



جزوه آموزشی مثلثات

www.fera.ir

site : www.fera.ir
email : adel2115@gmail.com
channel : telegram.me/math_akh
phone : ۰۹۱۹۰۶۹۰۰۶۳ – ۰۹۳۵۶۷۸۴۳۷۲
id : [@adel_akhkandi](https://t.me/@adel_akhkandi)



مؤلف: عادل آخکندی

به نام خالق زیبایی‌ها

محنی قاتم، قامت ابروی توست، خط محاب بر آن، سلسه کیوی اوست. حد ریدن به او، مهم و بی انتہاست. بازه تعریف دل، در حرم کوی دوست، چون به عدد یک تویی من به صفره آن چه که معنی دید قاست دبحوی توست. پرتوی خورشید شد مشش از آن روی تو، کرمی جان بخش او جزئی از آن خوی توست بی ت وجودم بود یک سری و اگر انجیه همکراش دایره روی توست (پروفور هش رو دی)

یچگاه دلی را می‌شکن چون ممکن است خانه خدا باشد. یچگاه انسانی را تحقیر نکن چون ممکن است حیب خدا باشد. یچگاه کنایت را کوچک ننمای چون ممکن است آن خط، خط مرگ تو باشد.

این کتاب می‌تواند برای هر دانش‌آموز مورد استفاده قرار بگیرد و خواننده کتاب به راحتی می‌تواند از مباحث و موضوعات متعدد کتاب بهره‌ی کافی را برد و با مطالعه مثال‌ها و مصالح های حل شده‌ی آن به عمق مطلب پی ببرد.

در خاتمه تأکید می‌کنم از آنجا که هیچ کلام خداوند خالی از اشتباه نیست، از خوانندگان عزیز تعاضاً می‌کنیم مارا از نظرات، انتقادات و پیشخداات خویش بهره مند ساخته تا در تالیفات بعدی از آنها استفاده شود.



سایت دبیرستان و کنکور فرا
(www.fera.ir)

ارایه جزوات آموزشی و نمونه سوالات به صورت رایگان

عنوان
جزوه آموزشی مثلثات

نگارش
عادل آخکندي



صفحه

فهرست

۱	فصل اول دایره‌ی مثلثاتی
۲	۱. واحد‌های زاویه: ۱- درجه - ۲- رادیان
۷	۲.1 موقعیت‌های مختلف زوایای پرکاربرد: 30° و 45° و 60°
۹	۳.1 معرفی نسبت‌های مثلثاتی:
۹	۱.۳.1 معرفی نسبت مثلثاتی $y = \sin\alpha$
۱۱	۲.۳.1 معرفی نسبت مثلثاتی $y = \cos\alpha$
۱۳	۳.۳.1 معرفی نسبت مثلثاتی $y = \tan\alpha$
۱۶	۴.۳.1 معرفی نسبت مثلثاتی $y = \cot\alpha$
۱۸	۴.1 جمع بندی:
۱۹	۵.1 کمان‌های متمم، مکمل و قرینه
۲۳	۶.1 کاربرد مثلثات
۲۷	بررسی نمودار توابع مثلثاتی
۲۷	۱.۲ دوره تناوب توابع مثلثاتی
۲۸	۲.۲ نمودار توابع مثلثاتی
۳۵	فرمول‌های مقدماتی
۳۵	۱.۳ فرمول‌های مجموع و تفاضل دو زاویه
۳۶	۲.۳ نسبت‌های مثلثاتی $2a$ و 3α بر حسب a
۴۲	۳.۳ فرمول‌های تقلیل (کاهش) دادن توان‌ها یا ازدیاد آن‌ها
۴۳	۴.۳ چند رابطه مهم
۴۴	۵.۳ فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب (ویژه رشته ریاضی)
۴۴	۶.۳ فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع (ویژه رشته ریاضی)
۴۶	معادلات مثلثاتی
۴۶	۱.۴ معادله‌ی مثلثاتی ساده
۴۶	۱.۱.۴ معادله‌ی $-1 \leq a \leq 1$ ، $\sin x = \sin a$
۴۷	۴.۱.۲ معادله‌ی $-1 \leq a \leq 1$ ، $\cos x = \cos a$
۴۸	۳.۱.۴ معادله‌ی $\tan x = \tan a$
۴۸	۴.۱.۴ معادله‌ی $\cot x = \cot a$



مادرت

مادرت میخواهم خشنگورس ... چرا که مادر من سخت ترین معادرات است!

مادرت میخواهم نیوتن ... چرا که مادر من راز جاذبه است!

مادرت میخواهم اریون ... چرا که مادر من اولین چراغ زندگی من است!

مادرت میخواهم افلاطون ... چرا که این مادر من است که شهر خاکله حلب من است!

مادرت میخواهم رومیو ... چرا که صهر راه ها به عشق مادر من ختم میشود!

مادرت میخواهم ثولیت ... چرا که مادرم عشق من است!

مثلثات یا سه برستنجی یکی از شاخه‌های ریاضیات است که روابط میان طول اضلاع و زاویه‌های مثلث را مطالعه می‌کند. نخستین کاربرد مثلثات در مطالعات اخترشناسی بوده است. اکنون مثلثات کاربردهای زیادی در ریاضیات محض و کاربردی دارد.

بعضی از روش‌های بنیادی تحلیل، مانند تبدیل فوریه و معادلات موج، از توابع مثلثاتی برای توصیف رفتار تنابی موجود در بسیاری از فرایندهای فیزیکی استفاده می‌کنند. هم‌چنین مثلثات پایه علم نقشه‌برداری است.

ساده‌ترین کاربرد مثلثات در مثلث قائم‌الزاویه است. هر شکل هندسی دیگری را نیز می‌توان به مجموعه‌ای از مثلث‌های قائم‌الزاویه تبدیل کرد. شکل خاصی از مثلثات، مثلثات کروی است که برای مطالعه مثلثات روی سطوح کروی و منحنی به کار می‌رود. در اینجا لازم می‌دانم از دوست گرامی ام آقای رضا نظری که در تهییه‌ی این جزوایت من را بسیار یاری نمودند، کمال تشکر را داشته باشم.

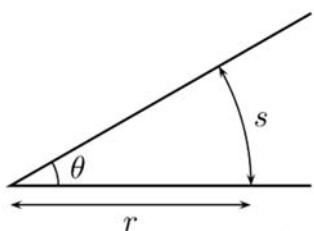




۱ فصل اول

دایره‌ی مثلثاتی

زاویه: زاویه یا گوشه یکی از مفاهیم هندسه است و به "ناحیه‌ای از صفحه" گفته می‌شود که بین دو نیم خط که سر مشترک دارند محصور شده است. به سر مشترک این دو نیم خط رأس زاویه یا گوشه می‌گویند.



انواع زاویه‌ها:

زاویه‌ها را با توجه به مقدارشان به این صورت طبقه‌بندی می‌کنند:

زاویه تند: (acute angle) زاویه θ را تند یا حاده می‌گوییم هرگاه اندازه اش کمتر از 90° درجه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه راست: (right angle) زاویه θ را راست یا قائم می‌گوییم هرگاه اندازه آن برابر 90° درجه باشد.

زاویه باز: (obtuse angle) زاویه θ را باز یا منفرجه می‌گوییم هرگاه بزرگتر از 90° درجه و کمتر از 180° درجه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه نیم صفحه: (straight angle) زاویه θ را نیم صفحه می‌گوییم هرگاه برابر 180° درجه باشد.

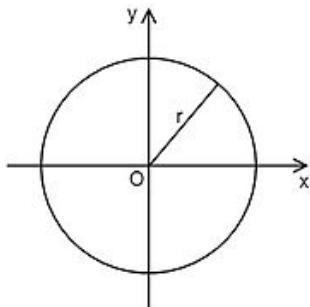
زاویه بازتاب: (reflex angle) زاویه θ را زاویه بازتاب می‌گوییم هرگاه بزرگتر از 180° درجه و کمتر از 360° درجه باشد. به عبارت دیگر:

زاویه کامل: (full angle) زاویه θ را کامل یا تمام صفحه می‌گوییم هرگاه برابر 360° درجه باشد.

