فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)
۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج
۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی مبتکران
۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان مبتکران
۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه
۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه
۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه

۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه
۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل

۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)
۱۱) طراح تست آزمون های مبتکران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان
۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸
Rahim.ghahreman

درسنامه جامع ریاضیات تجربی

ویژه کنکور

سه درسنامه در یک درسنامه (دهم، یازدهم و دوازدهم)

مؤلف: رحیم قهرمان

فصل تابع

درسنامه ی (۱) زوج مرتب

تعریف زوج مرتب: دو شیء که ترتیب آن ها مهم باشد، یعنی یکی از آن ها شیء اول و دیگری شیء دوم باشد، زوج مرتب می نامیم. زوج مرتب x و y را که در آن x شیء اول (یا مولفه ی اول) و y شیء دوم (یا مولفه ی دوم) است به (x,y) نشان می دهیم. x و y را اعضای زوج مرتب (x,y) می نامیم.

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) مساوی هستند هرگاه مولفه های اول آن ها باهم و مولفه های دوم آن ها نیز باهم مساوی باشند یعنی:

$$(a,b)=(c,d) \Rightarrow a=c , b=d$$

تست: زوج مرتب $(|a|,b^4)$ با کدام زوج مرتب زیر نمی تواند مساوی باشد؟

۱) $(b^4,|a|)$ ۲) $(-|a|,-b^4)$ ۳) $(3|a|+1,b^4+1)$ ۴) (a,b)

پاسخ: گزینه (۳) اگر $a=b=0$ باشد تمام گزینه های (۱)، (۲) و (۴) می توانند درست باشند یعنی همه ی آن ها به $(0,0)$ تبدیل می شوند ولی گزینه ی (۳) نادرست است؛ زیرا:

اگر $(|a|,b^4)=(3|a|+1,b^4+1) \Rightarrow \begin{cases}|a|=3|a|+1 \Rightarrow |a|=-\frac{1}{2} \ (\text{غ ق ق}) \\ b^4=b^4+1 \Rightarrow 0=1 \end{cases}$ غیر ممکن

درسنامه ی (۲) مفهوم تابع

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود.

دیدگاه تشخیص تابع:

۱) دیدگاه زوج مرتب: اگر دو زوج مرتب وجود داشته باشد، طوری که مولفه های اول

برابر باشند، شرط تابع بودن آن است که مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب نیز باید برابر باشند.

تست : اگر رابطه‌ی $f=\{(1,3a-4),(1,2a+1),(\frac{a}{5},b),(\frac{7}{a+2},c)\}$ تابع باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۷

پاسخ گزینه‌ی ۴) با توجه به وجود دو زوج مرتب $(1,3a-4)$ و $(1,2a+1)$ که مولفه‌های اول برابر دارند باید $2a+1$ و $3a-4$ نیز برابر باشند.

$$2a+1=3a-4 \Rightarrow a=5 \xrightarrow{\text{بازنویسی تابع}} f=\{(1,11),(1,11),(1,b),(1,c)\}$$

با توجه به برابر بودن ۴ مولفه‌های اول باید $b=c=11$ باشند و لذا $a+b+c=27$

تست : اگر رابطه‌ی $f=\{(2,\sin^4x),(1,3\cos^2 2x),(\cos 2x,k\sin 2x),(1,7\cos 2x-2),(\frac{1}{4},\sin^4x)\}$ به عنوان یک تابع مطرح شود، آنگاه $3k$ کدام است؟ $(x\neq\frac{k\pi}{2})$

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

پاسخ گزینه‌ی ۲) $\boxed{\text{یادآوری : } \sin 2x=2\sin x\cos x}$

$$\left.\begin{matrix}(1,3\cos^2 2x)\in f\\ (1,7\cos 2x-2)\in f\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن } f} 7\cos 2x-2=3\cos^2 2x$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 2x-7\cos 2x+2=0 \xrightarrow[\text{(معادله درجه دوم برحسب } \cos 2x)]{\sqrt{\Delta}=5} \cos 2x=\frac{7\pm5}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 2 \\ \cos 2x = \frac{1}{3} \end{cases}$$ (غ ق ق چرا؟)

(۹۵)

حال $\cos 2x=\frac{1}{3}$ را در رابطه‌ی f جایگذاری می‌کنیم: (*)

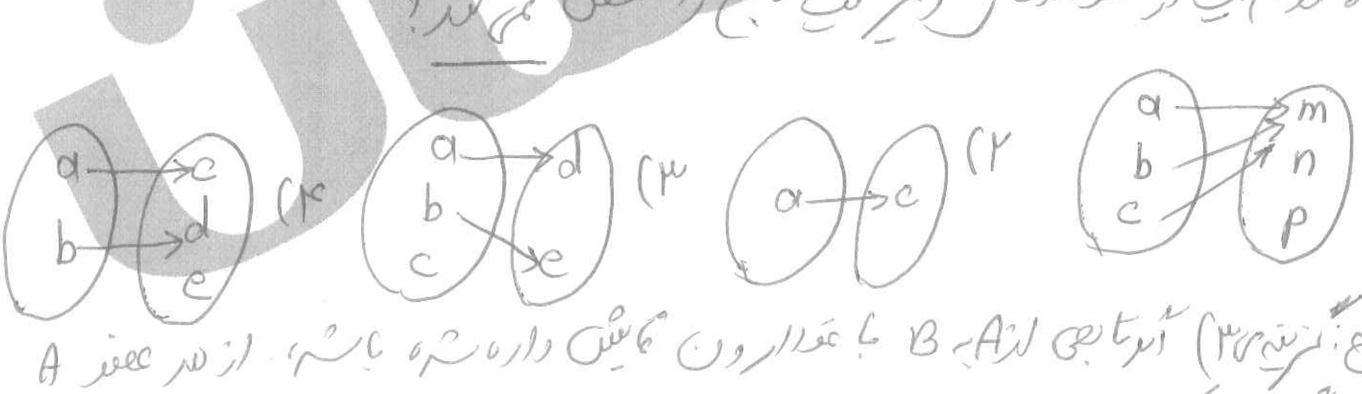
$$f=\left\{(2, \sin 4x), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, k\sin 2x\right), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \sin 4x\right)\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3}, k\sin 2x\right)\in f \\ &\left(\frac{1}{3}, \sin 4x\right)\in f \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن } f} k\sin 2x = \overbrace{\sin 4x}^{2\sin 2x\cos 2x} \Longrightarrow$$

$$k\sin 2x = 2\sin 2x\cos 2x \xrightarrow[\div(\sin 2x)]{\left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right)(*)} k = 2\times\frac{1}{3} \Rightarrow 3k=2$$

۲) دیدگاه نمودار پیکانی: رابطه‌ی f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تابع است هرگاه از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

تست: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص نمی‌کند؟



پاسخ: گزینه‌ی (۳) اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد، از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

۳) دیدگاه جدولی: هرگاه نمودار یک رابطه به صورت نمودار جدولی نوشته شده باشد، این نمودار نشان دهنده‌ی یک تابع است، هرگاه در اولین سطر (برای افقی) یا در اولین ستون (برای قائم) هیچ دو مؤلفه‌ی مساوی با مقادیر متمایز در سطر یا ستون

عدم وجود نداشته باشد.

تست: جدول

x	3	2	-2	3	9	5
y	a^2	1	a	$a+2$	4	3

مربوط به یک تابع است. a کدام است؟

۱) فقط ۲   ۲) فقط ۱-   ۳) ۲ و ۱-   ۴) هیچ کدام

پاسخ: گزینه ی ۲

$$\begin{cases}(3,a^2)\in \text{تابع} \\ (3,a+2)\in \text{تابع}\end{cases} \Rightarrow a^2=a+2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \xrightarrow{\text{یک جمله مشترک}} (a-2)(a+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1\end{cases}$$

ولی اگر $a=2$ را در جدول قرار دهیم، زوج مرتب $(2,1)$ و $(2,4)$ را داریم که مولفه های اولشان مساوی است ولی مولفه های دومشان برابر نیست، پس $a=2$ غیر قابل قبول است و فقط $a=-1$ قابل قبول است.

۴) دیدگاه ضابطه: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

یعنی با استفاده از ضابطه، y را برحسب x بدست آوریم، پس در صورتیکه به ازای هر x یک y حاصل شود، ضابطه یک تابع است.

تست: کدام یک از گزینه های زیر، y تابعی از x نیست!

۱) $|x+3|+|y-2|=0$ ۲) $x^2-4xy+4y^2=0$ ۳) $x^2+y^2-2x+2y=0$ ۴) $y=\pm\sqrt{-x^2+6x-9}$

پاسخ: گزینه ی ۳ بررسی گزینه ها:

گزینه ی (۱): با توجه به عبارت $|x+3|+|y-2|=0$، جمع دو عبارت نامنفی صفر شده است، بنابراین تک تک این عبارات باید هم زمان صفر شوند، داریم:

$$|x+3|+|y-2|=0 \Rightarrow x=-3,\ y=2$$

بنابراین نمودار رابطه‌ی فوق تنها نقطه‌ی (۲,-۳) است، لذا تابع می‌باشد.

گزینه‌ی (۲):
$$x^2-6xy+9y^2=0 \Rightarrow (x-3y)^2=0 \Rightarrow x=3y$$

در رابطه‌ی $x=3y$ چون عبارت آن به صورت $y=\frac{x}{3}$ بیان گردد یک تابع درجه یک است.

گزینه‌ی (۳):
$$x^2+y^2-2x+2y=0 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=2 \Rightarrow$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=2$$

که به ازای $x=0$ دو مقدار برای y حاصل می‌شود، لذا تابع نیست. زیرا:
$$x=0 \Rightarrow (0-1)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow (y+1)^2=1 \Rightarrow y=0 \text{ یا } y=-2$$

گزینه‌ی (۴):
$$y=\pm\sqrt{-x^2+4x-4}=\pm\sqrt{-(x-2)^2}$$

عبارت زیر رادیکال تنها به ازای $x=2$ مقدار دارد می‌شود که به ازای $x=2$، مقدار y نیز صفر می‌شود. بنابراین نمایش این رابطه یک نقطه‌ی (۲,۰) است، بنابراین تابع می‌باشد.

تست: کدام یک از روابط زیر تابع است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) $[y]=x$ ۲) $|y|\sin x=1$ ۳) $(-2)^x=2(-1)^y$ ۴) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2$

پاسخ گزینه‌ی (۴)

نکته: اگر a و b دو عدد هم علامت باشند، $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$، حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): با فرض $x=2$، برای y تمام اعداد بازه‌ی $[2,3)$ قابل قبول است، بنابراین تابع نیست.

گزینه‌ی (۲): با فرض $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:
$$|y|\sin x=1 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} |y|\sin\frac{\pi}{2}=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm1$$
تابع نیست.

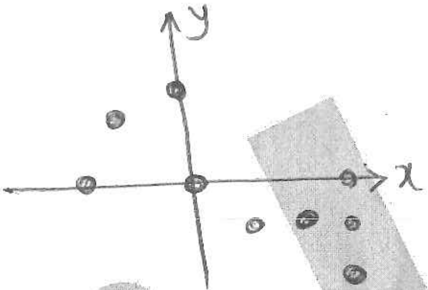
گزینه ی (۳) : با فرض $x=1$ به ازای y بی شمار عدد (تمام اعداد حقیقی) قابل قبول است . در نتیجه تابع نیست .

گزینه ی (۴)

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2 \xrightarrow[\text{ذکر شده}]{\text{طبق نکته ی}} y=x \Rightarrow$$ تابع است .

۵) دیدگاه نموداری تحلیلی: از نظر هندسی ، نمودار یک رابطه در صورتی تابع است که هر خط موازی محور yها (خود محور yها را هم در نظر بگیرید) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند . یعنی هر خط عمودی دلخواه یا نمودار را قطع نکند و یا فقط در یک نقطه قطع کند . (دقت کنید ، منظور از نقطه در این تعریف ، نقطه توپر می باشد نه توخالی)

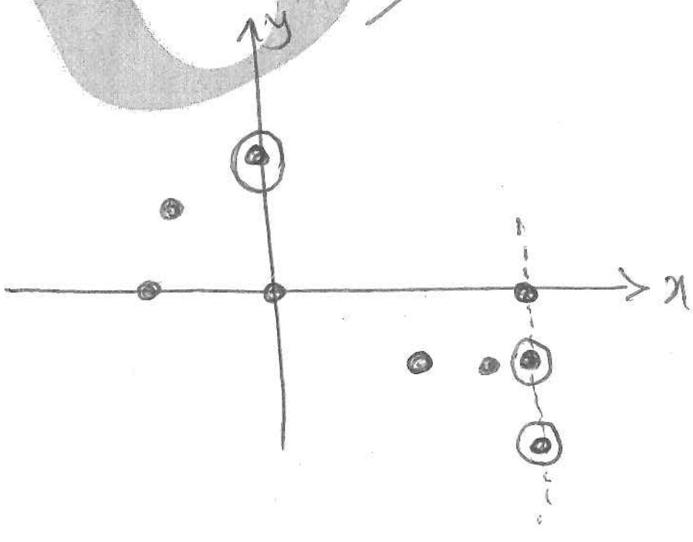
تست ۵: حداقل چند نقطه از نمودار مقابل حذف گردد تا نمودار مربوط به یک تابع باشد؟



۱) ۱ ‏ ‏ ‏ ۲) ۲

۳) ۳ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴

پاسخ گزینه ی (۳) باید هر خط موازی محور yها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند بنابراین حداقل ۳ نقطه باید از آن برداریم تا شرایط تابع بودن برقرار گردد.



مولف:رحیم قهرمان

۶) تابع از دیدگاه چندضابطه‌ای: یک رابطه‌ی دوضابطه‌ای به صورت $f(x)=\begin{cases} f_1(x) ; & x\in D_1 \\ f_2(x) ; & x\in D_2 \end{cases}$

وقتی تابع است که اولاً هر یک از f_1 و f_2 در دامنه‌های داده‌شده تابع باشند ثانیاً

برای هر $x\in D_1\cap D_2$ ، $f_1(x)=f_2(x)$ باشد.

تست: اگر $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+1 ; & x\geq 2 \\ x^2+3a ; & x\leq 2 \end{cases}$ ضابطه‌ی یک تابع باشد، $f(\sqrt{5})$ کدام

است.

۱) -5 ۲) $5\sqrt{5}-24$ ۳) 20 ۴) $29+5\sqrt{5}$

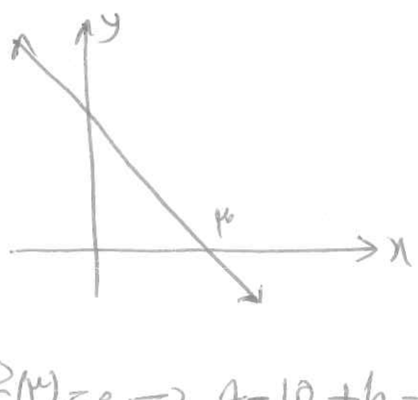
پاسخ: گزینه‌ی ۲) از شرط تابع بودن داریم:

$$2\in D_1\cap D_2 \Rightarrow f_1(2)=f_2(2) \Rightarrow 2^3+a(2)^2+1=2^2+3a \Rightarrow a=-5$$

بنابراین $f(x)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-5x^2+1 ; & x\geq 2 \\ x^2-15 ; & x\leq 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی اول}]{\sqrt{5}>2} f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^3-5(\sqrt{5})^2=5\sqrt{5}-24$$

تست: نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-5x+b}{a-x} ; & x\neq a \\ 1 ; & x=a \end{cases}$ شبیه شکل مقابل است:



مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$f(3)=0 \Rightarrow 9-15+b=0 \Rightarrow b=6,\ f(0)=\frac{b}{a}=\frac{6}{a} \Rightarrow$$

$(0, \frac{4}{a}) \in f$

چون $f(a)=1$ پس $(a,1) \in f$. لذا چون نمودار تابع f خط راستی است که از نقاط $A(0, \frac{4}{a})$ و $B(a,1)$ و $C(3,0)$ عبور می‌کند و شرط آنکه سه نقطهٔ A، B و C بر روی یک خط راست واقع باشند آن است که:

$$m_{AC} = m_{BC} \Rightarrow \frac{0-\frac{4}{a}}{3-0} = \frac{0-1}{3-a} \Rightarrow a=4 \Rightarrow a+b=8$$

تست: نقطهٔ $(1,2)$ و قرینهٔ آن نسبت به محور yها روی نمودار تابع

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-bx+1 & ; x>0 \\ a-bx+1 & ; x<0 \end{cases}$$

قرار دارند. $f(-\frac{5}{2})$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 5 ۴) 9

پاسخ: گزینهٔ ۳) قرینهٔ نقطهٔ $(1,2)$ نسبت به محور yها برابر با $(-1,2)$ است چون نقاط $(1,2)$ و $(-1,2)$ روی نمودار واقع‌اند، پس باید $f(-1)=2$ و $f(1)=2$ شود.

$$f(1)=2 \xrightarrow[\text{ضابطهٔ اول}]{1>0} 3-b+1=2$$

$$f(-1)=2 \xrightarrow[\text{ضابطهٔ دوم}]{-1<0} a+b-1=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+1 & ; x>0 \\ -2x & ; x<0 \end{cases}$$

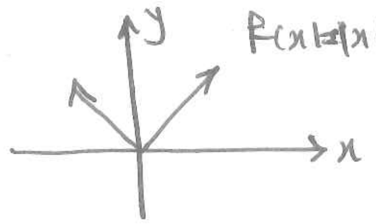
حال بدیهی است که در محاسبهٔ مقدار $f(-\frac{5}{2})$ چون $-\frac{5}{2}<0$ است از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

$$f(-\frac{5}{2}) = -2 \times (-\frac{5}{2}) = 5$$

درسنامه ی (۳)

تابع قدر مطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدر مطلق نامیده می شود و با $f(x)=|x|$ نشان داده می شود. یعنی $f:A\to B$ با ضابطه ی $f(x)=|x|$ یک تابع قدر مطلق روی A نامیده می شود.

