاصل ضرب ریشه های آن۳- باشد.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که $\sqrt{۳} + ۲$ و $\sqrt{۳} - ۲$ ریشه های آن باشند.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$ و $\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}$ ریشه های آن باشند.

تمرین: اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۱۱ و حاصل ضربشان برابر ۲۴ باشد،آن دو عدد را تعیین کنید.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که بین ریشه های آن رابطه های زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = ۲x_1x_2 \\ x_1 + x_2 - x_1x_2 = ۳ \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} S = ۲P \\ S - P = ۳ \end{cases} \to S = ۶, P = ۳ \qquad \xrightarrow{x^2 - Sx + P = ۰} x^2 - ۶x + ۳ = ۰$$

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن قرینه ی ریشه های معادله ی $۳x^2 - ۵x + ۳ = ۰$ باشند.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن دو واحد بیشتر از ریشه های معادله ی $۳x^2 - ۵x + ۳ = ۰$ باشند.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله ی $۳x^2 - ۵x + ۳ = ۰$ باشند.

نکته: معادله ی $ax^2 + bx + c = ۰$ را در نظر بگیرید. در این صورت

۱. هر ریشه ی معادله ی $ay^2 - by + c = ۰$ قرینه ی ریشه های معادله ی فوق است.

۲. هر ریشه ی معادله ی $cy^{۲}+by+a=۰$ عکس ریشه های معادله ی فوق است.

۳. هر ریشه ی معادله ی $cy^{۲}-by+a=۰$ عکس و قرینه ی ریشه های معادله ی فوق است.

۴. معادله ی $ay^{۲}+bky+ck^{۲}=۰$ هر ریشه اش k برابر ریشه های معادله ی فوق است.

اثبات:

.۱

$$\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ y=-x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ x=-y\end{cases}\rightarrow a(-y)^{۲}+b(-y)+c=۰\rightarrow ay^{۲}-by+c=۰$$

.۲

$$\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ y=\frac{۱}{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ x=\frac{۱}{y}\end{cases}\rightarrow (\frac{۱}{})^{۲}+ (\frac{۱}{})+c=۰\rightarrow cy^{۲}+by+a=۰$$

.۳

$$\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ y=-\frac{۱}{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ x=-\frac{۱}{y}\end{cases}\rightarrow (-\frac{۱}{})^{۲}+ (-^{۱})+c=۰\rightarrow cy^{۲}-by+a=۰$$

.۴

$$\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ y=kx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}ax^{۲}+bx+c=۰\\ x=\frac{y}{k}\end{cases}\rightarrow a(\frac{y}{k})^{۲}+b(\frac{y}{k})+c=۰\rightarrow ay^{۲}+bky+ck^{۲}=۰$$

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن قرینه ی ریشه های معادله ی $۳x^{۲}-۵x+۳=۰$ باشند.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن دو واحد بیشتر از ریشه های معادله ی $۳x^{۲}-۵x+۳=۰$ باشند.

تمرین: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله ی $۳x^{۲}-۵x+۳=۰$ باشند.

نکته : عبارت $ax^{۲}+bx+c$ وقتی تجزیه پذیر است که $\Delta=b^{۲}-۴ac\ge ۰$ باشد. در این صورت این عبارت را به شکل زیر تجزیه می کنیم.

$$ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x^{۲}-\frac{-b}{a}x+\frac{c}{a})$$
$$=a[x^{۲}-(x_{۱}+x_{۲})x+x_{۱}x_{۲}]=a(x-x_{۱})(x-x_{۲})$$

پس برای استفاده از این تساوی لازم است که ابتدا معادله ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ را حل کرد.

تمرین: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $۳x^{۲}-۵x-۲=$ ۲) $۳x^{۲}-۲x-۱=$ ۳) $mnx^{۲}-(m^{۲}+n^{۲})x+mn=$

معادله های دو مجذوری

بعضی از معادلات هستند که اگرچه از درجه ی دو نمی باشند، ولی می توان با در نظر گرفتن یک متغیر مناسب آن ها را به یک معادله ی درجه ی دوم تبدیل کرد.اینگونه معادلات را « **معادلات دو مجذوری**» می نامند. برای مثال معادله ی زیر یک معادله ی دو مجذوری است.

$$x^{۴}-۳x^{۲}-۱۰=۰$$

برای حل این معادله کافی است قرار دهیم. $x^{۲}=t$ لذا خواهیم داشت:

$$t^{۲}-۳t-۱۰=۰$$

$$(t-۵)(t+۲)=۰\rightarrow\begin{cases}t=۵\rightarrow x^{۲}=۵\rightarrow x=\pm\sqrt{۵}\\ t=-۲\rightarrow x^{۲}=-۲\quad \text{غ م}\end{cases}$$

تمرین برای حل : معادله ی های زیر را حل کنید.

۱) $x^{۴}-۱۳x^{۲}+۳۶=۰$

۲) $(x^{۲}-۳)^{۴}-(x^{۲}-۳)^{۲}-۲=۰$

۳) $۲x^{-۴}-۳x^{-۲}+۱=۰$

۴) $۹^{x}+۳^{x}-۱۲=۰$

۵) $۴^{x}-۱۲(۲^{x})+۳۲=۰$

۶) $۹^{x}-۷(۳^{x})-۱۸=۰$

۷) $۴^{x}+۲^{x+۱}-۳=۰$

۸) $(۴-\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}-۵(۴-\frac{۱}{x^{۲}})=۰$

عبارت های گویا

هر عبارت به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $Q(x)$ و $P(x)$ دو چند جمله ای بوده و $Q(x)$ مخالف صفر باشد، را یک عبارت گویا می نامند.

مثال : هر یک از عبارت های زیر یک عبارت گویا است.

الف) $\frac{-x+۵}{x^۲-۱}$ ب) $\frac{۳t-\sqrt{۵}}{-t^۲+۳t+۱}$ ج) $\frac{۴}{۶xy}$

توجه : طبق تعریف ، هر یک از عبارت های زیر گویا نمی باشند.

الف) $\frac{\sqrt{x}+۵}{x^۲-۱}$ ب) $\frac{۳t-۵}{۲-\sqrt{t^۲+۱}}$

دامنه ی یک عبارت گویا

دامنه ی یک عبارت گویا مجموعه ی همه ی مقادیر حقیقی است که به ازای آنها مخرج صفر نشود.

به عبارت دیگر دامنه ی عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ می شود. $D=R-\{x\in R \mid Q(x)=۰\}$

تمرین : دامنه ی عبارت زیر را تعیین کنید.

$$P=\frac{۳x-۱}{x^۲-۵x}$$

$$x^۲-۵x=۰ \to x(x-۵)=۰ \to x=۰ \quad , \quad x=۵$$

$$D=R-\{۰,۵\}$$

ساده کردن عبارت گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا، صورت و مخرج آن را در صورت امکان تجزیه نموده و عامل های مشترک را از صورت و مخرج حذف می کنیم.

مثال : عبارت زیر را ساده کنید.

$$A=\frac{x^{2}-2x+1}{x^{2}-3x+2}$$

حل:

$$A=\frac{x^{2}-2x+1}{x^{2}-3x+2}=\frac{(x-1)^{2}}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-1}{x-2}$$

تمرین برای حل ابتدا دامنه ی هر یک از عبارت های زیر را تعیین نموده و سپس آنها را ساده کنید.

الف) $A=\frac{x^{3}-4x}{4-x^{2}}$

ب) $B=\frac{x^{2}+x+1}{x^{3}-1}$

ج) $C=\frac{x^{2}-3x}{2x-6}$

د) $D=\frac{x^{4}-16}{x^{2}+4}$

هـ) $E=\frac{x-2}{x^{2}-4}-\frac{x+1}{x^{2}+2x+1}$

تمرین برای حل هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $A=\frac{5x^{3}y^{4}}{15xy^{7}}$

ب) $B=\frac{m^{2}-6m+9}{3m^{2}-9m}$

ج) $C=\frac{x^{3}+2x^{2}y+18y+9x}{-x^{2}+4y^{2}}$

جمع و تفریق عبارت های گویا

برای جمع و تفریق دو عبارت گویا دو حالت زیر وجود دارد.

الف : اگر مخرج ها مساوی باشند، در این حالت صورت ها را باهم جمع یا از هم کم می کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{2x-1}{x+2}+\frac{3x+1}{x+2}-\frac{3-5x}{x+2}=\frac{2x-1+3x+1-3+5x}{x+2}=\frac{10x-3}{x+2}$$

تمرین برای حل : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\dfrac{a+۱}{۲-a}+\dfrac{a-۵}{۲-a}$

ب) $\dfrac{۱}{۱+k}-\dfrac{۱-k}{۱+k}+\dfrac{k^{۲}-k-۱}{۱+k}$

ب : اگر مخرج ها مساوی نباشند، در این صورت ابتدا مخرج ها را با توجه به کوچکترین مضرب مشترک آنها ، مساوی می کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=\frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۶}{x^{۲}+x+۱}-\frac{۶(x^{۲}+۲)}{x^{۳}-۱}$$

ابتدا ک م م مخرج ها را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} P=x-۱ \\ Q=x^{۲}+x+۱ \\ R=x^{۳}-۱=(x-۱)(x^{۲}+x+۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک م م}} (x-۱)(x^{۲}+x+۱)$$

$$A=\frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۶}{x^{۲}+x+۱}-\frac{۶(x^{۲}+۲)}{x^{۳}-۱}=\frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۶}{x^{۲}+x+۱}-\frac{۶(x^{۲}+۲)}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}$$

$$=\frac{(x+۵)(x^{۲}+x+۱)-۶(x-۱)-۶(x^{۲}+۲)}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}=\frac{x^{۳}+x^{۲}+x+۵x^{۲}+۵x+۵-۶x+۶-۶x^{۲}-۱۲}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}$$

$$=\frac{x^{۳}-۱}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}=۱$$

تمرین : اگر $\dfrac{B}{x+۲}+\dfrac{A}{x-۱}=\dfrac{۵x+۳}{x^{۲}+x-۲}$ مقدار B و A را بیابید.

حل:

$$\frac{۵x+۳}{x^{۲}+x-۲}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۲}\rightarrow\frac{۵x+۳}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{A(x+۲)+B(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}\rightarrow A(x+۲)+B(x-۱)=۵x+۳$$

$$\begin{cases} x=-۲\rightarrow A(-۲+۲)+B(-۲-۱)=۵(-۲)+۳\rightarrow -۳B=-۷\rightarrow B=\frac{۷}{۳} \\ x=۱\rightarrow A(۱+۲)+B(۱-۱)=۵(۱)+۳\rightarrow ۳A=۸\rightarrow A=\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

تمرین برای حل عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

۱) $\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ac}+\frac{c-a}{ab}+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$

۲) $\frac{۱}{x(x+۱)}+\frac{۱}{(x+۳)(x+۲)}$

۳) $\frac{۱}{x^۲+۵x+۶}+\frac{۱}{x^۲+۷x+۱۳}$

۴) $\frac{m^۳+۲m^۲n+mn^۲}{m^۲n+mn^۲}-\frac{m^۲+mn}{m^۲-mn}$

۵) $\frac{۱}{(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{(b-c)(b-a)}+\frac{۱}{(c-a)(c-b)}$

۶) $\frac{۶(a^۲+۲)}{a^۳-۱}-\frac{a+۵}{a-۱}+\frac{۶}{a^۲+a+۱}$

۷) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{y-x}+\frac{۴xy}{x^۲-y^۲}$

۸) $\frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۲x^۲+۳x+۷}{x^۲-۱}+\frac{x-۲}{x+۱}$

تمرین برای حل : اگر $\frac{B}{x+۲}+\frac{A}{x-۲}=\frac{۱}{x^۲-۴}$ مقدار B و A را بیابید.

تمرین برای حل : اگر $\frac{c}{x+۱}+\frac{b}{x-۱}+\frac{a}{x}=\frac{۲}{x^۳-x}$ مقدار c و b و a را بیابید.

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

برای ضرب دو عبارت گویا ابتدا در صورت امکان آنها را ساده می کنیم و سپس صورت ها را در همدیگر و همچنین مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

برای تقسیم دو عبارت گویا، کافی است عبارت اول را در معکوس عبارت دو ضرب کنیم.