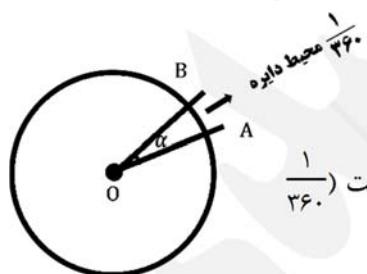
سوال ۱: رابطه‌ی فیثاغورس را بیان کنید:

مثال ۱: در یک مثلث طول اضلاع ، اعداد ۹ و ۱۲ و ۱۵ واحد هستند آیا چنین مثلثی می تواند قائم باشد؟

مثال ۲: در یک مثلث طول اضلاع ، اعداد ۸ و ۱۲ و ۱۳ واحد هستند ، به نظر شما زاویه‌ی بین دو ضلع ۸ و ۱۲ می تواند منفرجه باشد؟

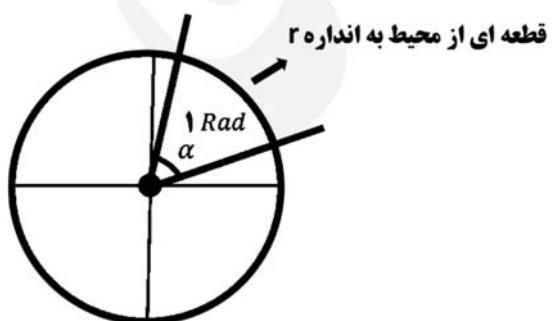


دایره مثلثاتی: دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد . حرکت در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را خلاف جهت مثلثاتی می‌گوییم و زاویه‌هایی که در این جهت طی شده باشند با علامت منفی نشان می‌دهیم. اما حرکت در خلاف عقربه‌های ساعت را حرکت در جهت مثلثاتی نامیده و زاویه‌هایی که در این جهت طی شده باشد را با علامت مثبت نشان می‌دهیم.



۱. واحد های زاویه : ۱- درجه ۲- رادیان

درجه: هر یک درجه اندازه‌ی زاویه‌ای است رو به رو به $\frac{1}{360}$. محیط دایره است (محیط دایره را در خود جایی داده است)



رادیان: اندازه‌ی زاویه‌ای است که کمان رو به روی آن برابر شعاع دایره است.



جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

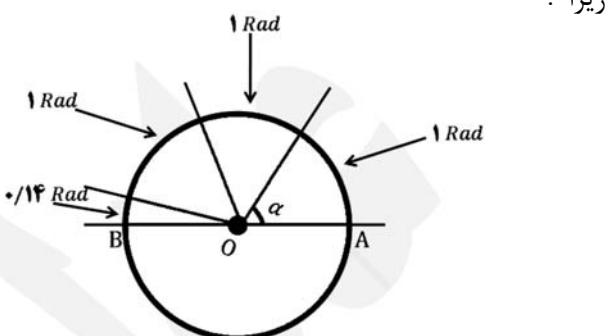
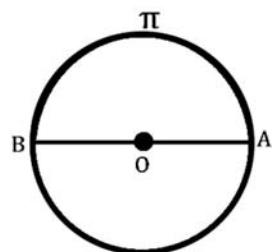
آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \quad \text{همچنین رابطه‌ی بین درجه و رادیان به شکل مقابل است:}$$

$\pi \sim 180$ نتیجه: :

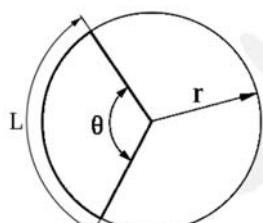
R	D
π	۱۸۰



مثال ۳: ۱ رادیان برابر با چند درجه است؟

سوال: هر یک از زاویه‌های زیر را به رادیان تبدیل کنید.

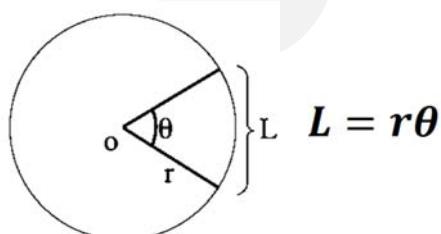
۳۶۰ و ۲۷۰ و ۱۸۰ و ۱۲۰ و ۹۰ و ۶۰ و ۴۵ و ۳۰ و ۱۵ و ۰



قطاع: بخشی از یک قرص یا دایره است که به دو شعاع و یک کمان محدود شده‌است. θ (زاویه مرکزی) روبروی کمان، r (شعاع دایره) و L (طول کمان) است.

نکته ۱: یک قطاع با زاویه‌ی ۱۸۰ درجه را نیم‌دایره و با زاویه ۹۰ درجه را ربع دایره می‌نامند

در هر قطاع داریم:



دبير رياضي: عادل آخوندي

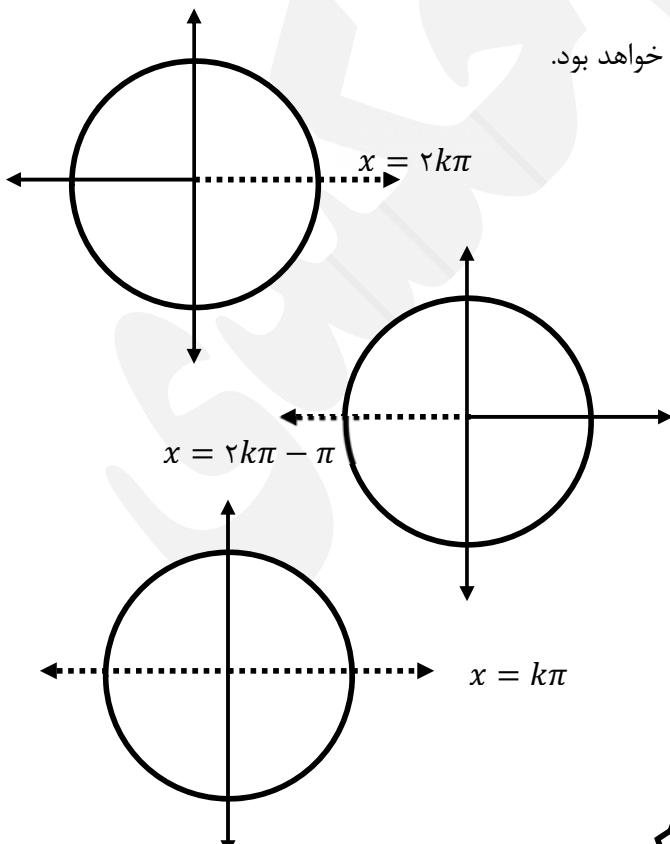
مثال ۴: چرخ اتومبیلی به شعاع ۲۵ سانتی متر اگر مسافتی برابر با ۳ متر را طی کند ، به نظر شما محور این چرخ چند درجه را طی می کند؟

سوال ۲: اگر عقربه شمار به مدت ۲۰ دقیقه جابجا شود در این مدت عقربه ساعت شمار چه زاویه ای را طی می کند؟

معرفی محورهای مختصات روی دایره ای مثلثاتی بر اساس حرکت زوایا

یادآوری : نمایش اعداد صحیح به صورت $2k , k \in \mathbb{Z}$ و نمایش اعداد صحیح زوج به صورت $2k - 1 , k \in \mathbb{Z}$ خواهد بود.

۱) سمت راست محور طول ها :



