۱ حاصل $\frac{\sin ۲۰^\circ}{۱+\cos ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sin ۱۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۰^\circ$ ۳) $\tan ۱۰^\circ$ ۴) $\tan ۴۰^\circ$

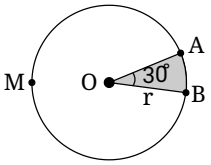
۲ اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) $-۳$ ۴) $-۴$

۳ اگر $\cot\alpha = ۲$ باشد، حاصل $\frac{\sin^۴\alpha + \cos^۳\alpha \sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}$ عبارت کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴ در شکل مقابل، محیط ناحیهٔ هاشورخورده $\pi + ۱۲$ است. در این صورت طول کمان $\overset{\frown}{AMB}$ کدام است؟




۱) $۹\pi$ ۲) $۸\pi$
۳) $۶\pi$ ۴) $۱۱\pi$

۵ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

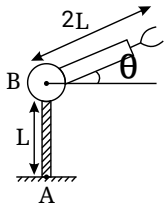
۶ اگر $۲\sin^۲ x - ۳\sin x\cos x + ۷\cos^۲ x = ۳$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$ کدام است؟

۱) $-۱$ ۲) $-۳$ ۳) ۱ ۴) ۳

۷ حاصل $\frac{\tan^۲ x}{۱ - \tan^۴ x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۷۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

۸ در شکل زیر، بازوی حرکت روبات به‌گونه‌ای قرار گرفته است که فاصلهٔ نوک گیره تا سطح زمین، نصف حداکثر مقدار ممکن است. فاصلهٔ تصویر نوک گیره بر روی زمین تا نقطهٔ $A$، چند برابر $L$ است؟ $(۰ < \theta < \frac{\pi}{۲})$




۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۹ معادلهٔ $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۳$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ جواب کلی معادله‌ی $\cos ۴x + ۲\sin^۲ x = ۱$ کدام است؟

۱) $x = ۲k\pi$ ۲) $x = \frac{k\pi}{۲}$ ۳) $x = k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۳}$

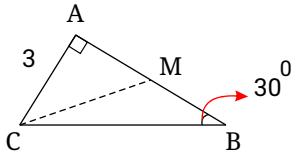
۱۱ اگر $\cos \alpha = ۲m + ۱$ , $-\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ باشد، حدود $m$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴} < m \leq ۰$ ۲) $-\frac{۱}{۴} \leq m \leq \frac{۱}{۴}$ ۳) فقط $m = -\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲} \leq m \leq \frac{۱}{۲}$

۱۲ اگر زاویه‌ی $\theta$ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان $\theta$ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}, \frac{۱}{۳})$ قطع کند، مقدار $A = \frac{۱ + \cot^۲ \theta}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \theta)}$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) $-۲۷$ ۳) $\frac{۲۷}{۲}$ ۴) $\frac{-۲۷}{۲}$

۱۳ در شکل زیر، $AC = ۳$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$. اگر $M$ وسط $AB$ باشد، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ کدام است؟




۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۵}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۱۴ اگر $\cot x = -\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۴ x + \cos^۴ x$ کدام است؟

۱) ۰٫۱۸ ۲) ۰٫۲۳ ۳) ۰٫۸۲ ۴) ۰٫۷۸

۱۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۳ x - \sin x = \cos ۲x$ در بازهٔ $[-\pi, \frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{۳\pi}{۴}$

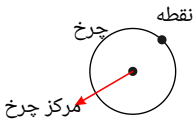
۱۶ اگر $-۲۵^\circ < x < ۳۰^\circ$ و $\cos ۲x = \frac{۲m - ۱}{۲}$ ، آنگاه حدود تغییرات $m$ کدام فاصله است؟

۱) $(۱, \frac{۳}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲})$ ۳) $(۱, \frac{۳}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۲}, \cos ۵۰^\circ)$

۱۷ معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲x = \sin ۲x + ۱$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۸ طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به‌شعاع $\frac{۱}{\pi}$ متر در هر ساعت طی می‌کند برابر با ۲٫۵ متر است. اگر این نقطه نسبت‌به مرکز چرخ به‌اندازهٔ ۹۰۰ درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟




۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۹ حاصل $\cot^۲ ۱۵^\circ - \tan^۲ ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۰ حاصل $\frac{۱}{\cot^۲ ۱۵^\circ} - \frac{۱}{\tan^۲ ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $-۸\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $-۴\sqrt{۳}$