نمودار تابع قدر مطلق: اگر دامنه ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x)=|x|$ به کمک دو خط $y=x$ و $y=-x$ قابل رسم است. چون به ازای هر x حقیقی، $|x|\geq 0$، لذا وقتی دامنه ی $f(x)=|x|$، $\mathbb{R}$ باشد آن گاه برد، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی یعنی $[0,+\infty)$ است.



$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ; x\geq 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$$

خواص قدر مطلق:

1) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$ 2) $|x|=|-x|$ 3) $|xy|=|x|\,|y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$ 5) $|x|=a \xrightarrow{a>0} x=\pm a$

6) $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$ 7) $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

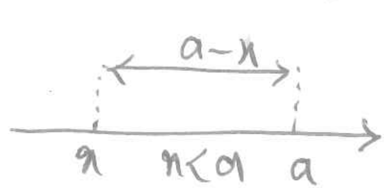
8) $|x|>a \xrightarrow{a>0} x>a$ یا $x<-a$ 9) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (نامساوی مثلث)

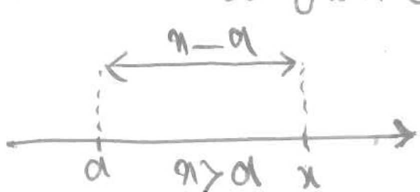
10) $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\geq 0$ 11) $|x|<|y| \Leftrightarrow x^2<y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)<0$

12) $a<x<b \xLeftrightarrow{a<b} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$

13) $x<a$ یا $x>b \xLeftrightarrow{a<b} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}$

نکته: فاصله ی نقطه ای به طول x روی محور اعداد حقیقی از نقطه ای به طول a برابر است با: $|x-a|$:





مولف:رحیم قهرمان

تست: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right| > -\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{1}{4})$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $[0,1)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) نامعادله‌ی $|f(x)|>a$ وقتی a منفی باشد، همواره و برای هر مقدار در دامنه‌ی f برقرار است. پس باید دامنه تابع $\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ را تعیین کنیم.

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-\sqrt{x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x\in[0,1) \end{cases}$$

تست: مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases}|x|<2\\ |2x-3|<x\end{cases}$ با مجموعه جواب‌های کدام نامعادله زیر برابر است؟

۱) $|3x-2|<1$ ۲) $|x-1|<1$ ۳) $|2x-3|<1$ ۴) $|x-2|<1$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$|x|<2 \xrightarrow{\text{خاصیت }(7)} -2<x<2 \quad (1)$$

$$|2x-3|<x \xrightarrow[\text{خاصیت }(7)]{x\ge 0} -x<2x-3<x \Rightarrow \begin{cases}2x-3<x \Rightarrow x<3\\ 2x-3>-x \Rightarrow x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<3 \quad (2)$$

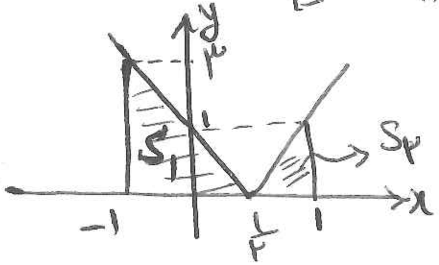
$$(1)\cap(2) \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow{\text{خاصیت }(12)} \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{2-1}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|2x-3|}{2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2>0} |2x-3|<1$$

تست: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳ (سراسری تجربی ۹۰)

پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای تعیین مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$، محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ یکی از روش‌ها رسم نمودار تابع است. پس داریم:



$$S=S_1+S_2=\frac{\frac{3}{2}\times 3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{5}{2}$$

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه (۴) تابع جزء صحیح

جزء صحیح x: برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح x بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر یا مساوی x است. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

ویژگی‌های جزء صحیح x:

۱) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x] \in \mathbb{Z}$

۲) $[x] \leq x < [x]+1$

۳) $0 \leq x-[x] < 1$

۴) $x-1 < [x] \leq x$

۵) $[x \pm k] = [x] \pm k \,;\, k \in \mathbb{Z}$

۶) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۷) $[-x] = \begin{cases} -[x] & ; x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۸) $[x]=k \xleftrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq x < k+1$

۹) $[2x] = [x] + [x+\frac{1}{2}]$

تست: اگر $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$، آنگاه حاصل $A = 2[3x+1] + [\frac{1}{2}x - 7]$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$A = 2[3x+1] + [\tfrac{1}{2}x-7] = 2([3x]+1) + [\tfrac{1}{2}x] - 7 \Rightarrow$$

$$A = 2[3x]+2+[\tfrac{1}{2}x]-7 = 2[3x]+[\tfrac{1}{2}x]-5 \quad (*)$$

حال با استفاده از $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$ حدود عبارت‌های داخل براکت‌ها را مشخص کنیم، داریم:

$$\tfrac{4}{3}<x<\tfrac{5}{3} \Rightarrow \tfrac{2}{3} < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{5}{6} \Rightarrow [\tfrac{1}{2}x]=0$$

$$\tfrac{4}{3}<x<\tfrac{5}{3} \Rightarrow 4<3x<5 \Rightarrow [3x]=4$$

$$\xrightarrow{(*)} A = 2\times 4 + 0 - 5 = 3$$

تست: اگر $[1-x]=3$ باشد، تعداد نقاط مشترک دو تابع $f(x)=|x+2|+|x+3|$ و $g(x)=2x^2+5x+1$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۱) از رابطه ی $[1-x]=3$ داریم:

$$[1-x]=3 \Rightarrow 1+[-x]=3 \Rightarrow [-x]=2 \Rightarrow 2\le -x<3 \xrightarrow{\times(-1)}$$

$$-3<x\le -2$$

حال با توجه به حدودی که برای x به دست آمده تابع f را بازنویسی می کنیم:

$$-3<x\le -2 \Rightarrow \begin{cases} x\le -2 \Rightarrow x+2\le 0 \Rightarrow |x+2|=-(x+2) \\ x>-3 \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow |x+3|=x+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=|\overbrace{x+2}^{(-)}|+|\overbrace{x+3}^{(+)}|=-(x+2)+x+3=-x-2+x+3=1$$

برای پیدا کردن نقاط مشترک دو تابع f و g باید جواب های معادله ی $f(x)=g(x)$ را در بازه ی $-3<x\le -2$ بیابیم.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2x^2+5x+1=1 \Rightarrow 2x^2+5x=0 \Rightarrow x=0, -\frac{5}{2}$$

فقط $x=-\frac{5}{2}$ در بازه ی $(-3,-2]$ قرار دارد و قابل قبول است.

تست: حاصل $[x+2]+[-x]$ به ازای $x=\sqrt[4]{2}+3$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 27 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ی ۱) می‌دانیم $\sqrt[4]{2}+3 \notin \mathbb{Z}$ داریم:

$$[x+2]+[-x] \xrightarrow{[x+k]\overset{k\in\mathbb{Z}}{=}[x]+k} [x]+2+[-x] \xrightarrow[{[x]+[-x]=-1}]{x\notin\mathbb{Z}} 2+(-1)=1$$

تست: مجموعه جواب معادله ی $[3x-1]-x=8-[x]$ کدام است؟

۱) $\{3,-3\}$ ۲) $\{-\frac{3}{2}\}$ ۳) $\{3\}$ ۴) $\{\frac{3}{2}\}$

پاسخ: گزینه ی ۳) در حل یک معادله جزء صحیح، از صحیح بودن یکی از طرفین معادله، صحیح بودن طرف دیگر نتیجه می‌شود:

$$[3x-1]-x=8-[x] \Rightarrow x=\overbrace{[3x-1]}^{\in\mathbb{Z}}+\overbrace{[x]}^{\in\mathbb{Z}}-\overbrace{8}^{\in\mathbb{Z}}$$

سمت راست معادله داده شده مقدار صحیح است، پس سمت چپ معادله نیز باید عددی صحیح باشد. پس x عددی صحیح است و می‌توانیم براکت‌ها را برداریم.

$$[3x-1]-x=8-[x] \Rightarrow 3x-1-x=8-x \Rightarrow x=3$$

تست: می‌دانیم $(1+\sqrt{2})(a+\sqrt{5})=2$، جزء صحیح عدد a کدام است؟ (سنجش ریاضی ۸۸)

۱) 1 ۲) صفر ۳) -2 ۴) -1

پاسخ: گزینه ی ۳)

$$(1+\sqrt{2})(a+\sqrt{5})=2 \Longrightarrow a+\sqrt{5}=\frac{2}{\underbrace{1+\sqrt{2}}_{\text{گویا کردن}}} \Rightarrow a+\sqrt{5}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow a+\sqrt{5}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-2} \Rightarrow a+\sqrt{5}=2(\sqrt{2}-1) \Rightarrow a=2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{5}\simeq 2.2]{\sqrt{2}\simeq 1.4} a\simeq 0.8-2.2=-1.4 \Rightarrow [a]=-2$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: جواب معادله $[x]-[2x]=1$ کدام است؟

۱) $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ ۲) $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ۳) $[-\frac{3}{2}, 2)$ ۴) $[-\frac{1}{2}, 2)$

پاسخ: گزینه ی ۲

$$[x]-[2x]=1 \xrightarrow{[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]} [x]-\left([x]+[x+\tfrac{1}{2}]\right)=1$$

$$[x]-[x]-[x+\tfrac{1}{2}]=1 \Rightarrow -[x+\tfrac{1}{2}]=1 \Rightarrow [x+\tfrac{1}{2}]=-1 \Rightarrow$$

$$-1 \le x+\tfrac{1}{2} < 0 \Rightarrow -\tfrac{3}{2} \le x < -\tfrac{1}{2}$$

تابع جزء صحیح: در تابع جزء صحیح هر عدد صحیح خود همان عدد صحیح را نسبت می دهند و به هر عدد غیر صحیح بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از آن عدد را نسبت می دهند. این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می شود.

تست: در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^3-3[x]$، مقدار $f\left(\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟

(ت. سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{51}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-3[\sqrt{3}]=3\sqrt{3}-3=3(\sqrt{3}-1) \Rightarrow$$

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) f(\sqrt{3})\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times 3\times(\sqrt{3}-1)\right)=f\left(\frac{3}{4}(3-1)\right)$$

$$=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left[\frac{3}{2}\right]=\frac{27}{8}-3=\frac{3}{8}$$

تست: اگر $f(x)=\left[\frac{31}{2[x]}\right]$ باشد، آنگاه حاصل $f(\sqrt{7})+f(2\sqrt{7})+\dots+f(7\sqrt{7})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینه ۲)

$$f(x)=\left[\frac{2^x}{2^{[x]}}\right]=\left[2^{x-[x]}\right] \;;\; 0\leq x-[x]<1 \xRightarrow{2>1}$$

$$2^0\leq 2^{x-[x]}<2^1 \Rightarrow \left[2^{x-[x]}\right]=1 \Rightarrow f(x)=1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{7})+f(2\sqrt{7})+\cdots+f(7\sqrt{7})=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{\text{۷تا}}=7$$

تست: اگر
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x(x+1)}{x^4[x]+1} & ; x\geq 2\\[2ex] \dfrac{x^2[x]+kx}{2x^4+1} & ; x<3\end{cases}$$
یک تابع باشد، k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گزینه ۳) باید در بازه اشتراک دامنه‌ها یعنی $2\leq x<3$ ضابطه‌های بالا و پایینی با هم برابر باشند.

$$2\leq x<3 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow \begin{cases}\text{ضابطه بالا}=\dfrac{2x^2+2x}{2x^4+1}\\[2ex] \text{ضابطه پایین}=\dfrac{2x^2+kx}{2x^4+1}\end{cases} \Rightarrow \frac{2x^2+2x}{2x^4+1}=\frac{2x^2+kx}{2x^4+1} \Rightarrow$$

$$2x^2+3x=2x^2+kx \Rightarrow k=3$$

تست: دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]+1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[-1,0)$ ۲) $\mathbb{R}-(-1,0)$ ۳) $\mathbb{R}-(-1,0]$ ۴) $\mathbb{R}-[0,1]$

پاسخ: گزینه ۱) ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

$$[x]+1=0 \Rightarrow [x]=-1\in\mathbb{Z} \Rightarrow -1\leq x<0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[-1,0)$$

رسم نمودار $y=[f(x)]$ به کمک نمودار $y=f(x)$

فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم $y=[f(x)]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

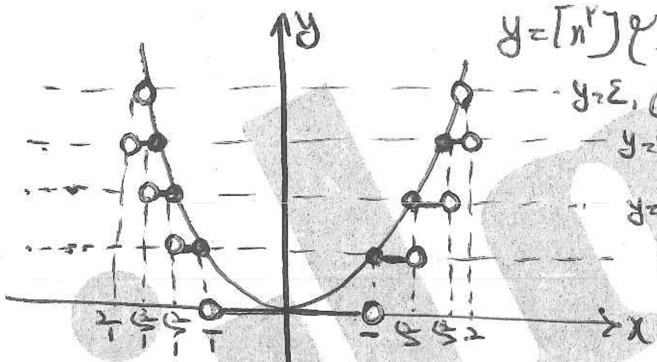
۱) خطوط افقی $y=2$ ، $y=1$ ، $y=0$ ، $y=-1$ ، $y=-2$ و ... را رسم کرده، جاهایی که نمودار تابع f برخورد دارند را تعیین می‌کنیم.

۲) هر قسمت از نمودار f را که بین دو خط $y=n$ و $y=n+1$ (دو خط متوالی) است بر خط $y=n$ (خط پایین‌تر) تصویر کنید.

تست: نمودار تابع $y=[x^2]$ روی بازه‌ی $(-2,2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

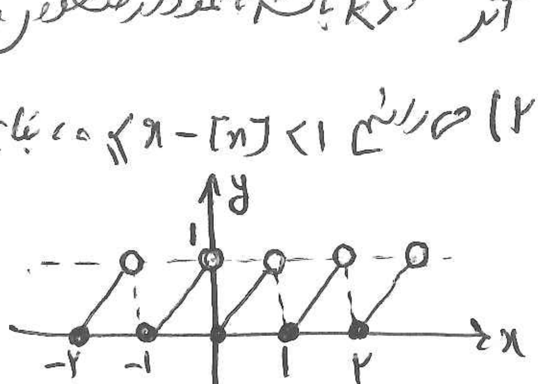
پاسخ: گزینه‌ی «۴» همان طور که مشاهده می‌کنیم، نمودار تابع $y=[x^2]$ در بازه‌ی $(-2,2)$، از ۷ پاره خط تشکیل شده است.



نکات

۱) نمودار تابع $y=[kx]$ ؛ $(k\neq 0)$ ، به صورت پله‌ای است، طول هر پله این نمودار $\frac{1}{|k|}$ است.
اگر $k>0$ باشد، نمودار صعودی و اگر $k<0$ باشد، نمودار نزولی خواهد بود.

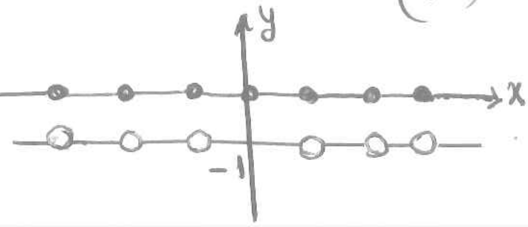
۲) می‌دانیم $0 \le x-[x] < 1$ ، بنابراین نمودار تابع $y=x-[x]$ به صورت



و همچنین با توجه به این نکته $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;x\in Z\\ -1 & ;x\notin Z\end{cases}$

مولف:رحیم قهرمان

نمودار تابع $y=[x]+[-x]$ به صورت



خواهد بود.

تست: در نمودار تابع $y=x-[x]$ و $x\in[-2,3)$ تعداد n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. زوج مرتب (n,L) کدام است؟

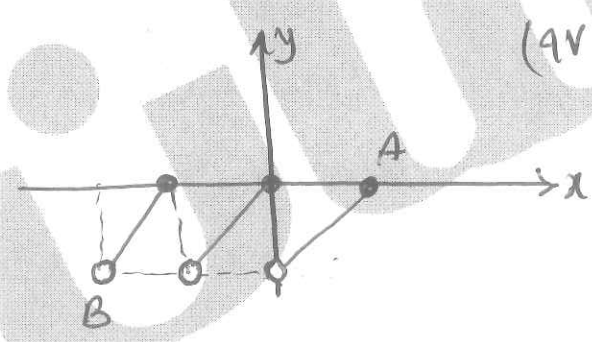
(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $(4,1)$ ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) $(5,1)$ ۴) $(5,\sqrt{2})$

پاسخ: گزینه ی (۴) نمودار تابع در بازه ی $[k,k+1)$ و $k\in\mathbb{Z}$ شامل یک پاره خط است که طبق رابطه ی فیثاغورس طول آن برابر $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ است. در بازه ی $[-2,3)$ بازه های $[-2,-1)$ و $[-1,0)$، $[0,1)$، $[1,2)$ و $[2,3)$ وجود دارد در نتیجه این تابع از ۵ پاره خط مساوی به طول $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. لذا گزینه ی (۴) درست است.