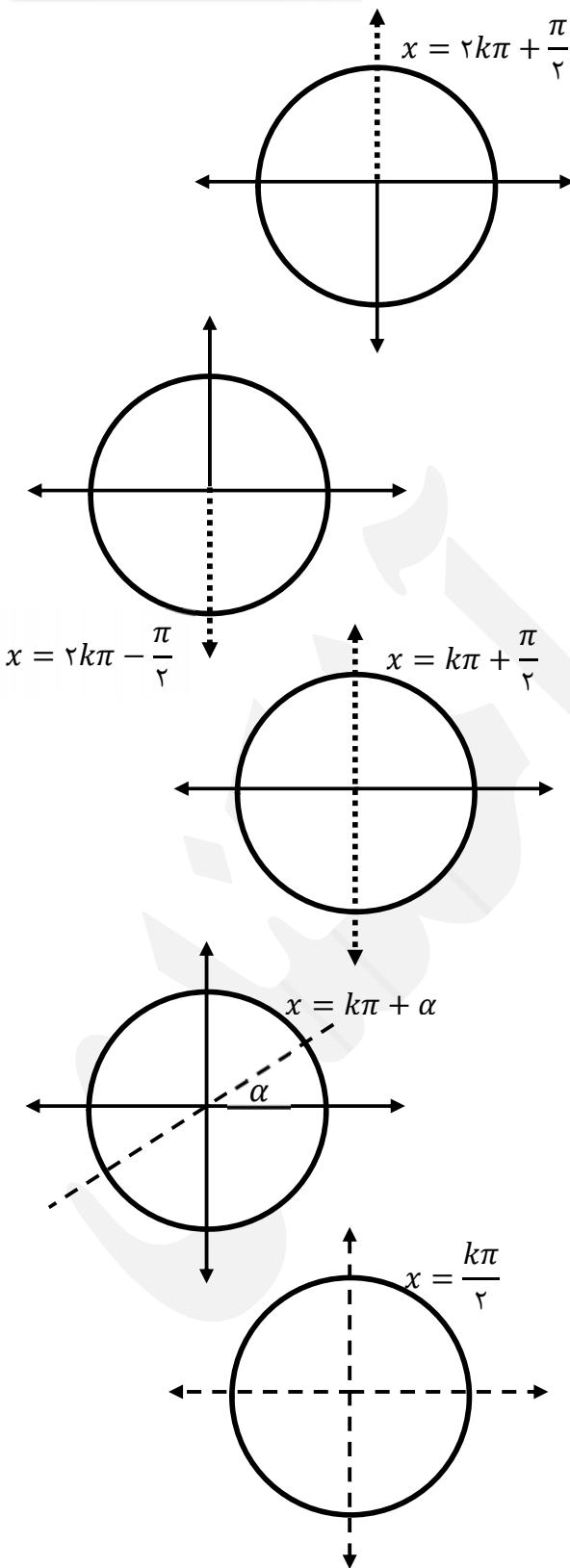
۲) سمت چپ محور طول ها :

۳) کل محور طول ها :

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی



۴) سمت بالای محور عرض ها :

۵) سمت پایین محور عرض ها :

۶) کل محور عرض ها :

۷) حرکت محور طول ها :

۸) کل محور مختصات :

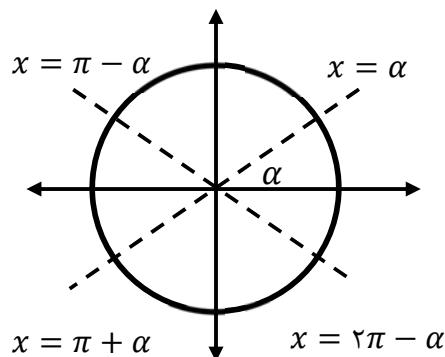
۵

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

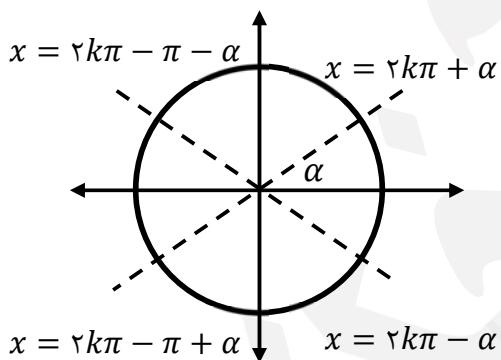
فصل اول: دایره مثلثاتی

موقعیت یک زاویه در دایره مثلثاتی (دور اول): فرض کنید α زاویه‌ای در ربع اول باشد در این



صورت:

موقعیت یک زاویه در دایره مثلثاتی (تمام دورها):



سوال ۳: روی دایره مثلثاتی موقعیت زاویه $x = k\pi + \alpha$ را مشخص کنید.

به طور کلی می توان نتیجه گرفت که:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \sim \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \sim -\alpha \\ x = 2k\pi + \pi + \alpha \sim \pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \sim \pi - \alpha \end{array} \right.$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

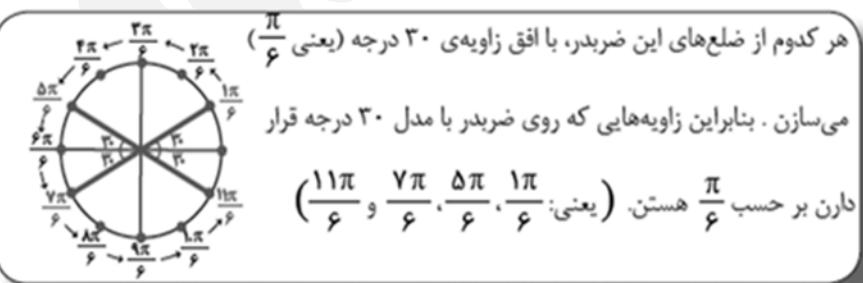
فصل اول: دایره مثلثاتی

سوال ۴: موقعیت هر کدام از زوایای زیر را روی دایره مثلثاتی مشخص کنید.

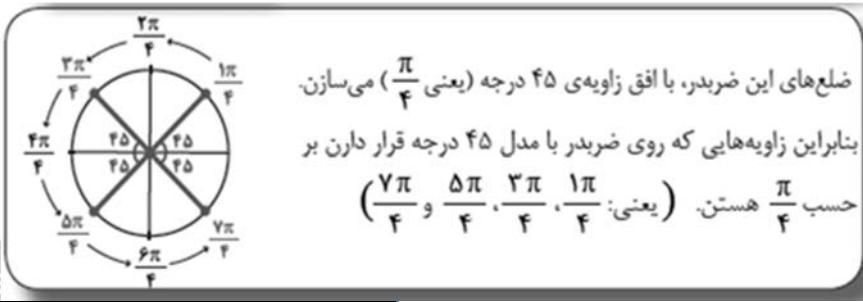
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = k\pi + 30 \\ \theta = \frac{k\pi}{2} + 60 \\ \theta = 2k\pi - 45 \\ \theta = 2k\pi + 45 \end{array} \right.$$



۲.۱ موقعیت های مختلف زوایای پرکاربرد: ۳۰ و ۶۰ و ۴۵ و ۹۰



۱) ضربدر با مدل 30° درجه:

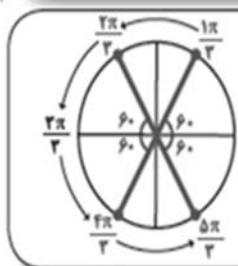


۲) ضربدر با مدل 45° درجه:

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

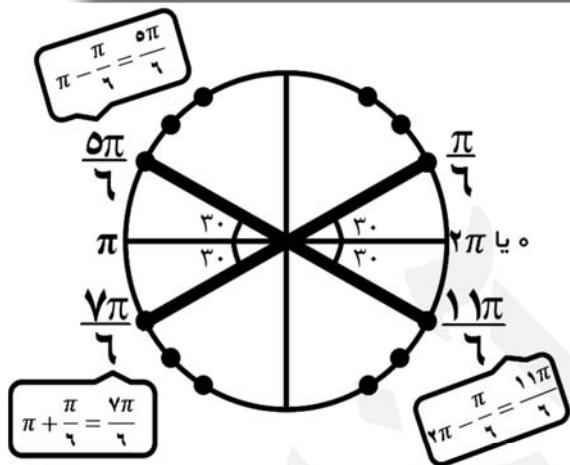
فصل اول: دایره مثلثاتی



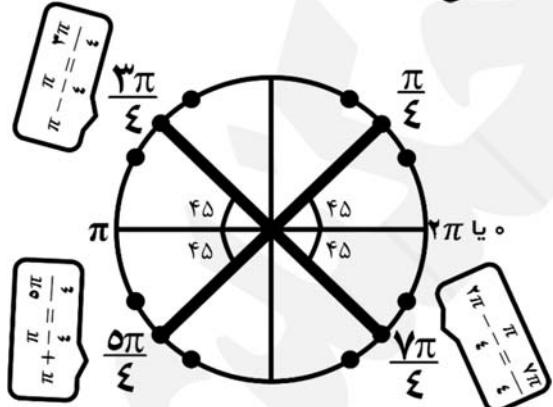
اصل این ضربدر، زاویه‌ی 60° یا $\frac{\pi}{3}$ با افق ایجاد می‌کنند.

بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل 60° درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{3}$ هستند. (یعنی: $\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{1\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$)

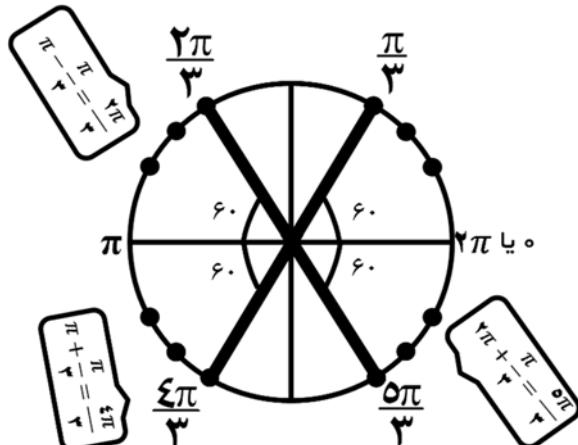
۱) زوایای مرتبط با 30° درجه



۲) زوایای مرتبط با 45° درجه



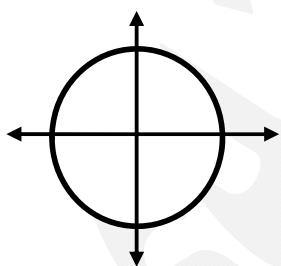
۳) زوایای مرتبط با 60° درجه



سوال ۵: موقعیت استاندارد هر کدام از زوایای زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 19\pi \\ \theta = \frac{19\pi}{2} \\ \theta = \frac{-19\pi}{4} \\ \theta = \frac{-19\pi}{3} \\ \theta = \frac{-19\pi}{6} \end{array} \right.$$

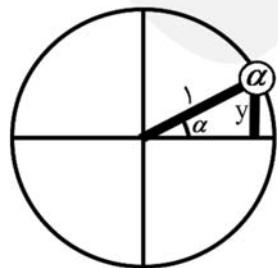
خراموش نشیم که: برای یافتن قرینهٔ یک زاویهٔ کافی است آنرا نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم به عنوان مثال اگر زاویه‌ای در ربع اول باشد، قرینهٔ آن در ربع چهارم قرار خواهد گرفت.



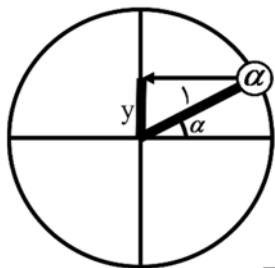
۳.۱ معرفی نسبت‌های مثلثاتی :

۱.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = \sin \alpha$

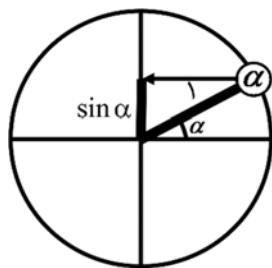
$$\sin \alpha = y$$



$$\sin \alpha = y$$



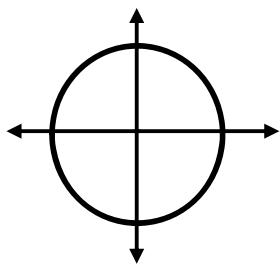
$$\sin \alpha = y$$



جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل اول: دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

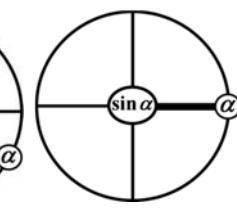
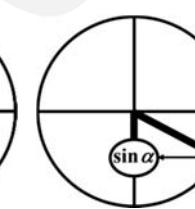
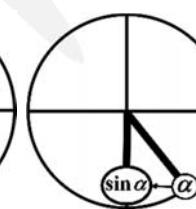
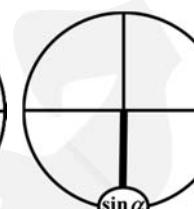
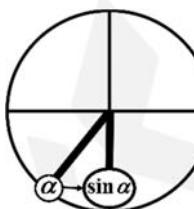
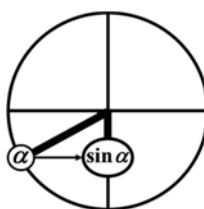
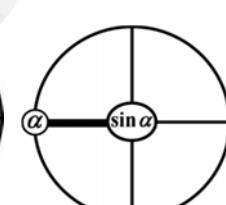
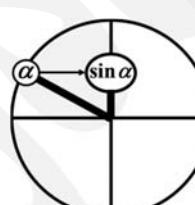
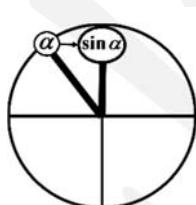
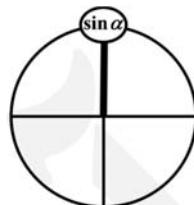
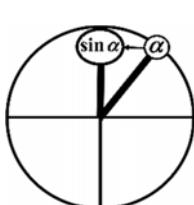
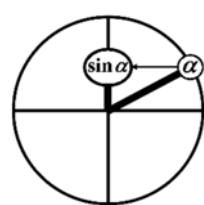


نتیجه: محور عرض ها، همان محور سینوس ها می باشد. $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

الف) بررسی علامت $\sin\theta$ در دایره مثلثاتی:

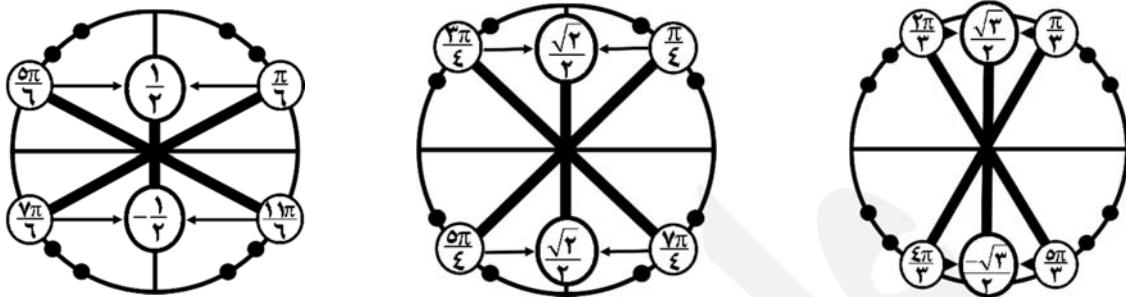
ب) بررسی تغییرات $\sin\theta$ در دایره مثلثاتی:

$$\sin \alpha = y$$



ج) بررسی مقادیر $\sin\theta$ در زوایای پر کاربرد:

رادیان	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0



۲.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = \cos\alpha$

الف) تعریف $\cos\alpha$ در مثلث قایم الزاویه:

ب) تعریف روی دایره مثلثاتی:

نتیجه: محور طول ها، همان محور کسینوس هاست. $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

ج) بررسی علامت $\cos\alpha$ در دایره مثلثاتی:

د) بررسی تغییرات $\cos\alpha$ از نظر افزایش و کاهش در دایره مثلثاتی:

ه) بررسی مقدار $\cos\alpha$ در زوایای پرکاربرد:

در اینجا به بررسی $\cos\alpha$ در زوایای ۳۰ درجه و ۴۵ درجه و ۶۰ درجه میپردازیم.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

(۱)

(۲)

(۳)

مثال ۵: در هر کدام از حالت های زیر محدوده $\cos \theta$ را تعیین کنید.

$$1) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2) \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4}$$

نتیجه: اگر زاویه ای در $\cos \theta$ مقدار بیشینه یا کمینه خود را طی کند نمی توانیم تنها مقادیر ابتدا و انتهای را مقایسه کنیم.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

سوال ۶: اگر $\frac{m-1}{2} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4}$ و $\cos 3\theta = \frac{m-1}{2}$ ، آنگاه مقادیر ممکن برای m را بیابید.

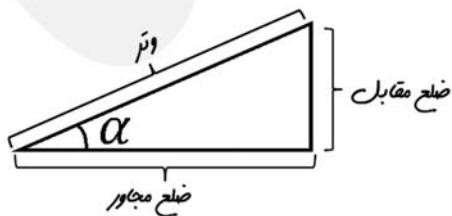
سوال ۷: مقدار $|\sin x - \cos x|$ را با مقایسه کنید.

سوال ۸: حاصل عبارت $|sinx - cosx|$ که در آن $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ بدون قدرمطلق بنویسید.

سوال ۹: دامنه‌ی هر کدام از توابع $y = \sqrt{2\sin x - 1}$ و $y = \sqrt{2\cos x - 1}$ را تعیین کنید.

