تابع

- مفهوم تابع و بازنمایی های آن:

تعریف: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده می شود.

- مثال: تعیین کنید کدام یک از روابط زیر معرف یک تابع است و کدام یک معرف یک تابع نیست.

۱) رابطه بین افراد و سن آنها در یک زمان خاص

۲) رابطه بین دانش آموزان و نمرات کارنامه آنها

۳) رابطه بین افراد و غذاهای مورد علاقه آنها

۴) رابطه بین دایره ها و مساحت آنها

۵) رابطه بین افراد و رنگ چشم آنها

۶) رابطه بین دانش آموزان و نمرات درس ریاضی آنها

پاسخ:

۱) هر فرد در یک زمان خاص نمی تواند بیش از یک سن داشته باشد، پس این رابطه یک تابع است.
۲) در کارنامه هر دانش آموز نمرات دروس مختلف موجود است، پس این رابطه لزوماً تابع نیست.
۳) هر فرد می تواند به بیش از یک غذا علاقه داشته باشد، پس این رابطه لزوماً تابع نیست.
۴) مساحت هر دایره با شعاع مشخص، یک مقدار مشخص است و یک دایره نمی تواند دو یا چند مساحت داشته باشد، پس این رابطه تابع است.
۵) یک فرد نمی تواند بیش از یک رنگ چشم داشته باشد، پس این رابطه یک تابع است.
۶) در درس ریاضی به هر دانش آموز فقط (یا دقیقاً) یک نمره تعلق می گیرد، پس این رابطه یک تابع است.

- نمایش تابع به یکی از صورت های زیر می تواند باشد :

۱) نمودار ون یا پیکانی :

مواردی که در این نوع نمایش مورد توجه است و باید به آنها دقت شود عبارتند از :

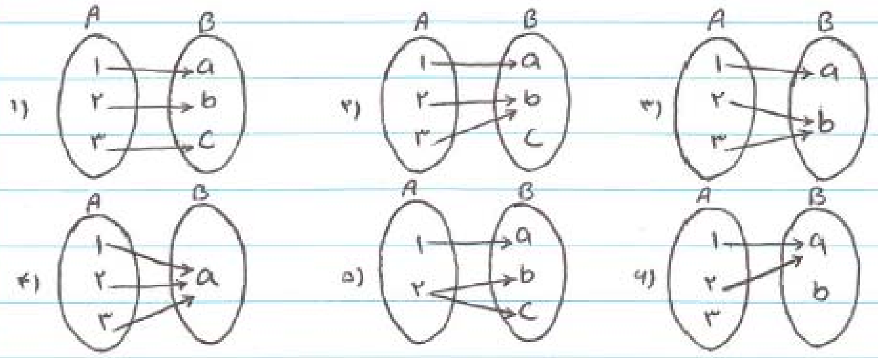
۱- به مجموعه ای که پیکان از آن خارج می شود، دامنه و به مجموعه ای که پیکان به آن وارد می شود هم دامنه یا برد گفته می شود.

۲- برای تابع بودن کافی است از هر عضو از مجموعه دامنه فقط یک پیکان خارج شده باشد.

۳- لزومی ندارد به هر عضو از مجموعه برد حتماً یک پیکان وارد شده باشد. یعنی اگر به عضوی از مجموعه برد پیکانی وارد نشود، یا بیش از یک پیکان به آن وارد شده باشد، نمودار مربوط به یک تابع خواهد بود.

۴- حتماً باید از تمامی اعضای مجموعه دامنه، پیکان خارج شده باشد.

۵- عموماً جهت پیکان ها از چپ به راست است در برخی مواقع ممکن است این مورد برعکس باشد یعنی جهت پیکان ها از راست به چپ رسم شده باشد.



موارد ۱، ۲، ۳ و ۴ تابع هستند و موارد ۵ و ۶ تابع نیستند.

۲) جدول :

مواردی که در این نوع نمایش باید به آنها دقت شود عبارتند از :

۱- اگر مقادیر بالای جدول (سطر اول) باهم برابر بودند، باید مقادیر متناظر آنها در پایین جدول (سطر دوم) باهم برابر باشند.

۲- مقادیر بالای جدول، مجموعه دامنه و مقادیر پایین جدول، مجموعه هم دامنه یا برد را تشکیل می دهند.

۳- لزومی ندارد مقادیر پایین جدول همگی یکسان باشند. (درصورت متمایز بودن مقادیر بالای جدول)

مثال:

1)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	0	0	2	3

2)

x	$\frac{1}{2}$	2	2	3
y	-2	-1	0	$-\frac{1}{3}$

3)

x	1	2	3	4
y	1	1	1	1

4)

x	-1	0	1	-1	2
y	0	1	2	0	1

5)

x	1	1	1	1
y	-1	-1	-1	-1

6)

x	2	2	2	2
y	1	2	3	4

موارد ۱، ۳، ۴ و ۵ تابع هستند و موارد ۲ و ۶ تابع نیستند.

۳) زوج مرتب:

اگر یک رابطه به صورت زوج های مرتب نمایش داده شده باشد، زمانی این رابطه مربوط به یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه اول یکسان نباشند.

تذکر:

۱- به مجموعه مؤلفه های اول، دامنه و به مجموعه مؤلفه های دوم، هم دامنه یا برد گفته می‌شود.
۲- اگر مؤلفه اول دو زوج مرتب برابر باشد، باید مؤلفه دوم نیز برابر باشد.
۳- اگر مؤلفه های اول متمایز باشند لزومی ندارد مؤلفه های دوم متمایز باشند.