تست: بخشی از نمودار تابع $y=x+[-x]$ به صورت مقابل است. فاصله ی A از B چقدر است؟

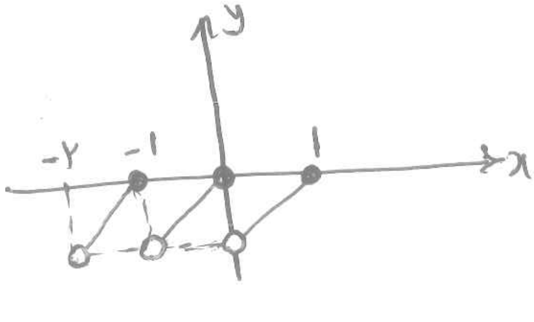
(سراسری تجربی ۹۷)



۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{10}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ی (۲) نمودار $x+[-x]$ به صورت یک واحد یک واحد به سمت چپ یا راست حرکت می کند.



$$AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

تست: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{[x]+[-x]}}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]-\{0\}$ ۲) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۳) $\mathbb{R}-\{\mathbb{Z}\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ ۴) $\{\mathbb{R}-\mathbb{Z}\}\cup(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه (۱) به دلیل وجود $[x]+[-x]$ در مخرج کسر، x نمی‌تواند عدد صحیح باشد. برای هر عدد غیر صحیح می‌دانیم $[x]+[-x]=-1$ است.

$$y=\sqrt{\frac{4x^2-1}{[x]+[-x]}} \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} \sqrt{-(4x^2-1)}=\sqrt{1-4x^2}$$

عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین داریم:

$$1-4x^2\geq 0 \Rightarrow 4x^2\leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \Rightarrow D_y=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]-\{0\}$$

تست: دامنه‌ی $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{[|x|]}}$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,1]$

پاسخ: گزینه (۲) چون فرجه رادیکال فرد است، آن را نادیده می‌گیریم. لذا کافی است دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را پیدا کنیم.

عبارت کسری: $\dfrac{1}{[|x|]} \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow \underbrace{0\leq|x|}_{\text{همواره برقرار}}<1 \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

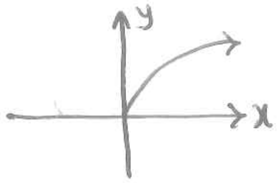
$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-(-1,1)$

مولف:رحیم قهرمان درسنامه‌ی (۵)

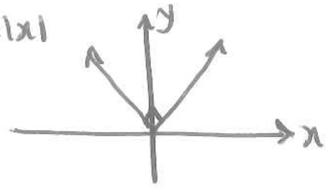
انتقال ، انعکاس و انقباض نمودار توابع

برای رسم نمودار توابع به کمک انتقال ، باید نمودارهای توابع زیر را به خاطر بسپاریم :

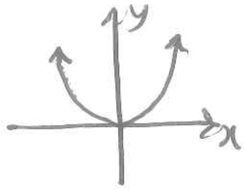
۱) $y=\sqrt{x}$



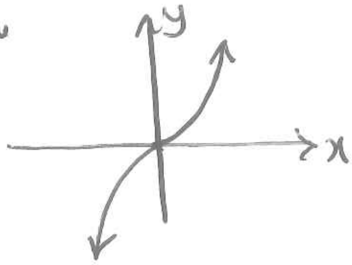
۲) $y=|x|$



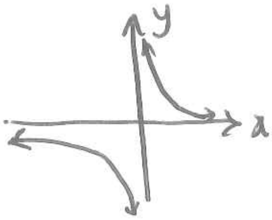
۳) $y=x^2$



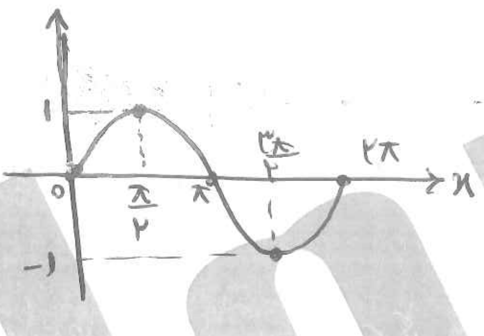
۴) $y=x^3$



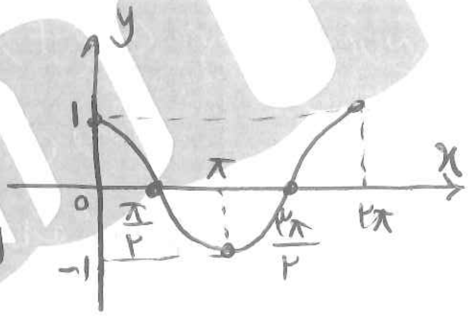
۵) $y=\frac{1}{x}$



۶) $y=\sin x$ $x\in[0,2\pi]$



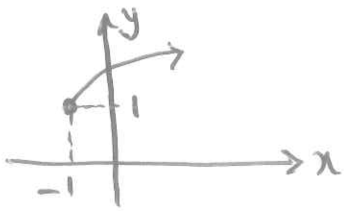
۷) $y=\cos x$ $x\in[0,2\pi]$



انتقال در راستای محور xها و yها

برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به سمت راست و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به سمت چپ منتقل می‌کنیم. همچنین برای رسم نمودار $f(x)+a$ اگر $a>0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به بالا و اگر $a<0$ باشد نمودار f را به اندازه‌ی a به پایین منتقل می‌کنیم.

تست: نمودار روبه‌رو بیانگر تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ می‌باشد. اگر $f(c)=3$ باشد مقدار abc کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۳

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ تمرین سوم ۴) نمودار داده شده مربوط به ضابطه ی $y=\sqrt{x+1}+1$ می باشد (چون نمودار $\sqrt{x}$ یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل شده است) بنابراین اگر بگیریم $a=1$ و $b=1$ که

$$f(x)=\sqrt{x+1}+1 \xrightarrow{f(c)=3} \sqrt{c+1}+1=3 \Rightarrow \sqrt{c+1}=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} c+1=4 \Rightarrow c=3$$

کشش و فشار عمودی

نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می آید: اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k جمع می شود که در این حالت می گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می شود سپس با ضریب $|k|$ در محور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

تست: با کدام تبدیلات بر روی تابع با ضابطه ی $g(x)=2\cos x$، تابع $f(x)=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$ رسم می شود؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور yها و سه واحد انتقال قائم به پایین

۲) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور xها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۳) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به راست و قرینه نسبت به محور yها و سه واحد انتقال قائم به بالا

۴) $\frac{\pi}{3}$ انتقال افقی به چپ و قرینه نسبت به محور xها و سه واحد انتقال قائم به بالا

پاسخ تمرین سوم ۲)

$$y=2\cos x \xrightarrow{\text{انتقال } \frac{\pi}{3} \text{ در جهت مثبت محور xها}} y=2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}$$

$$y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\text{سه واحد در جهت مثبت محور yها}} y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})+3$$

تست: اگر $f(x)=\sin x$ باشد، خروجی ماشین مقابل کدام است؟

$\sin x \rightarrow$ [بازتاب نسبت به محور yها] $\rightarrow$ [انبساط عمودی با ضریب ۳] $\rightarrow$ [$\frac{\pi}{4}$ واحد انتقال به بالا] $\rightarrow$ خروجی

۱) $y=\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ۲) $y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$ ۳) $y=-\sin 3x+\frac{\pi}{4}$ ۴) $y=3\sin x-\frac{\pi}{4}$

پاسخ گزینه ۲)

$y=\sin x \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{بازتاب نسبت به}} y=\sin(-x)=\sin x \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۳}} y=-3\sin x$

$\xrightarrow{\text{به اندازه } \frac{\pi}{4} \text{ واحد به بالا}} y=-3\sin x+\frac{\pi}{4}$

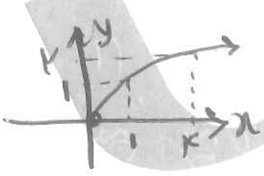
کشش و فشار افقی

نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار $y=f(x)$ بدست می‌آید: اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها بدست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

تست: نمودار تابع $y=1+\sqrt{6-2x}$ شبیه کدام است؟

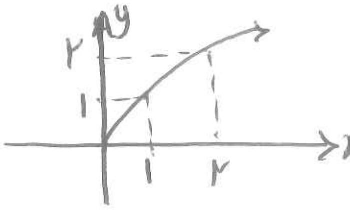
پاسخ گزینه ۳)

$y=1+\sqrt{6-2x}=1+\sqrt{-2x+6}=1+\sqrt{-2(x-3)}$



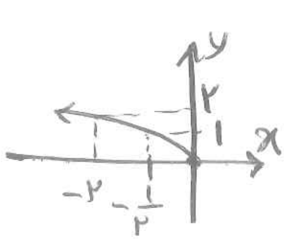
$y=\sqrt{x}$

$\xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{1}{2}x}$



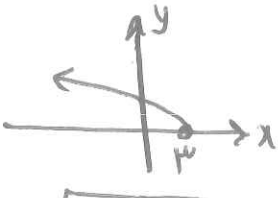
$y=\sqrt{2x}$

$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$



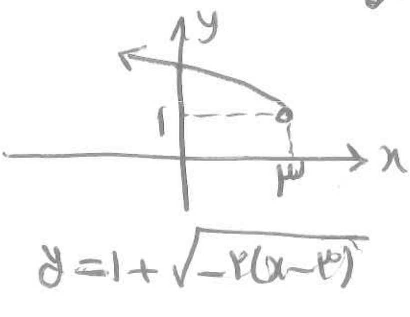
$y=\sqrt{-2x}$

$\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}$



$y=\sqrt{-2(x-3)}$

$\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}$

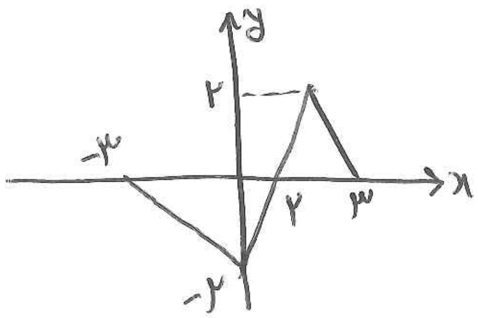


$y=1+\sqrt{-2(x-3)}$

تست: نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل است، دامنه ی تابع $\sqrt{-f(-\frac{x}{3})}$ کدام است؟

۱) $[-6,9]$ ۲) $[-\frac{3}{2},2]$

۳) $[-6,\frac{3}{2}]$ ۴) $[-6,3]$



پاسخ: گزینه ی ۱) عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، یعنی عبارت زیر رادیکال $-f(-\frac{x}{3})$ وجود دارد و نامنفی است. قسمت هایی از نمودار $f(-\frac{x}{3})$ را در نظر بگیریم که عرض آن ها منفی یا صفر باشد، در نمودار تابع f در $[-3,2]$ عرض منفی یا صفر است، این بازه در $f(-\frac{x}{3})$ منبسط شده و به $[-6,9]$ تبدیل می شود.

توضیح:

$$-3\le -\frac{x}{3}\le 2 \xrightarrow{\times(3)} -9\le -x\le 6 \xrightarrow{\times(-1)} -6\le x\le 9$$

رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می کنیم، سپس در جاهایی که نمودار تابع $y=f(x)$ زیر محور x ها قرار دارد، قرینه ی آن قسمت از نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم می کنیم.

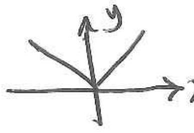
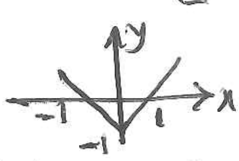
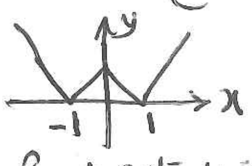
تست: طول خط شکسته تابع $y=\sqrt{x^2-2|x|+1}$ در بازه ی $[-1,3]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

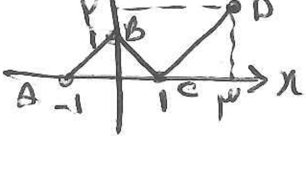
پاسخ: گزینه ی ۳)

$$y=\sqrt{x^2-2|x|+1} \xrightarrow{|x|^2=x^2} \sqrt{|x|^2-2|x|+1}=\sqrt{(|x|-1)^2}=||x|-1|$$

نمودار تابع $y=||x|-1|$ را رسم می کنیم، داریم:

$y=|x|$  $\Rightarrow y=|x|-1$  $\Rightarrow y=||x|-1|$ 

پس نمودار تابع داده شده در بازه ی $[-1,3]$ به صورت زیر است:



$$AB+BC+CD=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

تست: کدام دو انتقال نمودار تابع $y=x^2-x$ را به $y=x^2+3x+3$ تبدیل می‌کند؟

۱) ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا ۲) ۲ واحد به راست و ۱ واحد به پایین

۳) ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین ۴) ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا

پاسخ: گزینه (۴) نمودار $y=x^2-x$ را به طور فرضی a واحد در راستای محور xها و b واحد در راستای محور yها انتقال می‌دهیم تا به $y=x^2+3x+3$ برسیم. پس باید:

$$y=x^2-x \xrightarrow{\text{انتقال}} y-b=(x-a)^2-(x-a) \Rightarrow y=x^2-(2a+1)x+(a^2+a+b)$$

تابع حاصل باید برابر $y=x^2+3x+3$ باشد:

$$x^2-(2a+1)x+(a^2+a+b) \equiv x^2+3x+3 \Rightarrow \begin{cases} -(2a+1)=3 \\ a^2+a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

پس معلوم شد اگر $f(x)=x^2-x$ آنگاه $f(x+2)+1=x^2+3x+3$ است.

بنابراین باید نمودار تابع مزبور را ۲ واحد در راستای افقی به سمت چپ و ۱ واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم تا به نمودار تابع جدید دسترسی پیدا کنیم.

تست: نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را ابتدا دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، بعد نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم، حاصل ضرب طول نقاط برخورد تابع جدید با تابع اولیه کدام است؟

۱) ۴ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۲

پاسخ: گزینه (۴) برای انتقال دو واحد به سمت راست، باید به جای x، $x-2$ بگذاریم، برای

قرینه نسبت به محور افقی، ضابطه را در منفی ضرب کنیم و برای یک واحد انتقال به سمت بالا، باید کل ضابطه به علاوه یک شود.

$$\text{ضابطه جدید} = g(x) = -\frac{1}{x-2}+1 = \frac{-1+x-2}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

برای پیدا کردن نقاط برخورد این تابع با تابع اولیه، آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\frac{x-3}{x-2}=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2-3x=x-2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = P \Rightarrow P=2$$

تست: با کدام انتقال، تابع $y=\cos x$ از نقطه $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ می‌گذرد؟

۱) $\sqrt{2}$ واحد به بالا، $\frac{\pi}{12}$ واحد به راست

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ واحد به بالا، $\frac{\pi}{12}$ واحد به چپ

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ واحد به پایین، $\frac{5\pi}{12}$ واحد به راست

۴) $\sqrt{2}$ واحد به پایین، $\frac{5\pi}{12}$ واحد به چپ

پاسخ: گزینه (۲) نمودار $y=\cos x$ را با توجه به تک تک گزینه‌ها انتقال می‌دهیم و سپس نقطه $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ را در آن قرار می‌دهیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $y=\cos x \xrightarrow[\text{به راست}]{\sqrt{2}\ \text{واحد به بالا و}\ \frac{\pi}{12}\ \text{واحد}} y=\cos(x-\frac{\pi}{12})+\sqrt{2} \xrightarrow{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})}$

$\sqrt{2}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12})+\sqrt{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{12})=0$ غیر قابل قبول

گزینه (۲): $y=\cos x \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{واحد به بالا و}\ \frac{\pi}{12}\ \text{واحد به چپ}} y=\cos(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})}$

$\sqrt{2}=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12})+\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}=\cos(\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

لذا گزینه (۲) صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها به عهده‌ی خودتان است.

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور

مولف:رحیم قهرمان

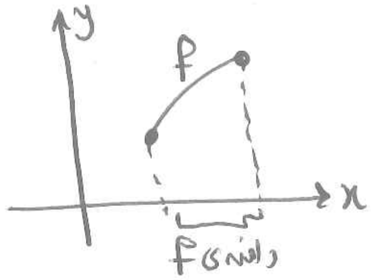
درسنامه ی (۶)

دامنه ی تابع

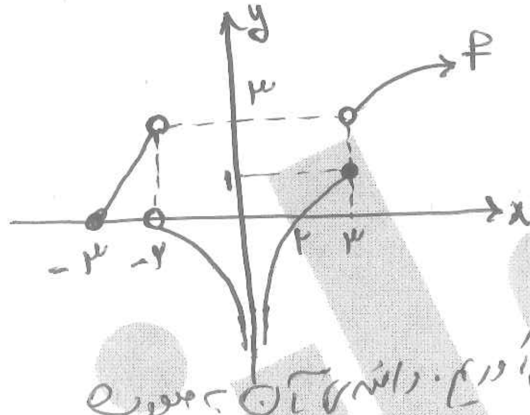
برای تابع حقیقی $y=f(x)$، که دوره ی تغییرات x یا بزرگ ترین مجموعه ای که تمام اعضای آن می توانند به جای x در ضابطه ی f قرار بگیرند را دامنه ی تابع f گویند و آن را با نماد D_f نمایش می دهند.

محاسبه ی دامنه ی توابع

۱) تصویر نمودار تابع f بر روی محور x ها بیانگر دامنه ی تابع f است. به نمودار مقابل توجه کنید.



تست: دامنه ی نمودار تابع f مقابل کدام است؟



۱) $\mathbb{R}-\{-2,0,3\}$ ۲) $[-3,+\infty)-\{-2,0,3\}$

۳) $[-3,3]-\{-1\}$ ۴) $[-3,+\infty)-\{-2,0\}$

پاسخ: گزینه ی ۴) تصویر نمودار داده شده بر روی محور x ها را بدست آوریم. دامنه ی آن به صورت $D_f=[-3,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ است که می توان آن را به صورت $D_f=[-3,+\infty)-\{-2,0\}$ نوشت.

۲) دامنه ی توابع زوج مرتب: اگر تابع به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بیان شود، مجموعه ی مولفه های اول آن، دامنه ی تابع را تشکیل می دهد.