۳.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = \tan \alpha$

الف) در مثلث قائم الزاویه داریم :



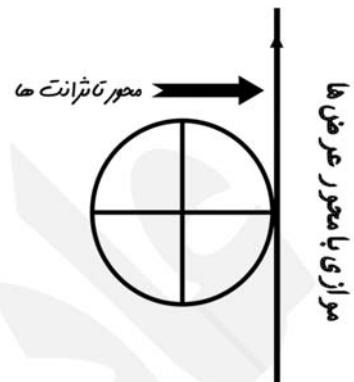
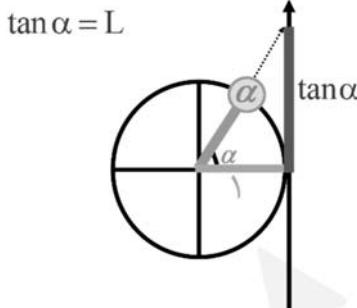
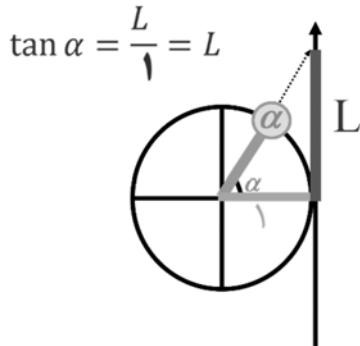
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

ب) روی دایره مثلثاتی:



ضراموش تئسیم که: $-\infty \leq \tan \alpha \leq \infty$:

برخی از کاربردهای فیزیکی:

الف) ثابت فنر در نیروی کشسانی فنر: $F = Kx$

ب) سرعت متوسط: $V = \frac{\Delta X}{\Delta t}$

ج) ظرفیت گرمایی ویژه در $Q = mc\Delta\theta$

نکته ۲: نحوه یافتن $\tan \alpha$ در دایره مثلثاتی: (در چهار ربع دایره مثلثاتی)

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

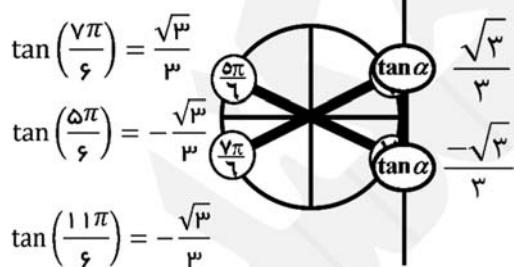
فصل اول: دایره مثلثاتی

ج) بررسی تغییرات $\tan\alpha$ در دایره مثلثاتی: (افزایش یا کاهش)

د) محاسبه $\tan\alpha$ در زوایاس پر کاربرد:

رادیان	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	فرمول ها در مثلث $r^y = x^r + y^r$
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت ن	0	ت ن	0	$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

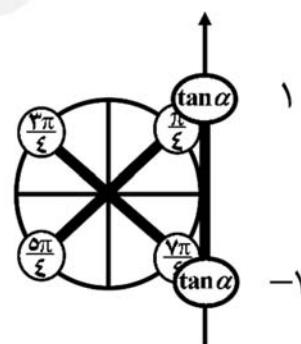


$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

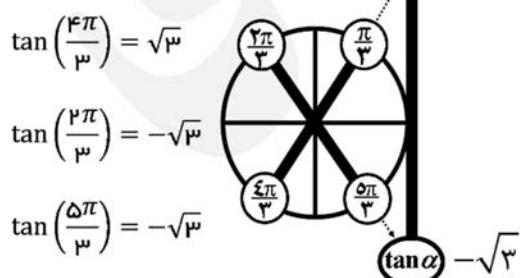
$$\tan\left(\frac{\Delta\pi}{4}\right) = 1$$

$$\tan\left(\frac{\omega\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(\frac{V\pi}{4}\right) = -1$$

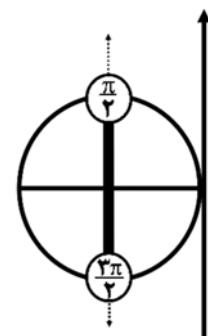


$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

$$\tan\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) = -\infty$$



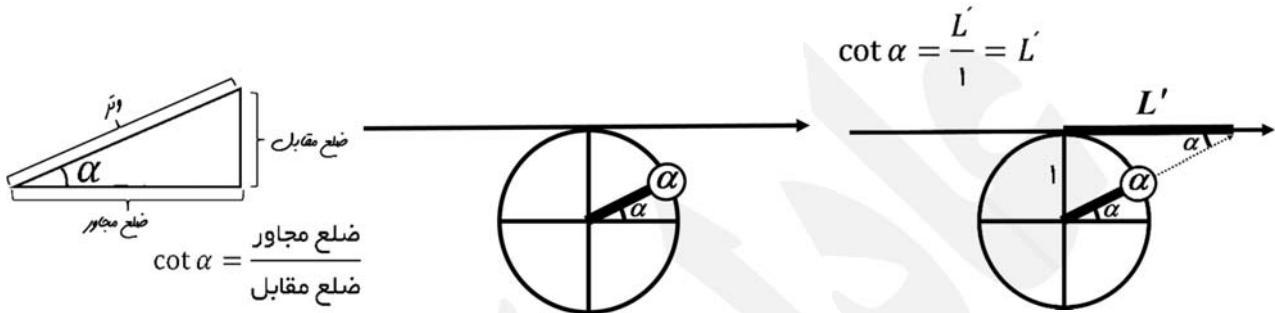
جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

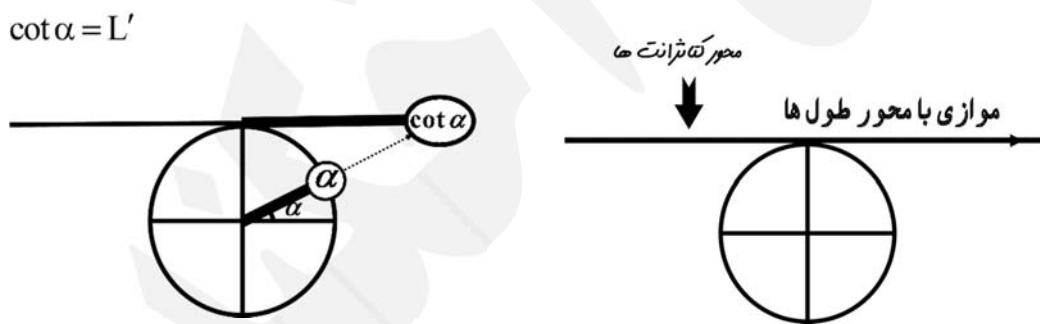
فصل اول: دایره مثلثاتی

۴.۳.۱ معرفی نسبت مثلثاتی $y = \cot \alpha$

الف) در مثلث قائم الزاویه داریم و روی دایره مثلثاتی:



می توان نتیجه گرفت که محور کتانژانت محوری است موازی با محور طول ها به فاصله ی یک واحد از آن:



ب) نحوه یافتن $\cot \alpha$ روی دایره مثلثاتی در تمام نواحی:

ج) بررسی تغییرات $\cot \alpha$ در دایره مثلثاتی (افزایش یا کاهش)

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

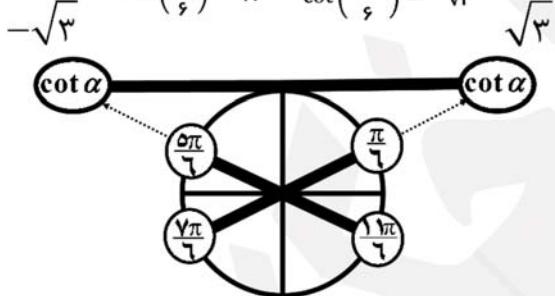
فصل اول: دایره مثلثاتی

۵) محاسبه‌ی مقدار $\cot \alpha$ در زوایای پرکاربرد:

رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	فرمول‌ها در مثلث
$\cot \theta$	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت ن	۰	ت ن	$\cot \theta = \frac{x}{y}$

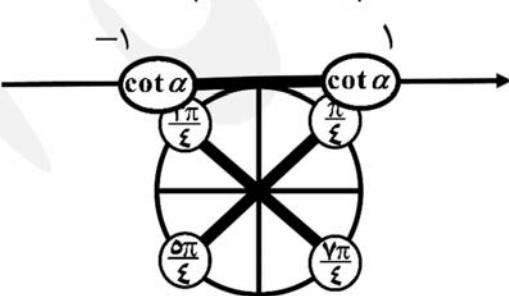
$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$



$$\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \quad \cot\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 1$$

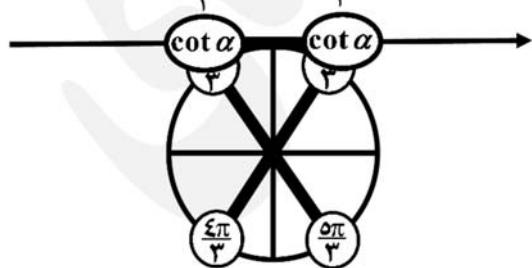
$$\cot\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1 \quad \cot\left(\frac{17\pi}{12}\right) = 1$$