1) $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$ 2) $f=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,1)\}$

3) $f=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$ 4) $f=\{(2,1)\}$

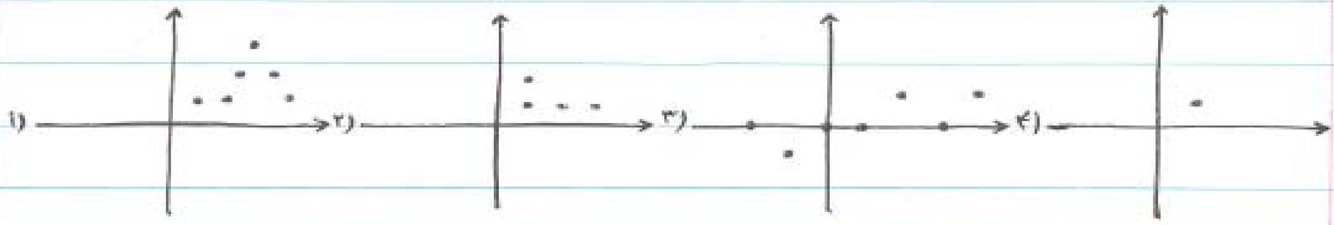
5) $f=\{(-1,5),(m,1),(1,5)\}$ 6) $f=\{\ \}$

موارد ۱، ۲، ۳، ۴ تابع هستند. در خصوص مورد ۶ به این موضوع دقت شود که مجموعه تهی نیز یک تابع است.
۵) اگر $m=-1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1,1)$ و $(-1,5)$ در رابطه وجود دارند که در این صورت رابطه نمی‌تواند تابع باشد و اگر $m=1$ باشد، دو زوج مرتب $(1,1)$ و $(1,5)$ در رابطه وجود دارند که در این صورت نیز رابطه نمی‌تواند تابع باشد. بنابراین اگر $m\neq\pm1$ باشد رابطه معرف یک تابع خواهد بود.

۴) نمودار مختصاتی:

الف) نمودار نقطه‌ای:

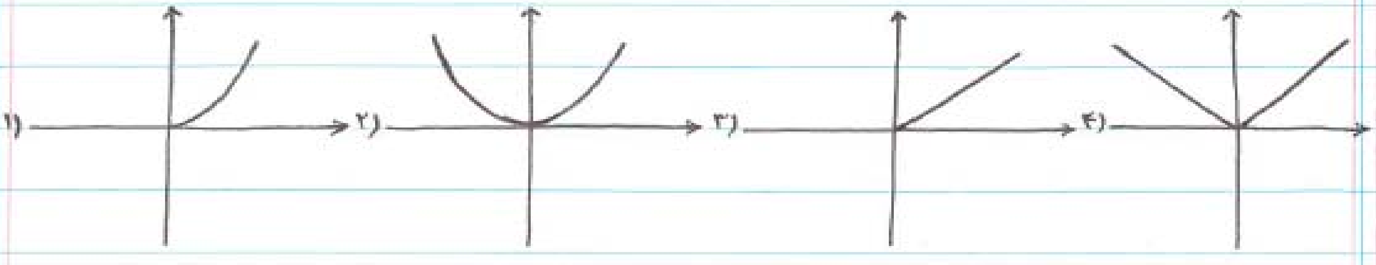
در این مورد فقط کافی است از نقاط مشخص شده روی نمودار مختصاتی، هیچ دو نقطه‌ای در طول هم نباشند یعنی در راستای عمودی هم قرار نداشته باشند ولی اگر در عرض هم باشند یا در راستای افقی هم قرار داشته باشند مشکلی پیش نخواهد آمد یعنی نمودار نقطه‌ای مربوط به تابع خواهد بود.
اینگونه نمودار را می‌توان به صورت زوج مرتب، پیکانی یا جدول نیز نمایش داد و بالعکس.

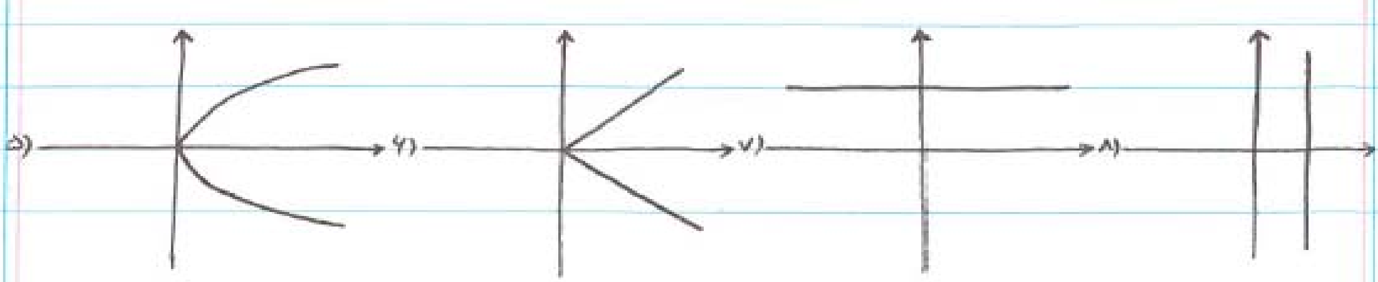


موارد ۱، ۳، ۴ تابع هستند و مورد ۲ تابع نیست.

ب) نمودار پیوسته:

در این مورد نمودار داده شده زمانی مربوط به یک تابع است که اگر خطی موازی محور y ها (عرض‌ها، محور عمودی) رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
توجه کنید که یعنی فقط یک خط که نمودار داده شده را در بیش از یک نقطه قطع کند کافی است تا بگوییم نمودار مربوط به تابع نیست.

