به نام خدا

تابع وارون(ریاضی یازدهم و دوازدهم)

سلام کانونی های عزیز خدا قوت

بریم که داشته باشیم تابع وارون رو که پای ثابت تست های کنکوره و به طرز عجیبی در کنکور۹۹ تجربی ۳ سوال رو به خودش اختصاص داد

خب طبق معمول بریم ببینیم کتاب درسی محترم چی میگه

> با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۴,۶), (۵,۳), (۲,۱)\}$ برابر با $f^{-1}=\{(۶,۴), (۳,۵), (۱,۲)\}$ است.

بزارین توضیح بدم

فرض کنید شما تابع یک به یک $f(x)$ رو دارین، تابع $f(x)$ هرکاری رو انجام بده، وارون $f(x)$ یعنی$(f^{-1}(x))$ برعکسشو انجام میده!

یعنی چی؟

فرض کنید شما به تابع $f(x)$ عدد ۲ رو بدید، $f(2)$ میشه ۳!

تابع $f^{-1}(x)$ دقیقا برعکس عمل می کنه یعنی اگر بهش ۳ بدین،بهتون ۲ میده!

برای مثال مثلا تابع یک به یک $g(x)$ رو در نظر بگیرین، فرض کنید که : $g(3)=2, g(4)=7$

در این صورت در تابع $g^{-1}(x)$ میتونین بهم بگین که $g^{-1}(2), g^{-1}(7)$ چند میشن؟

آفرین درست حدس زدین☺ $g^{-1}(x)$ درست عکس تابع $g(x)$ عمل می کنه، یعنی $g(3)=2 \to g^{-1}(2)=3$ و $g(4)=7 \to g^{-1}(7)=4$

به بیان دیگه اگر نقطه $(2,-3)\in f$ باشه ← $(-3,2)\in f^{-1}$ هست

دقت کردین هر تابعی که مثال می زنم میگم تابع یک به یک .... ؟میدونین چرا؟چون شرط اینکه یک تابع وارون بشه اینه که حتما یک به یک باشه!

میدونین چرا؟

این تابع غیر یک به رو یک نگاه کنید $h(x)=\{(1,-3),(2,-3),(3,2)\}$

حالا بیاین وارونش کنیم(جای x, y هارو عوض کنیم) $h^{-1}(x)=\{(-3,1),(-3,2),(2,3)\}$

دیدین چی شد؟؟؟؟؟؟؟ تابع وارون جدیدمون اصلا تابع نیست!به خاطر اینکه به ازای $x=-3$ دو مقدار ۱ و ۳ رو داریم و شرط تابع بودن نقض میشه!

یه تمرین خیلی ساده از کتاب درسی حل کنین فعلا تا برسیم سراغ تست های خودمون ☺

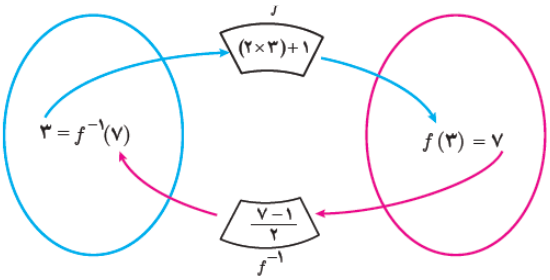
$s=\{(۴,۱), (۱,۴), (۳,۳), (۲,۵)\}$	$s^{-1}=$
$t=\{(۵,۱), (۱,۴), (۴,۳), (۲,۳)\}$	$t^{-1}=$
$u=\{(۲,۳), (۵,۲), (۴,۱), (۳,۴)\}$	$u^{-1}=$

حالا که یاد گرفتیم تابع وراون چیه بریم سراغ ادامه ماجرا!
کتاب محترم درسی در دو کتاب ریاضی یازدهم و ریاضی دوازدهم،تابع وارون رو بررسی می کنه،اولین تابعی که کتاب درسی می خواد وارون کردنشو به بچه ها یاد بده،تابع خطیه بریم ببینیم کتاب چی میگه

به‌طور کلی :
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y=f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=2x+1$$

$(۳,۷)\in f$ و $(۷,۳)\in f^{-1}$
به عبارت دیگر $f(۳)=۷$ و $f^{-1}(۷)=۳$



طبق معمول بریم این کلام کتاب درسی رو به فارسی سلیس ترجمه کنیم!!!!!
ببین کل کاری که شما باید برای وارون کردن انجام بدی اینه که در ابتدای کار جای x,y رو عوض کنی
برای مثال در تابع $y=4x+5$ شما در وهله اول جای x,y رو عوض کن یعنی باید به این برسی← $x=4y+5$
و بعدش به این اصل مهم پایبند باش که همیشه y می خواد تنها بشه!
الان چه چیزایی کنار y قرار داره؟به ضریب ۴ و عدد ۵+
y به پنج میگه برو اون ور دوس ندارم کنارت باشم:/ پس عبارتمون این شکلی میشه $x-5=4y$
به ضریب ۴ هم میگه تو هم برو من میخوام فقط و فقط خودم تنها بشم ،حالا چطور ضریب ۴ رو از بین ببریم؟اها کل عبارت رو تقسیم بر ۴ می کنیم پس به این می رسیم $\frac{x-5}{4}=\frac{4y}{4}\rightarrow y=\frac{x-5}{4}$
هر وقت به y تنها رسیدی تابع وارونت آمادس☺ تبریک می گم!
یه تست کنیم ببینیم درست وارون کردیم؟
در تابع اولی اگر به $x=1$ ر و بدم ۹ می گریم در تابع وارون اگر ۹ رو بدیم باید یک تحویل بگیریم،اعداد رو که تست می کنیم میبینم که کارمون رو درست انجام دادیم!خیلی خوبیم ما!
به عنوان تمرین بیاین این رو وارون کنین ☺ $3y=4x+12$

$$3y=4x+12\rightarrow 3x=4y+12\rightarrow 3x-12=4y\rightarrow y=\frac{3x-12}{4}$$

بریم چند تا مثال خوب حل کنیم
مثال ۱) اگر تابع $f(x)$ تابع خطی باشد $f(-1)=-3$ و $f(3)=5$ آنگاه $f^{-1}(15)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲

خب بریم برای حلش
بگین ببینم فرقش به سوالات قبلی چیه؟

آفرین دیگه اینجا مثل مثال های قبلی ضابطه $f(x)$ رو بهمون نداده و باید خودمون حساب کنیم

روش مرسوم برای محاسبه ضابطه $f(x)$ اینه که نقطه گذاری کنیم یعنی:

$$f(x)=ax+b \xrightarrow{(-1,-3)} -a+b=-3, \xrightarrow{(3,5)} 3a+b=5 \to a=2, b=-1 \to f(x)=2x-1$$

حالا بچه ها به دو دسته تقسیم میشن ،یه عده میرن ضابطه f^{-1} رو به تابع میدن و ۱۵ رو توش میزارن ببینن به چی میرسن