مثال : حاصل عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{x-۵}{۴x^۲-۹}\times\frac{۴x^۲+۱۲x+۹}{۲x^۲-۱۱x+۵}$

حل:

$$\frac{x-۵}{۴x^۲-۹}\times\frac{۴x^۲+۱۲x+۹}{۲x^۲-۱۱x+۵}=\frac{x-۵}{(۲x+۳)(۲x-۳)}\times\frac{(۲x+۳)^۲}{(۲x-۱)(x-۵)}=\frac{۲x+۳}{(۲x-۳)(۲x-۱)}$$

ب) $\dfrac{x^2-2x+1}{3x-6} \div \dfrac{(x-1)^3}{x^2-3x+2}$

حل:

$$\frac{x^2-2x+1}{3x-6} \div \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-2x+1}{3x-6} \times \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2}{3(x-2)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{1}{3}$$

تمرین برای حل عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} \times \dfrac{x^2-1}{x+2}$

2) $\dfrac{x^2-9}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-x-2}$

3) $\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{t}{1-t}\right) \div \left(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1-t}{1+t}\right)$

4) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$

5) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}$

حل معادلات شامل عبارت های گویا

هر معادله که در آن متغیر معادله در مخرج کسر باشد، را یک معادله ی شامل عبارت گویا گویند. مانند معادلات زیر

الف) $\dfrac{2x+3}{2x-2}-\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{2x-3}{2x+2}$　　ب) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2-2x}=\dfrac{x-4}{x-2}$

ای حل چنین معادلاتی ، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را محاسبه کرده و در تمام کسرها ضرب می کنیم
بر. سپس معادلـه ی

ست آمده را حل می کنیم
بد. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که به ازای آن مخرج هیچ کسری صفر نشود.

ال
:ن معادله ی زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2-2x}=\frac{x-4}{x-}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} A = x \\ B = x^{۲} - ۲x = x(x-۲) \xrightarrow{\text{ک م م}} x(x-۲) \\ C = x - ۲ \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x} - \frac{۴}{x^{۲} - ۲x} = \frac{x-۴}{x-۲} \rightarrow \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۵}{x}} - \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۴}{x(x-۲)}} = \overset{\times x(x-۲)}{\frac{x-۴}{x-۲}}$$

$$\rightarrow ۵(x-۲) - ۴ = x(x-۴) \rightarrow ۵x - ۱۰ - ۴ = x^{۲} - ۴x \rightarrow x^{۲} - ۹x + ۱۴ = ۰$$

$$\rightarrow (x-۷)(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۷ \\ x = ۲ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین برای حل هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲} - \frac{۵}{x^{۲}-۱} = \frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

۲) $\frac{x-۲}{x+۲} + \frac{x}{x-۲} = \frac{۸}{x^{۲}-۴}$

۳) $\frac{k^{۲}-۲k+۲}{k^{۲}-۲k} - \frac{۱+k}{k} = \frac{k-۱}{k-۲}$

۴) $\frac{۳}{۲x} = \frac{x+۲}{x^{۲}-۳x}$

۵) $\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۱} = \frac{۳}{x^{۲}-۲x+۳}$

عبارت های اصم

هر عبارت شامل $\sqrt{P(x)}$ که در آن $P(x)$ یک عبارت گویای غیر منفی باشد، را یک عبارت اصم (گنگ) می نامند.

مثال : هر یک از عبارت های زیر یک عبارت اصم است.

الف) $\sqrt{۲x+۶}$ ب) $۱+k+\sqrt{۴-k}$ ج) $\sqrt{۳+\frac{۲x}{x^۲-۱}}$

دامنه ی یک عبارت اصم

طبق تعریف دامنه ی یک عبارت اصم، مجموعه ی مقادیر حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال منفی نباشد.

به عبارت دیگر دامنه ی عبارت $\sqrt{P(x)}$ به شکل زیر است.

$$D=\{x\in R \mid P(x)\geq ۰\}$$

مثال : دامنه ی عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A=\sqrt{۱۲-۳x}$$

حل :

$$۱۲-۳x\geq ۰ \rightarrow -۳x\geq -۱۲ \rightarrow x\leq ۴$$

تمرین برای حل : دامنه ی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $A=\sqrt{x^۲-۷x+۱۲}$

۲) $B=\sqrt{۹-x^۲}$

۳) $C=\sqrt{۳-x}+\sqrt{x+۳}$

۴) $D=\sqrt{\frac{۲}{۳-x}}$

۵) $E=\sqrt{\frac{-۲}{۳-x}}$

۶) $F=\sqrt{\frac{۲x+۶}{x-۴}}$

حل معادلات شامل عبارت های اصم

هر معادله که در آن متغیر معادله در زیر رادیکال (با فرجه ی دوم) باشد، را یک معادله ی شامل عبارت اصم گویند. مانند معادلات زیر

الف) $۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$ ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

برای حل چنین معادلاتی ، در یک مرحله ی مناسب طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم تا یک معادله ی بدون عبارت گنگ بـه دسـت آید. سپس این معادله را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که

الف : به ازاء آن عبارت زیر رادیکال منفی نباشد. ب : معادله به ازای آن برقرار باشد.

مثال : معادله ی زیر را حل کنید.

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$$

حل:

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳\rightarrow\sqrt{x+۲}=x-۴\rightarrow(\sqrt{x+۲})^{۲}=(x-۴)^{۲}\rightarrow x+۲=x^{۲}-۸x+۱۶$$

$$\rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰\rightarrow(x-۷)(x-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۷\\ x=۲ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

تمرین برای حل : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{۵m-۱}+۳=۰$

۲) $\sqrt{\ x-\ }=\sqrt{x-\ }+$

۳) $\sqrt{۲+\sqrt{x-۵}}=\sqrt{۱۳-x}$

۴) $۲\sqrt{۳-۲x}+x=۳$

۵) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x-۸۰}}=۵$

تمرین برای حل : عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر ۶ شود.

تمرین برای حل : مقدار C را از تساوی مقابل حساب کنید. $F=\dfrac{\sqrt{LC}}{۲\pi}$

تمرین برای حل : مقدار k را از تساوی مقابل حساب کنید. $v=\sqrt{\dfrac{۲k}{m}}$

بخش سوم

جمع بندی و حل

مثالهای تشریحی

نکات معادله خط

نکته ۱ : اگر محور های دستگاه مختصات را از مبدا به نقطه (a,b) منتقل کنیم مختصات نقطه m(x,y) دردستگاه قبلی ، در دستگاه جدید به این صورت خواهد بود:

$$M\left|\begin{array}{l} X = x-a \\ Y = y-b \end{array}\right.$$

سوال ۱ : معادله خطی در دستگاه xoy به صورت $۲y = ۳x + ۱۱$ است. اگر محور های مختصات را به موازات خود به نقطه (۴و۱-)انتقال بدهیم معادله این خط در دستگاه جدید کدام است؟

الف) $۲y - ۳x = ۰$ ب) $۳y - ۲x = ۰$ ج) $۲y - ۳x = ۳$ د) $۲y + ۳x = ۵$

نکته ۲ : مختصات M وسط پاره خط AB به مختصات $B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برابر است با: $M = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{۲} \\ \frac{b+d}{۲} \end{bmatrix}$

سوال ۲ :سه نقطه A(۱و۱-) وB(۵و۱) و C (۵و۳-) روی محیط دایره ای واقع اند . مختصات مرکز دایره برابر است با:

الف)(۲و۱-) ب) (۱-و۲) ج) $(۲و-\frac{۱}{۲})$ د)(۲-و۱)

راهنمایی: مرکز دایره محیطی در مثلث قائم الزاویه، وسط وتر است.

نکته ۳ : فاصله دو نقطه A و B عبارت است از: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$

سوال ۳ : نقطه A به طول $\sqrt{۷}$ روی نیمساز ناحیه اول وسوم و نقطه B به عرض ۵- روی نیمساز ناحیه دوم می باشد فاصله A تا B برابر ااست با:

الف) ۸ ب) $۵\sqrt{۷}$ ج) $۲\sqrt{۶}$ د) ۱۰

نکته ۴ : معادله خطوطی که از مبدا مختصات می گذرندبه صورت کلی y=ax نمایش داده می شود. $a=\frac{\text{عرض نقطه}}{\text{طول نقطه}}$

سوال ۴ : مقدار m چقدر باشدتا خط $۳y - ۵x + ۳m - ۲ = -۶$ از مبدا مختصات بگذرد؟

الف) $\frac{۴}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $-\frac{۴}{۳}$ د) $-\frac{۲}{۳}$

نکته ۵ : معادله کلی خطوطی که از مبدا نمی گذرند (عرض از مبدا دارند) به صورت $y = ax + b$ می باشد.

a : شیب خط و b : عرض از مبدا

سوال ۵ : معادله ی خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ گذشته وعرض از مبدا آن با عرض از مبدا خط $2x - y = 1$ برابر باشد چیست؟

الف) $x = ۲y - ۱$ ب) $y = ۲x + ۱$ ج) $۲x - y = ۱$ د) $y = -۱$

نکته ۶ : خطوطی که شیب شان مساوی وعرض از مبدا مختلف دارند با هم موازیند . چنان چه عرض از مبدا آن ها نیز با هم برابر باشد با هم منطبق اند.

سوال ۱-۶: مقادیر m و n چقدر باشند تادو خط $d : (m - ۲)x - ۳y = ۱$ و $d' : ۲x - (n + ۱)y = ۲$ برهم منطبق شوند؟

الف) $m = n = -۲$ ب) $m = ۳, n = ۵$ ج) $m = ۱, n = -۱$ د) $m = ۲, n = -۱$

سوال ۲-۶ : دو خط $\frac{x}{۳} - \frac{y}{۲} = ۱$ و $۳y - ۲x = ۵$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) موازیند ب) منطبق اند ج) متعامد اند د) نمی توان مشخص کرد

نکته ۷ : کلیه خطوطی که عرض از مبدا شان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور عرض ها همدیکر را قطع می کنند.

سوال ۷ : مقدار m چقدر باشد تا دو خط $۳x + ۴y = ۶$ و $(۲m - ۱)x + y = ۶$ روی محور طول یکدیگر را قطع کنند؟

الف) m= -۲ ب) m=۴ ج) m=۲ د) m =-۴

نکته۸ : کلیه خطوطی که طول از مبدا شان مساوی باشد در نقطه ای واقع بر محور طول ها همدیکر را قطع می کنند

سوال ۸ :خطی که از نقطه (۴و۰)A عبور می کند کدام گزینه در باره این خط همواره درست است؟

الف) معادله خط ثابت است ب) شیب خط ثابت است ج) عرض از مبدا خط ثابت است د) محل تلا قی با محور x ثابت است

نکته ۹ : معادله عمومی خطوطی که موازی محور طول می باشند عبارت است از y=k که شیب آن صفر است.

سوال ۹ : خط D به معادله $(۲m-۵)x-۲y=x-my+۱$ موازی محور طول است مقدار m چقدر است؟

الف) m=۱ ب) m=۲ ج) m=۳ د) m= -۳

نکته ۱۰ : معادله عمومی خطوطی که موازی محور عرض می باشند عبارت است از x=k که شیب آن تعریف نشده است.

سوال ۱۰ : اگر خط $(m-۲)x-(m-۱)y-۱=۰$ موازی محور عرض باشد مقدار m چقدر است؟

الف) m =۲ ب) m=-۱ ج) m=۱ د) $m=\frac{۱}{۲}$

نکته ۱۱ : معادله ی محور طول $y=۰$ ومعادله ی محور عرض $x=۰$ می باشد.

سوال ۱-۱۱ : اگر $A=(m,-n)$ و $B=(m,n)$ دو سر یک پاره خط باشند معادله عمود منصف AB کدام است؟

الف) x=m ب) x=۰ ج) y=- x د) y= ۰

سوال ۲-۱۱ : معادله ی خطی که از (۲-و۰) گذ شته وبر خط $y=2$ عمود باشد چیست؟

الف) $y=۰$ ب) $x=۰$ ج) $y=-\frac{۱}{۲}$ د) $x=-\frac{۱}{۲}$

نکته ۱۲ : معادله ی خطی که طول از مبدا وعرض از مبدا آن q, p باشدرا به صورت زیر نیز می توان نوشت

اثبات کنید: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$

سوال ۱۲ : معادله ی خطی که محور عرض ها را در نقطه ۳ ومحور طول ها را در نقطه ۲- قطع می کند برابر است با:

الف) $\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱$ ب) $\frac{y}{۳}-\frac{x}{۲}=۱$ ج) $\frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}=۱$ د) $-\frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}=۱$

نکته ۱۳ : معادله ی نیمساز ناحیه اول وسوم y=x و معادله ی نیمساز ناحیه دوم وچهارم y=-x می باشد.

سوال ۱-۱۳: خط $y=۲x+a$ به ازای چه مقادیری از a موازی نیمساز ربع اول است؟

الف) $a=۱$ ب) $a=-۱$ ج) $a=۲$ د) هیچ مقداراز a

سوال ۲-۱۳: نقطه برخورد دو خط $y=x+۲$ و $y=mx-۲$ بر نیمساز ربع دوم واقع است در این صورت مقدار m برابر است با:

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۲- د) ۳-

نکته ۱۴ : اگر حالت کلی معادله ی خط به صورت Ax+By+C=۰ باشد آن گاه :

طول از مبدا $=-\frac{c}{A}$ و عرض از مبدا $=-\frac{c}{B}$ و شیب $=-\frac{A}{B}$ خواهند بود.