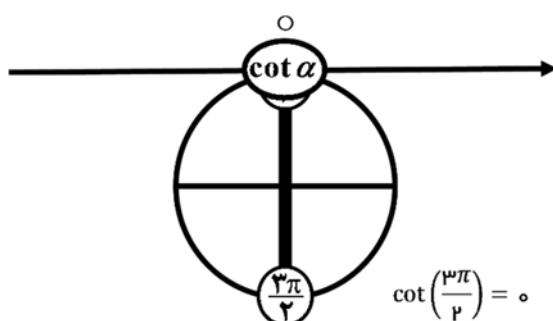
$$\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$



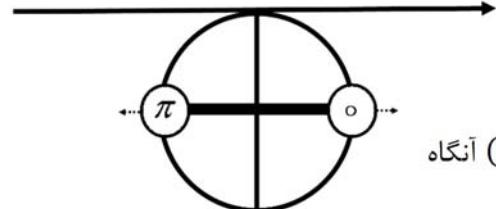
جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

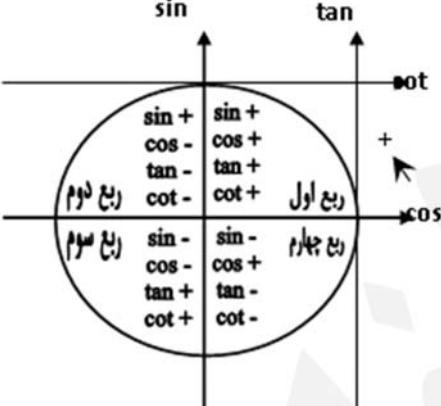
$$\cot(\pi) = -\infty \quad \cot(0^\circ) = +\infty$$

سوال ۱۰: در چه نقاطی تانژانت و کتانژانت تعریف نشده هستند؟



سوال ۱۱: اگر $(\cos x) \times (\cot x) < 0$ و $(\sin x) \times (\cos x) < 0$ آنگاه

انتهای کمان x در ناحیه ای قرار دارد؟



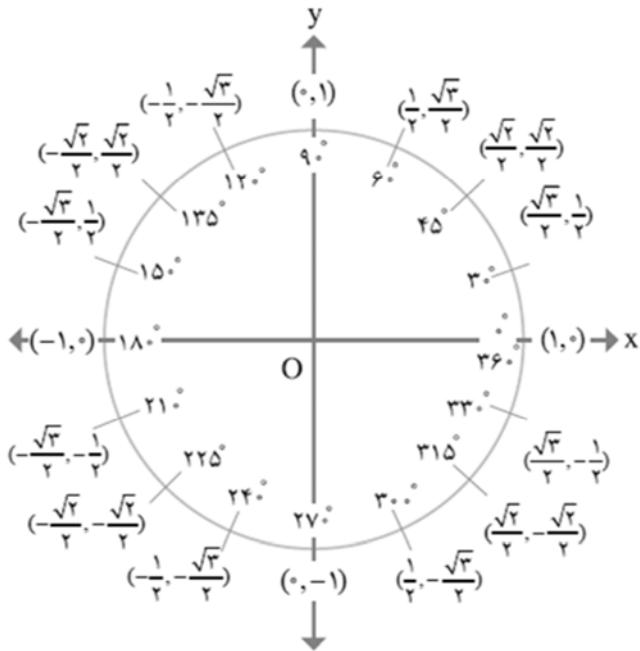
۴.۱ جمع بندی:

جدول نسبت های مثلثاتی (مقدار زاویه ها):

رادیان	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π		
زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	فرمول ها در مثلث	$r^r = x^r + y^r$
$\sin\theta$	+	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	+	-۱	+	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$-1 \leq \sin\theta \leq 1$
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	+	-۱	۰	۱	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$-1 \leq \cos\theta \leq 1$
$\tan\theta$	+	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت ن	۰	ت ن	۰	$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\tan\theta \in \mathbb{R}$
$\cot\theta$	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت ن	۰	ت ن	$\cot\theta = \frac{x}{y}$	$\cot\theta \in \mathbb{R}$

نکته ۳: در دایره مثلثاتی داریم:

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



نکته ۴: در ربع اول نامساوی های زیر را داریم:

$$1) \cdot < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < \cos x \\ \tan x < \cot x \end{cases}$$

$$2) \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > \cos x \\ \tan x > \cot x \end{cases}$$

۵.۱ کمان های متمم، مکمل و قرینه

برای تعیین نسبت های مثلثاتی کمان های θ و $k\pi \pm \theta$ و $2k\pi \pm \theta$ به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱) انتهای کمان را مشخص می کنیم که در کدام ناحیه قرار دارد.

۲) علامت نسبت مثلثاتی را در آن ناحیه مشخص می کنیم.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

۳) اگر در کمان مورد نظر، مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ بود \sin را به \cos و \tan را به \cot و به عکس تبدیل می کنیم.

۴) مضارب 2π را برای \sin و \cos حذف می کنیم.

۵) مضارب π را برای \tan و \cot حذف می کنیم.

مضارب فرد π

۱) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

۲) $\cos(\pi + x) = -\cos x$

۳) $\tan(\pi + x) = \tan x$

۴) $\cot(\pi + x) = \cot x$

۱) $\sin(\pi - x) = \sin x$

۲) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

۳) $\tan(\pi - x) = -\tan x$

۴) $\cot(\pi - x) = -\cot x$

مضارب زوج π و قرینه

۱) $\sin(2\pi + x) = \sin x$

۲) $\cos(2\pi + x) = \cos x$

۳) $\tan(2\pi + x) = \tan x$

۴) $\cot(2\pi + x) = \cot x$

۱) $\sin(-x) = -\sin x$

۲) $\cos(-x) = \cos x$

۳) $\tan(-x) = -\tan x$

۴) $\cot(-x) = -\cot x$

مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$

۱) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

۲) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

۳) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

۴) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

۱) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

۲) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

۳) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

۴) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

$$1) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$2) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$3) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$4) \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\tan x$$

$$1) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$2) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$3) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$4) \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

تست ۱: اگر $\tan\theta = 0/2$ باشد مقدار جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi-\theta)-\cos(3\pi+\theta)}$ کدام است؟

(ریاضی داخل کشور ۹۱)

۳) ۵

ج) ۲

ب) ۱/۲

الف) -۲

تست ۲: اگر $\tan 20^\circ = 0/4$ باشد مقدار جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{\sin(250)+\sin(700)}{\cos(560)-\cos(110)}$ کدام است؟

(تجربی خارج کشور ۹۴)

۵) ۵

ج) ۷

ب) ۳

الف) -۳/۴

تست ۳: اگر $\tan 15^\circ = 0/28$ باشد مقدار جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{\sin(285)+\cos(255)}{\sin(525)-\sin(105)}$ کدام است؟

(تجربی داخل کشور ۹۴)

۱۶) ۵

ج) ۹

ب) -۹/۱۶

الف) -۱۶/۹

نکته ۵: اگر دو زاویه α و β متمم هم باشند آنگاه: $\alpha + \beta = 90^\circ$

- ۱) $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$
- ۲) $\cos(\alpha) = \sin(\beta)$
- ۳) $\tan(\alpha) = \cot(\beta)$
- ۴) $\cot(\alpha) = \tan(\beta)$

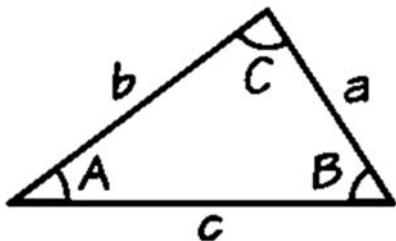
نکته ۶: اگر دو زاویه α و β مکمل هم باشند آنگاه: $\alpha + \beta = 180^\circ$

- ۱) $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$
- ۲) $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$
- ۳) $\tan(\alpha) = -\tan(\beta)$
- ۴) $\cot(\alpha) = -\cot(\beta)$

مثال ۶: حاصل $\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)$ را بیابید.