۳) دامنه ی توابع چند جمله ای برابر با مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+d \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

تست: اگر دامنه ی توابع $g=\{(-b^2+4b-2,5)\}$ و $f=\{(a^2-2a+3,1)\}$ باهم برابر باشد، آنگاه زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(3,2)$ ۴) $(1,3)$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$D_f = D_g \Rightarrow a^2-2a+3=-b^2+4b-2 \Rightarrow a^2-2a+b^2-4b+5=0 \Rightarrow$$

$$a^2-2a+b^2-4b+4+1=0 \Rightarrow a^2-2a+1+b^2-4b+4=0 \Rightarrow (a-1)^2+(b-2)^2=0$$

$$\Rightarrow a=1,\ b=2 \Rightarrow (a,b)=(1,2)$$

۴) دامنه‌ی توابع گویا: برای یافتن دامنه‌ی توابع گویا، مخرج را مساوی صفر قرار داده تا ریشه یا ریشه‌های آن پیدا شود سپس از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

تذکر: البته به این موضوع توجه کنید که اگر مخرج کسر هیچ ریشه‌ای نداشته باشد، دامنه برابر با کل $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تذکر مهم: در یک تابع قبل از محاسبه‌ی دامنه، نباید عامل مشترکی را از صورت و مخرج حذف کنیم مثلاً در تابع $y=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-5)}$ ابتدا دامنه را پیدا می‌کنیم که برابر است با: $D_y=\mathbb{R}-\{1,5\}$ سپس می‌توانیم $(x-1)$ها را از صورت و مخرج ساده کنیم تا به $y=\frac{x-4}{x-5}$ برسیم. ولی اگر از همان ابتدا $(x-1)$ ها را حذف کنیم، دامنه، فقط $\mathbb{R}-\{5\}$ به دست می‌آید که غلط است.

تست: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{x^4-13x^2+36}$ چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۲) ابتدا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقادیری که تابع را تعریف نشده می‌کنند به دست آیند:

$x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2-9)=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)=0$

$\Rightarrow x=\pm 2$ یا $x=\pm 3 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 2, \pm 3\}$

توجه کنید با تعریف تابع، چهار عدد حقیقی را شامل نمی‌شود در این تست، اگر صورت و مخرج را ساده می‌کردیم، داشتیم:

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-3)}\,(x+3)\,(x-2)\,\cancel{(x+2)}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow$$

$D_f=\mathbb{R}-\{2,-3\}$

که نادرست است؛ در واقع این روش غلط است.

تست: اگر دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+4}{x^2-ax+4}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ باشد، مجموعه مقادیر ab کدام است؟

۱) $\{8\}$ ۲) $\{\pm 8\}$ ۳) $\{16\}$ ۴) $\{\pm 16\}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱) با توجه به اینکه دامنه‌ی تابع به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ است بنابراین مخرج کسر فقط یک ریشه $(x=b)$ دارد. می‌دانیم تابع درجه دو با شرط $\Delta=0$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف است، داریم:

$$x^2-ax+4=0 \Rightarrow \Delta_{\text{مخرج}}=0 \Rightarrow a^2-16=0 \Rightarrow a=\pm 4$$

بنابراین مخرج کسر به یکی از دو صورت x^2+4x+4 یا x^2-4x+4 ظاهر می‌شود.

$a=4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow b=2$

$a=-4 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow b=-2$

در هر دو حالت حاصل ab برابر است با ۸.

مولف: رحیم قهرمان

تست: دامنه ی تابع $f(x)=\dfrac{2-\dfrac{1}{|x|}}{4-\dfrac{1}{|x+1|}}$ بصورت $D_f=\mathbb{R}-A$ می باشد. مجموعه A شامل چند عدد صحیح می باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ی (۲) در صورت کسر عبارت $\frac{1}{|x|}$ باعث می شود که $x=0$ از دامنه ی تابع حذف شود. و همچنین حاصل $\frac{1}{|x+1|}$ نیز باعث می گردد که $x=-1$ از دامنه ی تابع حذف شود. از طرفی $4-\frac{1}{|x+1|}$ نیز مخرج کسر می باشد، پس جواب های معادله $|x+1|=\frac{1}{4}$ از دامنه ی تابع حذف می شوند داریم:

$$|x+1|=\frac{1}{4}\xrightarrow{|x|=k\ \to\ x=\pm k}\begin{cases}x+1=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-\frac{3}{4}\\[2mm] x+1=-\frac{1}{4}\Rightarrow x=-\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

که مجموعه $A=\left\{-\frac{5}{4},-1,-\frac{3}{4},0\right\}$ شامل دو عدد صحیح می باشد.

تست: دامنه ی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-4}\ ; & x\geq 0\\[2mm] \frac{1}{x-3}\ ; & x<0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{2\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{3,2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-3,2,3\}$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه ی (۱) برای ضابطه اول ریشه های مخرج را می یابیم داریم: $x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$

اما با توجه به دامنه ی این ضابطه $(x\geq 0)$، $x=-2$ به عنوان ریشه ی مخرج نمی تواند قابل قبول است. در ضابطه ی دوم ریشه ی مخرج در شرط $x<0$ صدق نمی کند، بنابراین دامنه ی تابع فوق $\mathbb{R}-\{2\}$ می باشد.

۵) دامنه‌ی توابع رادیکالی: اگر f و g دو چندجمله‌ای باشند، برای محاسبه‌ی دامنه‌ی توابع

$\frac{\sqrt[2k]{f}}{g}$ و $\frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k']{g}}$ و $\sqrt[2k]{\frac{f}{g}}$ $(k, k' \in \mathbb{N})$ خواهیم داشت:

$y=\frac{\sqrt[2k]{f}}{g}$	$\begin{cases} f \geq 0 \Rightarrow \text{دامنه‌ی صورت حاصل می‌شود} \\ g = 0 \Rightarrow \text{ریشه‌های مخرج حاصل می‌شود} \end{cases} \Rightarrow D_y = \text{دامنه‌ی صورت} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$
$y=\frac{f}{\sqrt[2k]{g}}$	$g>0 \Rightarrow$ از حل این نامعادله دامنه حاصل می‌شود.
$y=\frac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k']{g}}$	$\begin{cases} f \geq 0 \\ g > 0 \end{cases} \Rightarrow$ از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم تا دامنه حاصل شود.
$y=\sqrt[2k]{\frac{f}{g}}$	$\frac{f}{g} \geq 0 \Rightarrow$ از حل این نامعادله، دامنه‌ی تابع حاصل می‌شود.

نکته مهم: بدیهی است اگر در دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را در نظر نمی‌گیریم. حال اگر عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد چندجمله‌ای باشد، دامنه‌ی آن مجموعه اعداد حقیقی می‌شود. اگر عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد کسری باشد، دامنه‌ی آن برابر می‌شود با: $\mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4-x^2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

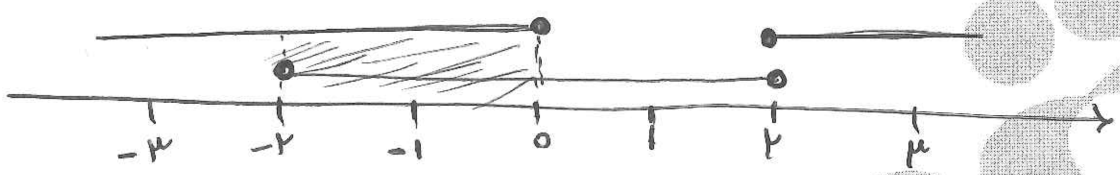
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ تمرین ۲۰] عبارت‌های $4-x^2$ و x^2-2x زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج قرار دارند. بنابراین داریم:

$$4-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \quad (I)$$

$$x^2-2x\geq 0 \Rightarrow x(x-2)\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0 \quad (II)$$

بین دو مجموعه‌ی بدست آمده از (I) و (II) اشتراک می‌گیریم. داریم:



با توجه به محور اعداد حقیقی رسم شده در فوق، $(I)\cap(II)$ را بدست آورده‌ایم. داریم:

$$(I)\cap(II) \Rightarrow D_y=[-2,0]\cup\{2\}$$

بنابراین تعداد کل اعداد صحیحی که در دامنه‌ی تابع قرار دارند، برابر است با ۴.

تست: شکل حاصل از وصل کردن نقاط تابع $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)^2}+x^2$ کدام است؟

۱) مثلث قائم‌الزاویه ۲) مثلث متساوی‌الساقین

۳) مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

پاسخ تست فوق] عبارت $-x^2(x^2-4)^2$ زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج قرار دارد، بنابراین داریم:

$$-x^2(x^2-4)^2\geq 0 \Rightarrow x^2(x^2-4)^2\leq 0 \Rightarrow (x(x-2)(x+2))^2\leq 0$$

$$\xrightarrow[\text{منفی باشد.}]{\text{این عبارت نمی‌تواند}} (x(x-2)(x+2))^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-2 \text{ یا } x=2$$

دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)}+x^2$ فقط دارای ۳ عضو $\{-2,0,2\}$ است. داریم:

$f(-2)=4$, $f(0)=0$, $f(2)=4$

بنابراین نمودار تابع y، شامل سه نقطه‌ی $(-2,4)$ و $(2,4)$ و $(0,0)$ است. اگر این سه نقطه را به هم وصل کنیم، یک مثلث متساوی الساقین به وجود می‌آید.

تست: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1-5^x}{7^{-x}-7}}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$\frac{1-5^x}{7^{-x}-7}\geq 0$ و داریم: $1-5^x=0 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow 5^x=5^0 \Rightarrow x=0$

$7^{-x}-7=0 \Rightarrow 7^{-x}=7 \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1$

حال کسر را تعیین علامت می‌کنیم تا دامنه‌ی تابع مشخص شود:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$1-5^x$		+		+	0	−	
$7^{-x}-7$		+	0	−		−	
$\frac{1-5^x}{7^{-x}-7}$		+	∞	−	0	+	

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

پس دامنه‌ی تابع $x=-1$ را در بر نمی‌گیرد.

تست: اگر دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2\sqrt{9-x^2}}{\sqrt[4]{9-|2x+5|}}$ بازه‌ی $[a,b)$ باشد، a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۸   ۳) ۵۳   ۴) ۵۸

مولف:رحیم قهرمان

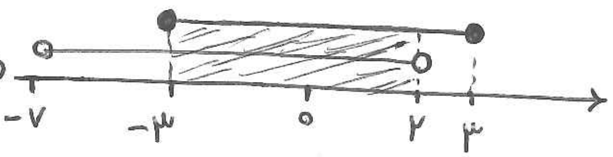
پاسخ: گزینه ۱)

شرط رادیکال صورت : $9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$ (I)

شرط رادیکال مخرج : $9-|2x+5|>0 \Rightarrow |2x+5|<9 \Rightarrow -9<2x+5<9 \Rightarrow$

$-7<x<2$ (II)

$(I)\cap(II) \Rightarrow$



$\Rightarrow D_f=[-3,2) \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2=9+4=13 \Rightarrow$

۴) دامنه‌ی توابع لگاریتمی: دامنه‌ی تابع $y=\log_{g(x)} f(x)$ از حل دستگاه نامعادلات

$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$ به دست می‌آید. هر یک از نامعادلات دستگاه فوق را به صورت مجزا حل

می‌کنیم، سپس اشتراک جواب‌های به دست آمده دامنه‌ی تابع را مشخص می‌کند.

تست: دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_{(x-2)}\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $(0,5)$ ۲) $(2,3)\cup(3,5)$ ۳) $(2,5)$ ۴) $(3,5)$

پاسخ: گزینه ۲)

$\begin{cases} \frac{5x-x^2}{4}>0 \Rightarrow 5x-x^2>0 \Rightarrow x(5-x)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0<x<5 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x-2\neq 1 \Rightarrow x\neq 3 \end{cases}$

اشتراک جواب‌های حاصل، دامنه‌ی تابع را تشکیل می‌دهد.

$D_f=(2,5)-\{3\}=(2,3)\cup(3,5)$

مولف:رحیم قهرمان

تست ۶: مجموع اعداد صحیحی که در دامنه تعریف تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{1-\log_4(x^2+3x)}$ قرار ندارند کدام است؟

۱) -10 ۲) -9 ۳) -6 ۴) -7

پاسخ: گزینه ۲)

یادآوری: اگر $k>0$ و $k\neq 1$ آنگاه:

$$\log_k A=\log_k B \iff A=B$$

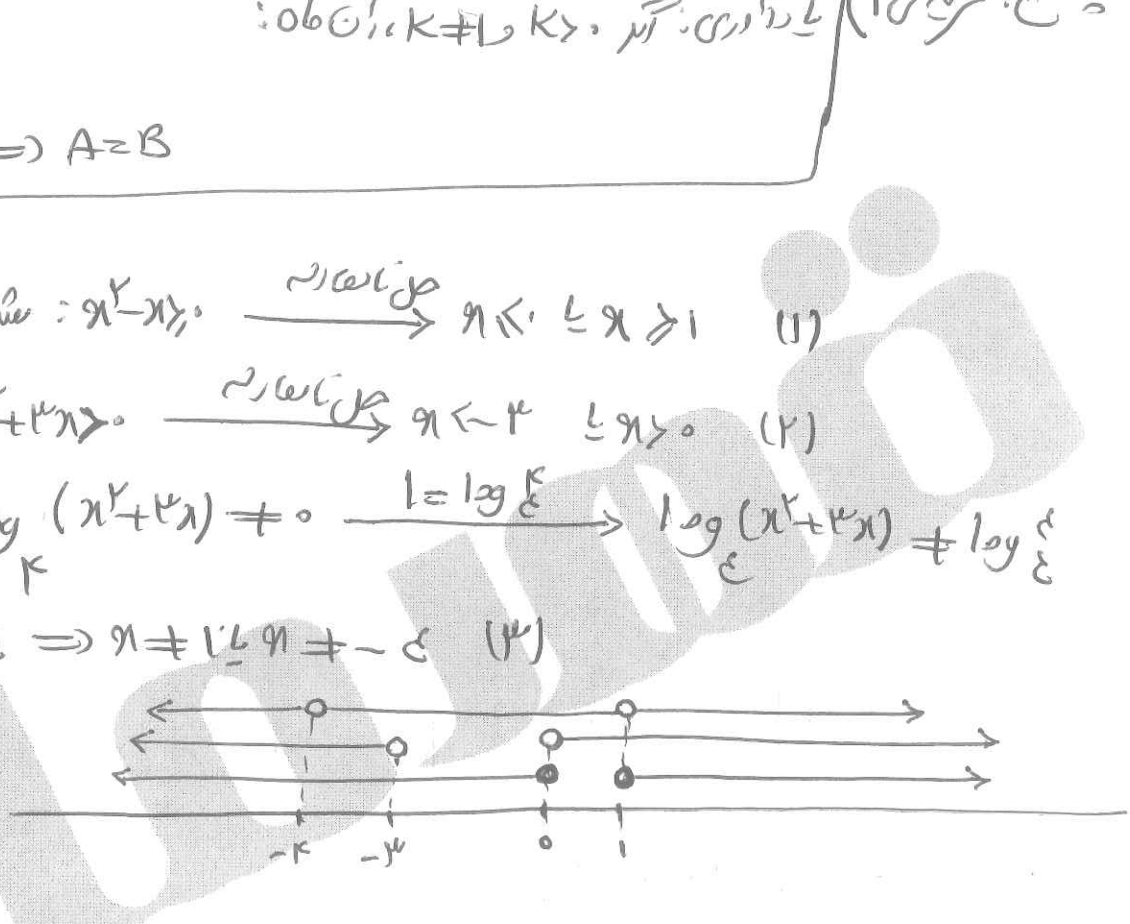
(۱) شرط رادیکال با فرجه زوج: $x^2-x\geq 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} x\leq 0$ یا $x\geq 1$

(۲) شرط لگاریتم: $x^2+3x>0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} x<-3$ یا $x>0$

(۳) شرط مخرج کسر: $1-\log_4(x^2+3x)\neq 0 \xrightarrow{1=\log_4 4} \log_4(x^2+3x)\neq \log_4 4$

$\Rightarrow x^2+3x\neq 4 \Rightarrow x\neq 1$ یا $x\neq -4$

$(1)\cap(2)\cap(3)\Rightarrow$



$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-4)\cup(-4,-3)\cup(1,+\infty)$$

مجموع اعداد صحیحی که در دامنه تعریف وجود ندارد $=-4-3-2-1+0+1=-9$

۷) دامنه توابع نمایی:

$$f(x)=a^{g(x)}\quad (a>0,\ a\neq 1)\Rightarrow D_f=D_g$$

۸) توابع سینوس و کسینوس که دامنه‌ای برابر با دامنه ایجاد کننده

$$\begin{cases} f(x)=\sin(g(x)) \\ f(x)=\cos(g(x)) \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور

مولف:رحیم قهرمان

تست: دامنه ی تابع $f(x)=3^{\sqrt{|x-1|-|2-x|}}$ بصورت $[a,+\infty)$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ی ۲

$$|x-1|-|2-x|\geq 0 \Rightarrow |x-1|\geq |2-x| \xrightarrow{\text{توان دو}} (x-1)^2\geq (2-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1\geq 4+x^2-4x \Rightarrow -2x+4x\geq 3 \Rightarrow 2x\geq 3 \Rightarrow x\geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

تست: دامنه ی تابع $f(x)=5^{\sqrt{x-1}}+3\sqrt{3-x}$ شامل چند عدد طبیعی می شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ی ۳

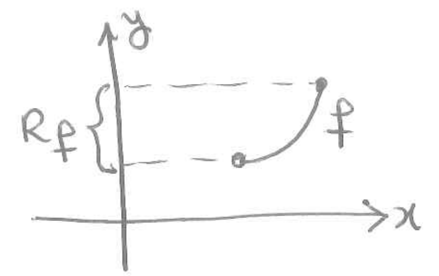
$$D_f=\{x|x\geq 1\}\cap\{x|3-x\geq 0\}=\{x|x\geq 1\}\cap\{x|x\leq 3\}$$

$$\Rightarrow D_f=\{x|1\leq x\leq 3\}$$

شامل عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ می باشد.