۲۱ در صورتی که $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد حاصل $\sqrt{۱ - ۲\sin x\sqrt{۱ - \sin^۲ x}}$ برابر است با:

۱) $|\cos x - \sin x|$ ۲) $|\sin x + \cos x|$ ۳) $\sin x + \cos x$ ۴) $-(\sin x + \cos x)$

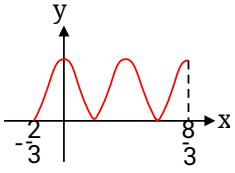
۲۲ مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cos^۲ x = \sin^۲ x + \sin ۲x$، در بازه‌ی $[۰, \pi]$ کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $\frac{۷\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲۳ معادلهٔ $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ در فاصله $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

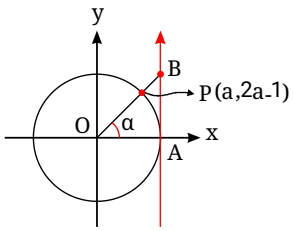
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴ شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ۳ + a\cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + ۲b)$ برابر با کدام گزینه می‌تواند باشد؟




۱) ۳ ۲) -۳
۳) -۶ ۴) ۶

۲۵ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، مساحت مثلث $AOB$ چقدر است؟ ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )




۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{8}$
۴) $\frac{1}{2}$

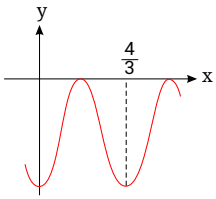
۲۶ اگر $3\sin x - 4\cos x = 5$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$
۲) ۰٫۶
۳) ۰٫۸
۴) ۰٫۲۸

۲۷ نقطه‌ی $A(0,1)$ ، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{13\pi}{4}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه‌ی $A'$ برسد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی $A'$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\sqrt{2}$
۳) $-\sqrt{2}$
۴) $2\sqrt{2}$

۲۸ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a\cos\pi(1+bx)$ است. در این صورت $ab$ کدام می‌توانند باشد؟ $(a > 0)$

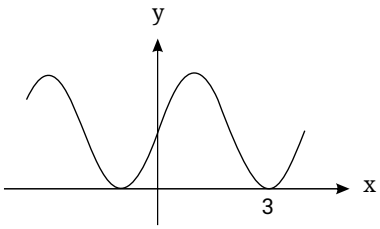



۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۳
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۵

۲۹ اگر جواب معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر $i$ کدام است؟

۱) $\{0,1,2\}$
۲) $\{0,1\}$
۳) $\{1,2,3\}$
۴) $\{1,2\}$

۳۰ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به‌صورت زیر است، $a+b$ کدام است؟




۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

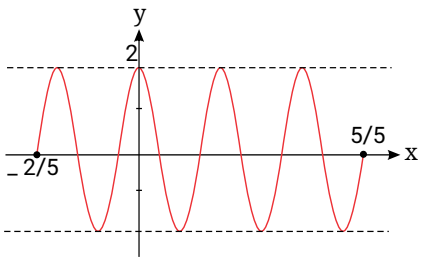
۳۱ اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$، آن‌گاه حاصل $\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۴
۴) $\frac{1}{4}$

۳۲ حاصل عبارت $A = \cos\frac{\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵}\cos\frac{۴\pi}{۵}$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۵}$
۲) $-\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۸}\sin(\frac{۲\pi}{۵})$
۴) $-\frac{۱}{۸}\sin(\frac{۲\pi}{۵})$

۳۳ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. حاصل $ab$ کدام می‌تواند باشد؟




۱) ۴
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۴ عبارت $۱ + \tan ۱۰\tan ۲۰$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۱}{\cos ۱۰}$
۳) $\frac{۱}{\cos ۲۰}$
۴) $۲\tan ۴۰^\circ$

۳۵ اگر $\frac{\sin ۲x}{۱ + \cos ۲x} = ۲$ باشد، آنگاه مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) ۰٫۶
۲) ۰٫۸
۳) ۰٫۴
۴) ۰٫۳

# پاسخنامه تشریحی

**۱** **گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\sin ۲a = ۲\sin a\cos a \\ ۱+\cos ۲a = ۲\cos^۲ a\end{array}}$

$$\frac{\sin ۲۰^\circ}{۱+\cos ۲۰^\circ} = \frac{۲\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ}{۲\cos^۲ ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = \tan ۱۰^\circ$$