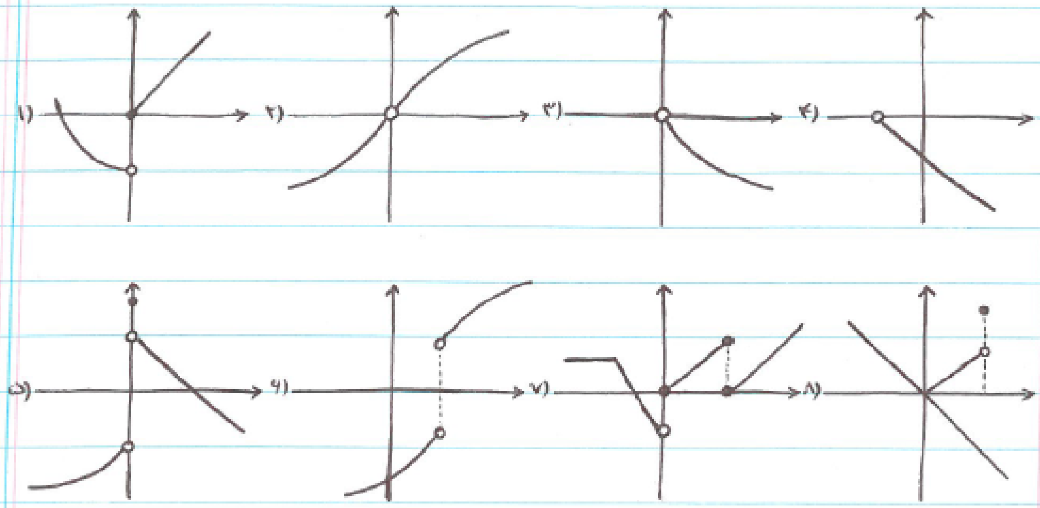




نمودارهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ تابع هستند و نمودارهای ۵، ۶ و ۸ تابع نیستند.

ج) نمودار گسسته (دارای نقاط توخالی):

در این مورد اگر نقاط توخالی با یک نقطه توخالی و یک نقطه توپر در طول هم باشند آن نمودار مربوط به یک تابع است البته باید به سایر نقاط نمودار نیز توجه کرد. اما اگر نقاط توپر در طول هم باشند نمودار مربوط به تابع نیست.



نمودارهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تابع هستند و نمودارهای ۷ و ۸ تابع نیستند.

۵) نمایش جبری یا ضابطه‌ای:

این نوع نمایش، نمایش یک عبارت جبری از یک متغیر است. معمولاً تابع را با نمادهای y، $f(x)$، $g(x)$ و ... نمایش می‌دهیم که در آنها x متغیر است.

۱) $y = f(x) = x$ ۲) $y = f(x) = x - 1$ ۳) $y = f(x) = -2x - \frac{1}{3}$ ۴) $y = f(x) = x^2$

۵) $y = f(x) = x^2 + 1$ ۶) $y = f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ۷) $y = f(x) = \sqrt{x}$ ۸) $y = f(x) = \sqrt{x - 1}$

۹) $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ 3x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$

۱۰) $y = f(x) = \begin{cases} x - 4 & ; x > 1 \\ \frac{5}{2} & ; x = 1 \\ -x & ; -4 \leq x < 1 \end{cases}$

توجه: توابع ۱، ۲ و ۳ از نوع تابع خطی، توابع ۴، ۵ و ۶ از نوع تابع درجه دوم یا سهمی، توابع ۷ و ۸ از نوع تابع رادیکالی و توابع ۹ و ۱۰ از نوع تابع چندضابطه‌ای یا چندقطعه‌ای می‌باشند.

دامنه این توابع همواره بزرگترین مجموعه اعداد (مجموعه اعداد حقیقی) است مگر آنکه در مقابل ضابطه تابع دامنه محدودتری برای آن‌ها تعریف شده باشد یا اینکه به خاطر وجود برخی محدودیت‌های ذاتی خود تابع که از روی ضابطه آن مشخص است، دامنه محدود می‌شود و برد این توابع نیز می‌تواند مجموعه اعداد حقیقی یا زیرمجموعه‌ای از این مجموعه باشد.
به طور مثال تابع $y=\sqrt{x}$ با توجه به وجود رادیکال با فرجه زوج کاملاً روشن است که این تابع نمی‌تواند اعداد منفی را به عنوان ورودی بپذیرد در نتیجه دامنه این تابع فقط به صورت $x \geq 0$ خواهد بود و برد آن نیز به صورت $y \geq 0$ می‌باشد.

مثال:

۱- رابطه $A=\{(3,m^2),(2,1),(-3,m),(-2,m),(m,4),(3,m+2)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) هیچ مقدار m

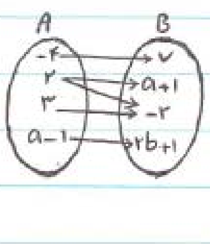
حل:

$$(3,m^2),(3,m+2) \longrightarrow m^2=m+2 \longrightarrow m^2-m-2=0 \longrightarrow (m+1)(m-2)=0 \longrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} m=-1 \longrightarrow A=\{(3,1),(2,1),(-3,-1),(-2,-1),(-1,4),(3,1)\} \checkmark \\ m=2 \longrightarrow A=\{(3,4),(2,1),(-3,2),(-2,2),(2,4),(3,4)\} \times \end{cases}$$

گزینه ۲ درست است.

۲- اگر نمودار ون مقابل مربوط به یک تابع باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) -6 ۲) 0 ۳) 3 ۴) 6

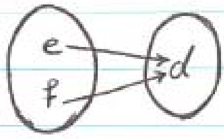
حل:

$$(2,a+1),(2,-2) \longrightarrow a+1=-2 \longrightarrow a=-3$$
$$(-4,7),(\underbrace{a-1}_{-4},2b+1) \longrightarrow 2b+1=7 \longrightarrow b=3$$
$$\longrightarrow b-a=3-(-3)=\underbrace{6}$$

گزینه ۴ درست است.