درسنامه‌ی (۷) برد تابع

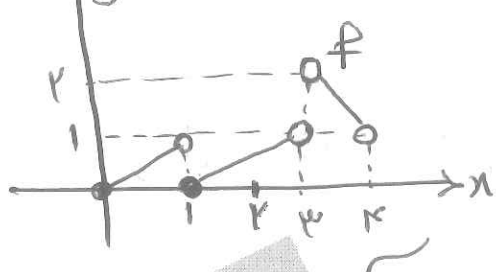
تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی تغییرات y (مقادیر تابع) را برد تابع f گویند و با نماد R_f نمایش می‌دهند.



روش‌های محاسبه‌ی برد توابع

۱) تصویر نمودار تابع بر روی محور yها، برد تابع f است.

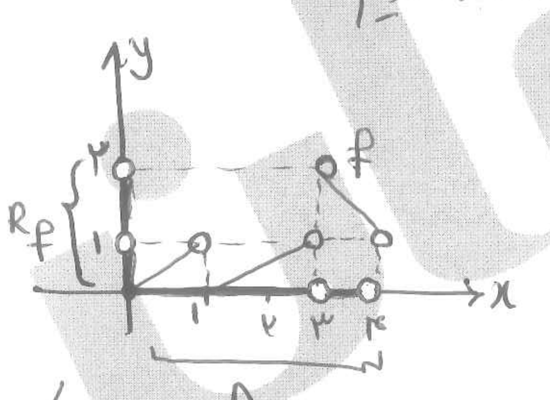
تست: نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر دامنه و برد آن به ترتیب با D_f و R_f نمایش داده شوند، حاصل $D_f \cap R_f$ کدام است؟



۱) $[0,4)-\{1,3\}$ ۲) $[0,2]-\{1\}$

۳) $[0,2)-\{1\}$ ۴) $[0,4)-\{3\}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) تصویر نمودار f را بر روی محور xها و yها بدست می‌آوریم:



$$\begin{cases} D_f=[0,3)\cup(3,4) \\ R_f=[0,1)\cup(1,2) \end{cases} \Rightarrow D_f\cap R_f=[0,1)\cup(1,2)=[0,2)-\{1\}$$

۲) اگر تابع برحسب زوج‌های مرتب بیان شود، مجموعه‌ی مولفه‌های دوم آن‌ها برد تابع را تشکیل می‌دهند.

تست: برد تابع $f=\{(-1,a),(2,1),(-1,a^2-2a+2),(a,3)\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$-1=-1 \Rightarrow a^2-2a+2=a \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=1,\ a=2$$

چون $(a,3)\in f$ و $(2,1)$ پس $a\neq 2$ و در نتیجه داریم:

مولف:رحیم قهرمان

$a=1 \Rightarrow f=\{(-1,1),(2,1),(1,3)\} \Rightarrow R_f=\{1,3\}$

برد f دارای ۲ عضو است.

۳) مربع کامل کردن: برای تبدیل کردن چندجمله ای $x^2 \pm ax$ به صورتی از مربع کامل، ابتدا نصف ضریب x را بدست آورده و سپس آن را به توان دو می رسانیم، مقدار بدست آمده را به عبارت فوق اضافه و کم می کنیم، داریم:

$$x^2 \pm ax = x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

تست: برد تابع $y = x^2-4x$ کدام گزینه است؟

۱) $[-4,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-4]$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,0]$

پاسخ: گزینه (۱) برد تابع را به روش مربع کامل سازی به دست می آوریم. داریم:

$$y=x^2-4x=x^2-4x+4-4=(x-2)^2-4$$

می دانیم $(x-2)^2 \geq 0$، بنابراین داریم:

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2-4 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4 \Rightarrow R_f=[-4,+\infty)$$

۴) در بعضی از توابع می توان با استفاده از حدود x (دامنه) به حدود y (برد) رسید که اصطلاحاً گوییم با سیر مستقیم از روی دامنه حدود برد گرفته است.

تست: به ازای چه مقدار از m، برد تابع $y=m+2\sqrt{x-3}+5$ به صورت بازه $[3,+\infty)$ می باشد؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -8 ۴) -5

پاسخ: گزینه (۱)

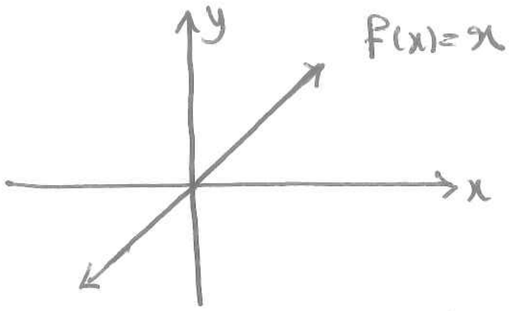
$$2\sqrt{x-3} \geq 0 \xrightarrow{+(m+5)} m+5+2\sqrt{x-3} \geq m+5$$

از طرف دیگر بنابه فرض مسئله $R_y=[3,+\infty)$ در نتیجه:

$$\begin{cases} y \geq m+5 \\ y \geq 3 \end{cases} \Rightarrow m+5=3 \Rightarrow m=-2$$

درسنامه (۸) توابع همانی و ثابت

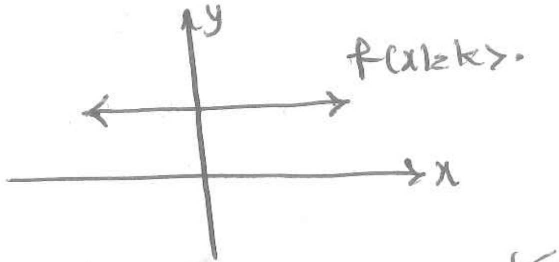
تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر بشود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه‌ی تابع همانی را $\mathbb{R}$ درنظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y=x$ است که با معادله‌ی $f(x)=x$ نمایش داده می‌شود.



تابع ثابت:

۱) تابع $f(x)=k$ ، $k\in\mathbb{R}$ یک تابع ثابت است. ۲) نمودار این تابع خطی موازی محور xها است.

۳) تابع ثابت بردش شامل یک عضو است.



تست: اگر f تابعی ثابت و g تابع همانی باشد و رابطه‌ی $(f(2))^2+3g(5)=8f(9)$ برقرار باشد، حاصل $\frac{f(12)+g(12)}{12}$ کدام است؟ $(f(x)\neq 2)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{17}{12}$ ۳) $\frac{12}{13}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی (۲) چون f تابعی ثابت است، در هر نقطه‌ی دلخواه از دامنه‌اش برابر مقداری ثابت است که ما این مقدار را k فرض می‌کنیم. از طرفی چون g تابع همانی است، $g(5)=5$ خواهد بود. بنابراین طوری می‌نویسیم که:

$$(f(2))^2+3g(5)=8f(9) \Rightarrow k^2+3(5)=8k \Rightarrow k^2-8k+15=0$$

$$\Rightarrow (k-5)(k-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ k=3 \ (\text{غ ق ق}) \end{cases} \Rightarrow \frac{f(12)+g(12)}{12}=\frac{5+12}{12}=\frac{17}{12}$$

تست: در تابع ثابت f داریم: $f(-2)=-2a$ و $f(-3)=3b$ و $f(x^2)=4a^2-9b^2+6$ حاصل عدد a^2+b^2 برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

تابع ثابت $f \Rightarrow f(-2)=f(-3) \Rightarrow -2a=3b \Rightarrow 4a^2=9b^2$

$$\Rightarrow f(x^2)=0+6=6 \Rightarrow \begin{cases} f(-2)=6 \Rightarrow -2a=6 \Rightarrow a=-3 \\ f(-3)=6 \Rightarrow 3b=6 \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=13$$

تست: به ازای چه مقدار از k تابع $f(x)=k|x-2|-2|x|+|x-5|$ در بازه $[2,5]$ به تابع ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) ۳ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۱) وقتی $2\leq x\leq 5$ داریم $x-5<0$ و $x-2>0$ و $x>0$ بنابراین:

$$f(x)=k(x-2)-2x-(x-5)=kx-2k-2x-x+5 \Rightarrow f(x)=(k-3)x-2k+5$$

برای آنکه به تابع ثابت تبدیل شود باید ضریب x صفر شود، بنابراین $k-3=0 \Rightarrow k=3$

درسنامه‌ی (۹) دو تابع مساوی

دو تابع f و g را باهم برابر نامند، هرگاه:

الف) $D_f = D_g$ باشد.

ب) به ازای هر x عضو دامنه‌ی f و g ، $f(x)=g(x)$ باشد.

تست: اگر دو تابع $f(x)=x-2$ و

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & ; x\neq a\\ b & ; x=a\end{cases}$$

باهم برابر باشند، ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۳- ۴) ۶-

پاسخ: گزینه‌ی (۱) دامنه‌ی تابع f برابر است با IR، بنابراین دامنه‌ی تابع g نیز باید برابر با IR باشد. ضابطه‌ی بالایی تابع g دارای دامنه‌ی $IR-\{3,a\}$ و ضابطه‌ی پایینی دارای دامنه‌ی $\{a\}$ است. بنابراین برای اینکه اجتماع دو ضابطه‌ی دارای دامنه‌ی IR باشد باید $a=3$ باشد. لذا تابع g به صورت زیر ظاهر می‌شود:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-5x+6 & ; x\neq 3\\ b & ; x=3\end{cases}$$

می‌دانیم $f(3)=1$ است، لذا باید $g(3)=1$ شود. بنابراین $b=1$ و در نتیجه $ab=3$ است.

تست: کدام زوج از توابع زیر یکسان هستند؟

۱) $\begin{cases}f(x)=[x+\frac{1}{2}]\\ g(x)=[x]+\frac{1}{2}\end{cases}$

۲) $\begin{cases}f(x)=[2x]\\ g(x)=2[x]\end{cases}$

۳) $\begin{cases}f(x)=|x^2-x|\\ g(x)=|x|\,|x-1|\end{cases}$

۴) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{|x|^2+|x|}{|x|^2+|x|}\\ g(x)=1\end{cases}$

پاسخ: گزینه (۳) می‌دانیم که هرگاه u و v عباراتی برحسب x باشند آنگاه $|uv|=|u||v|$ همواره برقرار است، یعنی برای هر مقدار x داریم:

$$|x^2-x| = |x(x-1)| = |x||x-1|$$

بنابراین دو تابع $f(x)=|x^2-x|$ و $g(x)=|x||x-1|$ با هم برابرند، این دامنه هر دو IR است یکسان هستند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه (۱): دامنه‌ی دو تابع یکسان است اما مقادیر آن‌ها یکسان نمی‌باشند. مثلاً به ازای $x=\frac{1}{2}$ داریم $f(\frac{1}{2})=1$ در حالی که $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

گزینه (۲): دامنه‌ی دو تابع یکسان اما مقادیر آن‌ها یکسان نیست. مثلاً برای $x=\frac{1}{2}$ داریم. $f(\frac{1}{2})=1$ در حالی که $g(\frac{1}{2})=0$

گزینه (۴): دامنه‌ی دو تابع یکسان نیست. $D_g=IR$ در حالی که $D_f=IR-\{0\}$

تست: دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)

۱) $f(x)=2\log x$ و $g(x)=\log x^2$

۲) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ و $g(x)=1$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ و $g(x)=x$

۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}$

پاسخ: گزینه (۴) بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $\begin{cases} D_f=(0,+\infty) \\ D_g=IR-\{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

گزینه (۲): $\begin{cases} D_f=IR-\{0\} \\ D_g=IR \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

گزینه (۳): $\begin{cases} D_f=[0,+\infty) \\ D_g=IR \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

گزینه (۴): $\begin{cases} D_f=R-\{0\} \\ D_g=IR-\{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g \Rightarrow f(x)= g(x)$

درسنامه (۱۰) اعمال جبری روی تابع

اگر f و g دو تابع حقیقی باشند برای هر x متعلق به اشتراک دامنه‌های f و g جمع، ضرب و تقسیم و تفاضل آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)\\ &2)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)\\ &3)\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)\end{aligned}\right\}\quad \text{و}\quad D_{f\overset{\pm}{\times}g}=D_f\cap D_g$$

$$4)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad \text{و}\quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$$

مثال: اگر $f=\{(2,3),(3,1)\}$ و $g=\{(1,2),(3,0)\}$ باشند، آنگاه $fg+(f+g)$ برابر است با:

۱) $\{(3,1)\}$ ۲) $\{(3,0)\}$ ۳) $\{(3,2)\}$ ۴) $\{(2,3)\}$

پاسخ: گزینه (۱) ابتدا دامنه‌ی $fg+(f+g)$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{2,3\}\ ,\ D_g=\{1,3\}\Rightarrow D_{f\overset{\times}{+}g}=\{3\}$$

بنابراین $fg+(f+g)$ تنها به ازای $x=3$ تعریف می‌شود، داریم:

$$(fg+(f+g))(3)=f(3)g(3)+(f(3)+g(3))=1\times 0+(1+0)=1\Rightarrow$$

$$fg+(f+g)=\{(3,1)\}$$

تست: اگر $f=\{(-2,4),(-1,2\sqrt{2}),(1,1)\}$ و $g=\{(1,-1),(-2,2),(-1,1)\}$

آنگاه معادله $\frac{f^2-8g}{g-2}=0$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲) اشتراک دامنه f و g برابر است با:

$D_f \cap D_g=\{1,-2,-1\}$

حال در این اشتراک بدست آمده، معادله $\frac{f^2-8g}{g-2}=0$ را بررسی می‌کنیم.

$x=-2 \Rightarrow \frac{f^2(-2)-8g(-2)}{g(-2)-2}=0 \Rightarrow \frac{4^2-8(2)}{2-2} \Rightarrow \frac{0}{0}=0$ غیرممکن

$x=-1 \Rightarrow \frac{f^2(-1)-8g(-1)}{g(-1)-2}=0 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{2})^2-8(1)}{1-2}=0 \Rightarrow \frac{8-8}{-1}=0$ قابل قبول

$x=1 \Rightarrow \frac{f^2(1)-8g(1)}{g(1)-2}=0 \Rightarrow \frac{1^2-8(-1)}{-1-2}=0 \Rightarrow -3=0$ غیرممکن

لذا معادله فوق فقط یک ریشه دارد.

تست: اگر $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ و $f=\{(x,x^2-1)\mid x\in A\}$ باشد، دامنه

تابع $\frac{1}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳)

$$\begin{cases} A=\{-2,-1,0,1,2\} \\ f=\{(x,x^2-1)\mid x\in A\} \Rightarrow \end{cases}$$

$$f=\{(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$$

$D_{(\frac{1}{f})} = D_f - \{x \mid f(x)=0\}$ و $f(-1)=0$ ، $f(1)=0 \Rightarrow$

$D_{\frac{1}{f}} = \{-2,-1,0,1,2\} - \{-1,1\} = \{-2,0,2\}$

بنابراین دامنه تابع $\frac{1}{f}$ دارای ۳ عضو است.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{|x|-1}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{[x]+1}}$ دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) $[0,1)\cup(1,+\infty)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا دامنه توابع f و g را بدست می‌کنیم:

$f(x)=\sqrt{|x|-1}$. $D_f: |x|-1\geq 0 \Rightarrow |x|\geq 1 \xrightarrow{|x|\geq k \xrightarrow{k>0} x\geq k \ \text{or}\ x\leq -k} \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -1\end{cases} \Rightarrow$

$D_f = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{[x]+1}}$; $D_g: [x]+1>0 \Rightarrow [x]>-1 \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty)$

حال دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را بدست می‌کنیم:

$D_{\frac{g}{f}} = D_g\cap D_f - \{f(x)=0\} = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\cap[0,+\infty) - \{x \mid |x|-1=0\}$

$= [1,+\infty) - \{-1,1\} = (1,+\infty)$

تست: اگر $f(x)=x^2-x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+x\sqrt{x}$ معادله $(fg)(x)=(f+g)(x)$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳) ابتدا دامنه را در نظر می‌گیریم:

$D_f=D_g=[0,+\infty)$

$\begin{cases}(f\cdot g)(x)=x^4-x^3\\(f+g)(x)=2x^2\end{cases} \xrightarrow{(fg)(x)=(f+g)(x)} x^4-x^3=2x^2 \Rightarrow x^4-x^3-2x^2=0 \Rightarrow$

$x^2(x^2-x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$ ق ق / غ ق ق / ق ق

(ریشه‌ها را با توجه به دامنه مشخص می‌کنیم)

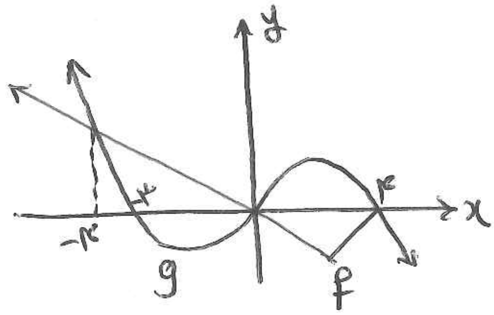
درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر نمودارهای g و f به صورت شکل زیر باشد، دامنه ی تابع $h=\frac{1}{g-f}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-4]-\{0,-4\}$ ۲) $(-\infty,4)-\{0,-4\}$

۳) $(-\infty,4]-\{-4\}$ ۴) $(-\infty,-4]-\{0\}$



پاسخ: گزینه ۲) دامنه ی دو تابع f و g را از روی نمودار آنها می یابیم:

$D_f=(-\infty,4]$ و $D_g=\mathbb{R}$

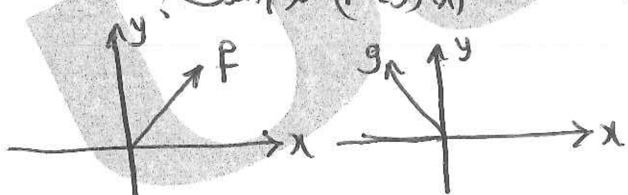
حال دامنه ی تابع h را به دست می آوریم:

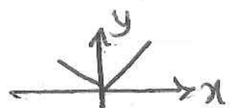
$$D_h=D_g\cap D_f-\{\underbrace{x\,|\,g(x)-f(x)=0}\}=(-\infty,4]-\{4,0,-4\}=(-\infty,4)-\{0,-4\}$$

محل تلاقی دو نمودار f و g
جواب معادله ی $g-f=0$ است.