**۲** **گزینه ۱**

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = -\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -\cos\alpha,\ \sin(۳\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha \ ,\ \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{تک تک جملات را بر } \cos\alpha \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha} = \frac{۱+\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}} = ۵$$

**۳** **گزینه ۲** باتوجه به $\cot\alpha = ۲$ یک رابطه بین $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بدست می‌آوریم.

$$\cot\alpha = ۲ \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ۲ \xrightarrow{\sin\alpha \neq ۰} \cos\alpha = ۲\sin\alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos\alpha$ها، مساوی آن یعنی $۲\sin\alpha$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\sin^۴\alpha + \cos^۳\alpha\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha} = \frac{\sin^۴\alpha + (۲\sin\alpha)^۳\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha(۲\sin\alpha)^۲}$$
$$= \frac{\sin^۴\alpha + ۸\sin^۳\alpha\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha \times ۴\sin^۲\alpha} = \frac{\sin^۴\alpha + ۸\sin^۴\alpha}{۱۶\sin^۴\alpha} = \frac{۹\sin^۴\alpha}{۱۶\sin^۴\alpha} = \frac{۹}{۱۶}$$

**۴** **گزینه ۴**

$$AB \text{ طول کمان } \overset{\frown}{AB} = r\alpha = r \times \frac{\pi}{۶} = \frac{r\pi}{۶}$$

$$\text{محیط ناحیهٔ هاشورخورده} = ۲r + \frac{r\pi}{۶} = ۱۲ + \pi \rightarrow r(۲ + \frac{\pi}{۶}) = ۶(۲ + \frac{\pi}{۶}) \rightarrow r = ۶$$

$$\rightarrow \overset{\frown}{AMB} = r \times (۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = ۶ \times \frac{۱۱\pi}{۶} \rightarrow \overset{\frown}{AMB} = ۱۱\pi$$

**۵** **گزینه ۳**

می‌دانیم $\sin a\cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$$\frac{\sin ۲۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{\sin ۲۰^\circ \sin(۹۰^\circ - ۴۰^\circ)\sin(۹۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{\sin ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin(۲ \times ۲۰^\circ)\cos ۴۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{۲\sin ۸۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin(۲ \times ۴۰^\circ)}{۲\sin ۸۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۸۰^\circ}{۴\sin ۸۰^\circ} = \frac{۱}{۴}$$

**۶** **گزینه ۲** می‌دانیم که $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ است.

ابتدا طرفین تساوی را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div \cos^۲ x} ۲\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۳\frac{\sin x}{\cos x} + ۷ = \frac{۳}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۲\tan^۲ x - ۳\tan x + ۷ = ۳(۱ + \tan^۲ x)$$

$$\Rightarrow \tan^۲ x + ۳\tan x - ۴ = ۰ \xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفر}]{} \begin{cases}\tan x = ۱ \\ \tan x = \frac{c}{a} = -۴\end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای $\tan x$: $۱+(-۴)=-۳$

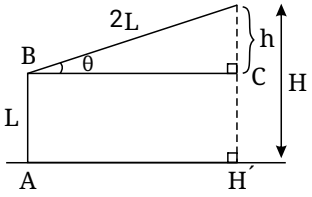
---

۷ **گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{\tan ۲a=\frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}\ ,\ \sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}}$

$$\frac{\tan^۲ x}{۱-\tan^۴ x}=\frac{\tan^۲ x}{(۱+\tan^۲ x)(۱-\tan^۲ x)}=\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{۱}{۴}\sin ۲x\cdot\tan ۲x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۱۲}}\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}\cdot\tan\frac{\pi}{۶}$$
$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

---

۸ **گزینه ۳** ابتدا ارتفاع نوک گیرهٔ این روبات تا سطح زمین را به‌صورت تابعی از $\theta$ می‌نویسیم:




$$h=۲L\sin\theta\Rightarrow H=L+۲L\sin\theta$$

می‌دانیم بیش‌ترین مقدار ممکن زمانی رخ می‌دهد که $\sin\theta=۱$ باشد که در این‌صورت: $H=۳L$

پس طبق فرض، روبات در حالتی قرار دارد که:

$$H=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow L+۲L\sin\theta=\frac{۳L}{۲}\Rightarrow ۲L\sin\theta=\frac{L}{۲}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