این دسته اینجوری عمل می کنن

$$y=2x-1 \to x=2y-1 \to 2y=x+1 \to y=\frac{x+1}{2} \xrightarrow{x=15} y=8$$

یه عده بچه های تیز تری هستن که من خیلی دوسم بهشون میاد❤(این ها در کنکور رستگار میشن بعدا میگم چرا)

میان چی میگن؟میگن آقا به جای اینکه وارون کنیم از مفهوم وارون استفاده می کنیم

میگن آقا ما می خوایم بدونیم $f^{-1}(15)$ چند میشه یعنی $\leftarrow$ $f^{-1}(15)=?$ خب این رو میشه اینجوری نوشت که $f(?)=15$

و میان معادله $15=2x-1$ رو حل می کنن و به $x=8$ می رسن پس $f(8)=15 \to f^{-1}(15)=8$

فهمیدین چی شد؟

بزارین یه مثالک(مثال کوچک دیگه حل کنم)

فرض کنید $f(x)=4x-12$ آنگاه $f^{-1}(12)$ چند میشه؟

به جای وارون کردن از این مفهوم استفاده می کنیم که $f^{-1}(12)=? \to f(?)=12 \to 4x-12=12 \to 4x=24 \to x=6$

$f(6)=12 \to f^{-1}(12)=6$

مثال۲) اگر $f(x)=\frac{3}{2}x+a$ و $(10,4)\in f^{-1}$ آنگاه $f^{-1}(16)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۴

خب اولش به این دقت کنید که $(10,4)\in f^{-1} \to (4,10)\in f \to 10=\frac{3}{2}\times 4+a \to a=4$

پس ضابطه ما به این صورته $f(x)=\frac{3}{2}x+4$ حالا یه عده میرن وارون می کنن و ۱۶ رو میزارن!

افراد رستگار هم از مفهوم استفاده می کنن می گن که: $f^{-1}(16)=? \to f(?)=16 \to 16=\frac{3}{2}x+4 \to x=8$

و در نهایت داریم که $f(8)=16 \to f^{-1}(16)=8$

یه دیرگاه بهت برم حال کنی ؟واقعا این سوال رو اینجوری که میگم حل کنی و بعدش برای دوستات حل کنی قطعا فکر می کنن یه رابطه خویشاوندی با مرحوم میرزانی خانی دارین

ببین چون ضریب ایکس در تابع اصلی $\frac{3}{2}$ پر واضحه که ضریب ایکس در تابع وارون $\frac{2}{3}$ هست یعنی شیب اون خط

تابع وارون $\frac{2}{3}$ عه! یعنی هر یک واحد بری جلو $\frac{2}{3}$ به مقدارت اضافه میشه، پس اگه ۶ تا بری جلو(۴تا) اضافه میشه

خب من نقطه $(10,4)\to(10+6,4+4)\to(16,8)$!

برای یاد گرفتن نکات خفن تر تابع وارون در توابع خطی،برین تستارو بزنین همه رو نباید اینجا بگم که

تابع خطی که با وارون متقاطع نیست چه ویژگی ای داره؟

تابع خطی ای که بر وارونش منطبقه چه ویژگی ای داره؟

• وارون کردن تابع درجه دوم

عه؟آقا درجه دوم؟شما گفتین که شرط وارون پذیر بودن توابع اینه که تابع یک به یک باشه خودتون گفتین که تابع درجه دوم یک به یک نیست جریان چیه؟

آفرین بر شما سوال خوبی رو مطرح کردی از اونجایی که ما خیلی علاقه داریم توابع رو وارون کنیم(چرا واقعا؟)با محدود کردن دامنه تابع رو یک به یک می کنیم!

همونطور که می دونین در تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$

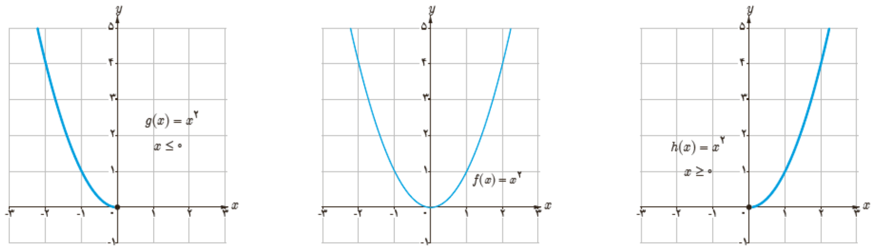
تابع از منفی بی نهایت تا راس و یا از راس تا مثبت بی نهایت یک به یکه $(-\infty,\frac{-b}{2a})$ **یا** $(\frac{-b}{2a},\infty)$

مشکلت حل شد؟پس توابع درجه دو به شرط محدود کردن دامنه وارون می کنیم!

باز بریم سراغ رفرنس☺

محدود کردن دامنهٔ تابع

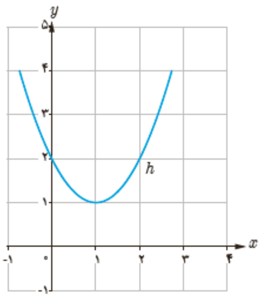
از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[0,+\infty)$ و یا $(-\infty,0]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.



پی نوشت:کتاب درسی جان نمی شد یه کم بهتر توضیح بدی خدایی؟تابعی غیر از $f(x)=x^2$ هم بررسی می کردی چی میشد؟

مجدد اسکرین دیگری از کتاب درسی ببینیم باهم

مثال : نمودار تابع $h(x)=x^2-2x+2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.



$$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

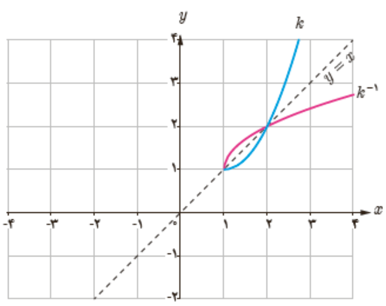
مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :

$$k(x)=(x-1)^2+1$$
$$y=(x-1)^2+1$$
$$(x-1)^2=y-1$$
$$x-1=\pm\sqrt{y-1}$$
$$x=\pm\sqrt{y-1}+1$$
$$k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت زیر است :



بریم ترجمه متن فارسی کتاب رو داشته باشیم قبلش از تون **خواهش میکنم تمنا** می کنم این اتحادهارو بلد باشید☺

من به این ها میگم فرم اورجینال☺

$$(x\pm1)^2=x^2\pm2x+1$$
$$(x\pm2)^2=x^2\pm4x+4$$
$$(x\pm3)^2=x^2\pm6x+9$$
$$(x\pm4)^2=x^2\pm8x+16$$
$$(x\pm5)^2=x^2\pm10x+25$$

یعنی چی میگم فرم اصلی یا اورجینال؟یعنی شما بلد باشید در فرم اورجینال کنار $x^2\pm6x$ باید عدد ۹+ بیاد

در کنار $x^2\pm4x$ در فرم اورجینال باید عدد۴+بیاد!