۳- نمودار ون تابع $R=\{(2a,2c),(4a-9c,2b),(a^2+1,a)\}$ مطابق شکل زیر است. مقدار $e+f$ کدام است؟ (a مقداری حقیقی و مثبت است.)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴



حل:

از نمودار ون داده شده مشخص است که برد تابع مورد نظر فقط یک عضو دارد، بنابراین:

$$\begin{cases}2c=d\\2b=d\\a=d\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}2c=a\\2b=a\end{cases}\longrightarrow R=\{(2a,a),(a,a),(a^2+1,a)\}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}2a=a\longrightarrow \underline{a=0}\quad \text{غ ق ق}\\2a=a^2+1\longrightarrow a^2-2a+1=0\longrightarrow (a-1)^2=0\longrightarrow \underline{a=1}\quad \text{ق ق}\longrightarrow \underline{d=1}\\a=a^2+1\longrightarrow a^2-a+1=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

$$\longrightarrow R=\{(2,1),(1,1),(2,1)\}=\{(2,1),(1,1)\}$$

مقادیر ۱ و ۲ برای e و f بدست می‌آید که در هر صورت مجموع $e+f$ برابر ۳ خواهد بود.
گزینه ۳ درست است.

۴- اگر دامنه دو تابع به صورت‌های $f=\{(2,2x+1),(2,5y),(x-2,3)\}$ و $g=\{(3y-4,1),(2,1)\}$ برابر باشد، مقدار $3x-7y$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

حل:

$f=\{(2,2x+1),(2,5y),(x-2,3)\}\longrightarrow$ دامنه: $\{2,x-2\}$

$\longrightarrow x-2=3y-4\longrightarrow 3y-x=2$

$g=\{(3y-4,1),(2,1)\}\longrightarrow$ دامنه: $\{3y-4,2\}$

از طرفی: $2x+1=5y\longrightarrow 5y-2x=1$

$$\rightarrow \begin{cases} 3y - x = 2 \\ 5y - 2x = 1 \end{cases} \longrightarrow y = 3 \longrightarrow x = 7 \longrightarrow 3x - 7y = 3(7) - 7(3) = 0$$

گزینه ۳ درست است.

۵- اگر رابطه $R = \{(x+1, 1), (3, y), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{1-y^2}}{y})\}\ ;\ x, y \in \mathbb{Z}$ تابع نباشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -3 ۳) 0 ۴) 3

حل:

برای آنکه رابطه داده شده تابع نباشد، باید x و y را به گونه‌ای تعیین کنیم که دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت ایجاد شود:

$$x \in \mathbb{Z} \longrightarrow x+1 \in \mathbb{Z} \longrightarrow x+1 \neq \sqrt{3}$$

$$(x+1, 1), (3, y) \longrightarrow x+1 = 3 \longrightarrow x = 2 \ , \ y \neq 1$$

با توجه به اینکه باید $x, y \in \mathbb{Z}$ و وجود عبارت رادیکالی با فرجه زوج در زوج مرتب $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{1-y^2}}{y})$ تنها اعداد صحیحی که برای y قابل قبول است مقادیر ۱ و ۱- است. به ازای سایر مقادیر صحیح بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۱- عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود که با ... و مخرج نیز نمی‌تواند صفر باشد. از طرفی در ابتدا به این نتیجه رسیدیم که $y \neq 1$ بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای y مقدار ۱- است. در نتیجه:

$$x = 2\ , \ y = -1 \longrightarrow x + y = 2 + (-1) = 1$$

گزینه ۱ درست است.

۶- کدام یک از روابط زیر ضابطه یک تابع را مشخص نمی‌کند؟

۱) $y = 2$ ۲) $-1-|y| = x(x-2)$

۳) $xy = 0$ ۴) $y^2 + 4y + x^2 - 2x = -5$

حل:

گزینه ۱، یک تابع ثابت است. تابعی که برد آن تنها یک عضو دارد.

$$2)\ -1-|y| = x(x-2) \longrightarrow -|y| = x^2 - 2x + 1 \longrightarrow -|y| = (x-1)^2 \longrightarrow (x-1)^2 + |y| = 0$$

مجموع دو عبارت مثبت زمانی برابر صفر است که هر دو عبارت هم‌زمان صفر شوند:

$$\begin{cases} |y|=0 \longrightarrow y=0 \\ (x-1)^2=0 \longrightarrow x-1=0 \longrightarrow x=1 \end{cases} \longrightarrow \{(1,0)\} \longrightarrow$$ تابع است

۴) $$y^2+4y+x^2-2x=-5 \longrightarrow \underbrace{y^2+4y+4}_{(y+2)^2}+\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}+5-5=0$$

$$\longrightarrow (y+2)^2+(x-1)^2=0 \longrightarrow \begin{cases} y+2=0 \longrightarrow y=-2 \\ x-1=0 \longrightarrow x=1 \end{cases} \longrightarrow \{(1,-2)\} \longrightarrow$$ تابع است

۳) $xy=0$

برای تشخیص اینکه این رابطه مربوط به یک تابع است یا نه از روش عددگذاری استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \longrightarrow xy=0 \quad , \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow xy=0 \quad , \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \longrightarrow xy=0 \quad , \ldots$$

کاملاً مشخص است برای این رابطه نمی‌تواند معرف یک تابع باشد.

گزینه ۳ درست است.