سوال ۱۴ : شیب خطی ۳- وطول از مبدا آن ۱- است . عرض از مبدا آن چقدر است؟

الف) ۳ ب) ۱- ج) $\frac{۱}{۳}$ د) ۳-

نکته ۱۵ : اگر شیب وطول از مبدا دو خط با هم برابر باشند آن دو خط بر هم منطبق اند.

سوال ۱۵ : شیب وطول از مبدا دو خط برابرند آن گاه این دو خط ...

الف) بر هم عمودند ب) درنقطه ای واقع برمحور طول هایکدیگرراقطع می کنند ج) موازیند د) منطبق اند

نکته ۱۶ : اگرطول از مبدا وعرض از مبدا دو خط با هم برابر باشند دو خط بر هم منطبق اند.

سوال ۱۶ : دو خط که طول ازمبداوعرض از مبدابرابرداشته باشندنسبت به هم چه وضعی دارند؟(این دو خط از مبدا نمی گذرند)

الف) عمودند ب) موازیند ج) منطبق اند د) فقط در یک نقطه متقاطعند

نکته ۱۷ : اگر خطی طول از مبدا وعرض از مبدا مساوی داشته باشد آن گاه خط بر نیمساز ناحیه اول وسوم عمود است.

سوال۱۷ : خطی که طول از مبدا وعرض از مبدا مساوی داشته باشد

الف) موازی محور طول هاست . ب) از مبدا مختصات می گذرد.

ج)بر نیمساز ناحیه سوم عمود است . د) موازی نیمساز ناحیه اول است.

نکته ۱۸ : اگر طول از مبدا وعرض از مبداخطی قرینه باشند آن گاه خط بر نیمساز ناحیه دوم وچهارم عمود است.

سوال۱۸ : خطی که طول از مبدا وعرض از مبدا قرینه یکدیگر باشند؟

الف) بر محور طول عمود است. ب) با نیمساز ناحیه دوم موازی است.

ج) بر نیمساز ناحیه سوم عمود است . د) شیب آن برابر یک است.

نکته ۱۹ : دو خط بر هم عمودند هر گاه حاصل ضرب شیب های آن ها برابر منفی یک(۱-) باشد . $mm' = -۱$

(شیب شان معکوس وقرینه یکدیگر باشد).

سوال۱۹ :معادله خطی که در نقطه ای به طول۳- متعلق به $۲x = ۳y$ بر همین خط عمود باشد کدام است؟

الف) $y = -\frac{۳}{۲}x$ ب) $۳x + ۲y + ۱۳ = ۰$ ج) $۲y + ۳x = ۶$ د) $y = ۳$

نکته ۲۰ : شیب خطی که از دو نقطه A و B می گذرد برابر است با : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

سوال۲۰ : نقاط $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ k \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲k - ۱ \\ k + ۷ \end{bmatrix}$ مفروض اند به ازای چه مقداری از k خط AB بر نیمسازناحیه دوم وچهارم عمود است؟

الف) k=۵ ب) k=-۱ ج) k=۰ د) k=۲

نکته ۲۱ : سه نقطه A,B,C زمانی بر یک استقامت اند(روی یک خط هستند) که $m_{AB}=m_{AC}$

سوال۲۱ :به ازای چه مقدار m سه نقطه (۱و۲)A ، (۱و۲-)B و (m-۳ وm)C بر یک استقامتند؟

الف) m=۷ ب)m=۵ ج)m=-۵ د) m=-۲

نکته ۲۲ : معادله خطی که شیب آن m و از نقطه A(x,y) بگذرد به صورت : $y-y_A=m(x-x_A)$

سوال۲۲:معادله خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بر خط $\frac{x}{۲} = \frac{x - y}{۳}$ عمود باشد ، عبارت است از:

الف) $y = ۵x + ۲$ ب) $۲y = x - ۵$ ج) $y = ۵x - ۲$ د) $y - ۵ = ۲x$

نکته ۲۳ : معادله خطی که از دو نقطه B,A می گذرد عبارت است از:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

یا

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

سوال۲۳: معادله خطی که از دو نقطه (۲- و۱)A و (۲و۳-)B می گذرد کدام است؟

الف) $y + ۲x = ۰$ ب) $y + x + ۱ = ۰$ ج) $y = ۲x$ د) $y + x = ۱$

نکته ۲۴ : مساحت حاصل از برخوردخط با محورهای مختصات برابر است با : $\frac{\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}}{۲}$

سوال۲۴:مساحت سطح محصور بین خط $۳x+۴y=۱۲$ وخطوط $x=۰, y=۰$ چند واحد مربع است؟

الف)۱۲ ب) ۴ ج) ۸ د) ۶

نکته ۲۵ : فاصله نقطه A از مبدا مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$

سوال۲۵: فاصله نقطه تقاطع دو خط $x-y\sqrt{۳}+۲=۰$ و $y=x\sqrt{۳}$ ازمبدا مختصات برابر است با:

الف) ۱ ب) ۲ ج) $\sqrt{۳}$ د) $\sqrt{۵}$

نکته ۲۶ : فاصله نقطه A از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه مقابل به دست می آید: $d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

سوال۲۶: فاصله نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه دوم از خطی به معادله $۳y-۲x+۴=۰$ برابر $۳\sqrt{۱۳}$ واحد است .

عرض از نقطه کدام است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸

نکته ۲۷ : فاصله مبدا مختصات از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه مقابل به دست می آید: $OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

سوال ۱-۲۷ : فاصله مبدا مختصات از خط $۲x+y=۲\sqrt{۵}$ برابر است با

الف) $۲\sqrt{۵}$ ب) $\sqrt{۵}$ ج) ۴ د) ۲

سوال ۲-۲۷ : فاصله مبدا مختصات از نقطه ثابت دسته خطوط $(۲m-۳)x+(۷-۲m)y+۴=۰$ کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) ۲ ج) $۲\sqrt{۲}$ د) ۴

نکته ۲۸ : فاصله دو خط موازی برابر است با: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

سوال۲۸: فاصله دو خط $۲x+۲y+۳=۰$ و $۴x+۴y+۵=۰$ را پیدا کنید .

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$ ج) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۸}$ د) $۲\sqrt{۲}$

نکته ۲۹ : هر چه شیب خط بیشتر باشد زاویه ای که آن خط با جهت مثبت محور طول ها می سازد بزرگتر است.

سوال ۲۹: در فضای $R^۲$ کدام یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور x ها زاویه بزرگتر می سازد ؟

الف) $y = x + 1$ ب) $y = -۲x$ ج) $۷x - ۲y = ۶$ د) $y = ۲x - ۱$

نکته ۳۰ : اگر شیب خط مثبت باشد زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول درست می کند زاویه ای تند واگر شیب خط منفی باشد زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول درست می شود زاویه ای باز است.

سوال ۱- ۳۰ : خط $۲y = ۱ - ۲x$ با خط $x = -۳۵$ چه زاویه ای می سازد؟

الف) ۳۰° ب) ۶۰° ج) ۹۰° د) ۴۵°

سوال ۲-۳۰ : معادله خطی که از نقطه (۱و۱)A بگذرد وبا جهت مثبت محور طول ها زاویه ۱۳۵° بسازد کدام است؟

الف) $y = -x$ ب) $y = -x + ۲$ ج) $y = x + ۱$ د) $y = x$

نکته ۳۱ : اگر سه نقطه ی C,B,A تشکیل یک مثلث بدهند نقطه ی G محل برخورد میانه های آن برابر است با :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

سوال ۳۱ : اگر سه نقطه (۳و۱)A و(۷و۲)B (۱و۶)C راس های یک مثلث باشند مختصات نقطه G محل برخورد میانه ها برابر است با:

الف) (۱و۱) ب) (۱۱و۳) ج) (۱۱و۹) د) $(\frac{۱۱}{۳}$ و۳)

نکته ۳۲ : اگر A , B , C ,D چهار راس متوازی الاضلاع ABCD باشند بین رئوس این متوازی الاضلاع رابطه زیر برقرار است:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \quad \text{و} \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

سوال ۳۲: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۶ \end{bmatrix}$ مختصات سه راس متوازی الاضلاع ABCD باشند مختصات راس D برابر است با ؟

الف) $\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -۱۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -۶ \\ ۱۲ \end{bmatrix}$

نکته ۳۳ : دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ اگر تشکیل یک دستگاه بدهند حالت های زیر برقرار است

الف) دستگاه جواب ندارد(دو خط با هم موازیند) ؛ هرگاه : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

ب) دستگاه بی شمار جواب دارد(دو خط منطبق اند) ؛ هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

ج) دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع اند) ؛ هرگاه : $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

د) دو خط بر هم عمودند ؛ هرگاه : $aa'+bb'=0$

سوال ۱-۳۳ :به ازای چه مقادیری از n,m دستگاه $\begin{cases} mx-2y=x-1 \\ 2x-ny=2 \end{cases}$ بی شمار جواب دارد ؟

الف) m= n =۰　　ب) n=۲ و m=-۱　　ج) n=-۲ و m=۰　　د) n=-۴ و m=۰

سوال ۲-۳۳ :به ازای چه مقدار mدستگاه زیر جواب ندارد؟

الف) m=۱　　ب) m=-۱　　ج) m=۲　　د) m=-۲

سوال۳-۳۳ : nوm چه اعدادی باشند تا دو خط $d=(2m-1)x+1=ny$ و $d'=\frac{m-n}{3}x-5y=2n$ در نقطه ی

(۱-و۱)A تلا قی کنند

الف) m= n =-۱　　ب) n=-۲ و m=۱　　ج) n=۲ و m=-۱　　د) n=۲ وm $=-\frac{1}{5}$

سوال۴-۳۳ : به ازای چه مقدار m دو خط $mx+8y=5$ و $2x+5y=1$ برهم عمودند؟

الف) ۳　　ب) ۲　　ج) ۱　　د) ۰

نکته ۳۴ : دو نقطه نسبت به یک خط متقارن اند هرگاه خطی که از دو نقطه می گذرد بر خط مزبور عمود باشد.

سوال۳۴: دو نقطه ی (۱- و۲) A و (۱و۲-) B نسبت به کدام یک از خطوط زیر قرینه یکدیگرند؟

الف) $x=-y$ ب) $x=-۲y$ ج) $y=۲x$ د) $y=-۲x$

نکته ۳۵ : قرینه یک نقطه $A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

الف) نسبت به مبدا مختصات : $A'=\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

ب) نسبت به محور طول ها : $A'=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

ج) نسبت به محور عرض ها : $A'=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

د) نسبت به خط x= m : $A'=\begin{bmatrix} ۲m-x \\ y \end{bmatrix}$

ه) نسبت به خط $y=n$: $A'=\begin{bmatrix} x \\ 2n-y \end{bmatrix}$

و) نسبت به نقطه $M=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $A'=\begin{bmatrix} ۲a-x \\ ۲b-y \end{bmatrix}$

ز) نسبت به نیمساز ناحیه اول وسوم $A'=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

س) نسبت به نیمساز ناحیه دوم وچهارم $A'=\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$

سوال ۱ - ۳۵ : نقطه های $A(\sqrt{۲},-\sqrt{۳})$ و $B(\sqrt{۳},--\sqrt{۲})$ نسبت به کدام یک از خط های قرینه یکدیگرند؟

الف) نیمساز ناحیه دوم ب) نیمساز ناحیه اول ج) محور x ها د) محور y ها

سوال ۲-۳۵ : مختصات قرینه نقطه A(۱و۴) نسبت به خط x-۱=۰ عبارت است از:

الف) (۲و۲-) ب) (۱و۲-) ج) (۱و۳-) د) (۱- و ۲-)

سوال ۳-۳۵ : نقطه (۲و۱-) با کدام یک از نقاط زیر نسبت به نقطه (۱- و ۱) متقارن است؟

الف) (۴- و۳-) ب) (۱ و۳-) ج) (۴- و۳) د) (۱- و۲-)

نکته ۳۶ :اگر نقاط C,B,A سه راس یک مثلث باشند مساحت مثلث ABC از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\frac{۱}{۲}\left|(x_A - x_B)(y_A - y_C) - (x_A - x_C)(y_A - y_B)\right|$$

و یا

$$\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right|$$

سوال ۳۶ :مساحت مثلثی با رئوس (۳- و۳)A ، (۳و۳-) B و (۶و۶) C برابر است با ؟

الف) ۱۸ ب) ۳۶ ج) ۹ د) ۷۲

معادله‌ی درجه‌ی دوم

- حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و مسائل کاربردی
- تعداد و علامت ریشه‌های معادله

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم. در سال اول شما با روش‌های حل معادله آشنا شدید، کاربردی‌ترین آن‌ها روش تجزیه و فاکتورگیری، روش مربع کامل و در نهایت فرمول کلی حل معادله است.