پی نوشت:رفقا این خیلییی مهمه توی حد و تابع وپیدا کردن برد و.....کلی کاربرد داره حتما بلد باشید!

خب حالا چرا این رو گفتم؟

چون ما در هنگام وارون کردن توابع درجه۲ باید اون هارو به فرم $y=(x+a)^2+b$ بنویسم و برای این کار نیاز داریم که فرم های اورجینال رو کامل بلد باشیم☺

آقا؟چرا باید به اون فرم بنویسیم؟مگه فرم $f(x)=ax^2+bx+c$ چشه؟

ریاضیوفیل ها بفونند☺

ببین یادته گفتم اول گام در وارون اینه که جای x,y رو عوض کنی؟

بیا این کار رو در فرمی که گفتی انجام بریم، $y=ax^2+bx+c\to x=ay^2+by+c$

قرم بعدی چی بود؟تنها کردن y خب کروم y رو تنها کنم؟۲تا y تازه هم درجه هم نیستن و اینجاست که مثل چی در گل گیر می کنید☺(پس برای وارون کردن باید سعی کنیم کلا یک دونه y داشته باشیم)

خب بریم با یک مثال ساده شروع کنیم

مثال۱: $f(x)=x^2+4x+5\to D_f=[-2,+\infty]$ ضابطه f^{-1} کدام است؟

خب اولین کار اینه که تابع رو به فرم $y=(x+a)^2+b$ بنویسیم،

و باید از اون اورجینال ها کمک بگیریم☺ بچه ها کنار x^2+4x باید چه عددی قرار بگیره؟آفرین عدد ۴+ الان چه عددی قرار گرفته؟

۵+چیکار کنیم پس؟ تابع رو اینطوری می نویسیم $f(x)=x^2+4x+4+1$

و ما می دونیم که $x^2+4x+4=(x+2)^2$ پس $y=(x+2)^2+1$ آخیییییییش☺ به فرم دلخواه رسیدیم☺

حالا چیکار کنیم؟آفرین جای x,y رو عوض کنیم پس داریم: $x=(y+2)^2+1$

حالا y به ۱ میره برو اون طرف من میخوام تنها باشم و به این می رسیم: $x-1=(y+2)^2$

y به ۲ میگه برو اون طرف توهم ۲ میگه هع!فک کردی من مثل اون یکم؟نه خیر داداش من توی حصاری با تو هستم که توان ۲ داره اگه میخوای برم اون طرف و آزاد بشم این توان ۲ من رو از بین ببر:)

(خب بچه های توی خونه به عمو پدرام بگین چطور حصار توان ۲ رو از بین ببریم که این y رو تنها کنیم؟(#مهر_کودک_کانون)

آفرین با رادیکال فرجه ۲! از طرفین رادیکال فرجه دو می گیریم

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{(y+2)^2}\to\sqrt{x-1}=|(y+2)|\xrightarrow{D_f=[-2,+\infty],R_f=[1,+\infty]}\sqrt{x-1}=(y+2)$$

حالا دیگه تونسیتم ۲ رو از حصار نجات بدیم

$y=\sqrt{x-1}-2$ آخیش تموم شد موفق شدیم☺

مثال ۲) $f(x)=x^2-6x+8 \to D_f=[-\infty,+1]$ ضابطه f^{-1} را بنویسید

خب بچه ها گام اول این بود که به فرم $y=(x+a)^2+b$ و برای این کار نیاز بود از اورجینال ها استفاده کنیم

بچه ها کنار x^2-6x چی میومد؟آفرین عدد ۹+ الان چی اومده ۸ چیکار کنیم؟ اینجوری باید بنویسیم $f(x)=x^2-6x+9-1$

و ما میدونیم که $x^2-6x+9=(x-3)^2$ پس تابع رو اینجوری می نویسیم $y=(x-3)^2-1$

و در ادامه ماجرا داریم که : $y=(x-3)^2-1 \to x=(y-3)^2-1 \to x+1=(y-3)^2 \to \sqrt{x+1}=\sqrt{(y-3)^2}$

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{(y-3)^2} \to \sqrt{x+1}=|(y-3)| \xrightarrow{D_f=[-\infty,+1],R_f=[3,+\infty]} \sqrt{x+1}=y-3 \to y=\sqrt{x+1}+3$$

آقا اگه x^2 ضریبی غیر از یک داشت چی؟

درود بر تو دانش آموز سمج و اعصاب معلم فرد کن☺

ماهم اون فرم اورجینال رو در اون ضریب ضرب می کنیم ببینیم فرم اورجینالمون چی میشه☺

مثال ۳) اگر $f(x)=2x^2+4x+11 \to D_f=[0,+\infty]$ آنگاه ضابطه f^{-1} را بنویسید.

خب با یک نگاه میشه متوجه شد اگر ضریب x^2 یک باشه ضریب x باید ۲+ بشه

کجا این حالت رو داشتیم؟ $(x+1)^2=x^2+2x+1$ حالا که ضریب x^2 برابر ۲ شده اورجینالش هم در ۲ ضرب می کنیم

یعنی $2(x+1)^2=2x^2+4x+2$

پس فهمیدیم که عدد۲ باید کنار تابع باشه ولی میبینیم که عدد ۱۱ قرار داره پس اینجوری می نویسیم: $f(x)=2x^2+4x+2+9$

حالا داریم که $2x^2+4x+2=2(x+1)^2$

پس عبارتمون این شکلی میشه $y=2(x+1)^2+9$

حالا دیگه وارون کردنش ساده میشه

$$x=2(y+1)^2+9 \to \frac{x-9}{2}=(y+1)^2 \to \sqrt{\frac{x-9}{2}}=|y+1| \xrightarrow{D_f=[0,+\infty],R_f=[11,+\infty]} y=\sqrt{\frac{x-9}{2}}-1$$

میتونستم از اول عبارت رو اینجوری بنویسیم و اینقدر دردسر نکشیم $\frac{y}{2}=x^2+2x+5.5$ 😐

آقا؟اگه فرم اورجینال تابع رو بلد نبودیم چی؟

چشم دانش آموز ریز بین اونم میگم دیگه ببینم چیزی میمونه؟

مثال ۴) اگر $f(x)=x^2+3x+3 \to D_f=[-\infty,-1]$ باشد آنگاه ضابطه f^{-1} را بنویسید

خب خب کنار x^2+3x کی قرار میگیره؟تو اورجینال ها نبود که!ولی نگران نباش میدونی کی قرار میگیره؟نصف ضریب ایکس

به توان دو یعنی $\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ پس یعنی اورجینالش اینه $y=x^2+3x+\frac{9}{4}$ حالا بسته شده این عبارت چی میشه؟میشه ایکس

بعلاوه نصف ضریب ایکس به توان ۲ یعنی $(x+\frac{3}{2})^2$ پس در نهایت داریم که $x^2+3x+\frac{9}{4}=(x+\frac{3}{2})^2$

حالا به مثال های زیر دقت کن

$$x^2+5x+\frac{25}{4}=(x+\frac{5}{2})^2$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2$$