تذکر:

دامنه و برد توابع می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مثال: تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد، ب) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد،

ج) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد، د) دامنه آن نامتناهی ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد،

هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

الف) $f=\{(-3,0),(1,4)\}$

تذکر: اگر دامنه دو عضوی باشد و برد نامتناهی، خواهیم داشت:

مجموعه $\{a,b\}$ را به عنوان دامنه و مجموعه اعداد طبیعی را به عنوان برد در نظر بگیریم در این صورت:

$$f=\{(a,1),(a,2),\ldots,(b,1),(b,2),\ldots\}$$

چنین رابطه‌ای تابع نیست، چون چند زوج مرتب در این رابطه وجود دارد که مؤلفه‌های اول آنها یکسان است ولی مؤلفه‌های دوم آنها متفاوت است.

ب) $f=\{(-1,4)\}$

ج) $f = \{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲)\}$

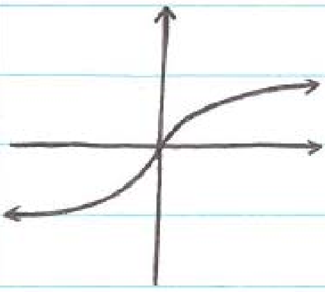
د) رابطه $R = \{(۱,a),(۲,a),(۳,a),(۴,a),...\}$ را در نظر می‌گیریم، دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی و برد آن مجموعه تک عضوی $\{a\}$ می‌باشد.

این رابطه تابع می‌باشد، چون هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن وجود ندارد که مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت داشته باشند.

بنابراین اگر برد رابطه‌ای دقیقاً یک عضو داشته باشد، آن رابطه قطعاً تابع است، زیرا هیچ مؤلفه اولی نمی‌تواند دو یا چند مؤلفه دوم متمایز داشته باشد.

اگر دامنه تک عضوی باشد، به شرط آنکه برد نیز تک عضوی باشد رابطه تابع است اما اگر برد بیش از یک عضو داشته باشد رابطه تابع نیست.

ه) نمودار مقابل، مربوط به یک تابع با دامنه و برد مجموعه اعداد حقیقی است:

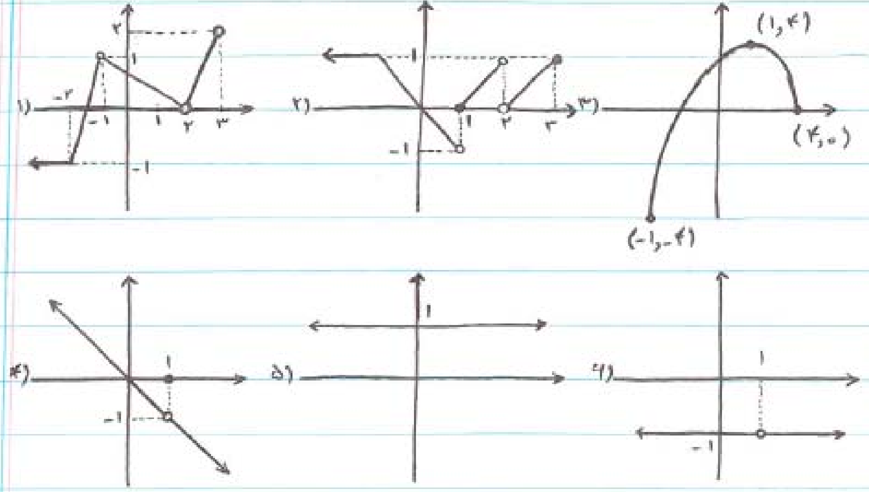


بنابراین اگر تعداد اعضای دامنه و برد نامتناهی باشند، رابطه زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متمایز نداشته باشد.

اگر تعداد اعضای دامنه یک رابطه متناهی و کمتر از تعداد اعضای برد آن باشد، رابطه قطعاً تابع نیست اما اگر تعداد اعضای برد رابطه متناهی و کمتر یا مساوی تعداد اعضای دامنه آن باشد، ممکن است رابطه تابع نباشد.

مثلاً رابطه $R = \{(۱,۲),(۰,۱),(۱,۳)\}$ و رابطه $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۳),(۲,۳)\}$ تابع نیستند.

مثال: دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید:



حل:

برای راحتی کار دامنه را با حرف D و برد را با حرف R نشان می‌دهیم:

1) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,3)$, $R=[-1,2)$

2) $D=(-\infty,2)\cup(2,3]$, $R=(-1,1]$

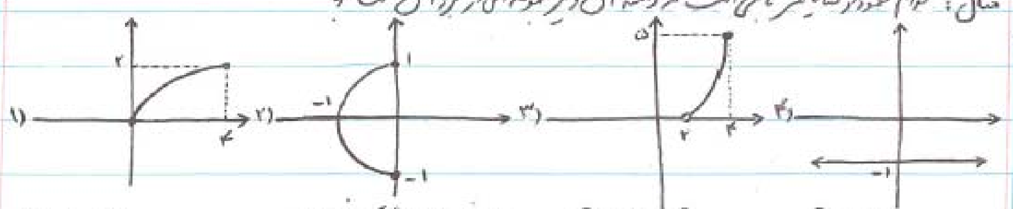
3) $D=[-1,4]$, $R=[-4,4]$

4) $D=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, $R=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

5) $D=\mathbb{R}$, $R=\{1\}$

6) $D=\mathbb{R}-\{1\}$, $R=\{-1\}$

مثال: کدام نمودار نمایش تابعی است که دامنه آن زیرمجموعه‌ای از برد آن است؟



1) $D=[0,4]$, $R=[0,2]$ — ×

2) این نمودار اصلاً تابع نیست! — ×

3) $D=(2,4]$, $R=(0,5]$ — ✓

4) $D=\mathbb{R}$, $R=\{-1\}$ — ×

- انواع توابع:

۱) توابع چندجمله‌ای:

توابعی را که ضابطه جبری آنها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند را توابع چندجمله‌ای می‌گوییم.

$$f(x) = x + 1 \qquad g(a) = 2a^2 - 5 \qquad h(t) = t^3 + t^2 - \sqrt{2}$$

دامنه اینگونه توابع همواره بزرگترین مجموعه اعداد ممکن یعنی مجموعه اعداد حقیقی است مگر اینکه دامنه‌ای برای آنها تعیین شده باشد، یا به خاطر برخی خصوصیات ذاتی خود تابع ما به پرداختن دامنه تعیین کنیم. مانند تابع ارتفاعی که قبلاً راجع به آن توضیح داده شد.