■ **مثال:** معادلات زیر را حل کنید:

(a) $x^2+2x=0$ (روش فاکتورگیری)

(b) $x^2+5x+6=0$ (روش تجزیه)

(c) $x^2-2x-11=0$ (روش مربع کامل)

◀ **حل:**

(a) $x(x+2)=0 \rightarrow x=0$ یا $x=-2$

(b) $(x\quad)(x\quad)=0 \xrightarrow[\text{و مجموع آن‌ها ۵ باشد}]{\text{دو عدد که ضرب آن‌ها ۶}} (x+3)(x+2)=0 \rightarrow x=-3$ یا $x=-2$

(c) $x^2-2x-11=0 \rightarrow (x^2-2x)-11=0 \rightarrow ((x-1)^2-1)-11=0 \rightarrow (x-1)^2=12 \rightarrow x-1=\pm\sqrt{12}$
$\rightarrow x=1\pm\sqrt{12}$

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، $(a\neq 0)$ به‌صورت روبه‌روست: $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

که در آن $\Delta=b^2-4ac$، مبین (دلتای) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta\geq 0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta<0$، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تعداد و علامت ریشه‌های معادله

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ با توجه به شرایط Δ و $-\frac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها نظر داد.

(۱) $\Delta>0 \rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد $\rightarrow$
- $\frac{c}{a}>0$ دو ریشه‌ی متحد العلامه دارد.
  - $\frac{-b}{a}>0$ دو ریشه‌ی مثبت
  - $\frac{-b}{a}<0$ دو ریشه‌ی منفی
- $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد.

(۲) $\Delta=0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $\rightarrow x'=x''=\frac{-b}{2a}$ (معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود)

(۳) $\Delta<0 \rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

■ **مثال:** بدون حل معادله در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-7x+1=0$ نظر دهید.

◀ **حل:** با محاسبه‌ی $\Delta=(-7)^2-4(2)(1)$ چون $\Delta>0$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی چون $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$ دو ریشه‌ی متحدالعلامه‌اند، اما $\frac{-b}{a}=\frac{7}{2}>0$، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

➢ **تذکر (۱) :** در صورتی که دو ریشه‌ی حقیقی معادله $ax^2+bx+c=0$:

الف – قرینه‌ی هم باشند، آنگاه $b=0$ (زیرا مجموع ریشه‌ها صفر است و $\frac{-b}{a}=0$).

ب – عکس هم باشند، آنگاه $a=c$ (زیرا حاصلضرب ریشه‌ها (۱) است و $\frac{c}{a}=1$).

➢ **تذکر (۲) :** در بعضی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد، به این گونه معادلات، معادله‌ی دومجذوری گوییم.

■ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^4-4x^2-7=0$ را بیابید.

◀ **حل:** با انتخاب $x^2=t$ به معادله‌ی زیر می‌رسیم: $t^2-4t-7=0$

در این معادله $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=\frac{-7}{1}<0$، پس معادله برحسب t، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، و در نتیجه برای $x^2=t>0$، دو جواب قرینه برای معادله به‌دست می‌آید.

■ **مثال:** معادله‌ی $(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)+2=0$ را حل کنید.

◀ **حل:** با فرض $x^2-3x=t$، به معادله‌ی $t^2-3t+2=0$ می‌رسیم، ریشه‌های این معادله $t=1$ و $t=2$ است، لذا:

$$x^2-3x=2 \rightarrow x^2-3x-2=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2-3x=1 \rightarrow x^2-3x-1=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

پس معادله چهار ریشه دارد.

معادله‌ی درجه‌ی دوم — تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر x' و x'' به‌ترتیب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند آنگاه $(x-x')(x-x'')=0$ و از آنجا خواهیم داشت:

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0 \qquad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با تقسیم طرفین بر $a\neq 0$ داریم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$

از دو معادله‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$.

➢ **تذکر (۳):** اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

$$S=x'+x''=\frac{-b}{a} \quad \text{(مجموع ریشه‌ها)}$$

$$P=x'x''=\frac{c}{a} \quad \text{(حاصلضرب ریشه‌ها)}$$

در این حالت معادله به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ تبدیل خواهد شد.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که مجموع ریشه‌هایش ۹ و ضرب ریشه‌هایش ۵ باشد.

◀ **حل:** از آنجایی که $S=9$ و $P=5$ پس معادله $x^2-9x+5=0$ است.

■ **مثال** اگر $\sqrt{2}-1$ و $1+\sqrt{2}$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی باشند، آن معادله را بنویسید.

◀ **حل:** از آنجایی که $S=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$ و $P=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$، آنگاه معادله $x^2-2x-1=0$ را خواهیم داشت.

➢ **تذکر (۴):** اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه با استفاده از اتحادها داریم:

$$(1)\quad \alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$(2)\quad \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$$

➢ **تذکر (۵):** اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه $|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

■ **مثال:** اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، دو عدد طبیعی متوالی باشند، آنگاه نشان دهید $\Delta=a^2$.

◀ **حل:** دو ریشه را α و $\alpha+1$ در نظر می‌گیریم لذا تفاضل ریشه‌ها (۱) است پس $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=1$ و از آنجا $\Delta=a^2$.

➢ **تذکر (۶):** در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$:

الف – اگر $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)، آنگاه یک ریشه معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

ب – اگر $a+c=b$، آنگاه یک ریشه معادله (۱−) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

■ **مثال:** ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ را بیابید.

◄ **حل:** چون مجموع ضرایب معادله صفر است پس یک ریشه (۱) و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ است.

➢ **تذکر (۷) :** در بعضی از مسائل، می‌توانیم از این خاصیت که همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، استفاده کنیم.

■ **مثال:** در معادله‌ی $x^2-5x+1=0$، اگر α و β ریشه‌ها باشند حاصل $\alpha^2(5\beta-1)$ را بیابید.

◄ **حل:** چون β ریشه‌ی معادله است در خود معادله صدق می‌کند، لذا $\beta^2-5\beta+1=0$ و از آنجا $\beta^2=5\beta-1$، در عبارت حاصل با جاگذاری داریم $\alpha^2\beta^2$ یا $(\alpha\beta)^2$، اما $\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$، پس حاصل $\alpha^2(5\beta-1)=1$.

معادله‌ی درجه‌ی دوم — تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله‌ی اول رابطه‌ی مشخصی داشته باشد، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم.

(۲) رابطه‌ی بین x و y را می‌یابیم.

(۳) x را برحسب y می‌یابیم و در معادله‌ی اول جاگذاری می‌کنیم و سپس با عملیات جبری معادله را می‌نویسیم.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشد.

◄ **حل:** با توجه به خواسته‌ی مسأله $y=x^2$، پس $x=\pm\sqrt{y}$، حال در معادله قرار می‌دهیم:

$$(\pm\sqrt{y})^2-3(\pm\sqrt{y})+1=0 \to y+1=\pm3\sqrt{y} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y+1)^2=9y \to y^2+2y+1=9y \to y^2-7y+1=0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

➢ **تذکر (۸):** روش دیگری نیز برای یافتن این معادله وجود دارد که محاسبه‌ی S و P در معادله‌ی جدید و نوشتن معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$ است.

در مثال بالا، اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه α^2 و β^2 ریشه‌های معادله‌ی جدید هستند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(1)=7 \\ P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(1)=1 \to x^2-7x+1=0 \end{array}\right\} \to x^2-7x+1=0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

معادلات گنگ

معادلاتی که شامل عبارات رادیکالی باشند را، معادلات گنگ می‌نامیم.

روش کلی برای حل معادلات گنگ وجود ندارد، اما دو موضوع در حل معادلات گنگ از اهمیت خاصی برخوردار است.

(۱) تعیین دامنه‌ی متغیر معادله

(۲) خارج کردن معادله از حالت گنگ، با به توان رساندن طرفین معادله

بعضی روش‌هایی که در حل معادلات گنگ کمک می‌نماید را در زیرخواهیم دید:

برای حل معادلات با فرجه‌ی زوج، ابتدا حوزه‌ی تعریف معادله را معین کرده، سپس با به‌توان فرجه رساندن طرفین معادله، معادله ای را نتیجه می‌گیریم، با حل این معادله، ریشه‌هایی که در حوزه‌ی تعریف معادله‌ی اولیه هستند، ریشه‌ی معادله می‌باشند، شکل غالب این گونه معادلات به‌صورت زیر است:

معادله	شرایط (حوزه‌ی تعریف)	معادله‌ی تبدیل یافته	توضیح
(۱) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$	$f(x)\geq0 \cap g(x)\geq0$	$f(x)=g(x)$	طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم
(۲) $\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)\geq0 \cap g(x)\geq0$	$f(x)=g^2(x)$	طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

مثال: معادله‌ی $\sqrt{x+۲}=x$ را حل کنید.

◀ **حل:** دامنه‌ی متغیر معادله از اشتراک شرایط $x+۲\ge ۰$ یا $x\ge -۲$ و $x\ge ۰$ (سمت راست معادله) به‌دست می‌آید، در نتیجه $x\ge ۰$ است. حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $x+۲=x^{۲} \rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \rightarrow x=۲$ یا $x=-۱$
که تنها $x=۲$ با توجه به حوزه‌ی تعریف معادله، قابل قبول است.

➢ **تذکر (۹):** در بعضی از معادلات گنگ، می‌توان با انتخاب متغیر جدیدی، معادله را به معادلات ساده‌تر و یا گاهی معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد و آن را حل نمود.

تابع درجه‌ی دوم

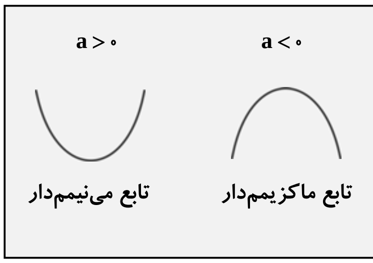
هر تابع به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ ، $a\neq ۰$ نمایش یک تابع درجه‌ی دوم است:

ماکزیمم یا می‌نیمم

ماکزیمم یا می‌نیمم مقدار تابع درجه‌ی دوم در نقطه‌ای به‌طول $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

الف – اگر $a>۰$ تابع می‌نیمم‌دار است و می‌نیمم آن $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)$ است.

ب – اگر $a<۰$ تابع ماکزیمم‌دار است و ماکزیمم آن $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)$ است.



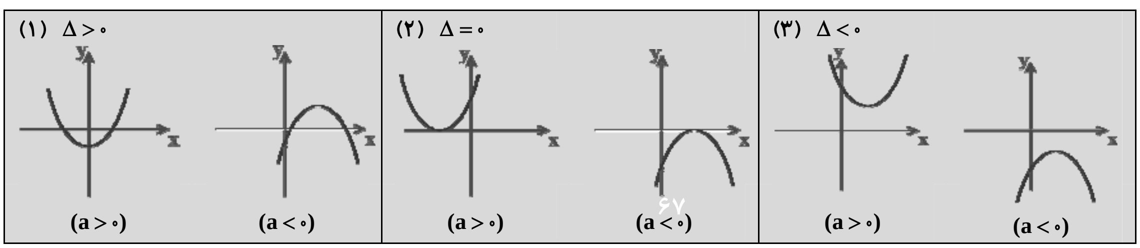
تذکر (۱۰): در تابع درجه‌ی دوم $f\left(\frac{-b}{۲a}\right)=\frac{-\Delta}{۴a}$ است.

محورتقارن

محورتقارن تابع خط $x=\frac{-b}{۲a}$ است که ازنقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) عبور می‌کند.

نمودار تابع درجه‌ی دوم

نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، با توجه به شرایط a و Δ به صورت‌های زیر است:



توجه: برای پیداکردن شکل دقیق علاوه بر a و Δ، به اطلاعات دیگری نیز نیاز داریم.

➢ **تذکر (۱۱):** در نقطه‌ی min یا max، خط $y=f(\frac{-b}{2a})$ بر منحنی تابع مماس است. هرگاه خطی بر یک منحنی مماس شود، معادله‌ی تلاقی خط و منحنی، دارای ریشه‌ی مضاعف است.

➢ **تذکر (۱۲):** با توجه به حالت (۱)، اگر $ac<۰$، آنگاه نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند (چرا؟)

■ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^{۲}+۴x-۱$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

◀ **حل:** چون $ac=-۱<۰$، پس نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

➢ **تذکر (۱۳):** با توجه به حالت (۲)،

الف – اگر $a>۰$ و $\Delta=۰$، تابع از بالا بر محور xها مماس است.