اینارو دیگه حفظ نکن فقط یاد بگیر چطورین

حالا بقه اش راحته دیگه: $y=x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}$ و داریم که $y=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$

وارون کنیم

$$x=(y+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4} \to \sqrt{(x-\frac{3}{4})}=\left|y+\frac{3}{2}\right| \xrightarrow{D_f=[-\infty,-1],R_f=[1,+\infty]} y=\sqrt{(x-\frac{3}{4})}-\frac{3}{2}$$

آقا یه سوال بپرسم؟

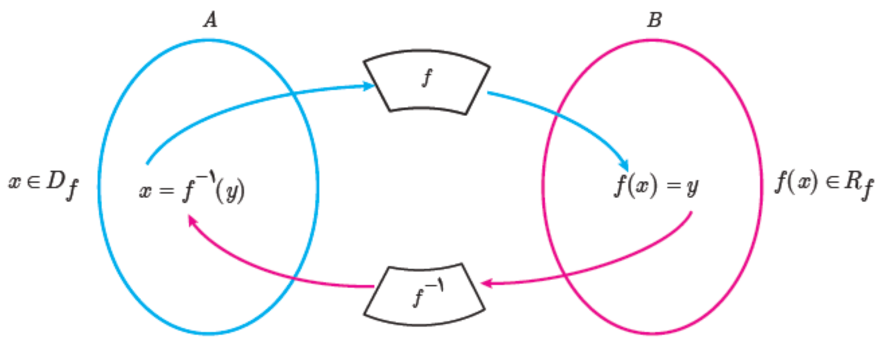
درد بگیری بپرس😐

جریان اون R_f چیه؟

آفرین سوال خوب و مهمی پرسیدی (ببخشید با خشنی باهات حرف زدم)

به این شکل کتاب درسی نگاه کن

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).



این یعنی چی؟

یعنی این که D_f همون $R_{f^{-1}}$ هست و R_f همون $D_{f^{-1}}$!

از این نکته کلی توی تست ها استفاده میشه برای رد گزینه!

ما تا الان وارون کردن انواع درجه ۲ رو نشونتون دادیم وقتشه توی حل سوالات از مفاهیم وارون هم استفاده کنیم

به این سوال دقت کنید

ضابطهٔ وارون تابع $y = x^2 - 6x \;; x > 4$ کدام است؟

۱) $3 + \sqrt{x+9} \;; x > -8$

۲) $3 - \sqrt{x+9} \;; x > 4$

۳) $3 - \sqrt{x+9} \;; x > -8$

۴) $3 + \sqrt{x+9} \;; x > 4$

خب بچه ها نگاه کنید $D_f = (4,\infty) \to R_f = (-8,\infty) \xrightarrow{R_f = D_{f^{-1}}} D_{f^{-1}} = (-8,\infty)$

آقا R_f رو چطور حساب کردی؟

برو توی درسنامه دامنه و برد توابع بخون!

ما فهمیدیم که $D_{f^{-1}} = (-8,\infty)$ پس گزینه ۲ و ۴ پر!

حالا بریم وارون کنیم؟دِ نَ دِ

میتونیم از مفهوم $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$ استفاده کنیم مثلا اینجا هر عددی که دلت خواست به f بده !

(سلطان نیای شرط دامنه رو نقض کنی مثلا صفر بدی سوال گفته باید ایکس ها بزرگتر از ۴ باشه)

من دلم میخواد ۱۰ بدم(شماره دومین بازیکن برتر دنیا) $f(10) = 40$ پس $f^{-1}(40) = 10$

به گزینه ۱ عدد ۴۰ رو بدیم ۱۰ می گیریم ✓

به گزینه۳ عدد 40 رو بدیم ۴ منفی می گیریم ✗

یه سوال دیگه هم حل کنیم ببینم یاد گرفتی یا نه

تابع $f(x) = x^۲ - ۶x + ۳$ را با دامنهٔ محدودشدهٔ $D_f = (-\infty, ۰)$ در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f^{-1}(x) = ۳ + \sqrt{x+۶}\ ; x < ۳$

۲) $f^{-1}(x) = ۳ + \sqrt{x+۶}\ ; x > ۳$

۳) $f^{-1}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}\ ; x < ۳$

۴) $f^{-1}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}\ ; x > ۳$

خب بچه ها نگاه کنید $D_f = (-\infty, 0) \to R_f = (3, \infty) \xrightarrow{R_f = D_{f^{-1}}} D_{f^{-1}} = (3, \infty)$

ما فهمیدیم که $D_{f^{-1}} = (3, \infty)$ پس گزینه ۱ و ۳ پر!

وارون نکنیا میتونی از مفهوم استفاده کنی

یه عدد بده به تابع f حواست به شرط دامنه باشه (من دوس دارم به تابع 2- بدم پس داریم $f(-2) = 19$:

طبق این مفهوم $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$ داریم $f(-2) = 19 \to f^{-1}(19) = -2$

به گزینه ۲ عدد ۱۹ رو بدیم به ۸ می رسیم ✗

به گزینه 4 عدد 19 رو بدیم به 2- می رسیم ✓

عه آقا چه باحال دیگه فقط با عددگذاری سوالات رو حل می کنم،و اون اورجینال اینارو فراموش میکنم به چه کارم میاد؟

چه سریع هوا برت داشت هر سوالی رو که نمیشه با عددگذاری حل کرد و شما اول و آخر باید وارون کردن رو بلد باشین به این سوال دقت کن)با عددگذاری حل کنی زمان حلت به ∞ میل میکنه!

برای یافتن ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^۲ + ۳x - ۱$، دامنهٔ آن را بهصورت $[a, +\infty)$ محدود کرده‌ایم و به $f^{-1}(x) = \sqrt{x+b} + c$ رسیده‌ایم. حداقل مقدار $۲a + b + c$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۴}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۲۲}{۴}$

۴) $-\frac{۲۲}{۴}$

راستی یه راه حل دیگه برای وارون کردن تابع درجه دو هست که از مفهوم رسم و انتقال استفاده میشه خیلی توی نوشتن آموزش سخته واقعا ولی بدونین خیلی از راه هایی که گفتم ساده تره خیلی خیلی ساده تر حتی از عددگذاری هم سریع تره ان شا الله در یک ویدیو آموزشی آموزشش میدم

- **وارون کردن توابع درجه3**

رفقا چون کار با توابع درجه 3 خیلی کار در حیطه کتاب درسی ریاضی تجربی نیست شک نکنید در توابع درجه 3 در 99.99 درصد موارد شما با اورجینال توابع درجه 3 سر و کار دارینو خیلی ساده میشه وارون کردنش

اورجینال هاشو مرور کنیم(قبلا اینارو باید توی توابع صعودی و نزولی درس یک فصل یک ریاضی دهم یاد گرفته باشید)

$$(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$$

$$(x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$$

مثال ۱) ضابطه وارون تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ را بنویسید