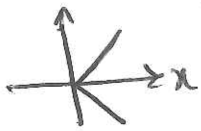
رسم نمودار تابع $f\pm g$: نمودار تابع $f\pm g$ را می توان با داشتن نمودارهای f و g رسم نمود. این عمل توسط جمع یا تفریق عرض ها حاصل می شود. به این معنی که در هر $x_0\in D_f\cap D_g$، عرض های دو تابع را با هم جمع یا تفریق می کنیم. بنابراین نقطه ی $(x_0, f(x_0)\pm g(x_0))$ از تابع $f\pm g$ خواهد بود.

تست: اگر نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر باشند، آنگاه نمودار $(f+g)(x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینه ۲)

$$\begin{cases} D_f=[0,+\infty) \\ D_g=(-\infty,0] \end{cases} \Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{0\} \Rightarrow (f+g)(0)=0$$

درسنامه (۱۱) ترکیب توابع

دو تابع f و g مفروض اند، در صورتی که $R_g \cap D_f \neq \phi$ آنگاه تابع مرکب $y=(f\circ g)(x)$ یا $y=f(g(x))$ را می‌توان با جایگزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی f تشکیل داد، داریم:

$$x \xrightarrow{\text{در } g} g(x) \xrightarrow{\text{در } f} f(g(x))=f\circ g(x)$$

تست: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد، عدد a کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴) برای آنکه $g(f(a))=5$ باشد، باید مقدار $f(a)$، یعنی ورودی تابع g برابر با ۶ باشد چون $g(6)=5$ است. برای این منظور ضابطه‌ی تابع f را برابر ۶ قرار می‌دهیم، داریم:

$$f(a)=6 \Rightarrow a+\sqrt{a}=6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2+t-6=0 \xrightarrow{t>0} t=2 \Rightarrow a=4$$

تست: اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$ ، نمودارهای دو تابع f و $f\circ g$ با کدام طول متقاطع اند؟

(سراسری تجربی ۹۲)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

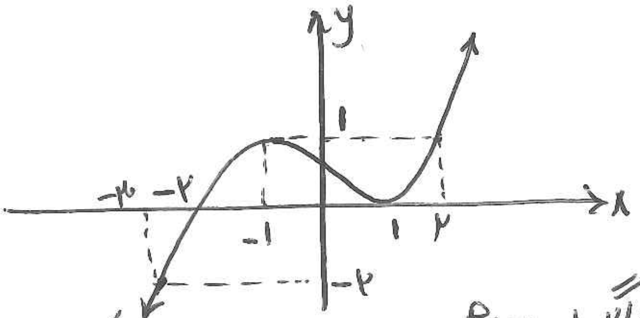
پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^2 \\ g(x)=x+2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^2=(\underbrace{2(x+2)-3}_{2x+1})^2=4x^2+4x+1$$

$$\begin{cases} y_1=f(x)=(2x-3)^2=4x^2-12x+9 \\ y_2=f(g(x))=4x^2+4x+1 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{حل معادله}} 4x^2-12x+9=4x^2+4x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر نمودار تابع f بصورت مقابل باشد، معادله $f(f(x))=0$ چند جواب دارد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴) با توجه به شکل می‌دانیم $f(-2)=f(1)=0$ اگر $f(x)=1$ یا $f(x)=-2$ باشد، آنگاه حاصل $f(f(x))$ برابر صفر می‌شود. حال برای آنکه معادله $f(x)=1$ یا $f(x)=-2$ را حل کنیم، کافیست به ازای چه مقادیری از x (با توجه شکل) مقدار تابع برابر ۱ یا ۲- شده است:

$$\begin{cases} f(x)=1 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x=2 \ , \ x=-1 \\ f(x)=-2 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x=-3 \end{cases} \Longrightarrow$$

معادله $f(f(x))=0$ دارای سه جواب است.

تست: اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع gof که بالای محور xها قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,4)$

پاسخ: گزینه ۱)

$$\begin{cases} f(x)=x^2+3x \\ g(x)=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Longrightarrow (gof)(x)=-\frac{1}{2}f(x)+2=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

حال برای تعیین نقاطی که تابع gof بالای محور xها قرار گیرد کافی است که معادله $(gof)(x)>0$ را حل کنیم:

$$(gof)(x)>0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0 \Longrightarrow -4<x<1$$

محاسبه دامنه ترکیب توابع: (درسنامه ۱۲)

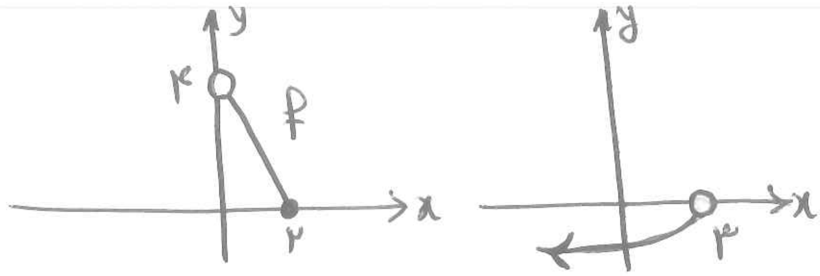
برای محاسبه دامنه تابع مرکب fog از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور** (۱۳۹۹)

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشند، دامنه ی تابع $g o f$ کدام است؟



۱) $(0,2]$

۲) $(0,2)$

۳) $[\frac{1}{2},2]$

۴) $(\frac{1}{2},2]$

پاسخ: گزینه ی ۴) ضابطه ی تابع f به صورت خطی است که از نقاط $(2,0)$ و $(0,4)$ می‌گذرد. پس $f(x)=-2x+4$. با توجه به نمودارها داریم:

$$D_f=(0,2] , D_g=(-\infty,3) \Rightarrow D_{gof}=\{x\in(0,2] \mid -2x+4<3\}$$

$$=\{x\in(0,2] \mid x>\frac{1}{2}\}=(\frac{1}{2},2]$$

تست: اگر $f(x)=\sqrt{4+x-x^2}$ و $g(x)=\log(x-1)$ باشند، دامنه ی تابع fog کدام است؟ (سنجش تجربی ۹۳)

۱) $[2/01 , 101]$

۲) $[1/01 , 1001]$

۳) $[1/001 , 201]$

۴) $[2/001 , 102]$

پاسخ: گزینه ی ۲) دامنه ی تابع fog، $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$، ابتدا دامنه ی توابع f و g را می‌یابیم

$$D_f: 4+x-x^2\geq 0 \Rightarrow (3-x)(2+x)\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 3 \Rightarrow D_f=[-2,3]$$

$$D_g: x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_g=(1,+\infty)$$

داریم:

$$D_{fog}=\{x\in(1,+\infty) \mid \log(x-1)\in[-2,3]\}$$

حال برای حل نامعادله ی

$$\log(x-1)\in[-2,3] \Rightarrow -2\leq \log(x-1)\leq 3$$ با توجه به این نکته

که $\log_b a\geq k \xrightarrow[\text{حفظ جهت}]{b>1} a\geq b^k$ به صورت زیر عمل می‌کنیم، داریم:

مولف:رحیم قهرمان

$$-2 \leq \log(x-1) \leq 3 \xrightarrow[\text{حفظ جهت}]{10>1} 10^{-2} \leq x-1 \leq 10^{3} \Rightarrow 0/01 \leq x-1 \leq 1000 \Rightarrow$$

$$1/01 \leq x \leq 1001$$

درنتیجه:

$$D_{fog} = \{ \underbrace{x \in (1,+\infty)}_{} \mid \underbrace{x \in [1/01, 1001]}_{} \} \Rightarrow D_{fog} = [1/01, 1001]$$

اشتراک

تست: اگر $f(x)=2+\frac{x}{2}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ و $h(x)=\sqrt{x}$ باشند دامنه تابع $ho(f\times g)$ کدام است؟

۱) $x>1$ ۲) $x\leq -4$ ۳) $-4\leq x<1$ ۴) $x\leq -4$ یا $x>1$

پاسخ: گزینه ۴) ابتدا دامنه تابع $f\times g$ را می‌یابیم:

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}-\{1\}$$

حال دامنه تابع $ho(f\times g)$ را می‌یابیم:

$$D_{ho(f\times g)} = \{x\in D_{f\times g} \mid (f\times g)(x)\in D_h\} = \{x\neq 1 \mid (f\times g)(x)\geq 0\}$$

$$=\{x\neq 1 \mid \frac{4+x}{2x-2}\geq 0\} = \{x\neq 1 \mid x\leq -4 \text{ یا } x>1\} = (-\infty,-4]\cup(1,+\infty)$$

محاسبه‌ی $f(x)$ ها (درسنامه ۳)

۱) مبحث مسائلی که $f(u(x))$ داده شده و $f(v(x))$ خواسته شده است، می‌توان ابتدا با گرفتن $u(x)=t$، x را برحسب t به‌دست آورده و با تشکیل $f(t)$، $f(v(x))$ را نیز یافت.

تست: اگر $f\left(\frac{x^2+2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}$ باشد $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+4 ۲) $x-2$ ۳) x^2-2 ۴) x^2-4

پاسخ: گزینه ۴

$$f\left(\frac{x^2+2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2} \Rightarrow f\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+4-4$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{x+\tfrac{2}{x}}_{u})=(\underbrace{x+\tfrac{2}{x}}_{u})^2-4 \Rightarrow f(x)=x^2-4$$

۲) اگر $f(u(x))$ را داشته باشیم، برای یافتن $f(\alpha)$ دو راه داریم:

۱) با حل معادله $u(x)=\alpha$، جواب معادله را در تابع قرار داده و مقدار $f(\alpha)$ را بیابیم.

۲) در ضابطه‌ی f، $u(x)$ را t گرفته و سپس با گذاشتن $u(x)=t$، $f(t)$ و سپس $f(\alpha)$ را می‌یابیم.

تست: اگر $f(\sqrt{x})=x+\sqrt{x}$ باشد حاصل $f(2)+f(1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ روش اول:

$$\begin{cases} \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{x=1} f(\sqrt{1})=1+\sqrt{1} \Rightarrow f(1)=2 \\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \xrightarrow{x=4} f(\sqrt{4})=4+\sqrt{4} \Rightarrow f(2)=6 \end{cases} \Rightarrow f(1)+f(2)=8$$

روش دوم:

$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\sqrt{x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} f(t)=t^2+t \Rightarrow \begin{cases} f(2)=4+2=6 \\ f(1)=1+1=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(2)+f(1)=8$$

۳) برای محاسبه‌ی ضابطه‌ی تابع $g(x)$ با داشتن fog و f ابتدا یک ضابطه‌ی f fog را برحسب g تشکیل داده و سپس آن را برابر با ضابطه‌ی fog داده شده قرار می‌دهیم و در نهایت g را می‌یابیم.

تست: اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینه‌ی (۴)

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x))=\frac{g+1}{g-1}$$

$$fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g+1}{g-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow gx^2+g+x^2+1=gx^2+2g-x^2-2$$

$$\Rightarrow g(x)=2x^2+3 \Rightarrow g(1)=2(1)^2+3=5$$

تست: ریگی را در استخری می‌اندازیم. موج‌هایی به شکل دایره‌های هم‌مرکز ایجاد می‌شوند. شعاع موج خارجی از رابطه‌ی $r(t)=0/6t$ به دست می‌آید که t زمان (برحسب ثانیه) پس از برخورد ریگ با سطح آب است. مساحت دایره با تابع $A(r)=\pi r^2$ حساب می‌شود. ضابطه‌ی تابع $(Aor)(t)$ کدام است؟

۱) $0/36\pi t^2$ ۲) $0/036\pi t^2$ ۳) $0/6\pi t^2$ ۴) $0/006\pi t^2$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

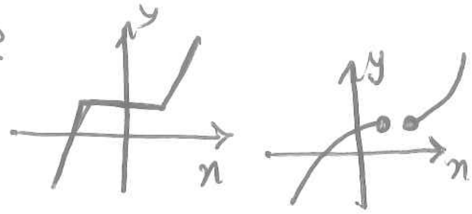
پاسخ گزینه‌ی (۱) می‌دانیم $(Aor)(t)=A(r(t))$ و با توجه به $r(t)=0/6t$ و $A(r)=\pi r^2$ می‌توان تابع مرکب $(Aor)(t)$ را محاسبه کرد.

$$(Aor)(t)=\pi(0/6t)^2=0/36\pi t^2$$

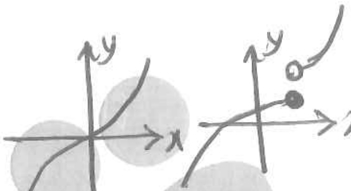
درسنامه‌ی (۱۱۴) توابع یکنوا و اکیداً یکنوا

تابع حقیقی f را در نظر بگیرید. اگر x_1 و x_2 اعضای D_f باشند، تعاریف چهارگانه‌ی زیر را می‌توان نوشت:

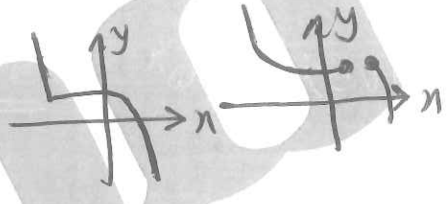
1) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ f را یک تابع صعودی گویند (با افزایش x ها، y ها کاهش نمی‌یابند)



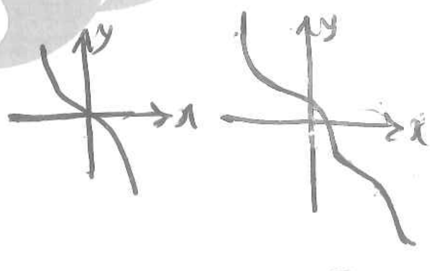
2) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ f را تابع اکیداً صعودی گویند. (با افزایش x ها، y ها افزایش می‌یابند.)



3) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ f را تابع نزولی گویند (با افزایش x ها، y ها افزایش نمی‌یابند.)



4) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ f را یک تابع اکیداً نزولی گویند. (با افزایش x ها، y ها کاهش می‌یابند.)



تست: تابع $f=\{(3,a^2-4),(-2,1),(b+1,a-1),(3,a+2),(-2,-b)\}$ اکیداً صعودی است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی (۱) برای تابع بودن لازم است که زوج مرتب‌های $(-2,1)$ و $(-2,-b)$ یکسان باشند. همین طور زوج مرتب‌های $(3,a^2-4)$ و $(3,a+2)$ پس داریم:

$$\begin{cases} -b=1 \Rightarrow b=-1 \\ a^2-4=a+2 \Rightarrow a^2-a-6=0 \Rightarrow a=-2,3 \end{cases}$$

حال توابع ایجاد شده را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a=3,\ b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,2),(3,5)\} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ a=-2,\ b=-1 \Rightarrow f=\{(-2,1),(0,-3),(3,0)\} \Rightarrow \text{غیر یکنوا} \end{cases}$$

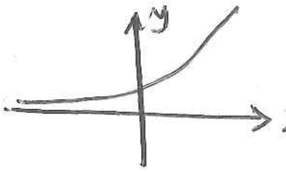
پس $a=3$ و $b=-1$ جواب صحیح هستند.

تست: کدام تابع نزولی است؟

۱) $y=5^x$ ۲) $y=-x^3$ ۳) $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$ ۴) $y=\sqrt{x-2}$

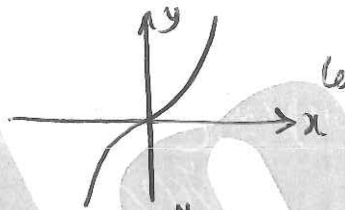
پاسخ: گزینه (۲) بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $y=5^x$

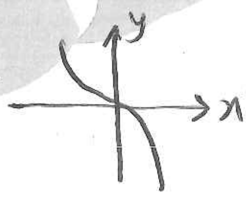


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۲): $y=x^3$

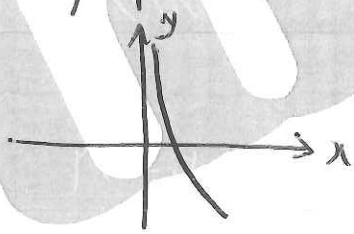


$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-x^3$

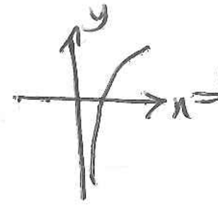


$\Rightarrow$ تابع نزولی

گزینه (۳): $y=\log_{\frac{1}{5}} x$

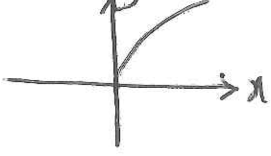


$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

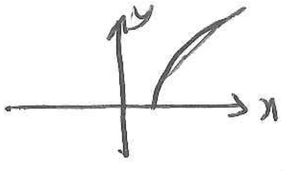


$\Rightarrow$ تابع صعودی

گزینه (۴): $y=\sqrt{x}$



$\xrightarrow[\text{راست}]{\text{دو واحد به سمت}} y=\sqrt{x-2}$



$\Rightarrow$ تابع صعودی

تست: کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; x\leq 0 \\ x^2-1 & ; x\geq 1\end{cases}$ صادق است؟

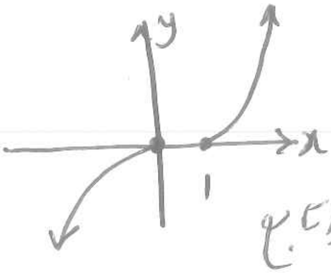
۱) تابع f روی D_f صعودی است.