ب – اگر $a<۰$ و $\Delta=۰$، تابع از پایین بر محور xها مماس است.

➢ **تذکر (۱۴):** با توجه به حالت (۳)،

الف – اگر $a>۰$ و $\Delta<۰$، $f(x)=ax^{۲}+bx+c>۰$، یعنی تابع همواره بالای محور xهاست.

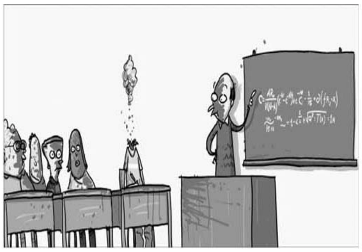
ب – اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$، $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$، یعنی تابع همواره پائین محور x هاست.

شکل‌های دیگر تابع درجه‌ی دوم

به دو شکل زیر در تابع درجه‌ی دوم و نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم آن توجه کنید.

(۱) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم (h , k) است.

(۲) در حالتی که ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ باشد، نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم $\left(\frac{x_1+x_2}{2} , f(\frac{x_1+x_2}{2})\right)$ است.



دستگاه مختصات

۱- نقاط $A\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ ، $B\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ ، $C\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}$ و $D\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$ رئوس مستطیلی هستند. مطلوب است:

الف) مساحت مستطیل

ب) طول قطر AC

۲- نقطه‌ای مانند C روی محور xها چنان بیابید که این نقطه با نقاط $A\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۴\\۳\end{vmatrix}$ تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین در رأس C بدهد.

۳- دو نقطه روی محورهای مختصات (یکی روی محور xها و دیگری روی محور yها) چنان بیابید که فاصله‌ی آن‌ها از هم ۴ باشد و توضیح دهید که این معادله چند جواب دارد؟

۴- اگر اندازه‌ی جبری پاره‌خط AB برابر ۶ باشد و $x_B = ۵$ باشد، مقدار x_A را محاسبه کنید. (پاره‌خط روی محور xها می‌باشد.)

۵- دیده‌بانی موقعیت نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$ را به عنوان موقعیت دشمن به توپخانه معرفی می‌کند. اگر توپخانه در موقعیت $B\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ قرار داشته باشد، میزان مسافتی که گلوله توپ به‌طور افقی طی می‌کند را محاسبه کنید.

۶- نقاط $A\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۴\\-۶\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. نشان دهید این مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

پاسخ

۱- الف)

$$\text{طول ضلع } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۰-۰)^۲} = ۳$$

$$\text{طول ضلع } AD = \sqrt{(x_D - x_A)^۲ + (y_D - y_A)^۲} = \sqrt{(۰-۰)^۲ + (-۲-۰)^۲} = ۲$$

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲ \times ۳ = ۶$$

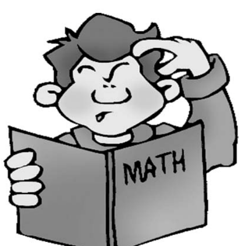
ب)

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (-۲-۰)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

۲-
$$C\begin{bmatrix} x_C \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AC=BC \Rightarrow \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x_C-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{(x_C-4)^2+(0-3)^2} \to \sqrt{x_C^2+9}=\sqrt{(x_C-4)^2+9}$$
$$\Rightarrow x_C^2+\cancel{9}=(x_C-4)^2+\cancel{9} \to x_C^2=(x_C-4)^2 \to \cancel{x_C^2}=\cancel{x_C^2}-8x_C+16$$
$$\Rightarrow 0=-8x_C+16 \Rightarrow 8x_C=16 \Rightarrow x_C=2$$

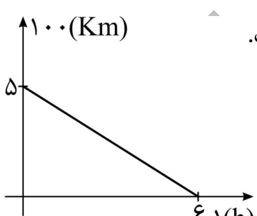
۴-
$$AB=|x_B-x_A| \to |5-x_A|=+6 \to \begin{cases} 5-x_A=6 \to x_A=-1 \\ 5-x_A=-6 \to x_A=11 \end{cases}$$

۶-
$$AB=\sqrt{(-6-4)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{116}$$
$$AC=\sqrt{(-3-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{58}$$
$$BC=\sqrt{(-6+3)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{58}$$
$AC=BC \Rightarrow$ مثلث متساوی الساقین است.
$$AC^2+BC^2=AB^2 \Rightarrow \left(\sqrt{58}\right)^2+\left(\sqrt{58}\right)^2=\left(\sqrt{116}\right)^2 \Rightarrow 58+58=116 \Rightarrow 116=116$$
مثلث قائم‌الزاویه است.



رابطه‌ی خطی

۱- نمودار مقابل نشان‌دهنده‌ی زمان و فاصله‌ی یک خودرو از یک شهر است. هر واحد روی محور عمودی نشان‌دهنده‌ی ۱۰۰ کیلومتر و هر واحد روی محور افقی نشان‌دهنده‌ی یک ساعت است.



الف) در لحظه‌ی اولیه خودرو چقدر با شهر فاصله دارد؟

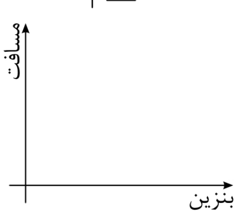
ب) سه ساعت پس از حرکت، خودرو چقدر با شهر فاصله دارد؟

پ) در چه ساعتی ماشین به شهر می‌رسد؟

بنزین	۱	$\square$
مسافت	$\square$	۲۵

۲- مصرف بنزین یک ماشین برای طی هر ۱۰۰ کیلومتر ۹ لیتر می‌باشد.

الف) جدول مقابل را کامل کنید.

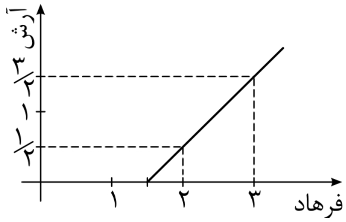


ب) با انتخاب مقیاس مناسب نمودار این رابطه را در محورهایی نظیر شکل مقابل رسم کنید.

۳- نمودار مقابل رابطه‌ی بین سن آرش و فرهاد را نشان می‌دهد. با استفاده از نمودار به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) کدام‌یک بزرگ‌تر است و چند سال بزرگ‌تر است؟

ب) اگر فرهاد ۵ ساله باشد آرش چند ساله خواهد بود؟

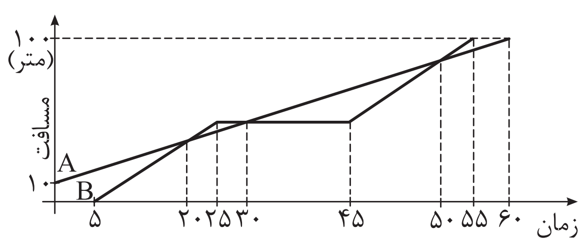


۴- طول یک فنر در حالتی که وزنه‌ای به آن آویزان نشده ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم m کیلوگرم به آن آویزان می‌کنیم، طول آن برحسب سانتی‌متر از رابطه‌ی $L=10+\frac{m}{2}$ بدست می‌آید.

الف) اگر جسمی به جرم ۴/۶ کیلوگرم به آن آویزان کنیم طول فنر چند میلی‌متر افزایش می‌یابد.

ب) چه وزنه‌ای به فنر اضافه کنیم تا طول آن به ۱۴۷ میلی‌متر برسد.

۵- نمودار حرکت دو نفر A و B به صورت زیر می‌باشد. مطلوب است:



الف) فرد B چند ثانیه بعد از A شروع به حرکت نموده است؟

ب) فرد A در ابتدای شروع حرکت چقدر از B جلوتر بوده است؟

پ) در ثانیه بیستم چه اتفاقی رخ داده است؟

ت) در بین زمان‌های ۲۵ و ۴۵ ثانیه چه اتفاقی برای B رخ داده است؟

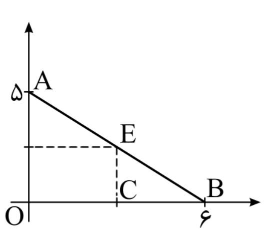
ث) در چه زمان‌هایی A عقب‌تر از B بوده است؟

ج) کدام‌یک زودتر به پایان ۱۰۰ متر رسیده است؟

پاسخ

۱- الف) ۵۰۰ کیلومتر

ب) با توجه به نمودار مقابل و قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{BC}{BO}=\frac{CE}{OA}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{CE}{5}\Rightarrow$$

$CE=\frac{5}{2}\Rightarrow CE=$ ۲/۵ $\Rightarrow$ فاصله‌ی ماشین تا شهر ۲۵۰ کیلومتر می‌باشد.

پ) ۶ ساعت پس از حرکت، ماشین به شهر می‌رسد.

۳- الف) با توجه به این‌که وقتی فرهاد ۲ ساله است آرش ۰/۵ سال دارد پس آرش کوچک‌تر و فرهاد ۱/۵ سال بزرگ‌تر است.

ب) با توجه به این‌که فرهاد ۱/۵ سال بزرگ‌تر از آرش است داریم:

سن فرهاد $=1/5+$ سن آرش $\Rightarrow 5=1/5+$ سن آرش $\Rightarrow$ سن آرش $=3/5$

۵- الف) فرد B ، ۵ ثانیه پس از A شروع به حرکت نموده است.

ب) ۱۰ متر جلوتر بوده است.

پ) فرد B به فرد A رسیده و از او جلوتر افتاده است.

ت) B ثابت بوده و حرکت نکرده است.

ث) بین ثانیه‌های ۲۰ و ۳۰ و ثانیه‌های ۵۰ تا ۶۰

ج) فرد B چون در ثانیه‌ی ۵۵ وی ۱۰۰ متر را طی نموده است در حالی‌که A در ثانیه‌ی ۶ همین ۱۰ متر را طی کرده است.

شیب خط

۱- رابطه‌ی قیمت و تقاضای یک کالا از رابطه‌ی $x=1000-2p$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالا و p قیمت آن می‌باشد.

الف) اگر قیمت کالا ۱۰۰ تومان باشد، تعداد تقاضای کالا را بیابید.

ب) شیب خط را بیابید اگر x روی محور قائم و p روی محور افقی محورهای مختصات باشد؟

پ) اگر تعداد کالا به $2x$ و قیمت کالا به $3p$ افزایش یابد، معادله‌ی جدید را نوشته و شیب آن را تعیین کنید.

۲- یک شرکت کارتن‌سازی به ازای تولید هر بسته ۵ تایی از کارتن‌هایش ۱۰ هزار تومان هزینه می‌کند و این شرکت دارای هزینه‌ی ثابت ماهانه ۳۰۰ هزار تومان می‌باشد.

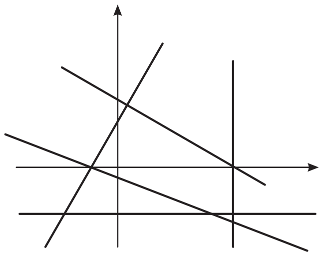
الف) اگر x تعداد بسته‌های ۵ تایی از کارتن‌های تولیدشده و y هزینه شرکت برحسب تومان برای تولید x بسته باشد. رابطه‌ی بین x و y را بیابید.

ب) نمودار رابطه‌ی بین x و y را در محورهای مختصات که هر واحد روی محور xها یک بسته‌ی ۵۰ تایی از کارتن‌ها و هر واحد روی محور yها یکصد هزار تومان را نشان دهد رسم کنید.

پ) x و y با هم رابطه‌ی خطی دارند. محل برخورد نمودار رابطه‌ی بین x و y با محور yها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ت) شیب خط نمودار رابطه‌ی بین x و y را بدست آورید. شیب خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

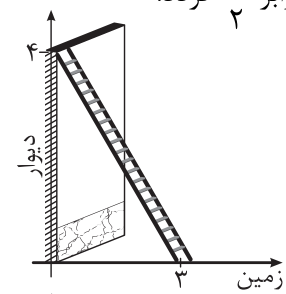
۳- با توجه به شکل داده‌شده روی هر خط، نام آن را بنویسید.



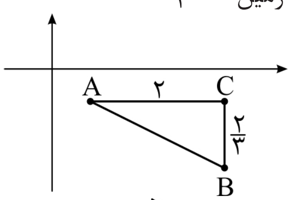
خط	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
شیب	۰	-۱۰	-۳	۳	تعریف نشده

۴- اگر $A\begin{bmatrix} ۲a \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} a-۱ \\ a+۱ \end{bmatrix}$ باشند، a را چنان تعیین کنید که شیب خط AB برابر $\frac{۱}{۲}$ گردد.

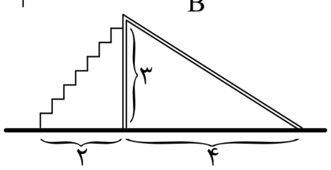
۵- نردبانی مطابق شکل روی زمین سر می‌خورد و به زمین می‌افتد.
بیشترین و کمترین شیب نردبان را تعیین کنید.