باید تابع رو به فرم $y = (x+a)^3 + b$ بنویسیم

خب اول اورجینال بنویسیم $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3$

پس داریم $f(x) = (x+1)^3 + 3$ حالا دیگه وارون کردنش سادس $y = (x+1)^3 + 3 \to x = (y+1)^3 + 3 \to x - 3 = (y+1)^3$

آقا از حصار توان 3 چطور نجات بریم 1 رو؟

با رادیکال فرجه 3 فرزندم پس داریم $\sqrt[3]{x-3} = y + 1 \to y = \sqrt[3]{x-3} - 1$:

خب این مثال رو خودت حل کن ببینم چه قدر یاد گرفتی

مثال ۲) ضابطه وارون تابع $f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ را بنویسید

آقا چرا مثل توابع درجه 2 محدودیت دامنه نذاشتی؟

ببین عزیزم تابع درجه 3کلا یک به یکه ونیازی به محدودیت دامنه نداره

آقا اگه فرم اورجینال نبود چی؟

ببین شک نکن فرم اورجینال نباشه حتما و 100 درصد با عدد گذاری حل میشه

مثال ۳) طول نقطه برخورد وارون تابع $f(x)=x^3+x-27$ با محور عرض ها کدام است؟

$$f^{-1}(?)=0 \to f(0)=? \to f(0)=-27 \to f^{-1}(-27)=0$$

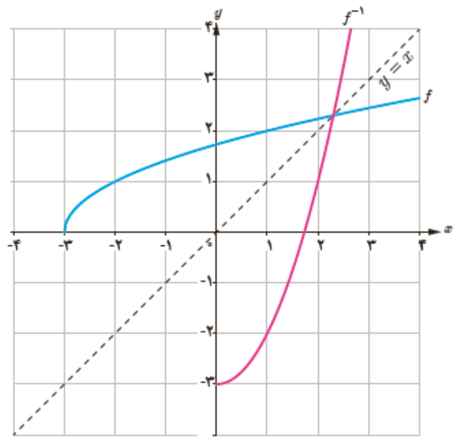
راستی اینم بگم که کتاب درسی میگه که این دو تابع $x^3, \sqrt[3]{x}$ وارون هم دیگه هستن و در 3 نقطه هم دیگه رو قطع می کنن(۰ و ۱ و ۱-)

• وارون کردن توابع رادیکالی

اول میریم سراغ کتاب درسی

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ f^{-1} را نیز به‌دست آورید.

تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.



$$\begin{cases} D_f=[-3,+\infty) \\ R_f=[0,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-1}}=[0,+\infty) \\ R_{f^{-1}}=[-3,+\infty) \end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+3}$$
$$y^2=x+3$$
$$x=y^2-3$$
$$f^{-1}(y)=y^2-3$$
$$f^{-1}(x)=x^2-3$$

مثال۱) اگر $f(x)=\sqrt{x-4}+8$ باشد ، ضابطه f^{-1} را بنویسید

خب اول باید x, y رو عوض کنیم بعدش شروع کنیم به تنها کردن y پس داریم : $y=\sqrt{x-4}+8 \to x=\sqrt{y-4}+8$

حالا 8 رو می فرستم اون طرف $x-8=\sqrt{y-4}$

ای بابا 4!در حصار رادیکاله!همینجوری نمیره اون طرف پس باید از حصار رادیکال نجاتش بریم، چطور رادیکال رو منهدم کنیم؟طرفین رو به توان 2می رسونیم $(x-8)^2=\left(\sqrt{y-4}\right)^2 \to (x-8)^2=y-4$

آخیش دیگه تموم شد $y=(x-8)^2+4$

مثال۲) اگر $f(x)=\sqrt[3]{x+2}+1$ باشد آنگاه ضابطه f^{-1} را بنویسید

خب طبق معمول جای x, yرو عوض می کنیم $y=\sqrt[3]{x+2}+1 \to x=\sqrt[3]{y-2}+1 \to x-1=\sqrt[3]{y-2}$

حصار فرجه 3 رو چطور بکشنیم؟درود بر شما با توان 3 رسوندن پس داریم $(x-1)^3=y-2 \to y=(x-1)^3+2$

آقا توی این تیپ عدد گذاری نداریم؟

چطور نداریم عزیزم سوال زیر رو ببین

ضابطهٔ معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$، به کدام صورت است؟

۱) $y = x^2 - 4x + 5\ ;\ x \leq 2$

۲) $y = -x^2 - 4x + 5\ ;\ x \leq 2$

۳) $y = x^2 - 4x + 5\ ;\ x \geq 1$

۴) $y = -x^2 + 4x - 5\ ;\ x \geq 1$

خب بچه ها ما می دونیم)طبق درسنامه دامنه و برد توابع(

$$D_f = [1, +\infty] \to R_f = [-\infty, 2] \xrightarrow{R_f = D_{f^{-1}}} D_{f^{-1}} = [-\infty, 2]$$

پس گزینه 4 و 3حذف میشن

و حالا بازهم میتونیم از عدد دهی و مفهوم $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$ استفاده کنیم

من به دلخواه عدد 10 رو به تابع می دهم)چرا 10 دادم؟به خاطر این که $\sqrt{10-1} = \sqrt{9}$ و من به یک رادیکال درست و حسابی رسیدم!

شما مختاری هر عددی بریم مثلا آگه مازوخیسم داری میتونی 4بری که به $\sqrt{3}$بررسیو بعدش کار با ر $2-\sqrt{3}$و ادامه بری!

خب $f(10) = -1 \to f^{-1}(-1) = 10$

به گزینه 2 عدد 1- رو بدیم به 8 می رسیم ✗

به گزینه 4عدد 1- رو بدیم به 10 می رسیم ✓

یه مثال سخت دبل رادیکال براتون میزاریم شما حل کنید به عنوان تمرین هم با عدد گذاری هم با ضابطه

ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x-2}}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1\ \ ; x \geq 1$

۲) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3\ \ ; x \geq 1$

۳) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1\ \ ; x \geq 2$

۴) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3\ \ ; x \geq 2$

ببینید دوستان این اسکرین زیر پاورقتی کتاب درسی ریاضی دوازدهم شماست

۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ دوم، مقدار $\sqrt{ax+b}$ ،a^x و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

یعنی من باید به آموزش وارون کردن همین توابع بسنده کنم!

ولی ما در کنکور سراسری تجربی 99 این سوالات رو دیدیم!

۱۳۵ــ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۳۶ــ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۳۹ــ فرض کنید در دامنهٔ $[0, +\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$، کدام است؟

۱) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ ۲) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ ۳) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ ۴) $\log_2(2 + \sqrt{3})$

پس من مجبورم که وارون کردن توابع هموگرافیک و توابع نمایی و لگاریتمی ورو. رو یادتون بدم)

امان از اختلافات دفتر تالیف و طراحان کنکور)

(ولی یه لحظه دست نگه دارید)

هر 3 تا سوال بالا به عدد گذاری حل میشن پس نیازی به آموزش خیلی کامل این ها نیست!