۲) تابع f روی D_f نزولی است.

۳) تابع f روی D_f اکیداً صعودی است.

۴) تابع f روی D_f اکیداً نزولی است.

پاسخ: گزینه (۱) تابع f را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; x\leq 0\\ x^2-1 & ; x\geq 1\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f، با افزایش مقادیر x، y نیز افزایش می‌یابد. لذا تابع f در دامنه‌ی تعریف خود همواره صعودی است، چون $f(0)=f(1)=0$، پس تابع صعودی است نه اکیداً صعودی.

نکات

۱) اگر f بر دامنه‌اش صعودی یا فقط نزولی باشد، f را تابعی یکنوا گویند.

۲) اگر f بر دامنه‌اش فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، f را اکیداً یکنوا می‌گویند.

۳) هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم هست ولی عکس مطلب لزوماً صحیح نمی‌باشد.

۴) توابع ثابت $f(x)=k \; (x\in \mathbb{R})$ هم در تعریف تابع صعودی و هم در تعریف تابع نزولی صدق می‌کند.

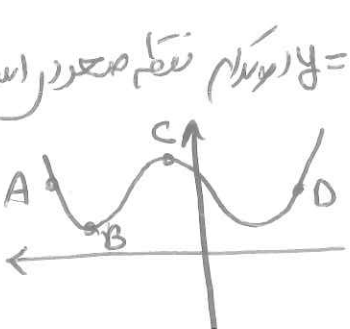
۵) در منحنی تابع اکیداً یکنوا هیچ دو نقطه‌ای هم عرض نباید وجود داشته باشد. این مطلب می‌تواند کمک مناسبی برای تشخیص توابع اکیداً یکنوا از روی منحنی باشد.

۶) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد، آنگاه $-f$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۷) اگر تابع f صعودی (نزولی) و همواره مثبت یا همواره منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی (صعودی) خواهد بود.

۸) اگر تابع f صعودی (نزولی) باشد، آنگاه برای n های فرد f^n، $\sqrt[n]{f}$ صعودی (نزولی) خواهد بود.

تست: منحنی تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو است. تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در کدام نقطه صعودی است؟



۱) A

۲) B

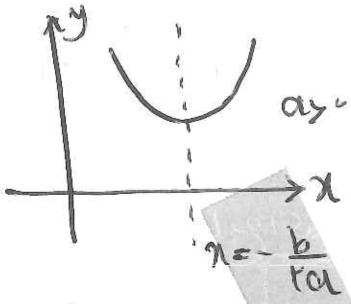
۳) C

۴) D

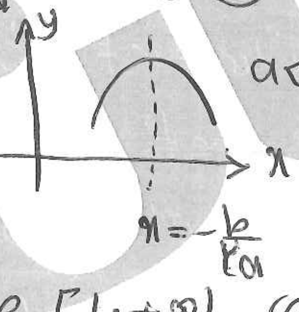
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست. اگر f روی مجموعه‌ی A صعودی و مثبت باشد، آنگاه $\frac{1}{f}$ روی A نزولی و مثبت است. به همین ترتیب این مطلب در مورد توابع نزولی یا نزولی اکیداً برقرار است و نیز اگر f صعودی و منفی باشد، $\frac{1}{f}$ نزولی و منفی است، زیرا در معکوس کردن علامت تغییر نمی‌کند. بنابراین تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ در نقاطی صعودی است که $f(x)$ حول آن نقطه نزولی باشد و با توجه به نمودار تابع این نقطه، نقطه‌ی A است.

۹) بررسی یکنوایی تابع $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

الف) اگر $a>0$، در این صورت تابع روی $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.



ب) اگر $a<0$، در این صورت تابع روی $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



تست: حدود a برای آنکه تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ صعودی باشد کدام است؟

۱) $a\geq\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\leq\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست. اولاً باید $a>2$. ثانیاً برای اینکه f روی $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد باید بازه‌ی $[1,+\infty)$ زیرمجموعه‌ی $[-\frac{b}{2a},+\infty)=[\frac{1}{2(a-2)},+\infty)$ باشد. در نتیجه:

$$\frac{1}{2(a-2)} \leq 1 \Rightarrow 2a-4 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a > 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{5}{2}$$

۱۰) اگر f و g دو تابع مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشند، آنگاه $f \times g$ تابعی مثبت و اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

۱۱) اگر f و g دو تابع صعودی باشند، آنگاه $f+g$ نیز تابعی صعودی خواهد بود.

تست: اگر تابع $f(x)$ روی R اکیداً صعودی باشد، کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $|x|+f(x)$ ۲) $x f(x)$ ۳) $x+f(x)$ ۴) $|x| f(x)$

پاسخ: گزینه (۳) در این تست f صعودی اکید و $y=x$ نیز صعودی اکید است. لذا جمع آن‌ها یعنی $x+f(x)$ نیز صعودی اکید می‌باشد پس گزینه (۳) صحیح است.

تست: اگر f صعودی و g نزولی باشد، آنگاه توابع fog و $fogof$ به ترتیب:

۱) نزولی و نزولی است ۲) صعودی و نزولی است ۳) نزولی و صعودی است ۴) صعودی و صعودی است.

پاسخ: گزینه (۱) می‌توانیم تابع نزولی g را با علامت منفی (-1) و تابع صعودی f را با علامت $(+1)$ نشان دهیم و در ترکیب‌های پی در پی g و f، برای هر کدام علامت مناسب را در نظر بگیریم و آن‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{cases} f \text{ صعودی} \Rightarrow + \\ g \text{ نزولی} \Rightarrow - \end{cases} \Rightarrow \underset{+\ \ -\ \ +}{f\circ g\circ f} \xrightarrow[(-)]{\text{ضرب علامت‌ها}}$$

fog و $fogof$ نزولی هستند.

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x^3$، آنگاه کدام گزینه در مورد تابع gof درست است؟ $(x \geq 0)$

۱) صعودی اکید ۲) نزولی اکید ۳) نه صعودی و نه نزولی ۴) نمی‌توان مشخص کرد

پاسخ: گزینه (۲)

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & \text{صعودی اکید} \\ g(x)=-x^3 & \text{نزولی اکید} \end{cases} \Longrightarrow \underset{-\ \ +}{g\circ f} \Rightarrow (-)$$

gof نزولی اکید

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

تست: کدام تابع در دامنه اش نزولی است؟

۱) $y=\frac{1}{[x]}$ ؛ $x\ge 1$ ۲) $y=-[-x]$ ۳) $y=\frac{1}{x^2+1}$ ؛ $(x<0)$ ۴) $y=-2^{-x}$

پاسخ: گزینه (۱) بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): $y=[x]$ یک تابع صعودی است و عکس آن یک تابع صعودی نزولی می باشد

گزینه (۲): تابع $y=[-x]$ نزولی است و بنابراین قرینه آن صعودی می باشد.

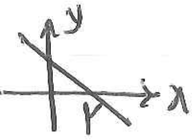
گزینه (۳): $y=x^2+1$ در بازه $x<0$، نزولی است و بنابر این عکس آن صعودی می باشد.

گزینه (۴): $y=(\frac{1}{2})^x$ یک تابع نزولی است زیرا $\frac{1}{2}<1$ و در نتیجه قرینه آن صعودی می باشد.

تست: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$، دامنه ی تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

پاسخ: گزینه (۲) چون $f(2)=0$ و تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است، می توان حالت کلی آن را به صورت



فرض کرد. مخرج عبارت زیر رادیکال یعنی $(2+x^2)$ همواره مثبت است، لذا برای با معنی بودن $\sqrt{\frac{xf(x)}{2+x^2}}$ کافی است $xf(x)\ge 0$ باشد. با توجه به مقدار تابع f سه حالت داریم:

$$\begin{cases} x<0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)>0 \Rightarrow xf(x)<0 \\ 0\le x\le 2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)\ge 0 \Rightarrow xf(x)\ge 0 \\ x>2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(x)<0 \Rightarrow xf(x)<0 \end{cases}$$

فقط x هایی قابل قبول هستند که به ازای آن ها $xf(x)\ge 0$ شده باشد. لذا $D_y=[0,2]$ است.

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه ی IR باشد، دامنه ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) IR ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ی ۴

$$f(|x-2|)-f(|2x-1|)\geq 0 \Rightarrow f(|x-2|)\geq f(|2x-1|) \xrightarrow{\text{نزولی اکید}}$$

$$|x-2|\leq|2x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-4x+4\leq 4x^2-4x+1 \Rightarrow 3x^2\geq 3 \Rightarrow$$

$x\leq -1$ یا $x\geq 1$

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3x-6} > \log_{\frac{1}{4}}(2x-2)$ چیست؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(4,+\infty)$ ۳) $(1,4)$ ۴) $(2,4)$

پاسخ: گزینه ی ۴

یادآوری:

$0<a<1: \log_a^{x_1}<\log_a^{x_2} \xrightarrow{\text{تابع نزولی}} x_1>x_2$ (تغییر جهت)

$a>1: \log_a^{x_1}<\log_a^{x_2} \xrightarrow{\text{تابع صعودی}} x_1<x_2$ (حفظ جهت)

$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3x-6} > \log_{\frac{1}{4}}(2x-2) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-6)^{\frac{1}{2}} > \log_{(\frac{1}{2})^2}(2x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(3x-6) > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x-2) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-6) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$$

$$\xrightarrow[\text{نزولی است.}\ \log_a^x]{0<a<1} (3x-6)<(2x-2) \Rightarrow x<4$$

از طرفی باید $3x-2>0$ و از آن جا $x>1$ و هم چنین $3x-4>0$ و در نتیجه $x>2$ و اشتراک نتایج اخیر $2<x<4$ است.

تست: مجموعه جواب نامعادله ی $(2-\sqrt{3})^{x^2} \leq (2-\sqrt{3})^4$ کدام است؟

۱) $x<-2 \cup x>2$ ۲) $-2\leq x\leq 2$ ۳) $x\leq -2 \cup x\geq 2$ ۴) $-2<x<2$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: گزینه ی ۳) $0<(2-\sqrt{3})<1$ است ($\sqrt{3}\approx 1/7$) و می دانیم تابع a^x اگر $0<a<1$ باشد نزولی است، یعنی:

$$\begin{cases} 0<a<1: & a^{x_1}\leq a^{x_2} \xrightarrow{\text{نزولی } a^x} x_1\geq x_2 \\ a>1: & a^{x_1}\leq a^{x_2} \xrightarrow{\text{صعودی } a^x} x_1\leq x_2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(2-\sqrt{3})^{x^2} \leq (2-\sqrt{3})^4 \Rightarrow x^2\geq 4 \Rightarrow x\leq -2 \cup x\geq 2$$

تست: تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{2} & ; x\geq 1 \\ \frac{x+a}{2} & ; x\leq -1 \end{cases}$، صعودی اکید است، حدود a کدام است؟

۱) $a<-1$ ۲) $a>3$ ۳) $a<3$ ۴) $a>-1$

پاسخ: گزینه ی ۳) هر دو ضابطه ی f، خطوطی هستند با شیب مثبت و لذا هر دو ضابطه ی f در دامنه های مربوط به خودشان صعودی اکید هستند، پس برای آن که f در کل نیز، صعودی اکید باشد کافی است وقتی از شاخه ی $x\leq -1$ وارد شاخه ی $x\geq 1$ می شویم نیز، مقادیر تابع افزایشی باشد و برای آن که این اتفاق بیفتد کافی است: $f(-1)<f(1)$ باشد. یعنی:

$$f(-1)<f(1) \Rightarrow \frac{-1+a}{2}<1 \Rightarrow a<3$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی ویژه کنکور

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه ی (۱۵) تابع یک به یک

۱) تابع یک به یک از دیدگاه زوج مرتب: می گوییم رابطه ی f بیانگر تابعی یک به یک است، اگر:

الف) f شرایط تابع بودن را داشته باشد،

ب) هیچ دو مولفه ی اولی در زوج مرتب ها باهم برابر نباشند و اگر مولفه های دوم باهم برابر بودند، مولفه های اول آن ها نیز باهم برابر باشند،

تست: اگر رابطه ی

$$f=\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$$

بیانگر تابعی یک به یک باشد، زوج تایی (a,b) کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۶)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(2,3)$

پاسخ: گزینه ی ۴) به خاطر وجود دو زوج مرتب $(3,a^2-a)$ و $(3,2)$ از شرط تابع بودن داریم:

$$\text{شرط تابع بودن}: a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$a=-1 \Rightarrow f=\{(3,2),\underbrace{(-1,5)},(b,2),\underbrace{(-1,4)}\} \Rightarrow$$ تابع نیست. f

$$a=2 \Rightarrow f=\{(3,2),(2,5),(b,2),(-1,4)\}$$

از شرط یک به یکی داریم: $(3,2)=(b,2)$ و بنابراین $b=3$ می باشد، پس $(a,b)=(2,3)$

۲) تابع یک به یک از دیدگاه هندسی (نموداری): زمانی یک نمودار مربوط به تابع یک به یک است که هر خط موازی محور x ها (افقی)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تست: کدام تابع یک به یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+1 ; & x\geq 0 \\ 1-x ; & x<0 \end{cases}$

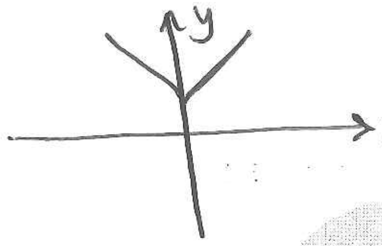
۲) $f(x)=\begin{cases} x-2 ; & x\geq 0 \\ x+2 ; & x<0 \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 ; & x\geq 0 \\ -x^2 ; & x<0 \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} x^3 ; & x\geq 0 \\ -x^3 ; & x<0 \end{cases}$

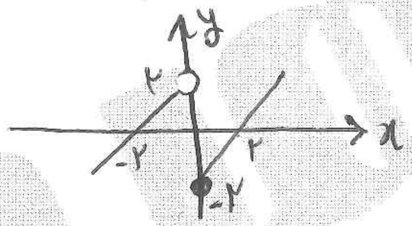
پاسخ: گزینه (۳) بررسی گزینه ها: نمودار ۴ گزینه ها را رسم می‌کنیم.

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 ; & x\geq 0 \\ 1-x ; & x<0 \end{cases}$



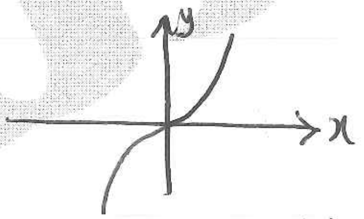
$\Leftarrow$ غیر یک به یک ✗

2) $f(x)=\begin{cases} x-2 ; & x\geq 0 \\ x+2 ; & x<0 \end{cases}$



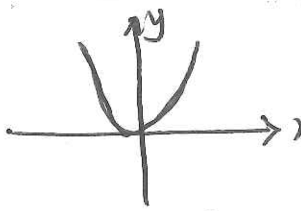
$\Leftarrow$ غیر یک به یک ✗

3) $f(x)=\begin{cases} x^2 ; & x\geq 0 \\ -x^2 ; & x<0 \end{cases}$



$\Leftarrow$ یک به یک است. ✓

4) $f(x)=\begin{cases} x^3 ; & x\geq 0 \\ -x^3 ; & x<0 \end{cases}$



$\Leftarrow$ غیر یک به یک ✗

۳) تابع یک به یک از دیدگاه ضابطه: اگر تابع $y=f(x)$ تابعی یک به یک باشد، مطابق تعریف ریاضی داریم:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

مولف: رحیم قهرمان

تست: کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y=x^2$ ۲) $y=|x|$ ۳) $y=\sqrt[3]{x}$ ۴) $y=\sqrt[3]{x^2}$

پاسخ: گزینه (۳) برای بررسی یک به یک بودن توابع از تعریف تابع یک به یک بهره می‌گیریم.

گزینه (۱): $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ غیر یک به یک ✗

گزینه (۲): $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow |x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=\pm x_2$ غیر یک به یک ✗

گزینه (۳): $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}=\sqrt[3]{x_2} \rightarrow x_1=x_2$ یک به یک است. ✓

گزینه (۴): $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2}=\sqrt[3]{x_2^2} \rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ غیر یک به یک ✗

۴) شرایط یک به یک بودن برای تابع چندضابطه‌ای

۱) باید هر ضابطه در دامنه‌ی تعریف خود، یک به یک باشد.

۲) اشتراک برد هر دو ضابطه آن تهی باشد.

تست: کم‌ترین مقدار طبیعی a برای آن که تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ; x\leq 2 \\ x+2a & ; x>2 \end{cases}$ یک به یک باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه (۳) شرط یک به یک بودن تابع دوضابطه‌ای این است که اولاً هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی یک به یک باشند. ثانیاً اشتراک برد ضابطه‌ها تهی باشد. در تابع f ضابطه‌ی $f(x)=2x+3$ یک به یک است و ضابطه‌ی $f(x)=2x+a$ نیز بدون توجه به شرایط a، یک به یک

است، اما برد ضابطه‌ها:

ضابطه‌ی اول: $x \le 2 \Rightarrow 2x \le 4 \Rightarrow 2x+3 \le 7 \Rightarrow f_1(x) \le 7 \Rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 7]$

ضابطه‌ی دوم: $x > 2 \Rightarrow x+2a > 2+2a \Rightarrow f_2(x) > 2+2a \Rightarrow R_{f_2} = (2+2a, +\infty)$

برای اینکه اشتراک برد ضابطه‌ها تهی باشد باید داشته باشیم:

$2+2a \ge 7 \Rightarrow a \ge \frac{5}{2} \Rightarrow$ کمترین مقدار طبیعی برای a برابر ۳ است.