۶- شیب خط هادی AB و AC را بیابید.



۷- با توجه به شکل مقابل شیب سرسره را بیابید.



۸- ماشین برای طی هر ۱۰۰ کیلومتر ۷ لیتر بنزین مصرف می‌کند.

الف) اگر y مسافت طی شده و x مصرف بنزین باشد، رابطه‌ی بین x و y را بیابید.

ب) اگر ماشین ۲۵ لیتر بنزین داشته باشد، چقدر باید به باک آن بنزین اضافه کنیم تا به شهری که در فاصله‌ی ۳۵۰ کیلومتری است برسیم؟

پ) نمودار رابطه‌ی x و y را رسم کنید.

ت) اگر در این رابطه شیب کمتر شود، ماشین مناسب‌تر است یا خیر؟

۹- طبق مقررات شهرسازی برای ساختن یک رَمپ حداکثر شیب مجاز ۰/۱۸ می‌باشد. برای ساختن رَمپی به ارتفاع ۱ متر، چه طولی را برای رَمپ باید در نظر بگیریم؟

۱۰- نردبانی به طول ۱۰ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۸ متر باشد، شیب نردبان چقدر است؟

۱۱- نقاش‌ها برای کار خود از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که به صورت دو نردبان هم اندازه‌اند که در نوک به هم وصل می‌باشند؛ اگر طول این نردبان‌ها ۴ متر باشد و به فاصله‌ی یک متری از نوک آن‌ها این دو نردبان با یک طناب نیم متری به هم وصل شده باشند (تا این دو نردبان نتوانند به دلخواه از هم باز شوند):

الف) شیب هر نردبان را پس از باز شدن کامل بیابید.

ب) اگر با این دو نردبان شیب‌هایی برابر $\frac{۴}{۳}$ و $-\frac{۴}{۳}$ ایجاد کنیم،
فاصله‌ی دو پای نردبان از هم چقدر است؟

۱۲- در یک جاده‌ی کوهستانی، ماشینی در جاده با شیب ۱۵٪ از پایین کوه رو به بالا می‌رود و ۲۰ کیلومتر مسیر را طی می‌کند. این ماشین تا چه ارتفاعی از کوه بالا رفته است؟

پاسخ

۱- الف) $x=۱۰۰۰-۲(۱۰۰)\rightarrow x=۱۰۰۰-۲۰۰=۸۰۰$ عدد کالا

ب) $x=۱۰۰۰-۲p\rightarrow$ (که ضریب p می‌باشد) شیب $=-۲$

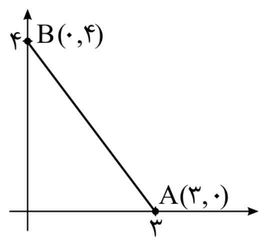
پ) $x=۱۰۰۰-۲p\rightarrow ۲x=۱۰۰۰-۲(۳p)$

$\rightarrow ۲x=۱۰۰۰-۶p\rightarrow x=\frac{۱۰۰۰}{۲}-\frac{۶p}{۲}\rightarrow x=۵۰۰-۳p\Rightarrow$ (که ضریب p می‌باشد.) شیب $=-۳$

۴- $$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{(a+۱)-(۳)}{(a-۱)-(۲a)}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{a-۲}{a-۱-۲a}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{a-۲}{-a-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲a-۴=-a-۱\rightarrow ۳a=۴-۱\rightarrow ۳a=۳\rightarrow a=۱$$

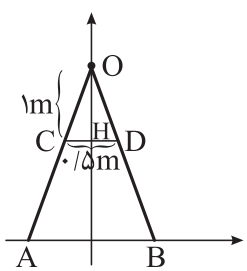
۵- طبق شکل، شیب اولیه عبارت است از:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۰}{۰-۳}=-\frac{۴}{۳}$$

و پس از افتادن نردبان روی زمین، نردبان به صورت خط افقی می‌گردد که شیب آن صفر است. پس بیشترین شیب نردبان صفر و کمترین شیب نردبان نیز $-\frac{۴}{۳}$ می‌باشد.

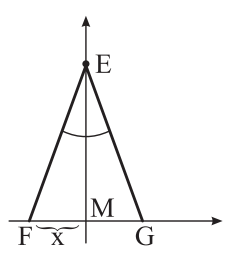
۱۱- الف)



$$m_{OB}=\frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x}=\frac{-OH}{HD}=\frac{-۱}{۰/۲۵}=-۴$$

$$m_{OA}=\frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x}=\frac{OH}{CH}=\frac{۱}{۰/۲۵}=۴$$

ب)



$$m_{FE}=\frac{ME}{FM}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{ME}{x}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ME=\frac{۴x}{۳}$$

با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث FME داریم:

$$ME^{۲}+FM^{۲}=FE^{۲}\to\left(\frac{۴}{۳}x\right)^{۲}+x^{۲}=۴^{۲}\to\frac{۱۶}{۹}x^{۲}+x^{۲}=۱۶$$

$$\frac{۱۶x^{۲}+۹x^{۲}}{۹}=۱۶\to\frac{۲۵x^{۲}}{۹}=۱۶\to x^{۲}=\frac{۱۶\times۹}{۲۵}\to x=\frac{۴\times۳}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

با توجه به این‌که فاصله‌ی دو پای نردبان یعنی FG برابر ۲x است پس:

$$FG=۲\left(\frac{۱۲}{۵}\right)=\frac{۲۴}{۵}$$

دستگاه معادلات خطی دو مجهولی

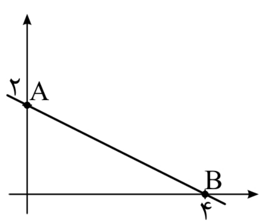
معادله‌ی خط، خط‌های عمود بر هم

۱- معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}۳\\۵\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix}$ بگذرد.

۲- کدام‌یک از نقاط زیر روی خط $y-۳x=+۱$ واقع است؟

الف) $\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix}۰\\+۱\end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$

۳- با توجه به نمودار، جدول زیر را کامل کنید.



	الف	ب	پ	ت
X	−۱		۴	
y		۱		۷

۴- معادله‌ی خط L به صورت $x-۲y+۴=۰$ است. جاهای خالی را چنان پر کنید که نقاط مشخص شده روی خط L قرار گیرند؟

الف) $\begin{bmatrix}۲\\ \ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۰\\ \ \end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix}\ \\-۱\end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix}\ \\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$

۵- عدد a را طوری بیابید که نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ روی خط $۳y+ax=۲$ قرار گیرد.

۶- بررسی کنید کدام نقاط روی خط قرار دارند؟

الف) $y = x + ۱$ $\quad A\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب) $x + y = ۵$ $\quad A\begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$

۷- شیب خطوط زیر را محاسبه کنید.

الف) $y = ۳x + ۱$ ب) $۲x - ۶y = ۵$ پ) $y = \frac{۷}{۳}$ ت) $x = -۱۲$

۸- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن صفر است را بنویسید. (به طور کلی معادله‌ی خط‌هایی با شیب صفر را توصیف کنید.)

۹- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و بر خط $y = \frac{۱}{۵}x + ۷$ عمود باشد.

۱۰- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد و بر خط $۳y - ۲x = ۱$ عمود باشد.

۱۱- خط $۲x + ۳y = ۴$ مفروض است:

الف) معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط فوق موازی بوده و از نقطه‌ی $C\begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$ بگذرد.

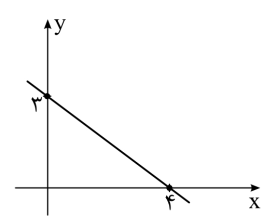
ب) معادله‌ی خطی را بنویسید که بر خط فوق عمود بوده و عرض از مبداء آن ۹ باشد.

۱۲- با دلیل نشان دهید که کدام‌یک از خطوط زیر بر خط به معادله‌ی $y = ۲x - ۵$ عمود است؟

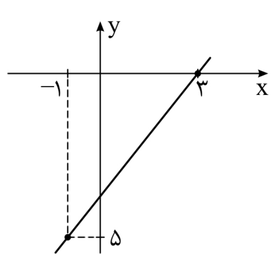
الف) $y = \frac{۱}{۲}x + ۳$ ب) $۲y = x + ۵$ پ) $x = \frac{۱}{۲}y + ۵$ ت) $x = -۲y + ۳$

۱۳- معادله‌ی خطوط زیر را بیابید:

الف)



ب)



۱۴- وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم بیابید.

الف) (۱) $۵x - ۴y = ۲$ (۲) $۳y - ۲x = ۱$

ب) (۱) $x - ۲y - ۱ = ۰$ (۲) $۲x + y = ۴$

پ) (۱) $y = ۳x - ۵$ (۲) $\frac{y}{۳} - x + ۱ = ۰$

ت) (۱) $۲y - x = ۲$ (۲) $y - \frac{x}{۲} = ۱$

۱۵- معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را در مثلثی با رئوس $A\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۰\\۲\end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۶- سه نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$ رئوس مثلثی هستند:

الف) معادلات ضلع‌های AB و AC را بیابید.

ب) معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AC را بیابید.

۱۷- علی برای خرید ۱ دفتر و ۱ خودکار ۱۵۰ تومان پرداخت کرد و فاطمه برای خرید ۲ دفتر و ۵ خودکار ۴۵۰ تومان پرداخت کرد:

الف) معادلات مربوط به این مساله را بنویسید.

ب) با رسم نمودار خطوط این معادلات در دستگاه مختصات جواب این دستگاه را بیابید.

۱۸- دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} x-۲y=۱ \\ x+۳y=۷ \end{cases}$$

۱۹- دستگاه زیر را با روش جایگذاری حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x-y=۵ \\ ۲x+۳y=۷ \end{cases}$$

۲۰- معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط $۲x-y=۳$ و $۳x-۲y=۴$ گذشته و با خط $x-۳y=۰$ موازی باشد.

۲۱- a را طوری بیابید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} ۱۰x-ay=۱ \\ ۵x+(a+۱)y=۲ \end{cases}$$

۲۲- اگر معادله‌ی حرکت دو متحرک به ترتیب $y=۵x+۱$ و $y=۲x+۳$ باشند که در آن‌ها x زمان وy مسافت طی شده باشد، در کدام ثانیه این دو متحرک به هم می‌رسند؟

۲۳- عرض مستطیلی $\frac{۲}{۳}$ طول آن است. اگر از طول ۳ متر کم کنیم و به عرض ۳ متر اضافه کنیم، مستطیل به شکل مربع در می‌آید. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

۲۴- سن حمید ۳ سال دیگر دو برابر سن برادرش می‌شود. اگر ۳ سال قبل سن حمید چهار برابر سن برادرش بوده باشد، حمید چند سال از برادرش بزرگتر است؟

پاسخ

۱- $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۵}{-۲-۳}=\frac{-۱}{-۵}=\frac{۱}{۵}$

$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})\rightarrow y-۵=\frac{۱}{۵}(x-۳)\rightarrow y-۵=\frac{x}{۵}-\frac{۳}{۵}$

$y=\frac{x}{۵}-\frac{۳}{۵}+۵\rightarrow y=\frac{x}{۵}+\frac{۲۲}{۵}$

۲- اگر نقطه‌ای روی خطی واقع باشد آن‌گاه باید مختصات آن روی خط صدق کند. مثلاً اگر نقطه‌ی ((الف)) روی خط باشد باید با جایگذاری $x=۱$ و $y=۲$ طرفین مساوی با هم برابر گردند.

الف) پس نقطه‌ی ((الف)) روی خط واقع نمی‌باشد. $y-۳x=۱\rightarrow ۲-۳(۱)\neq ۱$

ب) پس نقطه‌ی ((ب)) روی خط واقع نمی‌باشد. $y-۳x=۱\rightarrow ۱-۳(۳)\neq ۱$

پ) پس نقطه‌ی ((پ)) روی خط واقع می‌باشد. $y-۳x=۱\rightarrow +۱-۳(۰)=+۱$

ت) پس نقطه‌ی ((ت)) روی خط واقع نمی‌باشد. $y-۳x=۱\rightarrow ۰-۳(۱)\neq +۱$

۳- ابتدا معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی داده‌شده‌ی $A(۰,۲)$ و $B(۴,۰)$ می‌گذرد را می‌یابیم:

$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۲}{۴-۰}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$

حال معادله‌ی خط را با کمک معادله‌ی $y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$ می‌نویسیم:

$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})\rightarrow y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۴)\rightarrow y=-\frac{x}{۲}+۲$

حال داریم:

الف) $x=۱\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}+۲\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}$

ب) $y=۱\Rightarrow ۱=\frac{-x}{۲}+۲\Rightarrow ۱-۲=\frac{-x}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{-x}{۲}\Rightarrow x=۲$

پ) $x=۴\Rightarrow y=\frac{-۴}{۲}+۲\Rightarrow y=-۲+۲\Rightarrow y=۰$

ت) $y=۷\Rightarrow ۷=\frac{-x}{۲}+۲\Rightarrow ۵=\frac{-x}{۲}\Rightarrow x=-۱۰$

۷- الف) $y=۳x+۱\Rightarrow m=۳$

ب) $۲x-۶y=۵\Rightarrow -۶y=۵-۲x\Rightarrow y=\frac{-۵}{۶}+\frac{۲}{۶}x\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۶}\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}$

پ) $y=\frac{۷}{۳}\Rightarrow y=۰x+\frac{۷}{۳}\Rightarrow m=۰$ خط افقی است. $\Rightarrow$ شیب خطوط افقی صفر است.