)حتی طراح کنکور هم داره میگه آقا با عدد گذاری و مفهوم $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$سوال حل کنید(

ولی من چند تا تابع خاص رو بهتون آموزش میدم!

یادتونه گفتم بچه هایی که مفهوم رو کامل یاد گرفتن و در مواقع ضروری عدد گذاری میکنن و مفهومی کار میکنن رستگارند؟

- **وارون کردن توابع هموگرافیک**

درس نامه خاصی نداره فقط جای x, y رو عوض می کنیم وطرفین وسطین میکنیم در نهایت y هارو می بریم یه طرف و فاکتور گیری می کنیم!

مثال۱) ضابطه وارون تابع $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ را بنویسید.

اول جای x, y رو عوض می کنیم $: y=\dfrac{3x-1}{x-2} \rightarrow x=\dfrac{3y-1}{y-2}$

حالا طرفین وسطین می کنیم $: xy-2x=3y-1$

y هارو می بریم یک طرف: $xy-3y=2x-1$

حالا از یک y فاکتور می گیریم: $y(x-3)=2x-1$

و در نهایت y رو تنها می کنیم $: y=\dfrac{2x-1}{(x-3)}$

مثال۲) ضابطه وارون تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$ را بنویسید

اول جای x, y رو عوض می کنیم $: y=\dfrac{2x-1}{x-2} \rightarrow x=\dfrac{2y-1}{y-2}$

حالا طرفین وسطین می کنیم $: xy-2x=2y-1$

y هارو می بریم یک طرف $: xy-2y=2x-1$

حالا از یک y فاکتور می گیریم $: y(x-2)=2x-1$

و در نهایت y رو تنها می کنیم $: y=\dfrac{2x-1}{(x-2)}$

عععععععععععه؟آآقا؟ این وارونش که خودش شد

اره عزیزم میدونی چرا؟به صورت کلی در توابع هموگرافیک به فرم $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ بشه وارونش خودش میشه!

حواست به این شطینت طراح باشه $f(x)=\dfrac{2x-1}{3-2x}$ در اینجا $a+d$ صفر نیست !

حالا این سوال رو حل کن ببینم یاد گرفتی دانش آموز تیزهوش خودم

اگر تابع $f(x)=\dfrac{ax+1}{x-c}$ وارون خودش باشد در معادلهٔ درجهٔ دوم $2ax^2+bx+c=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -۱

- **وارون کردن توابع لگاریتمی**

مثال۱) ضابطه وارون تابع $f(x)=\log^{2x+1}-2$ را بنویسید

بازهم مطابق معمول جای x, y رو عوض می کنیم $y=\log^{2x+1}-2 \rightarrow x=\log^{2y+1}-2$

حالا سعی می کنیم که y رو تنها کنیم، $x=\log^{2y+1}-2 \rightarrow x+2=\log^{2y+1}$

آقا؟سفت شد! چطور y رو از حصار لگاریتم در بیاریم؟

ببین لگاریتم رو در توان پایه اش قرار بده! $a^{\log_a^b} \rightarrow b$ اینجوری میتونی از شرش خلاص شی

یعنی چطور؟

به این مثال ها دقت کن
$$\log_5^{3x+1} \to 5^{\log_5^{3x+1}} = 3x+1$$
$$\log_3^{2x-2} \to 3^{\log_3^{2x-2}} = 2x-2$$

پس داریم $10^{x+2} = 10^{\log^{2y+1}} \xrightarrow{a^{\log_a^b}=b} 10^{x+2} = 2y+1$

و در نهایت $10^{x+2} = 2y+1 \to y = \dfrac{10^{x+2}-1}{2}$

مثال ۲)ضابطه وارون تابع $f(x) = \log_6^{2-x}+3$ را بنویسد

بازهم مطابق معمول جای x,y رو عوض می کنیم $y = \log_6^{2-x}+3 \to x = \log_6^{2-y}+3$

حالا سعی می کنیم که y رو تنها کنیم $x = \log_6^{2-y}+3 \to x-3 = \log_6^{2-y}$

نوبت شکستن حصار لگاریتم رسیده $6^{x-3} = 6^{\log_6^{2-y}}$

ودر نهایت داریم: $2-y = 6^{x-3} \to y = 2-6^{x-3}$

- **وارون کردن توابع نمایی**

مثال۱)ضابطه وارون تابع $f(x) = 2^x-3$ را بدست بیاورید

بازهم مطابق معمول جای x,y رو عوض می کنیم $y = 2^x-3 \to x = 2^y-3$

حالا باید y رو تنها کنیم $x+3 = 2^y$

آقا مجدد سخت شد!چطور از حصار نمای عدد 2بیارمش بیرون؟

از طرفین لگاریتم در پایه اون عد در پایه (y)چرا؟($\log_a^{a^b} = b \log_a^a = b$)

به طور مثال
$$3^{x-2} \to \log_3^{3^{x-2}} \to x-2$$
$$5^{4-3x} \to \log_5^{5^{4-3x}} \to 4-3x$$

پس داریم $\log_2^{x+3} = \log_2^{2^y}$

و در نهایت $y = \log_2^{x+3}$

تاکید می کنم 99.99 درصد این ها با عدد گذاری حل میشه و نیاز به این کار ها نیست)

خب بچه ها ما هر کاری کنیم باز هم وارون یه سری توابع رو نمیتونیم حساب کنیم،و باید از مفهوم استفاده کنیم

کدوم مفهوم؟ $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$

بریم چند تا مثال ببینیم

مثال۱) اگر $f(x) = x+\sqrt{x}$ باشد آنگاه $f^{-1}(6)$ کدام است؟

خب بچه ها وارون کردن این کار شدنیه ولی اصلا عاقلانه نیست!

می دونیم که $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$ پس $f^{-1}(6) = ? \to f(?) = 6$

$x+\sqrt{x} = 6 \to x = 4 \to f(4) = 6 \to f^{-1}(6) = 4$ (معادله رو حل نکنی عدد رو حدس بزنین)

مثال۲)اگر $f(x) = 3x+2\sqrt{x-1}$ باشد $f^{-1}(3)$ کدام است؟

می دونیم که $f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$ پس $f^{-1}(3) = ? \to f(?) = 3$

$3x+2\sqrt{x-1} = 3 \to x = 1 \to f(1) = 3 \to f^{-1}(3) = 1$ (معادله رو حل نکنی عدد رو حدس بزنین)

خب این وارون کردن ضابطه ای تموم شد بریم سراغ مباحث دیگه ای از وارون)

البته وارون کردن توابع دو ضابطه ای و قدر مطلقی به محدودیت دامنه و ترکیبش با صعودی-نزولی رو توی تست ها گذاشتیم