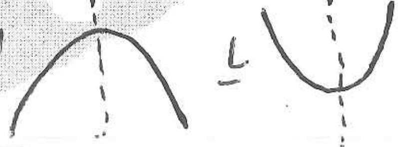
تست: تابع $y = x^2 + 4x + 3$ در کدام بازه‌ی زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $(-5, +\infty)$ ۲) $(-3, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -1)$ ۴) $(-\infty, -4)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴)

نکته: توابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در هر یک از بازه‌های $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ و $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و یا زیرمجموعه‌های آن‌ها یک‌به‌یک است.

نمودار این توابع به صورت



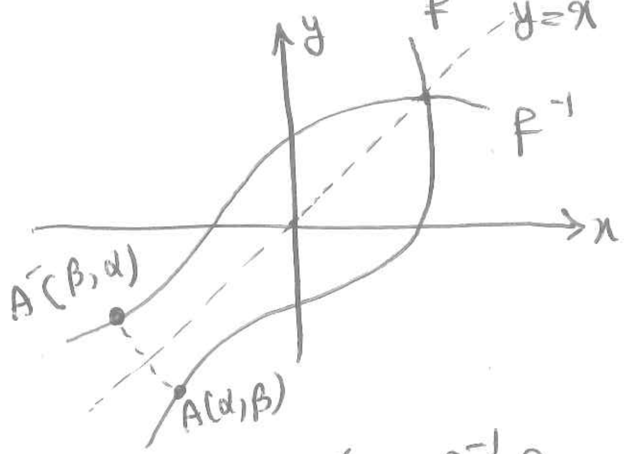
است.

پس تابع فوق در $[-2, +\infty)$ یا $(-\infty, -2]$ و یا زیرمجموعه‌های آن‌ها یک‌به‌یک است، بنابراین گزینه‌ی (۴) را انتخاب می‌کنیم.

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه (۱۴) وارون تابع

۱) تابع معکوس (وارون) f، تابعی است که نمودار f^{-1} نشان داده شده و داریم:

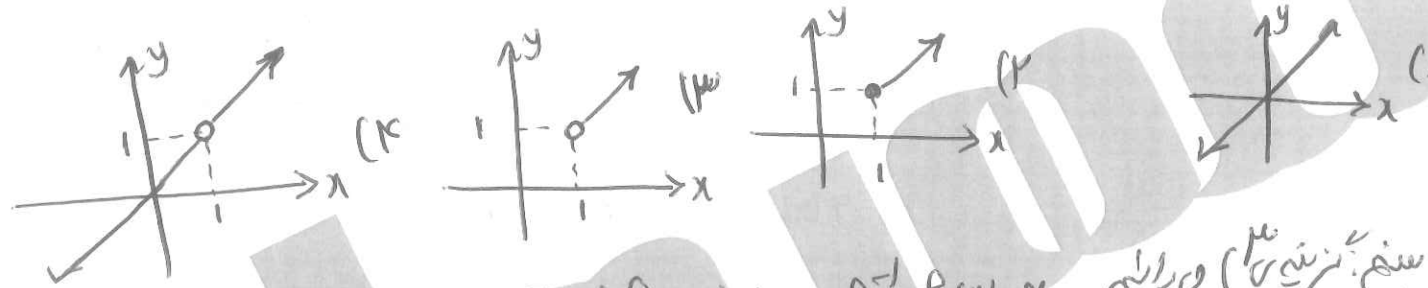


الف) $x \in D_{f^{-1}} : f \circ f^{-1}(x) = x$

ب) $x \in D_f : f^{-1} \circ f(x) = x$.

ج) $D_{f^{-1}} = R_f$ ، $R_{f^{-1}} = D_f$

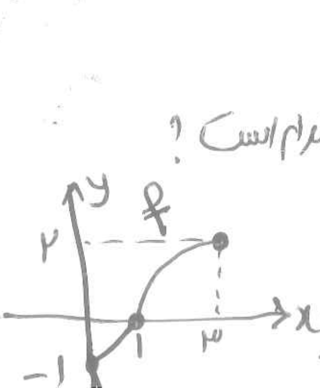
تست: اگر $f(x) = \log(x-1)$، آنگاه نمودار $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟

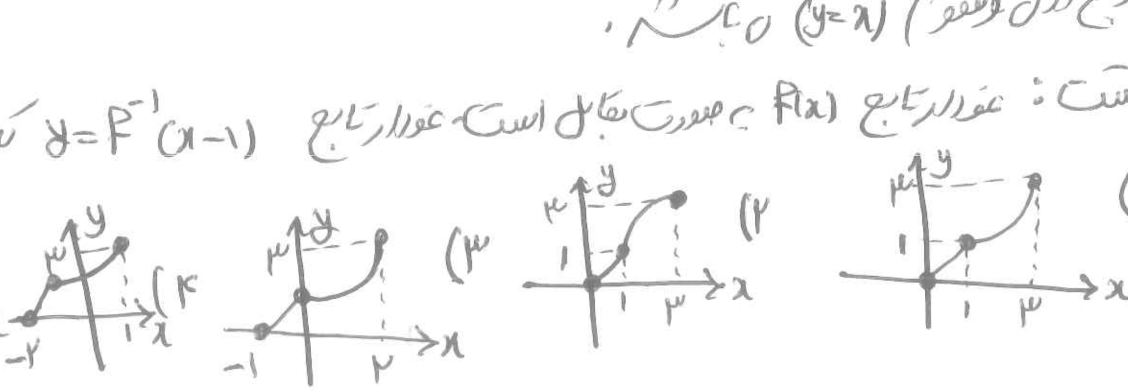


پاسخ: گزینه (۳) می‌دانیم $f^{-1} \circ f(x) = x$ روی دامنه f است، دامنه $f(x) = \log_{10}(x-1)$ برابر با $(1, +\infty)$ می‌باشد. بنابراین نمودار $y = f^{-1} \circ f(x)$، نمودار تابع همانی (نیمساز ربع اول و سوم) روی $(1, +\infty)$ می‌باشد. پس فقط گزینه (۳) می‌تواند درست باشد.

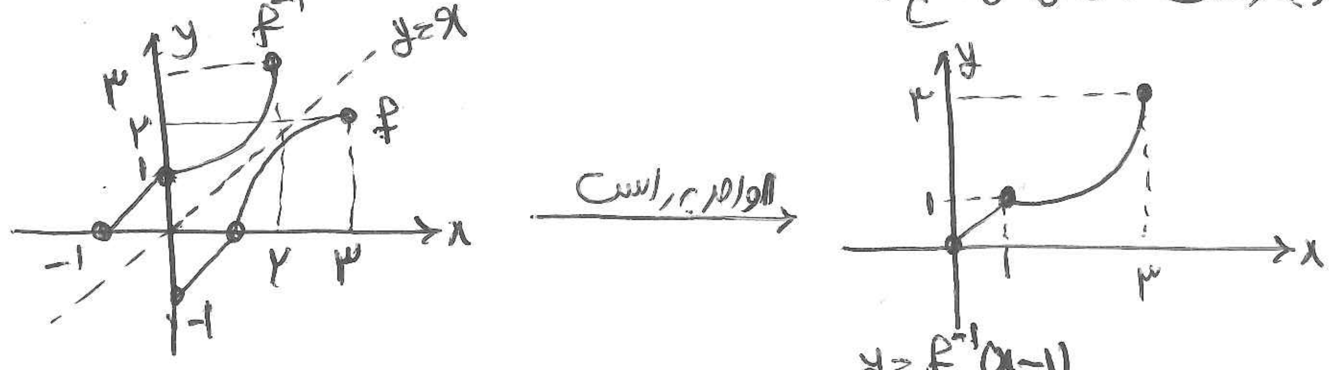
۲) اگر $A(\alpha, \beta)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد، آنگاه $A'(\beta, \alpha)$ نقطه متناظر با A بر روی نمودار f^{-1} است. پس به طور کلی نمودار f^{-1}، قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ می‌باشد.

تست: نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f^{-1}(x-1)$ کدام است؟





پاسخ گزینه ی ۱) ابتدا نمودار f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می کنیم و سپس نمودار حاصل را یک واحد به راست انتقال می دهیم :



$y=f^{-1}(x-1)$

۳) تابع f معکوس پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

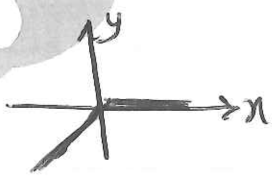
۴) برای یافتن ضابطه ی تابع معکوس تابع f ، ابتدا در تابع $y=f(x)$ ، x را برحسب y یافته سپس جای x و y را عوض می کنیم.

تست : کدام یک از توابع زیر وارون پذیر است؟

۱) $y=x-|x|$ ۲) $y=x+|x|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=\frac{|x|}{x}$

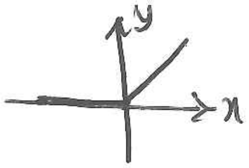
گزینه ی ۳) برای پاسخ به این تست ، نمودار هر یک از گزینه ها را رسم می کنیم :

گزینه ۱ : $y=x-|x|=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$



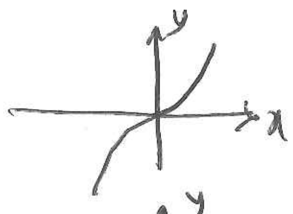
تابع یک به یک نیست.
پس وارون پذیر نیست.

گزینه ۲ : $y=x+|x|=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$



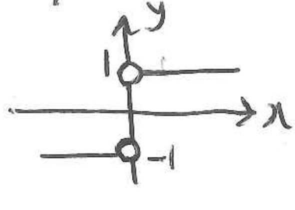
تابع یک به یک نیست
پس وارون پذیر نیست

گزینه ۳ : $y=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$



تابع یک به یک است
بنابراین وارون پذیر است

گزینه ۴ : $y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$



تابع یک به یک نیست.
پس وارون پذیر نیست.

مولف:رحیم قهرمان

تست: تابع $f(x)=2x^2-4x+2$ با دامنه ی $(-\infty,1)$ مفروض است، ضابطه ی $f^{-1}(x)$ کدام است؟ (سنجش تجربی ۹۲)

1) $1-\sqrt{\frac{x}{2}}$ 2) $1+\sqrt{\frac{x}{2}}$ 3) $2-\sqrt{x}$ 4) $2+\sqrt{x}$

پاسخ: گزینه ی (1) در تابع $x<1$ و $y=2x^2-4x+2$ داریم $y=2(x-1)^2$ پس $y>0$ $(x-1)^2=\frac{y}{2}$ با در نظر گرفتن $x<1$ داریم:

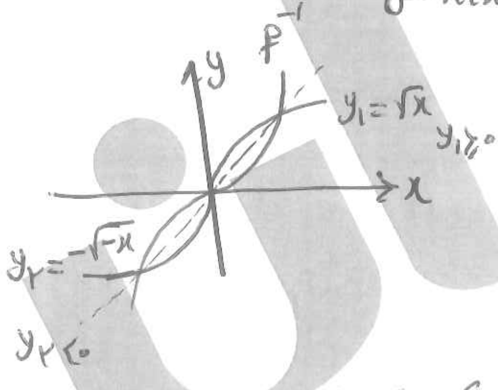
$$x-1=-\sqrt{\frac{y}{2}} \Rightarrow x=1-\sqrt{\frac{y}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{\frac{x}{2}}$$

تست: ضابطه ی وارون تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} ; & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

1) $y=x\sqrt{|x|} ; x\in\mathbb{R}$ 2) $y=x\sqrt{|x|} ; x\in\mathbb{R}-\{0\}$

3) $y=x|x| ; x\in\mathbb{R}-\{0\}$ 4) $y=x|x| ; x\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه ی (4)



$$y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} ; & x\neq 0\\ 0 ; & x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=\sqrt{x} ; & x\geq 0\\ y_2=-\sqrt{-x} ; & x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} \begin{cases}x=\sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2=y ; \underbrace{x\geq 0}_{\text{برد } y_1}\\ x=-\sqrt{-y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2=-y \Rightarrow y=-x^2 ; \underbrace{x<0}_{\text{برد } y_2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 ; & x\geq 0\\ -x^2 ; & x<0\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|$$

۵) اگر f یک تابع معکوس پذیر باشد، آنگاه $(f^{-1})^{-1}=f$ یعنی معکوس معکوس یک تابع برابر خود تابع است

تست: اگر معکوس تابع $f(x)=\frac{ax}{bx+c}$ به صورت $f^{-1}(x)=\frac{4x}{2-x}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه (۳) با توجه به $(f^{-1})^{-1}=f$ کافی است معکوس $f^{-1}(x)=\frac{4x}{2-x}$ را بدست آوریم:

$$y=\frac{4x}{2-x}\longrightarrow 2y-xy=4x\Rightarrow x(y+4)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{y+4}\Rightarrow f(x)=\frac{2x}{x+4}$$

نتیجه:

$$\frac{2x}{x+4}=\frac{ax}{bx+c}\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=4\Rightarrow a+b+c=7$$

۶) اگر f و g دو تابع معکوس پذیر باشند، آنگاه $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

تست: اگر $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=x^3$، آنگاه ضابطه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $y=x-1$ ۲) $y=x+1$ ۳) $y=x+2$ ۴) $y=x-2$

پاسخ: گزینه ۱

$$(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)\ ,\ f(x)=1+\sqrt[3]{x}\ ,\ g(x)=x^3$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=1+\sqrt[3]{x^3}=1+x$$

$$y=1+x\Rightarrow y^{-1}=x-1\Rightarrow (fog)^{-1}(x)=x-1$$

۷) محل تلاقی نمودارهای f و f^{-1}

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، در این صورت ریشه های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله $f(x)=x$ بدست می آیند. در غیر این صورت باید به طور مستقیم معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کرد.

ضمناً ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=x$ یا $f^{-1}(x)=x$ ریشه‌های معادله‌ی $f^{-1}(x)=f(x)$ هستند. توجه کنید که برای توابع اکیداً نزولی ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله‌ی $f(x)=x$ ممکن است به دست نیاید به عنوان مثال تابع $x \to -x$ و یا تابع به ضابطه‌ی $f(x)=-x^3$ را در نظر بگیرید.

تست: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x}+1$، نمودار معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) قطع نمی‌کند.

پاسخ: گزینه‌ی (۱) تابع f اکیداً صعودی است، زیرا جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x+1$ و $y=\sqrt[3]{x}$ می‌باشد، پس ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ از حل معادله‌ی $f(x)=x$ به دست می‌آیند:

$$x+\sqrt[3]{x}+1=x \Rightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Rightarrow x=-1$$

۸) در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $ad\neq bc$ و $c\neq 0$ باشد، $a+d=0$، رابطه‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ برقرار است.

تست: اگر نمودارهای دو تابع $f(x)=\frac{2x+a}{-x+b}$ و $y=f^{-1}(x)$ بر هم منطبق باشند، مجموعه مقادیر a و b کدام است؟

۱) $b=2$ ، $a\in\mathbb{R}$ ۲) $b=-2$ ، $a\in\mathbb{R}$ ۳) $b=2$ ، $a\in\mathbb{R}-\{4\}$ ۴) $b=-1$ ، $a\in\mathbb{R}-\{4\}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$f(x)=\frac{2x+a}{-x+b} \xrightarrow{f=f^{-1}} 2+b=0 \Rightarrow b=-2 \quad (*)$$

شرط دیگر: $(ad\neq bc)$

$$\begin{cases} -1\neq 0 \\ 2b\neq -a \xrightarrow{(*)} 2\times(-2)\neq -a \Rightarrow a\neq -4 \end{cases}$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**
مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر $g(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ با شد و $f(x)=1-|x+2|$ در بازه $(-1,+\infty)$ تعریف شده باشد ضابطه $y=gof^{-1}$ کدام است؟

۱) f وارون پذیر است. ۲) $y=\dfrac{1-x}{x}\ ;\ x<0$

۳) $y=\dfrac{x-1}{x}\ ;\ x<-1$ ۴) $y=\dfrac{x-1}{x}\ ;\ x<0$

پاسخ: گزینه (۴)

$x>-1 \Rightarrow x+2>1>0 \Rightarrow y=f(x)=1-(x+2) \Rightarrow y=-x-1\ ,\ y<0$

$y=-x-1 \Rightarrow x=-1-y \Rightarrow f^{-1}(x)=-1-x\ ;\ x<0$

$D_{gof^{-1}}=\{x\in D_{f^{-1}}\ |\ f^{-1}(x)\in D_g\}=\{x<0\ |\ -1-x\neq -1\}$

$=\{x<0\ |\ x\neq 0\}=\{x<0\}=(-\infty,0)$

$gof^{-1}(x)=g(-1-x)=\dfrac{-1-x+2}{-1-x+1}=\dfrac{1-x}{-x}=\dfrac{x-1}{x}\ ;\ x<0$

تست: هرگاه f معکوس پذیر و $D_f=[-3,12]$ و $R_f=[4,10]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $\dfrac{fof^{-1}(x)}{f^{-1}of(x)}$ شامل چند عضو صحیح است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه (۳)

$D_{\frac{fof^{-1}}{f^{-1}of}}=D_{fof^{-1}}\cap D_{f^{-1}of}-\{x\ |\ f^{-1}of(x)=0\}=D_{f^{-1}}\cap D_f-\{x\in D_f, x=0\}$

$=\left([4,10]\cap[-3,12]\right)-\{0\}=[4,10]$