۲) توابع خطی:

هر تابعی که ضابطه آن به صورت $y = f(x) = ax + b$ باشد، یک تابع خطی است. که در آن ضریب x یا a، شیب خط و b یا عدد ثابت، عرض از مبدأ خط نامیده می‌شود.

اگر دو نقطه از یک خط یا یک تابع خطی در اختیار باشد می‌توان از طریق یافتن شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه، مقدار a را بدست آورده و با جایگذاری نقاط در ضابطه تابع خطی، معادله اصلی یا ضابطه اصلی تابع خطی را بدست آورد.

در این مورد به صورت زیر نیز می‌توان عمل کرد:

$$\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \end{cases} \in \text{خط} \longrightarrow \text{معادله خط یا ضابطه تابع خطی}: \; y - y_A = a(x - x_A)$$

$$a = \text{شیب} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- حالات خاص:

۱- در ضابطه تابع خطی $y = ax + b$ اگر $b = 0$ (عرض از مبدأ برابر صفر) باشد، ضابطه تابع به صورت $y = ax$ در می‌آید مربوط به خطی است که اصطلاحاً به آن خط مبدأ گذر می‌گوییم.

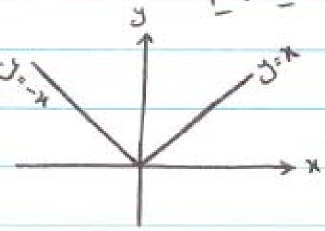
در این مورد اگر $a = 1$ باشد، ضابطه تابع خطی به صورت $y = f(x) = x$ خواهد بود که اگر دامنه و برد این تابع را برابر در نظر بگیریم، هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر می‌شود به همین علت به این تابع خطی، تابع همانی نیز گفته می‌شود.

۲- در ضابطه تابع خطی $y = ax + b$، اگر $a = 0$ (شیب برابر صفر) باشد، ضابطه تابع به صورت $y = b$ در می‌آید که مربوط به خطی افقی و موازی محور x ها می‌باشد. به اینگونه خطوط یا توابع خطی به فرم $y = f(x) = b$ تابع ثابت می‌گوییم. دامنه این توابع به شرط محدود نبودن، برابر مجموعه اعداد حقیقی و برد آن‌ها تک عضوی است.

۳- در برخی مواقع معادله خط به فرم $x = k$ داده می‌شود که این معادله مربوط به خطی عمودی و موازی محور y ها می‌باشد که همواره تابع نیستند.

۳) تابع قدرمطلق:

تابعی که هر مقدار از دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با نماد $y = |x|$ یا $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهیم.



$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

- مقدار تابع در یک نقطه:

هر تابع را می‌توان به صورت یک ماشین در نظر گرفت که هر گاه یک عضو از دامنه را به عنوان ورودی به آن بدهیم، عضو منحصر به فردی از برد را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.

ورودی   تابع   خروجی

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

$f = \{(1,2),(2,4),(3,6)\} \longrightarrow$
- دامنه یا ورودی: $\{1,2,3\}$
- برد یا خروجی: $\{2,4,6\}$

$\longrightarrow f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$

$f(1)=2$ یعنی مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۲ است، $f(2)=4$ یعنی مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۴ است و به همین ترتیب $f(3)=6$

رابطه بین دامنه و برد (ورودی‌ها و خروجی‌ها) را می‌توان به صورت یک رابطه ریاضی نوشت: $y = f(x) = 2x$

بنابراین اگر مقدار تابع را در یک نقطه از ما بخواهند، با توجه به ضابطه تابع می‌توانیم نقطه داده شده را در ضابطه تابع جایگذاری کنیم تا مقدار تابع در آن نقطه بدست آید.

مثال: برای یک تابع خطی می‌دانیم: $f(1)=0$, $f(-3)=-8$. نمودار این تابع را رسم کنید و ضابطه جبری آن را بنویسید.

روش اول: $f(1)=0 \longrightarrow (1,0) \in$ خط

$f(-3)=-8 \longrightarrow (-3,-8) \in$ خط $\longrightarrow$ شیب: $a=\dfrac{-8-0}{-3-1}=\dfrac{-8}{-4}=2$

$\longrightarrow \underline{f(x)=2x-2}$

$\xrightarrow[f(x)=ax+b]{y=ax+b} f(x)=2x+b \xrightarrow{(1,0)\in \text{خط}} 0=2(1)+b \longrightarrow b=-2$

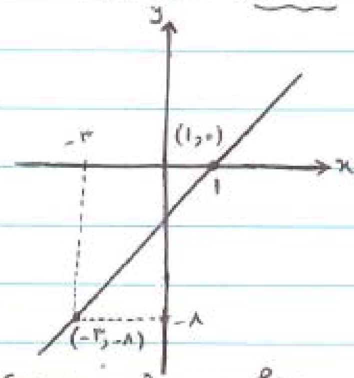
روش دوم: $y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \longrightarrow y-0=\dfrac{-8-0}{-3-1}(x-1) \longrightarrow \underline{y=2x-2}$