که خودتون زحمت یادگیری و تمرینشو بکشید

• نمودار توابع وارون

بریم سراغ یک تعریف دیگه از کتاب درسی

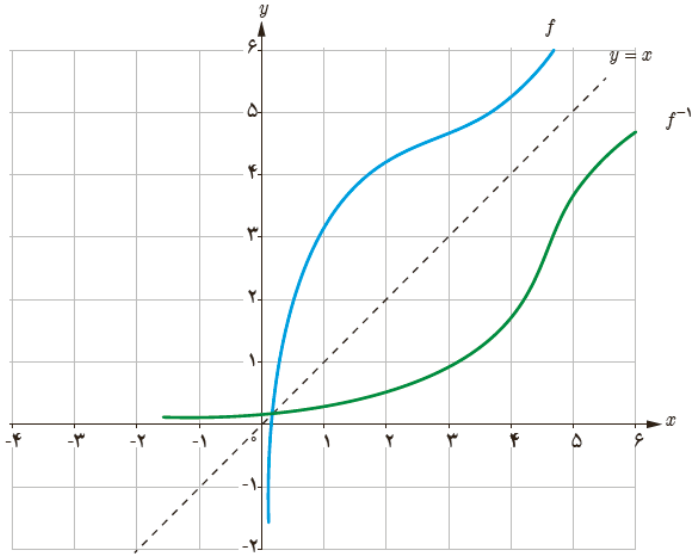
> برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به .... رسم کنیم.

به عبارتی به قرینه نمودار یک تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نمودار وارون اون تابع میگن

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a\,,\,b)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b\,,\,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس :

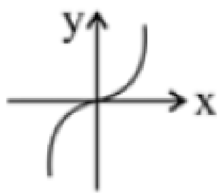
$$(a\,,\,b) \in f \Leftrightarrow (b\,,\,a) \in f^{-1}$$

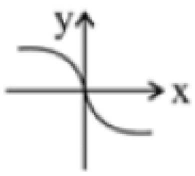
همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.

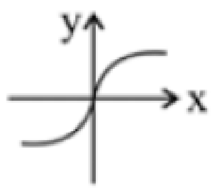


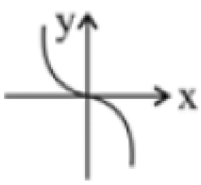
اگر یه نمودار بهتون دادن و وارونش رو خواستن خیلی ساده می تونین بکشین نمودار رو مثل سوال زیر

اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) 

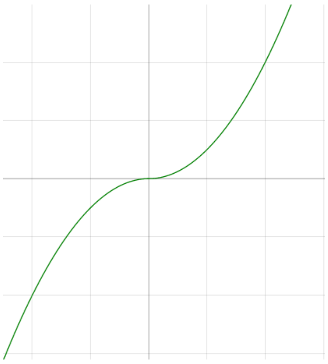
۲) 

۳) 

۴) 

می دونیم که نمودار $f(x)=x|x|$ به صورت رو به رو است،

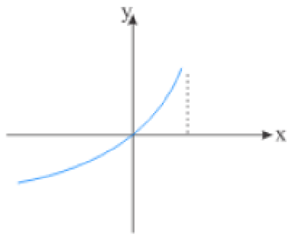
پس نمودار وارونش که قرینه این نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و سومه میشه گزینه3!



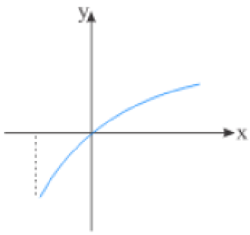
بعضی سوالات هم با یک عدد گذاری ساده حل میشه

نمودار وارون تابع با ضابطهٔ $y = ۱ - \sqrt{x+۱}$ کدام است؟

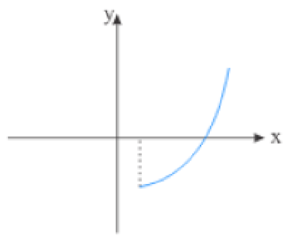
۱)



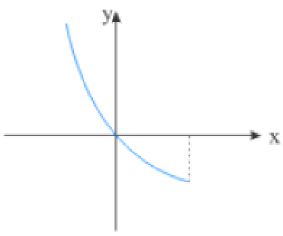
۲)



۳)



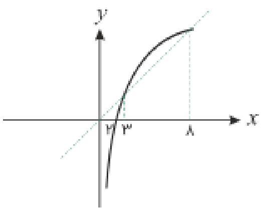
۴)



$f(99)=-9 \to f^{-1}(-9)=99$ جواب گزینه4

اینارو حل کن ببینم یاد گرفتی یا نه

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم ساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



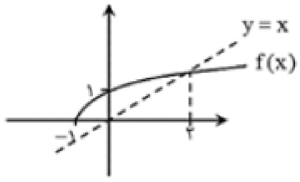
۱) $[۰,۲]$

۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$

۴) $[۳,۸]$

باتوجه‌به شکل زیر دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-۳}{f^{-1}(x)}}$ کدام است؟



۱) $[۱, ۳)$

۲) $(-\infty, ۱] \cup [۳, +\infty)$

۳) $(-\infty, ۳]$

۴) $[۰, ۱) \cup [۳, +\infty)$

• تقاطع یک تابع با وارونش

در حالت معمول باید بریم ضابطه f^{-1} رو پیدا کنیم و معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ رو حل کنیم

ولی در توابع اکیدا صعودی میشه به جای این کار معادله $f(x)=x$ رو حل کرد

آقا اگه تابع اکیدا نزولی بود چی؟هیچی عزیزم دیگه مجبوری بری وارون رو حساب کنی و تقاطع بدی

مثال۱) گر $f(x)=\sqrt{x+1}+5$ نمودار این تابع وارون خود را در کدام نقطه قطع می کند؟

بچه ها چون تابع ما اکیدا صعودیه، پس به جای حل معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ معادله ی $f(x)=x$ رو حل می کنیم

$$\sqrt{x+1}+5=x\rightarrow\sqrt{x+1}=x-5\rightarrow x+1=(x-5)^2\rightarrow x^2-11x+24=0\rightarrow x=8,x=3$$

• ترکیب یک تابع با وارونش

در کتاب ریاضی دوازدهم تعریف دیگری برای تابع وارون ارائه میشه،میگه که اگر دو تا تابع رو باهم ترکیب کنیم

و حاصل تابع همانی $f(x)=x$ بشه اون دوتا تابع وارون هم دیگه بودن

بریم باهم کتاب رو ببینیم

مثال :

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\rightarrow fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم :

$$(fof^{-1})(x)=x$$

همچنین :

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}(f(۱))=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}(f(۲))=f^{-1}(۳)=۲\rightarrow f^{-1}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}(f(۳))=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم :

$$(f^{-1}of)(x)=x$$

ببیند ترکیب f و f^{-1} همواره برابر با x میشه!