درنتیجه:

$$AH'=BC=۲L\cos\theta=۲L\times\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}L$$

---

۹ **گزینه ۳**

$$۲\sin^۲ x+۳\cos x=۳\Rightarrow ۲\sin^۲ x+۳\cos x-۳=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x-۳=۰$$
$$\Rightarrow ۲-۲\cos^۲ x+۳\cos x-۳=۰\ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۳\cos x+۱=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}\cos x=۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=۲k\pi\\ \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{۳}\ ,\ ۰\ ,\ \frac{\pi}{۳}$

---

۱۰ **گزینه ۴**

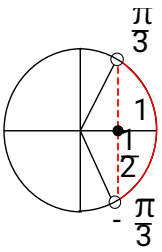
می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=۱-۲\sin^۲ a}$

$$\cos ۴x+۲\sin^۲ x=۱\rightarrow\cos ۴x=۱-۲\sin^۲ x\rightarrow\cos ۴x=\cos ۲x$$
$$\xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha}\begin{cases}۴x=۲k\pi+۲x\rightarrow ۲x=۲k\pi\rightarrow x=k\pi\\ ۴x=۲k\pi-۲x\rightarrow ۶x=۲k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}\end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های $x=k\pi$ همگی در $x=\frac{k\pi}{۳}$ قرار دارند بنابراین جواب کلی معادله $x=\frac{k\pi}{۳}$ است.

---

۱۱ **گزینه ۱** با توجه به دایره‌ی مثلثاتی وقتی $-\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۳}$، کسینوس زاویه‌ی $\alpha$ در فاصله‌ی $(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱]$ قرار دارد، لذا:




$$\frac{۱}{۲}<\cos\alpha\leq ۱\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}<۲m+۱\leq ۱$$
$$\rightarrow -\frac{۱}{۲}<۲m\leq ۰\ \Rightarrow\ -\frac{۱}{۴}<m\leq ۰$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=-۲\sqrt{۲}\ ,\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta=-\frac{۱}{۳}$$

$$A=\frac{۱+\cot^{۲}\theta}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)}=\frac{۱+(-۲\sqrt{۲})^{۲}}{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۹}{-\frac{۱}{۳}}=-۲۷$$

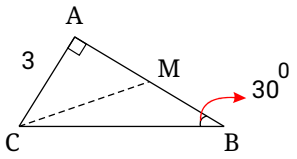
---

۱۳ **گزینه ۴** ضلع روبرو به زاویه‌ی $۳۰^\circ$ نصف وتر است $\leftarrow BC=۶$

ضلع روبرو به زاویه‌ی $(\hat{C})۶۰^\circ$ , $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است $\leftarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}$

از طرفی : $MB=\frac{AB}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$$S_{\underset{MBC}{\triangle}}=\frac{۱}{۲}MB\times BC\times\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})(۶)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$




---

۱۴ **گزینه ۳**

می‌دانیم که $\tan a+\cot a=\frac{۲}{\sin ۲a}$ و $\sin^{۴}a+\cos^{۴}a=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲a$ است.

$$\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}\ \rightarrow -۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{\sin ۲x}\ \rightarrow \frac{-۱۰}{۳}=\frac{۲}{\sin ۲x}\ \rightarrow \sin ۲x=-\frac{۳}{۵}$$

پس : $\sin^{۴}x+\cos^{۴}x\ =۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۲۵})\ =۱-\frac{۹}{۵۰}=\frac{۴۱}{۵۰}=۰/۸۲$

---

۱۵ **گزینه ۲** می دانیم $\cos ۲x=۱-۲\sin^{۲}x$ است.

$$۲\underbrace{\sin^{۳}x-\sin x}-\cos ۲x=۰\ \rightarrow \sin x(۲\sin^{۲}x-۱)-\cos ۲x=۰$$

$$\rightarrow -\sin x\cos ۲x-\cos ۲x=۰\ \rightarrow \cos ۲x(-\sin x-۱)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cos ۲x=۰\xrightarrow{\cos x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ \sin x=-۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

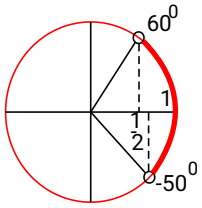
اگر در هر دو جواب به‌دست امده به $k$ عدد دهیم مقادیر $\frac{۳\pi}{۴}-$، $\frac{\pi}{۴}-$، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۲}-$ به‌دست می‌آید که مجموع آن‌ها $\frac{۵\pi}{۴}-$ است.