۶.۱ کاربرد مثلثات

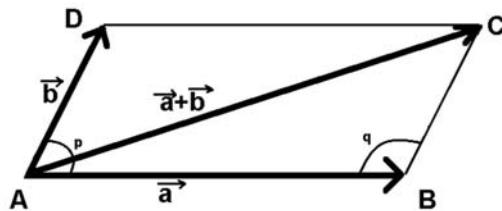
قانون کسینوس ها: وقتی دو ضلع از یک مثلث و زاویه بین آنها را داشته باشیم، در این حالت از قانون کسینوس ها استفاده می کنیم.



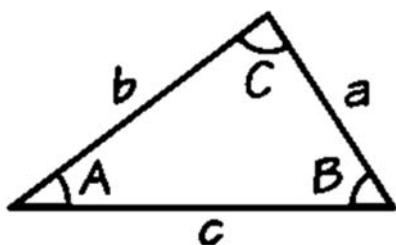
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



نکته ۷: این قانون (کسینوس ها) در فیزیک به نام قانون تفاضل بردارها شناخته می شود. همچنین برای برآیند دو بردار داریم:



$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$$

نکته ۹: در یک متوازی الاضلاع با طول اضلاع a و b و زاویه θ بین آنها داریم:

$$S = a \cdot b \cdot \sin \theta$$

نکته ۱۰: در یک متوازی الاضلاع با دو قطر a و b و زاویه θ بین آنها داریم:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \theta$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل اول: دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

نکته ۱۱: قانون سینوس ها، برای حل مثلث هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی رو به روی آن ها را داریم بسیار سودمند خواهد بود.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نکته ۱۲: اگر سه ضلع از مثلثی مشخص باشد داریم:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{مساحت} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تست ۴: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است، بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی داخل کشور ۹۴)

۲۴) د

ج) ۲۳

ب) ۲۲

الف) ۲۱

نکته ۱۳: در کاربردهای مثلثات تا جایی که ممکن است شکل رسم کنید.

تست ۵: بزرگترین زاویه از مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ کدام است؟

۱۲۰) د

ج) ۱۰۵

ب) ۷۵

الف) ۶۰

تست: در متوازی الاضلاعی دو قطر ۸ و ۱۲ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است، مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۲)

۳۲) د

ج) ۲۴

ب) ۱۸

الف) ۱۶

۲۴

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

مسئلہ ۶: در مثلث قائم الزاویہ ای سینوس یکی از زاویہ ها $\frac{5}{\gamma}$ و اندازه وتر ۱۴ واحد است. کوچکترین ضلع مثلث کدام است؟

- الف) $2\sqrt{3}$ ب) $3\sqrt{7}$ ج) $4\sqrt{6}$ د) $5\sqrt{2}$

مسئلہ ۷: ناظری به فاصلہ $3/5$ متر از پائی ستونی کہ بر روی آن مجسمہ ای قرار دارد ایستاده است. زاویہ رؤیت انتها و ابتدای مجسمہ با سطح افق 45° و 40° درجہ است. ارتفاع مجسمہ چقدر است؟ ($\tan 40^\circ = 0.8$)

- الف) ۶ ب) $6/4$ ج) ۷ د) $7/2$

مسئلہ ۸: مساحت مثلثی بے طول اضلاع $7, 9, 12$ کدام است؟

- الف) $15\sqrt{2}$ ب) $14\sqrt{3}$ ج) $12\sqrt{5}$ د) $14\sqrt{5}$

تمرین: در مثلث ABC مقدار $c\cos B + b\cos C$ کدام است؟

- الف) a^2 ب) $a\cos A$ ج) $a\sin A$ د) a^2

سوال ۱۲: در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویہ های $C = 45^\circ$ و $B = 60^\circ$ اندازه ضلع AC را بیابید.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل اول: دایره مثلثاتی

تست ۹: بیشترین مقدار $\sin(\pi x) + \sin(\pi y)$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) $\sqrt{2}$ ج) $\sqrt{3}$ د) ۲

تست ۱۰: مقدار $\tan(1) \cdot \tan(2) \cdot \tan(3) \dots \tan(88) \cdot \tan(89)$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) صفر ج) -۱ د) $\tan 50^\circ$

تست ۱۱: حاصل عبارت $\frac{|sinx - cosx|}{2} + \frac{sinx + cosx}{2}$ که در آن $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

- الف) $sinx$ ب) $cosx$ ج) $sinx + cosx$ د) $cosx - sinx$

تست ۱۲: اگر $sinx \cdot cosx > 0$ و $sinx + cosx < 0$ آنگاه انتهای کمان a در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم

تست ۱۳: در یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن $\sqrt{5}$ است، طول قطر پنج ضلعی را بیابید.

- الف) $\sqrt{13}$ ب) $\sqrt{15}$ ج) $2\sqrt{3}$ د) $3\sqrt{3}$



۲ بررسی نمودار توابع مثلثاتی

دوره تناوب: کوچکترین عدد حقیقی مثبت که به ازای آن نمودار تابع کامل گشته و بعد از آن مجدداً تکرار می‌شود دوره‌ی تناوب گویند.

۱.۲ دوره تناوب توابع مثلثاتی

$$1) y = \sin ax, \quad y = \cos ax \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$2) y = \tan ax, \quad y = \cot ax \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$3) y = \sin^r k(ax + c), \quad y = \cos^r k(ax + c) \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$4) y = |\sin(ax + c)|, \quad y = |\cos(ax + c)| \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$5) \sin^{r k+1}(ax + c), \quad y = \cos^{r k+1}(ax + c) \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$6) y = \tan^k(ax + c), \quad y = \cot^k(ax + c) \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

سوال ۱۳: دوره‌ی تناوب تابع زیر را بباید:

$$1) y = \sin(2x)$$

$$2) y = \sin^r(-2x)$$

$$3) y = \sin^r(-2x)$$

۲.۲ نمودار توابع مثلثاتی

۱) رسم تابع مثلثاتی $y = \sin(x)$

نکته ۱۴: قبل از رسم دوره تناوب را مشخص کنید:

سوال ۱۴: نمودار توابع $y = \sin(\frac{1}{\gamma}x)$ و $y = \sin(2x)$ را رسم کنید.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل دوم: نمودار توابع مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

$$y = \sin(ax) \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \rightarrow \text{نمودار جمع می شود} \\ 0 < a < 1 \rightarrow \text{نمودار باز می شود} \end{cases}$$

نتیجه :

سوال ۱۵: نمودار تابع $y = \sin(-2x)$ و $y = \sin(x)$ رارسم کنید.

نتیجه : در این حالت ابتدا نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنید سپس مانند حالت مثبت عمل کنید.

سوال ۱۶: نمودار تابع $y = \frac{-1}{2}\sin(x)$ و $y = \frac{1}{2}\sin(x)$ و $y = 2\sin(x)$ را در یک دوره تنابوب رسم کنید.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل دوهم: نمودار توابع مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

$$y = b \sin(x) \Rightarrow \begin{cases} b > 1 \rightarrow \text{سبب کشیدگی عمودی می شود} \\ 0 < b < 1 \rightarrow \text{سبب جمع شدن عمودی می شود} \\ b < 0 \rightarrow \text{ابتدا نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنید سپس مانند حالات قبل عمل کنید.} \end{cases}$$

تمرین: نمودار $y = -3 \sin(2x)$ را رسم کنید.

سوال ۱۷: نمودار تابع $y = \sin(x) + 1$ را در یک دوره تنابوب رسم کنید.

$$y = \sin(x) + d \Rightarrow \begin{cases} d > 0 \rightarrow \text{ واحد به سمت بالای محور عرض ها حرکت میکنیم} \\ d < 0 \rightarrow \text{ واحد به سمت پایین محور عرض ها حرکت میکنیم} \end{cases}$$

سوال ۱۸: نمودار تابع $y = \sin(x + 1)$ را در یک دوره تنابوب رسم کنید.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل دوم: نمودار توابع مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \rightarrow \text{ واحد به سمت چپ محور طول ها حرکت میکنیم} \\ c < 0 \rightarrow \text{ واحد به سمت راست محور طول ها حرکت میکنیم} \end{cases}$$

۲) رسم تابع مثلثاتی $y = \cos(x)$

نکته ۱۵: قبل از رسم دوره تناوب را مشخص کنید:

سوال ۱۹: نمودار توابع $y = \cos\left(\frac{-1}{2}x\right)$ و $y = -3\cos(2x)$ و $y = \cos(-2x)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل دوم: نمودار توابع مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