ولی دامنه های متفاوتی دارن

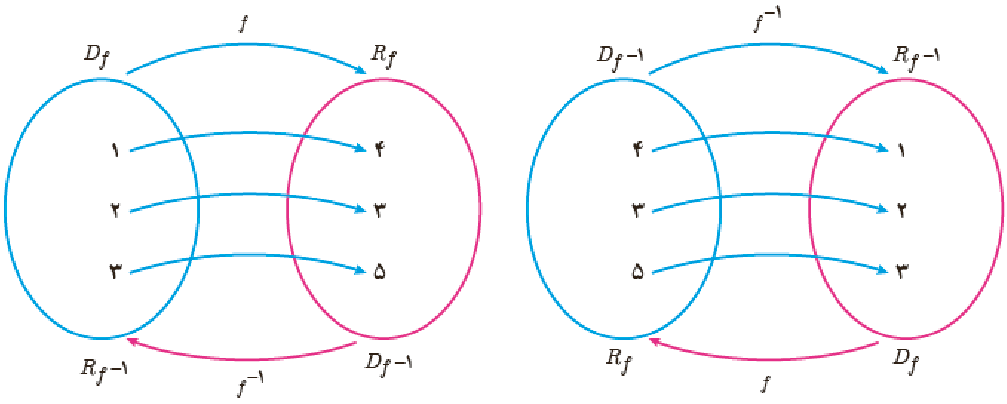
دامنه تابع همانی نهایی رو چطور بدست بیاریم؟

دامنه تابع نهایی دامنه تابعیه که ایکس اول وارد اون تابع میشه

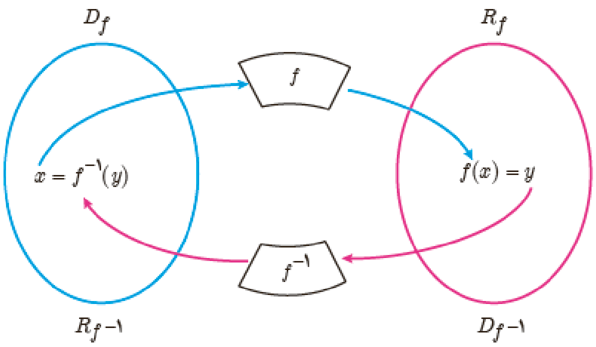
یعنی در $fof^{-1}(x)$ چون ایکس اول وارد f^{-1} میشه پس دامنه تابع نهایی همون $D_{f^{-1}}$ یا R_f میشه

و در $f^{-1}of(x)$ چون ایکس اول وارد f میشه پس دامنه تابع نهایی همون D_f و یا $R_{f^{-1}}$ میشه

به شکل زیر ازکتاب درسی خوب نگاه کنید که متوجه بشید داستان چیه)



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \ ; \ x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \ ; \ x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

نکته مهم شرط اینکه $fof^{-1}(x) = f^{-1}of(x)$ **اینه که** $D_f = R_f$

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

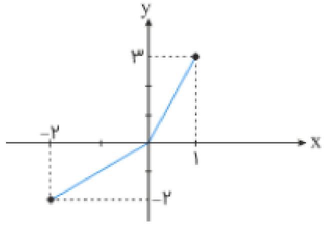
بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

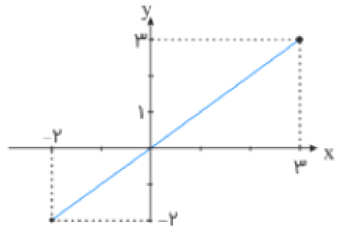
حواستون به این نکته باشه اگر $gof(x)=x$ شد پس حتما $g=f^{-1}$

مثال ۱)

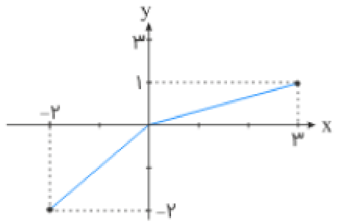
نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $y=(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟



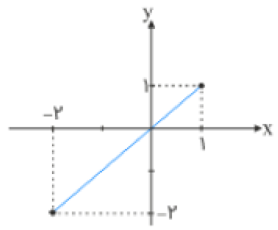
۱)



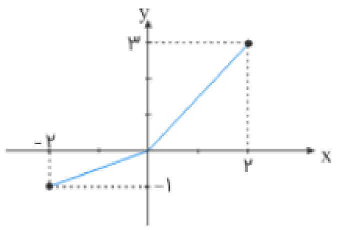
۲)



۳)



۴)



اولا اینکه ترکیب یک تابع با وارونش باید تابع همانی بشه رد 2 و4

و ثانیا چون ایکس اول وارد f شده پس دامنه تابع نهایی باید برابر باشه با D_f یا $R_{f^{-1}}$

پس جواب گزینه یک میشه(دقت کنید نمودار تابع f^{-1} به ما داده شده)

- **ترکیب شدن وارون و ترکیب تابع**

یه سری رابطه اینجا داریم که بلدشون باشیم به دردمون میخوره ولی ندونستنش فاجعه به بار نمیاره

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$
$$(f^{-1}og)^{-1}=g^{-1}of$$

$$(f^{-1}og)^{-1}(a)=b\rightarrow g^{-1}of(b)=a$$

ببین اون منفی که میاد روش روی تک تک تابع ها تاثیر خودشو میزاره و وارون میکنه ولی خروجی رو باید از راست به چپ بنویسی

اینجا هم ما کلی از این نکته مفهومی مون استفاده می کنیم $f(a)=b\rightarrow f^{-1}(b)=a$

(روابط بالا رو بیخیال و مفهوم رو بچسب ببین)

مثال ۱) اگر $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}+2$ باشد آنگاه $gof^{-1}(4)$ کدام است؟

خب توی ترکیب بهتون گفتم که $gof^{-1}(4)\rightarrow g(f^{-1}(4))$ حالا من $f^{-1}(4)$ رو می خوام

به جای این که برم تابع رو وارون کنم چیکار می کنم؟آفرین اینطوری حل میکنم

$$f^{-1}(4)=?\rightarrow f(?)=4\rightarrow\frac{3x+7}{x+1}=4\rightarrow x=3$$

و در نهایت داریم $f(3)=4\rightarrow f^{-1}(4)=3\rightarrow g(3)=4$

مثال ۲)

توابع $f=\{(0,1),(-1,2),(1,3),(3,4)\}$ و $g(x)=1+\frac{1}{2}\sqrt{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(a)=f(0)$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۷

۳) ۴   ۴) ۵

خب طبق سوال می دونیم که $f\ (0)=1$ و و $f^{-1}og\,(a)\to f^{-1}(g\,(a))$ طبق $f\ (a)=b\to f^{-1}(b)=a$ داریم :

$$f^{-1}(g\,(a))=1\to f\ (1)=g\,(a)$$

طبق ضابطه تابع f می دانیم که $f\ (1)=3$

پس $g\,(a)=3\to 1+\frac{1}{2}\sqrt{a-1}=3\to a=17$

بالاخره تموم شد☺

سعی کردم بیشتر مطالب رو بهتون بگم،بقیه نکات رو در تست ها پیدا می کنید

تست های خیلی خوبی براتون تدارک دیده شده ،حتما کار کنید

موفق باشید

تالیف: پدرام قلعه شاخانی

دانشجوی پزشکی دانشگاه علوم پزشکی کرمانشاه

@mp_castle