---

۱۶ **گزینه ۱**

$$-۲۵^\circ<x<۳۰^\circ\Rightarrow -۵۰^\circ<۲x<۶۰^\circ$$

کمانی را که $۲x$ روی دایره ی مثلثاتی می پیماید مشخص می کنیم، با توجه به شکل داریم:




$$\frac{۱}{۲}<\cos ۲x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۲m-۱}{۲}\le ۱\Rightarrow ۱<۲m-۱\le ۲\Rightarrow ۲<۲m\le ۳\Rightarrow ۱<m\le\frac{۳}{۲}$$

---

۱۷ **گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{۱-\cos ۲a=۲\sin^{۲}a\ ,\ \sin ۲a=۲\sin a\cos a}$

$$\cos ۲x=\sin ۲x+۱\ \rightarrow ۱-\cos ۲x+\sin ۲x=۰\ \rightarrow ۲\sin^{۲}x+۲\sin x\cos x=۰$$

$$\rightarrow ۲\sin x(\sin x+\cos x)=۰\ \rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi\xrightarrow{k=۰,۱,۲} x=۰,\pi,۲\pi\\ \sin x+\cos x=۰\rightarrow\sin x=-\cos x\xrightarrow{\div\cos x}\tan x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})\\ \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{k=۱,۲} x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

---

۱۸ **گزینه ۲**

$D=۹۰۰^\circ \Rightarrow \frac{۹۰۰}{۱۸۰}=\frac{\theta}{\pi} \Rightarrow$ رادیان $\theta=۵\pi \Rightarrow$ طول کمان طی‌شده $\ell=r\cdot\theta=۵\pi\times\frac{۱}{\pi}=۵$

چون هر یک ساعت **۲٫۵** متر می‌چرخد، پس در مدت **۲** ساعت **۵** متر می‌چرخد.

۱۹ **گزینه ۳** اول از اتحاد مزدوج و سپس از روابط $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ و $\cot x-\tan x=۲\cot ۲x$ استفاده می‌کنیم:

$$\cot^۲ ۱۵^\circ-\tan^۲ ۱۵^\circ=(\cot ۱۵^\circ-\tan ۱۵^\circ)(\cot ۱۵^\circ+\tan ۱۵^\circ)=۲\cot ۲(۱۵^\circ)\times\frac{۲}{\sin ۲(۱۵^\circ)}$$

$$=۲\cot ۳۰^\circ\times\frac{۲}{\sin ۳۰^\circ}=۲\sqrt{۳}\times\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۳}\times ۴=۸\sqrt{۳}$$

۲۰ **گزینه ۱** می‌دانیم: $\boxed{\cot a-\tan a=۲\cot ۲a\ ,\ \cot a+\tan a=\frac{۲}{\sin ۲a}}$

$$\frac{۱}{\tan^۲ ۱۵^\circ}-\frac{۱}{\cot^۲ ۱۵^\circ}=\cot^۲ ۱۵^\circ-\tan^۲ ۱۵^\circ=(\cot ۱۵^\circ+\tan ۱۵^\circ)(\cot ۱۵^\circ-\tan ۱۵^\circ)$$

$$=\left(\frac{۲}{\sin ۳۰^\circ}\right)\left(۲\cot ۳۰^\circ\right)=\left(\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\right)(۲\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$$

۲۱ **گزینه ۲** وقتی $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ است یعنی $x$ در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است.

$$\sqrt{۱-۲\sin x\cdot\sqrt{۱-\sin^۲ x}}=\sqrt{۱-۲\sin x\cdot\sqrt{\cos^۲ x}}=\sqrt{۱-۲\sin x\underbrace{|\cos x|}_{-}}$$

$$=\sqrt{۱+۲\sin x\cos x}=\sqrt{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}=|\sin x+\cos x|$$