روش سوم:

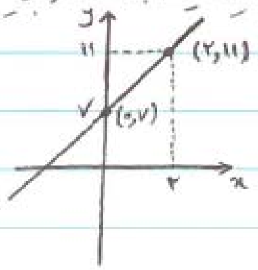
$$\begin{cases} f(x)=ax+b \xrightarrow{f(1)=0} 0=a(1)+b \longrightarrow a+b=0 \\ f(x)=ax+b \xrightarrow{f(-3)=-8} -8=a(-3)+b \longrightarrow -3a+b=-8 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overset{\times 3}{\begin{cases} a+b=0 \\ -3a+b=-8 \end{cases}} \longrightarrow \begin{cases} 3a+3b=0 \\ -3a+b=-8 \end{cases}$$

$4b=-8 \longrightarrow \underline{b=-2} \longrightarrow a=2 \longrightarrow \underline{f(x)=2x-2}$



مثال: برای یک تابع خطی می‌دانیم: $f(0)=7$, $f(2)=11$. نمودار این تابع را رسم کنید و ضابطه جبری آن را بنویسید.



$f(0)=7 \longrightarrow 7=a(0)+b \longrightarrow \underline{b=7}$

$f(2)=11 \longrightarrow 11=a(2)+7 \longrightarrow \underline{a=2}$

$\longrightarrow \underline{f(x)=2x+7}$

مثال: اگر تابع $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+c-2}{x^2-x+1}$ همانی باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۲

۳) ۲-

۴) ۳

$$\text{تابع همانی} \rightarrow f(x)=x \rightarrow \frac{x^3+ax^2+bx+c-2}{x^2-x+1}=x$$

$$\rightarrow x^3+ax^2+bx+c-2=x^3-x^2+x$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c-2=0 \rightarrow c=2 \end{cases} \rightarrow a+b+c=-1+1+2=\underset{\smile}{2}$$

گزینه ۲ درست است.

مثال: اگر تابع $f(x)=(2a-1)x+ax-a+1$ ثابت باشد، $f(1)+f(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{8}{3}$

$$\text{تابع ثابت} \rightarrow f(x)=b \rightarrow f(x)=(2a-1)x+ax-a+1$$

یعنی باید یک مقدار ثابت باشد و متغیری در آن وجود نداشته باشد

$$\underbrace{(2a-1+a)}_{\text{باید برابر صفر شود}}x-a+1=\text{یک مقدار ثابت}$$

$$\rightarrow 3a-1=0 \rightarrow \underset{\smile}{a=\frac{1}{3}} \rightarrow f(x)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f(1)+f(-1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\underset{\smile}{\frac{4}{3}}$$

گزینه ۳ درست است.

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=2x-1$، اگر $f(a)=3f(1)-f(0)$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲

۲) ۲٫۵

۳) ۳

۴) ۳٫۵

$$\begin{cases} f(a)=2a-1 \\ f(1)=2(1)-1=1 \\ f(0)=2(0)-1=-1 \end{cases} \xrightarrow{f(a)=3f(1)-f(0)} 2a-1=3(1)-(-1)$$

$$2a-1=3+1$$

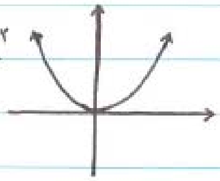
$$2a=5 \rightarrow a=\frac{5}{2}=\underset{\smile}{2.5}$$

گزینه ۲ درست است.

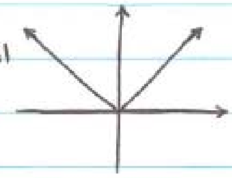
- رسم برخی توابع به کمک انتقال:

با توجه به شکل نمودار دو تابع $y=|x|$ و $y=x^2$ به صورت زیر است، می‌توان نمودار برخی توابع را به کمک انتقال این دو نمودار رسم کرد.

$y=x^2$



$y=|x|$

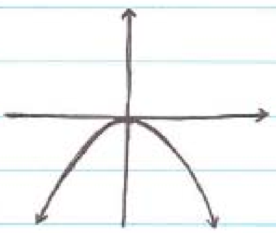


۱- نمودار تابع $y=f(x)+k$ را با انتقال نمودار تابع $y=f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور yها می‌توان رسم کرد. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

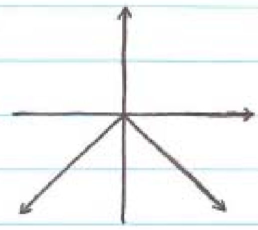
۲- نمودار تابع $y=f(x+k)$ را با انتقال نمودار تابع $y=f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور xها می‌توان رسم کرد. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

تذکر: اگر ضابطه تابع $y=f(x)$ به صورت $y=-f(x)$ درآید، در رسم، کافی است نمودار تابع اصلی را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