ت) $x=-۱۲$ خط قائمی است $\Rightarrow$ شیب خطوط قائم تعریف نشده است.

۹- شیب خط $y=\frac{۱}{۵}x+۷$ برابر $\frac{۱}{۵}$ می‌باشد و با توجه به این‌که شیب خط عمود بر این خط عکس و قرینه‌ی $\frac{۱}{۵}$ می‌باشد. پس شیب خط عمود برابر است با ۵− به عبارت دیگر:

$$m_{\text{عمود}}=-\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=-۵$$

حال داریم:

$$y-y_{۰}=m_{\text{عمود}}(x-x_{۰})\Rightarrow y-(-۲)=-۵(x-(-۱))$$

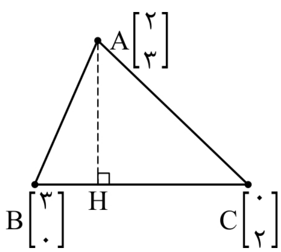
$$y+۲=-۵x-۵\Rightarrow y=-۵x-۷$$

۱۴- الف) شیب خط (۱) برابر $\frac{۵}{۴}$ و شیب خط (۲) برابر $\frac{۲}{۳}$ است و با توجه به عدم تساوی دو شیب این دو خط متقاطع‌اند.

ب) شیب خط (۱) برابر $\frac{۱}{۲}$ و شیب خط (۲) برابر ۲− است با توجه به این‌که این دو شیب عکس و قرینه‌ی یک‌دیگرند. پس دو خط بر هم عمودند.

پ) شیب خط (۱) برابر ۳ و شیب خط (۲) نیز برابر ۳ است. پس دو خط با هم موازیند.

ت) شیب خط (۱) برابر $\frac{۱}{۲}$ و شیب خط (۲) برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس دو خط با هم موازیند.



۱۵- ابتدا شیب خط BC را می‌یابیم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$$

سپس چون ارتفاع AH بر BC عمود است شیب آن را عکس و قرینه می‌کنیم.

$$m_{AH}=\frac{-۱}{m_{BC}}\Rightarrow m_{AH}=\frac{-۱}{\frac{-۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-۳=\frac{۳}{۲}(x-۲)\Rightarrow y-۳=\frac{۳}{۲}x-۳\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x$$

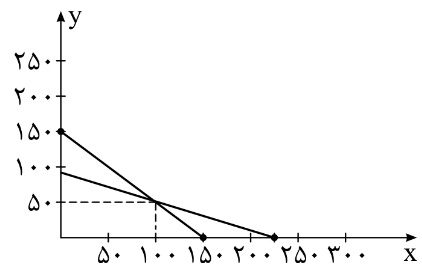
۱۷- الف) اگر قیمت دفتر x تومان و خودکار y تومان باشد، داریم:

$$\begin{cases}x+y=۱۵۰\\ ۲x+۵y=۴۵۰\end{cases}$$

ب) برای رسم دو نقطه‌ی دلخواه به هر خط می‌دهیم:

$$x+۲y=۱۵۰\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۵۰\\۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱۰۰\\۵۰\end{bmatrix}$$

$$۲x+۵y=۴۵۰\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۰۰\\۵۰\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲۲۵\\۰\end{bmatrix}$$



با رسم خطوط محل برخورد آن‌ها $\begin{bmatrix} ۱۰۰ \\ ۵۰ \end{bmatrix}$ تعیین می‌گردد یعنی قیمت یک دفتر ۱۰۰ تومان و یک خودکار ۵۰ تومان می‌باشد.

-۱۸

$$-۱\begin{cases} x-۲y=۱ \\ x+۳y=۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{-x}+۲y=-۱ \\ \cancel{x}+۳y=۷ \end{cases}$$

$$۵y=۶ \Rightarrow y=\frac{۶}{۵} \Rightarrow x-۲y=۱ \Rightarrow x-۲\left(\frac{۶}{۵}\right)=۱ \Rightarrow x-\frac{۱۲}{۵}=۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۵}+۱=\frac{۱۷}{۵}$$

-۲۱ برای این‌که دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ جواب نداشته باشد باید دو خط موازی باشند. یعنی داشته باشیم $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ پس:

$$\frac{۱۰}{۵}=\frac{-a}{a+۱}\neq\frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{۱۰}{۵}=\frac{-a}{a+۱} \rightarrow ۱۰a+۱۰=-۵a$$

$$۱۵a=-۱۰ \rightarrow a=\frac{-۱۰}{۱۵}=\frac{-۲}{۳}$$

-۲۴ سن حمید را x_H و سن برادرش x_B درنظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} x_H+۳=۲(x_B+۳) \\ x_H-۳=۴(x_B-۳) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_H=۲x_B+۳ \\ x_H=۴x_B-۹ \end{cases} \Rightarrow ۲x_B+۳=۴x_B-۹ \rightarrow ۱۲=۲x_B \rightarrow \begin{cases} x_B=۶ \\ x_H=۱۵ \end{cases}$$

پس اختلاف سن حمید از برادرش ۹ سال می‌باشد.

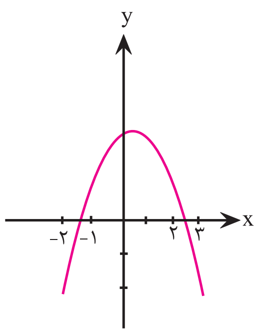
ب. روابط بین ضرایب و جواب‌ها (ریشه‌ها) در معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ جمع ریشه‌ها $S=\frac{-b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}$ می‌باشد. هم‌چنین قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها از دستور $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست می‌آید.

البته برای تعیین تعداد جواب‌ها و علامت آن‌ها قبل از استفاده از روابط فوق، باید Δ ی معادله را تعیین نمود تا بدانیم اصولاً معادله جواب حقیقی دارد یا نه؟

مثال:

نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ مطابق شکل زیر است. علامت ضرایب a، b و c و تعداد ریشه‌های معادله $f(x)=0$ را تعیین کنید.



حل: معادله $f(x)=0$ دو جواب یکی مثبت و دیگری منفی دارد. چون f دارای ماکزیمم است پس $a<0$ و چون ضرب ریشه‌ها منفی است پس $\frac{c}{a}<0$ و در نتیجه $c>0$ می‌باشد. از آن‌جا که جمع جواب‌ها مثبت است (توجه کنید یک جواب بزرگ‌تر از ۲ و دیگری بین ۱- و ۲- است) پس $\frac{-b}{a}>0$ و در نتیجه $-b<0$ و از آن‌جا $b>0$ است.

■ **تذکر:** اگر بخواهیم معادله درجه دومی را بنویسیم که ریشه‌های آن x' و x'' است می‌توانیم بنویسیم $x=x'$ و $x=x''$ و از آن‌جا $x-x'=0$ و $x-x''=0$ و در نتیجه $(x-x')(x-x'')=0$ که پس از ساده شدن معادله موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال:

۱. **معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{۴}$ و ۳ باشد.**

حل: $\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x-3=0 \\ x-\frac{1}{4}=0\end{matrix} \Rightarrow (x-3)(x-\frac{1}{4})=0 \Rightarrow x^2-\frac{13}{4}x+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow 4x^2-13x+3=0$

۲. **مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $-mx^2+3x+3-m=0$ برابر ۲- شود.**

حل: ضرب ریشه‌ها $=\frac{c}{a} \Rightarrow -2=\frac{3-m}{-m} \Rightarrow 2m=3-m \Rightarrow m=1$

۳. **معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در نقاطی به طول‌های ۳ و ۳- و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع کند.**

حل: معادله سهمی به‌صورت $y=a(x-x')(x-x'')$ است. چون $x'=3$ و $x''=-3$ پس معادله سهمی به $y=a(x-3)(x+3)$ تبدیل می‌شود. از آن‌جا که محور عرض‌ها را در $y=6$ و $x=0$ قطع می‌کند پس $6=a(0-3)(0+3)$ و در نتیجه $a=\frac{6}{-9}=\frac{-2}{3}$

$y=\frac{-2}{3}(x-3)(x+3)$ یا $y=\frac{-2}{3}x^2+6$ معادله موردنظر خواهد بود.

۴. اگر هریک از ریشه‌های معادله $۳x^۲+ax+b=۰$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $۴x^۲-۷x+۳=۰$ باشد a کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

حل: ریشه‌های معادله $4x^2-7x+3=0$ را x' و x'' می‌نامیم و داریم:

$$x'+x''=\frac{7}{4}\quad,\quad x'x''=\frac{3}{4}$$

چون ریشه‌های معادله موردنظر به‌صورت $\frac{2}{x'}$ و $\frac{2}{x''}$ می‌باشند پس:

$$\text{جمع ریشه‌ها}=\frac{2}{x'}+\frac{2}{x''}=\frac{-a}{3}\Rightarrow\frac{2(x'+x'')}{x'x''}=\frac{-a}{3}\Rightarrow\frac{2(\frac{7}{4})}{\frac{3}{2}}=\frac{-a}{3}$$

$\Rightarrow\frac{14}{3}=\frac{-a}{3}\Rightarrow a=-14\Rightarrow$ گزینه (۱) صحیح است.

۵. ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲-ax+b=۰$ یک واحد از ریشه‌های معادله $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیش‌تر است. b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل: اگر ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ را x' و x'' بنامیم، داریم:

$$x'+x''=\frac{-7}{3}\quad,\quad x'x''=\frac{1}{3}$$

از طرفی ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ به‌صورت $x'+1$ و $x''+1$ می‌باشد، لذا ضرب ریشه‌های معادله به‌صورت $b=(x'+1)(x''+1)$ می‌باشد که در آن حاصل ریشه‌ها طبق ضابطه معادله برابر b است.

$b=x'x''+x'+x''+1\Rightarrow b=(\frac{1}{3})+(\frac{-7}{3})+1=-1\Rightarrow$ گزینه (۲) صحیح است.

■ **نکته:** معادله درجه دومی که جمع ریشه‌های آن S و ضرب ریشه‌های آن P باشد به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

سؤالات امتحانی

۱. نمودار سهمی $y=-۴x^۲+۸x$ را رسم کنید و مقدار ماکزیمم آن را به‌دست آورید.

۲. تابع به معادله $۲x^۲-۶x+۲y=۴$ مفروض است. مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع را بیابید و از طریق رسم نمودار تابع، راه‌حل خود را کنترل کنید.

۳. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $x^۲-۳x+۲=۰$ باشند.

۴. مقدار m را طوری بیابید که مجموع ریشه‌های معادله $۲x^۲-(m+۱)x-۳m=۰$ برابر ۴ باشد.

۵. m و n را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌های معادله $۲x^۲-(m+n)x+n+۴=۰$ برابر صفر و حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۳ باشد.

۶. در معادله درجه دوم زیر m را طوری به‌دست آورید که جمع دو ریشه معادله برابر ۱- باشد.

$$m^۲x^۲+(۳m-۲)x+۲m-۱=۰$$

۷. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۳ واحد کم‌تر از ریشه‌های معادله $x^۲-۲x-۱=۰$ باشد.

۸. معادله درجه دومی به‌دست آورید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $۵x^۲-۷x+۲=۰$ باشند.

۹. در معادله درجه دوم $(m+۱)x^۲-۲(m+۳)x+۳m=۰$ مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله ریشه مضاعف داشته باشد.

۱۰. در معادله $۲x^۲+(۲k-۱)x-k=۰$، k را طوری به‌دست آورید که مجموع عکس ریشه‌ها $\frac{۷}{۳}$ باشد.

۱۱. مقدار k را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادله $x^۲+x+k=۰$ در رابطه $kx_۱x_۲+x_۱+x_۲=۳$ صدق کند.

۱۲. مقدار a را در معادله $(a-۱)x^۲+۵x+۲=۰$ چنان تعیین کنید که یک ریشه عکس و قرینه ریشه دیگر باشد.