۲۲ **گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=\cos^۲ a-\sin^۲ a}$

$$\cos^۲ x=\sin^۲ x+\sin ۲x\Rightarrow\cos^۲ x-\sin^۲ x=\sin ۲x$$

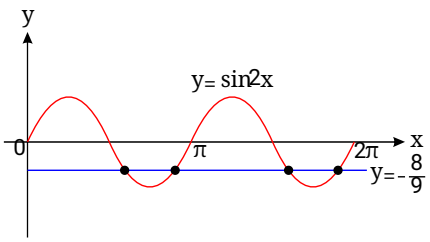
$$\Rightarrow\cos ۲x=\sin ۲x\xrightarrow{\div\cos ۲x}\tan ۲x=۱\xrightarrow{x=k\pi+\alpha}۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow{x\in[۰,\pi]}\begin{cases}k=۰:x_۱=\frac{\pi}{۸}\\ k=۱:x_۲=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\end{cases}\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۳\pi}{۴}$$

۲۳ **گزینه ۴** دو طرف معادله را به توان **۲** می‌رسانیم.

$$\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+\underbrace{۲\sin x\cos x}_{\sin ۲x}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{-۸}{۹}$$

که معادلهٔ $\sin ۲x=\frac{-۸}{۹}$ در بازه $[۰,۲\pi]$ دارای **۴** جواب است، زیرا:




۲۴ **گزینه ۴** یادآوری: دوره‌ی تناوب تابع $y=\cos kx$ برابر $\frac{۲\pi}{|k|}$ است.

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که، نمودار داده شده در بازه‌ی $[-\frac{۲}{۳},\frac{۸}{۳}]$ به تعداد **۲٫۵** مرتبه تکرار شده است، لذا اگر دوره‌ی تناوب این تابع را $T$ فرض کنیم داریم:

$$۲٫۵T=\frac{۸}{۳}-(-\frac{۲}{۳}) \Rightarrow ۲٫۵T=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow T=\frac{۴}{۳} \qquad (۱)$$

با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$y_۱=\cos(b\pi x) \xrightarrow{(۱)} T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{|b|}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow b=\pm\frac{۳}{۲} \qquad (۲)$$

همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f(-\frac{۲}{۳})=۰$ است. لذا:

$$\xrightarrow{(۲)} f(-\frac{۲}{۳})=۳+a\cos(\pm\frac{۳}{۲}\pi\times(-\frac{۲}{۳}))=۳+a\cos(\pm\pi)=۳-a=۰$$
$$\Rightarrow a=۳ \Rightarrow a+۲b=۳+۲(\pm\frac{۳}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} a+۲b=۰ \\ a+۲b=۶ \end{cases}$$

---

**۲۵** **گزینه ۳** طول ضلع $AB$ برابر $\tan\alpha$ می‌باشد، پس مساحت مثلث $AOB$ برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times AB\times OA \xrightarrow{OA=۱} S=\frac{۱}{۲}\times\tan\alpha$$

مختصات نقطهٔ $P$ روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ می‌باشد.

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow (۲a-۱)^۲+a^۲=۱ \Rightarrow ۵a^۲-۴a+۱=۱ \Rightarrow a(۵a-۴)=۰$$
$$\rightarrow \begin{cases} a=۰ & \text{غ ق ق} \\ a=\frac{۴}{۵} & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس $\cos\alpha$ برابر $\frac{۴}{۵}$ می‌باشد و $\sin\alpha$ برابر $\frac{۳}{۵}$ است.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۳}{۴} \rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

---

**۲۶** **گزینه ۴** می‌دانیم: $\sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲ a}$ و $\cos ۲a=\frac{۱-\tan^۲ a}{۱+\tan^۲ a}$

$$۳\sin x-۴\cos x=۵ \Rightarrow ۳(\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}})-۴(\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}})=۵$$
$$\xrightarrow{\times(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})} ۶\tan\frac{x}{۲}-۴(۱-\tan^۲\frac{x}{۲})=۵(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})$$
$$\rightarrow \tan^۲\frac{x}{۲}-۶\tan\frac{x}{۲}+۹=۰ \rightarrow (\tan\frac{x}{۲}-۳)^۲=۰ \rightarrow \tan\frac{x}{۲}-۳=۰ \rightarrow \tan\frac{x}{۲}=۳$$

می‌دانیم: $\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}=\frac{۲(۳)}{۱-۹}=-\frac{۳}{۴}$

$$\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱-\frac{۹}{۱۶}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۷}{۲۵}=۰٫۲۸$$

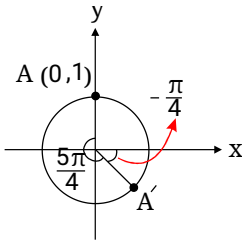
---

**۲۷** **گزینه ۱** اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه‌ی دوران برابر است با:

$$\frac{۱۳\pi}{۴}=۲\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

با دوران به اندازه‌ی $۲\pi$، نقطه‌ی $A$ به موقعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، پس کافیست نقطه‌ی $A$ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}=\pi+\frac{\pi}{۴}$ دوران دهیم تا نقطه‌ی $A'$ به دست آید.