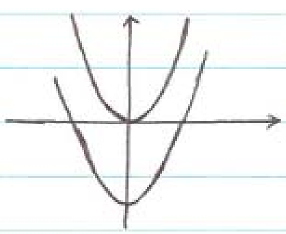
$y=-x^2$



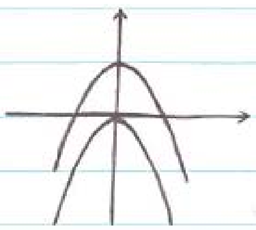
$y=-|x|$



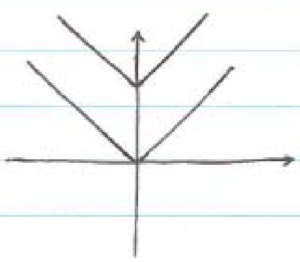
$y=x^2-2$



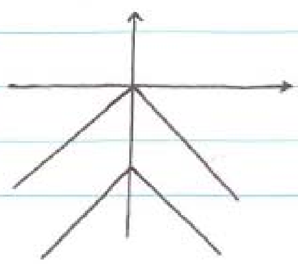
$y=-x^2+2$



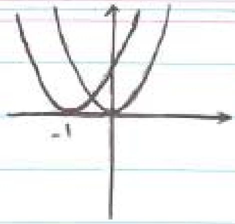
$y=|x|+2$



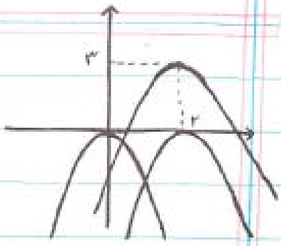
$y=-|x|-2$



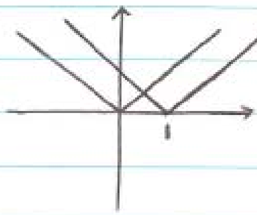
$y=(x+1)^2$



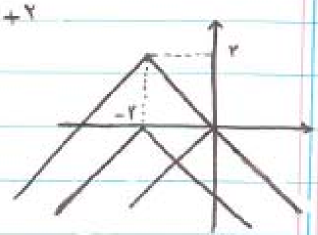
$y=-(x-2)^2+3$



$y=|x-1|$

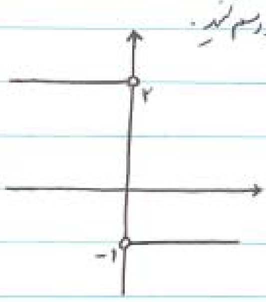


$y=-|x+2|+2$



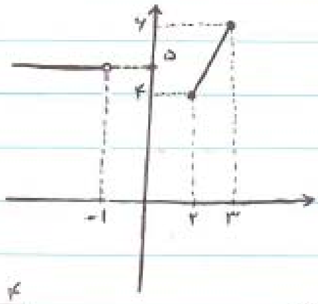
مثال: توابع چند ضابطه ای (قطعه ای) زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ; \ x>0\\ 2 & ; \ x<0\end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}2x & ; \ 2\leq x\leq 3\\ 5 & ; \ x<-1\end{cases}$$

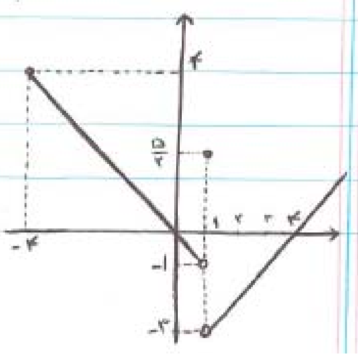
x	2	3
$f(x)$	4	6



$$f(x)=\begin{cases}x-4 & ; \ x>1\\ \frac{5}{2} & ; \ x=1\\ -x & ; \ -4\leq x<1\end{cases}$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3	-2	-1	0

x	-4	0	1
$f(x)$	4	0	-1



چند مثال دیگر:

۱- برای اندازه‌گیری دما از واحدهای سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) استفاده می‌شود که با رابطه $F=\frac{9}{5}C+32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) ۲۰- درجه سانتی‌گراد برحسب فارنهایت چند است؟

ب) ۱۰۴ درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

ج) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت بتوان بدست آورد.

د) آیا رابطه بین این دو واحد یک تابع خطی است؟

الف) $C=-20 \longrightarrow F=\frac{9}{5}(-20)+32=-36+32=-4$

ب) $F=104 \longrightarrow 104=\frac{9}{5}C+32 \longrightarrow \frac{9}{5}C=72 \longrightarrow C=\frac{72\times 5}{9}=40$

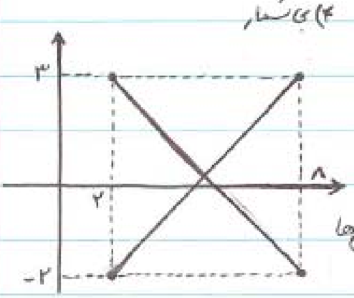
ج) $F=\frac{9}{5}C+32 \longrightarrow \frac{9}{5}C=F-32 \longrightarrow C=(F-32)\times\frac{5}{9} \longrightarrow C=\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}$

د) بله، چون هر دو را برحسب دیگری می‌توان به فرم یک تابع خطی نشان داد.

تذکر: به عملی که در قسمت ج انجام دادیم، یعنی وارون، یا معکوس تابع خطی نامیده می‌شود.

۲- چند تابع خطی می‌توان رسم کرد که دامنه آن‌ها $[2,8]$ و برد آن‌ها $[-2,3]$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار



با توجه به شکل، تنها دو تابع می‌توان رسم کرد که دامنه و برد آن‌ها بازه‌های داده شده باشند.

نکته: همواره فقط دو تابع خطی می‌توان رسم کرد که دامنه آن‌ها $[a,b]$ و برد آن‌ها $[c,d]$ باشد. $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$

۳- نمودار تابعی یک سهمی است که از نقاط $(1,-2)$ و $(2,-3)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. ضابطه جبری این تابع را بیابید.

$(0,1)\in$ تابع $\longrightarrow f(0)=1$

ضابطه تابع: $y=f(x)=ax^2+bx+c$

$(1,-2)\in$ تابع $\longrightarrow f(1)=-2$

$(2,-3)\in$ تابع $\longrightarrow f(2)=-3$

$$\begin{cases} 1=0+0+c \longrightarrow c=1 \\ -2=a+b+1 \longrightarrow a+b=-3 \\ -3=4a+2b+1 \longrightarrow 2a+b=-2 \end{cases} \longrightarrow a=1,\ b=-4$$

$$\longrightarrow y=f(x)=x^2-4x+1$$