۱۳. می‌دانیم حاصل‌جمع دو عدد حقیقی x و y برابر ۵۰ می‌باشد. ماکزیمم حاصل‌ضرب این دو عدد را به‌دست آورید.

۱۴. ثابت کنید در بین مستطیل‌هایی که محیط‌شان ثابت است مربع بیش‌ترین مساحت را دارد.

۱۵. مقدار a را چنان بیابید که یک جواب معادله $x^۳-۲x^۲+ax+۲=۰$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را بیابید.

۱۶. شخصی در لبه بالای ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است. دستگاهی دارد که می‌تواند توپی با سرعت اولیه ۶۴ متر بر ثانیه را به سوی بالا پرتاب کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین از معادله $h(t)=-۱۶t^۲+۶۴t+۸۰$ به‌دست می‌آید. نمودار این تابع را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف. توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟

ب. ماکزیمم ارتفاعی که توپ پیدا می‌کند چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع خود می‌رسد؟

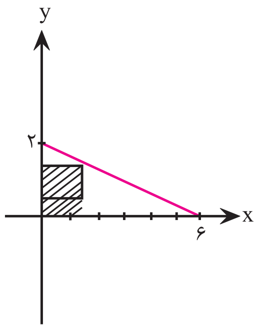
پ. دامنه و برد این تابع را تعیین کنید.

۱۷. ثابت کنید جواب‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ عکس جواب‌های معادله $cx^۲+bx+a=۰$ است.

۱۸. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن دو واحد از ریشه‌های $x^۲-mx+m-۱=۰$ بیش‌تر باشد.

۱۹. کم‌ترین مقدار عبارت $A=x+\frac{۲}{x}$ را به ازای $(x>۰)$ به‌دست آورید.

۲۰. مطابق شکل زیر یک مستطیل با محورهای x و y و نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{۶-x}{۳}$ داده شده است. ابعاد مستطیل را چنان تعیین کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.



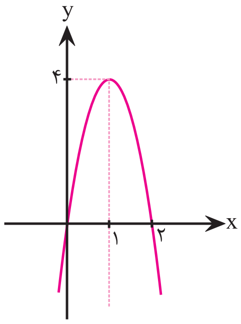
پاسخ سؤالات امتحانی

۱

معادله محور تقارن سهمی $x = \dfrac{-8}{2(-4)} = 1$ می‌باشد. سهمی محور xها را در دو نقطه $x=0$ و $x=2$ قطع می‌کند، زیرا:

$$y=0 \Rightarrow -4x^2+8x=0 \Rightarrow 4x(-x+2)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=2$$

ماکزیمم تابع در $x=1$ اتفاق می‌افتد که مقدار آن برابر است با $y=-4(1)^2+8(1)=4$ بنابراین نمودار سهمی به شکل زیر است:



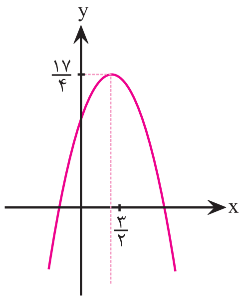
۲

$$y=-x^2+3x+2$$

$$y=-((x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4})+2=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{17}{4}$$

برای آن‌که y ماکزیمم شود باید $(x-\frac{3}{2})^2$ صفر شود، لذا ماکزیمم y برابر $\frac{17}{4}$ است. برای رسم تابع، تابع $y=-x^2$ را به اندازه $\frac{3}{2}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس به اندازه $\frac{17}{4}$ در امتداد yها بالا می‌بریم.

همان‌طور که از روی نمودار مشخص شده، ماکزیمم تابع $\frac{17}{4}$ است.



۳

راه‌حل (۱): $x^2-3x+2=0$

$$y=x^2 \quad \Rightarrow x=\pm\sqrt{y} \Rightarrow (\pm\sqrt{y})^2 \pm 3\sqrt{y}+2=0$$

$$y \pm 3\sqrt{y}+2=0 \Rightarrow y+2=\pm 3\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2+4y+4=9y \Rightarrow y^2-5y+4=0$$

راه‌حل (۲): اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2-3x+2=0$ باشند معادله‌ای می‌خواهیم که ریشه‌های آن x'^2 و x''^2 باشد، داریم:

$$P=x'^2x''^2=(x'x'')^2=2^2=4$$

$$S=x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=9-2(2)=5$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4=0$$

۴

$$2x^2-(m+1)x-3m=0\ ,\ x_1+x_2=4 \Rightarrow S=4$$

$$-\frac{-(m+1)}{2}=4 \Rightarrow m+1=8 \Rightarrow m=7$$

۵

$$2x^2-(m+n)x+n+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x'+x''=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{m+n}{2}=0 \\ x'x''=\dfrac{c}{a}=\dfrac{n+4}{2}=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=0 \\ n+4=6 \end{cases} \Rightarrow n=2\ ,\ m=-2$$

۶

$$m^2x^2+(3m-2)x+2m-1=0 \quad ,\quad x_1+x_2=-1$$

$$S=-1 \Rightarrow -\frac{3m-2}{m^2}=-1 \Rightarrow m^2-3m+2=0$$

$$(m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1\ ,\quad m=2$$

$m=1$ غیر قابل قبول است زیرا به ازای آن $\Delta<0$ خواهد شد.

۷

$$x^2-2x-1=0\ ,\ \ y=x-3 \Rightarrow x=y+3$$

$$(y+3)^2-2(y+3)-1=0$$

$$\Rightarrow y^2+6y+9-2y-6-1=0 \Rightarrow y^2+4y+2=0$$

۸

$$5x^2-7x+2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{5}{y^2}-\frac{7}{y}+2=0$$

$$\Rightarrow 2y^2-7y+5=0$$

۹

$$(m+1)x^2-2(m+3)x+3m=0 \quad ,\quad \Delta=0$$

$$\Delta=4(m+3)^2-4(m+1)(3m)=0$$

$$\Rightarrow (m+3)^2-3(m+1)m=0$$

$$m^2+6m+9-3m^2-3m=0 \Rightarrow -2m^2+3m+9=0$$

$$\Delta=9+72=81$$

$$m=\frac{-3\pm 9}{-4} \Rightarrow m=3,-\frac{3}{2}$$

۱۰

$$2x^2+(2k-1)x-k=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{1}=\frac{1-2k}{2} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{k}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{7}{3}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1-2k}{2}}{-\frac{k}{2}}=\frac{7}{3} \Rightarrow k=-3$$

۱۱

$$x^2+x+k=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=k \end{cases}$$

$$k(k)-1=3 \Rightarrow k^2-1=3 \Rightarrow k=\pm 2$$

$k=2$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای $k=2$ ، $\Delta<0$ بوده و معادله ریشه ندارد.

۱۲

$$(a-1)x^2+5x+2=0 \qquad x_1=-\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2=--1$$

$$P=-1 \Rightarrow \frac{2}{a-1}=-1 \Rightarrow a-1=-2 \Rightarrow a=-1$$

۱۳

فرض کنیم تابع $A(x)$ تابعی باشد که حاصل‌ضرب دو عدد را بدهد

بنابراین داریم: $x+y=50 \Rightarrow y=50-x$

$$A(x)=x\times y=x(50-x)=-x^2+50x$$

با استفاده از روش مربع کامل کردن، ماکزیمم مقدار را به دست می‌آوریم:

$$A(x)=-((x-25)^2-625)=-(x-25)^2+625$$

ماکزیمم مقدار $A(x)$ وقتی اتفاق می‌افتد که $(x-25)^2$ کم‌ترین مقدار یعنی صفر را دارا باشد، لذا $x=25$ و از آن‌جا $y=25$ پس ماکزیمم حاصل‌ضرب برابر است با: $(25\times 25=625)$ واحد مربع

۱۴

فرض کنیم محیط یک مستطیل دلخواه a و طول و عرض آن به ترتیب x و y باشد داریم:

$$\text{محیط}=a \Rightarrow 2(x+y)=a \Rightarrow x+y=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{2}-x$$

تابع مساحت مستطیل‌ها را $A(x)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$A(x)=x(\frac{a}{2}-x)=-x^2+\frac{a}{2}x$$

برای ماکزیمم یا می‌نیمم کردن این تابع از روش مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم:

$$A(x)=-(x^2-\frac{a}{2}x)=-((x-\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{16})$$

$$=-(x-\frac{a}{4})^2+\frac{a^2}{16}$$

چون $(x-\frac{a}{4})^2$ نامنفی است، پس قرینه آن نامثبت است. ماکزیمم مقدار $A(x)$ وقتی اتفاق می‌افتد که $(x-\frac{a}{4})^2$ کم‌ترین مقدار ممکن یعنی صفر را دارا باشد، لذا $x-\frac{a}{4}=0$ و از آن‌جا $x=\frac{a}{4}$ و $y=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$ پس طول و عرض مستطیل برابر $\frac{a}{4}$ است که مربع خواهد شد.

۱۵

چون یک جواب معادله $x=2$ است، با قرار دادن آن در معادله مقدار a را می‌یابیم:

$$8-8+2a+2=0 \Rightarrow a=-1$$

با قرار دادن $a=-1$ و دانستن این‌که $x=2$ جوابی از معادله است می‌توان عبارت متناظر معادله را بر $x-2$ تقسیم کرد و جواب‌های دیگر معادله را یافت:

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

$$(x-2)(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

۱۶

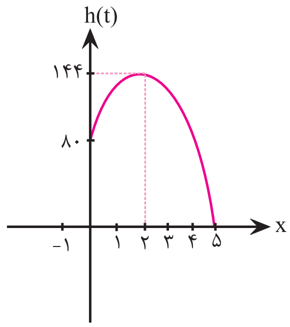
$$h(t)=-16(t^2-4t-5)=-16((t-2)^2-9)$$

$$h(t)=-16(t-2)^2+144$$

الف. مطابق نمودار تابع، در $t=5$ توپ به سطح زمین می‌خورد.

ب. ماکزیمم ارتفاع توپ در $t=2$ اتفاق می‌افتد و مقدار ماکزیمم برابر ۱۴۴ متر از سطح زمین می‌باشد.[توجه کنید توپ در ابتدا ۸۰ متر از سطح زمین فاصله داشته است.]

پ. با توجه به شکل دامنه تابع $[0,5]$ و برد تابع $[0,144]$ است.



۱۷

فرض کنیم r جوابی از معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد پس $ar^2+br+c=0$، می‌خواهیم نشان دهیم $\frac{1}{r}$ جواب معادله $cx^2+bx+a=0$ است. بنابراین داریم:

$$c(\frac{1}{r})^2+b(\frac{1}{r})+a=\frac{c}{r^2}+\frac{b}{r}+a=\frac{c+br+ar^2}{r^2}$$

$$=\frac{0}{r^2}=0$$

۱۸

$$y=x+2 \Rightarrow x=y-2$$

$$(y-2)^2-m(y-2)+m-1=0$$

$$y^2-4y+4-my+2m+m-1=0$$

$$y^2-(m+4)y+3m+3=0$$

معادله‌ی خواسته شده: $x^2-(m+4)x+3m+3=0$

۱۹

راه‌حل (۱):

$$A=x+\frac{2}{x}=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{\frac{2}{x}})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}})^2+2\sqrt{2}$$

کم‌ترین مقدار عبارت اخیر وقتی است که پرانتز صفر شود؛ یعنی کم‌ترین مقدار عبارت $2\sqrt{2}$ می‌شود.

راه‌حل (۲):

$$A(x)=x+\frac{2}{x}=\frac{x^2+2}{x}=\frac{(x-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\,x}{x}$$

$$=\frac{(x-\sqrt{2})^2}{x}+2\sqrt{2}$$

کم‌ترین مقدار این عبارت وقتی است که $\frac{(x-\sqrt{2})^2}{x}$ کم‌ترین مقدار باشد و چون $x>0$ این کسر نامنفی است و حداقل آن به ازای $x=\sqrt{2}$ می‌شود، لذا می‌نیمم $A(x)$ برابر $2\sqrt{2}$ است.

۲۰

فرض کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی خط باشد، بنابراین ابعاد مستطیل x و y است. اگر $A(x)$ تابع مساحت باشد داریم:

$$A(x)=x\times y=x(\frac{6-x}{3})=-\frac{x^2}{3}+2x$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2-6x)=-\frac{1}{3}[(x-3)^2-9]=-\frac{-1}{3}(x-3)^2+3$$

برای ماکزیمم شدن $A(x)$ باید $(x-3)^2$ برابر صفر شود، لذا $x=3$ و در نتیجه $y=1$ و ماکزیمم مساحت مستطیل برابر ۳ می‌شود.

برای تهیه جزوه فصل های

دیگر با شماره ۰۹۱۴۹۱۹۷۷۸۳

تماس بگیرید.یا به همین

شماره در تلگرام پیام

بفرستین.

با تشکر

محمدخانی مدرس تیزهوشان