مطابق شکل داریم:




$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ y_{A'}=\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow x_{A'}+y_{A'}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$$

---

**۲۸** **گزینه ۲** می‌دانیم $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ است.

$$f(x)=-۲+a\cos(\pi+\pi bx) \rightarrow f(x)=-۲-a\cos(b\pi x)$$

داریم : $-۱ \le \cos(\pi bx) \le ۱ \xrightarrow{a>۰} -a \le a\cos(\pi bx) \le a$

$\xrightarrow{\text{منفی ضرب می‌کنیم}} -a \le -a\cos(\pi bx) \le a \to -۲-a \le -۲-a\cos(\pi bx) \le -۲+a$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-۲+a=۰$ است یعنی $a=۲$ می‌باشد پس $f(x)=-۲-۲\cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره‌ی تناوب تابع برابر $T=\frac{۴}{۳}$ است و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y=a\cos bx$ به‌صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{۴}{۳}=\frac{۲\pi}{|\pi b|} \to \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{|b|} \to |b|=\frac{۳}{۲} \to b=\pm\frac{۳}{۲}$$

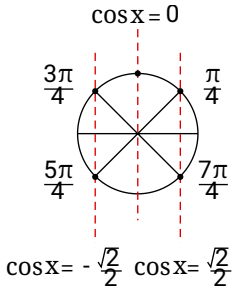
بنابراین $a\times b=\pm ۳$ است.

---

**۲۹** **گزینه ۳**

$$۲\cos^۳x=\cos x \to ۲\cos^۳x-\cos x=۰ \to \cos x(۲\cos^۲x-۱)=۰$$

$$\to \begin{cases} \cos x=۰ \\ ۲\cos^۲x-۱=۰ \to \cos^۲x=\frac{۱}{۲} \to \cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$




با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ دارد بنابراین مجموعه مقادیر $i$ را می‌توان به صورت $\{۱,۲,۳\}$ در نظر گرفت.

---

**۳۰** **گزینه ۳** اولاً چون مقادیر تابع از نقطه‌ی $x=۰$ در حال افزایش است، بنابراین $b>۰$ از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است. در نتیجه:

$$-۱ \le \sin b\pi x \le ۱ \Rightarrow a-۱ \le a+\sin b\pi x \le a+۱ \Rightarrow a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$$

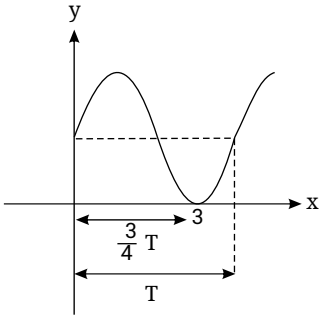
از طرفی با توجه به شکل $\frac{۳}{۴}T=۳$ و در نتیجه $T=۴$ است.

دوره‌ی تناوب $y=\sin bx$ به صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{۱}{۲}$$

پس $a+b=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است.

به شکل دقت کنید:




---

**۳۱** **گزینه ۳**

می‌دانیم: $\boxed{\cot a-\tan a=۲\cot ۲a \ , \ \sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^۲a}}$

$$\sin ۲x=\frac{۴}{۵} \to \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}=\frac{۴}{۵} \to ۴+۴\tan^۲x=۱۰\tan x$$

$$\to ۴\tan^۲x-۱۰\tan x+۴=۰ \to ۲\tan^۲x-۵\tan x+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۱۶=۹} \tan x=\frac{۵\pm ۳}{۴}=۲,\frac{۱}{۲}$$

پس: $\begin{cases}\cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=۲\cot x=۲(\frac{۱}{\tan x})\xrightarrow{\tan x=۲}۱\\ \cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=۲\cot x=۲(\frac{۱}{\tan x})\xrightarrow{\tan x=\frac{۱}{۲}}۴\end{cases}$

---

۳۲ **گزینه ۲** می‌دانیم $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است. برای حل، عبارت داده شده را در $\sin\frac{\pi}{۵}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵}\cos\frac{۴\pi}{۵}}{\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۵}\cos\frac{۲\pi}{۵}\cos\frac{۴\pi}{۵}}{\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin\frac{۴\pi}{۵}\cos\frac{۴\pi}{۵}}{\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin\frac{۸\pi}{۵}}{\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۸}\sin(۲\pi-\frac{۲\pi}{۵})}{\sin\frac{\pi}{۵}}$$

$$=\frac{-\frac{۱}{۸}\sin\frac{۲\pi}{۵}}{\sin\frac{\pi}{۵}}\xrightarrow{\sin ۲a=۲\sin a\cos a}\frac{-\frac{۱}{۸}(۲\sin\frac{\pi}{۵}\cos\frac{\pi}{۵})}{\sin\frac{\pi}{۵}}=-\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۵}$$

---

۳۳ **گزینه ۳** ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=a\sin(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)=a\cos(b\pi x)$$

از آنجاکه دورهٔ تناوب $y=a\cos bx+c$ برابر است با $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ و با توجه به این‌که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:

$$۴T=۵٫۵-(-۲٫۵)=۸\Rightarrow T=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۲\Rightarrow|b|=۱\Rightarrow b=\pm۱$$

و از طرفی نقطهٔ $(۰,۲)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند، یعنی:

$$۲=a\cos(۰)\Rightarrow a=۲$$

$\Rightarrow a\times b=۲\times(\pm۱)=\pm۲$ که عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

---

۳۴ **گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a=\frac{۱-\tan^۲a}{۱+\tan^۲a}\ ,\ \frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲a}=\tan ۲a}$

$$۱+\tan ۱۰\tan ۲۰=۱+\tan ۱۰\frac{۲\tan ۱۰}{۱-\tan^۲ ۱۰}=۱+\frac{۲\tan^۲ ۱۰}{۱-\tan^۲ ۱۰}$$

$$=\frac{۱-\tan^۲ ۱۰+۲\tan^۲ ۱۰}{۱-\tan^۲ ۱۰}=\frac{۱+\tan^۲ ۱۰}{۱-\tan^۲ ۱۰}=\frac{۱}{\frac{۱-\tan^۲ ۱۰}{۱+\tan^۲ ۱۰}}=\frac{۱}{\cos ۲۰}$$

---

۳۵ **گزینه ۲** می‌دانیم که $\sin ۲a=۲\sin a\cos a$ و $۱+\cos ۲a=۲\cos^۲a$ است.

$$\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}=۲\rightarrow\frac{۲\sin x\cos x}{۲\cos^۲x}=۲\rightarrow\tan x=۲$$

توجه کنید چون $۱+\cos ۲x\geq ۰$ است و جواب کسر برابر ۲ شده است بنابراین $\sin ۲x>۰$ است.

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}\rightarrow ۱+۴=\frac{۱}{\cos^۲x}\rightarrow\cos^۲x=\frac{۱}{۵}$$

می‌دانیم که $\cos ۲a=۲\cos^۲a-۱$ است.

$$\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱=۲(\frac{۱}{۵})-۱=-\frac{۳}{۵}$$

از طرفی: $\sin^۲ ۲x=۱-\cos^۲ ۲x=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\rightarrow\sin ۲x=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\sin ۲x>۰}\sin ۲x=\frac{۴}{۵}=۰٫۸$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۶ | ۲ | ۱۱ | ۱ | ۱۶ | ۱ | ۲۱ | ۲ | ۲۶ | ۴ | ۳۱ | ۳ |
| ۲ | ۱ | ۷ | ۴ | ۱۲ | ۲ | ۱۷ | ۴ | ۲۲ | ۴ | ۲۷ | ۱ | ۳۲ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۸ | ۳ | ۱۳ | ۴ | ۱۸ | ۲ | ۲۳ | ۴ | ۲۸ | ۲ | ۳۳ | ۳ |
| ۴ | ۴ | ۹ | ۳ | ۱۴ | ۳ | ۱۹ | ۳ | ۲۴ | ۴ | ۲۹ | ۳ | ۳۴ | ۳ |
| ۵ | ۳ | ۱۰ | ۴ | ۱۵ | ۲ | ۲۰ | ۱ | ۲۵ | ۳ | ۳۰ | ۳ | ۳۵ | ۲ |