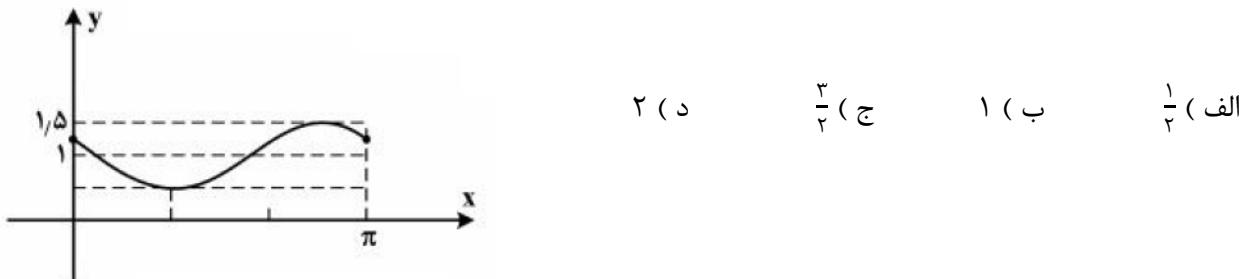
جمع بندی برای رسم تابع های $y = b\sin(ax)$, $y = b\cos(ax)$, $b > 0$ در یک دوره ای تناوب، از آن جایی که دوره ای تناوب این تابع $\frac{2\pi}{|a|}$ است، کافی است نمودار را در بازه $[0, \frac{2\pi}{|a|}]$ رسم نماییم. ماکریم و مینیم این دو تابع $|b|$ و $|b| - \cos(ax)$ خواهد بود. اگر $a < 0$ ، جای نقاط ماکریم و مینیم برای تابع سینوسی عوض می شود. همچنین نمودار تابع

$y = b\sin(a(x - c))$, $y = b\cos(a(x - c))$ با انتقال افقی $|c|$ واحدی تابع های $y = b\sin ax$ و $y = b\cos ax$ به دست می آید. در صورتی که $c > 0$ نمودار C واحد به سمت راست و در صورتی که $c < 0$ ، نمودار C واحد به چپ انتقال می یابند.

تست ۱۴: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. $a + b$ کدام است؟ (۹۵-۰۲)



تست ۱۵: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟



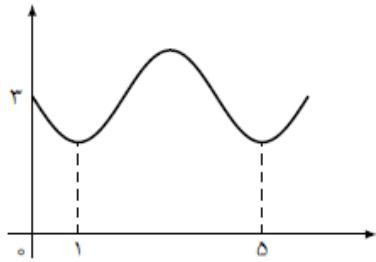
جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل دوم: نمودار توابع مثلثاتی

تست ۱۶: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۳)



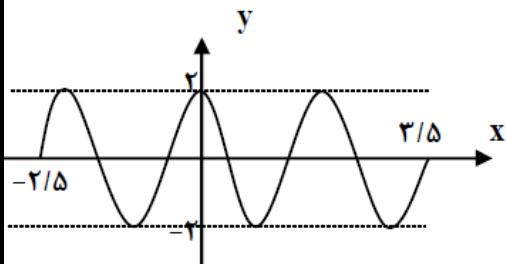
۳) ۵

ج) ۳/۵

ب) ۲/۵

الف) ۲

تست ۱۷: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{x} + bx)$ کدام است؟



۳) ۵

ج) ۳/۵

ب) ۲/۵

الف) ۲

تست ۱۸: معادله $\sin x - \sqrt{x} \cos x = 0$ در بازه $(0, 3\pi)$ چند ریشه دارد؟

۴) ۵

ج) ۳

ب) ۱

الف) ۲

تست ۱۹: معادله $\sin x - 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۵) ۵

ج) ۶

ب) ۴

الف) ۲

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل دهم: نمودار توابع مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۲۰: نمودار تابع به معادله $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4}x - 3\pi\right) - 1$ روی بازه $[1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست ۲۱: اختلاف بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 1 - 3 \cos 2x$ با ضابطه f کدام است؟

- الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶



۳ فرمول های مقدماتی

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$3) \tan x \cdot \cot x = 1 \rightarrow \tan \frac{x}{2} \cdot \cot \frac{x}{2} = 1$$

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$4) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$5) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi$$

۱.۳ فرمول های مجموع و تفاضل دو زاویه

$$1) \sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$$

$$2) \cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$3) \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

$$4) \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right), \quad \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$$

$$5) \cot(a \pm b) = \frac{\cot a \times \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$$

$$6) \sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$7) \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل سوم: خرمنل های مثلثاتی

تست ۲۲: اگر $\cot(a + 20^\circ) = \frac{3}{4}$ باشد ، مقدار $\tan(25^\circ - a)$ کدام است ؟

- د) ۸ ج) ۷ ب) ۶ الف) ۵

تست ۲۳: اگر $\tan(a - 15^\circ) = \frac{1}{3}$ باشد ، مقدار $\tan(60^\circ - a)$ کدام است ؟

- ۲) ۵ ج) ۴ ب) $\frac{1}{4}$ الف) $\frac{1}{2}$

تست ۲۴: اگر $3\tan(a - b) = 2$ و $\tan b = 3$ مقدار $\tan 3a$ کدام است ؟

- د) $-\frac{1}{3}$ ج) $\sqrt{3}$ ب) ۱ الف) -۱

تست ۲۵: حاصل $x = 15^\circ$ به ازای $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ کدام است ؟

- د) $\sqrt{6}$ ج) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ الف) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

۲.۳ نسبت های مثلثاتی $2a$ و $3a$ بر حسب a

$$1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2a = \sin a \cos a \\ \sin a = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \\ \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \end{cases}$$

$$۲) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \rightarrow \begin{cases} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \end{cases} \quad \text{نسبت طلابی}$$

$$۳) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \rightarrow 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \quad , \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \rightarrow 2 \cos^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$۴) \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$۵) \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$۶) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$۷) \cot 2a = \frac{2 \tan^2 a - 1}{2 \cot a}$$

$$۸) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$۹) \cot a - \tan a = 2 \cot 2a$$

$$۱۰) \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$۱۱) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$۱۲) (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \pm \sin 2x$$

$$۱۳) \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$۱۴) \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$۱۵) \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$۱۶) \sin a \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - a \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + a \right) = \frac{1}{4} \sin 3a$$

$$۱۷) \cos a \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - a \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + a \right) = \frac{1}{4} \cos 3a$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل سوم: خرمندی مثلثاتی

$$۱۸) \tan a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \tan^3 a$$

$$۱۹) \tan x + \tan y + k \tan x \tan y = k$$

$$۲۰) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$۲۱) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

نکته ۲۶: به ازای هر a, b داریم:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

تست ۲۶: حاصل $\frac{\sin^2 a \cos a}{\sin a} - \cos^3 a$ برابر کدام است؟

- الف) $\sin^2 a$ ب) $\cot a$ ج) $\cos^2 a$ د) $\sin a$

تست ۲۷: اگر $\sin 2a > 0$ و $\cos a < 0$ آنگاه انتهای کمان a در کدام ناحیه است؟

- الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم

تست ۲۸: اگر $\sin x = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)$ باشد مقدار $\sin x$ کدام است؟

- الف) $-\frac{79}{81}$ ب) $-\frac{2}{27}$ ج) $\frac{79}{81}$ د) $-\frac{26}{27}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل سوم: خرمنل های مثلثاتی

تست ۱: حاصل $\sin 10^\circ \sin 5^\circ \sin 110^\circ$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{16}$

تست ۳۰: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۵)

- الف) $-\frac{3}{4}$ ب) $-\frac{3}{8}$ ج) $\frac{3}{8}$ د) $\frac{3}{4}$

تست ۳۱: اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

- الف) -۲ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ۲

تست ۳۲: اگر ۱ مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \tan 2x$ کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۹۴)

- الف) $-\frac{3}{2}$ ب) $-\frac{3}{4}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

تست ۳۳: اگر $\sin 2\alpha - \cos \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ و $\tan \beta = \frac{1}{2}$ مقدار $\alpha - \beta$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۴)

- الف) ۴۵ / ۰ ب) ۶ / ۰ ج) ۷۵ / ۰ د) ۸ / ۰

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل سوم: خرمنل های مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۳۴: اگر $\cos(2x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۳)

- الف) $-\frac{2}{9}$ ب) $-\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{2}{9}$

تست ۳۵: اگر $\tan(\alpha - \beta) = 2$, $\tan\beta = \frac{1}{39}$ باشد مقدار $\tan(2\alpha - \beta)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۳)

- الف) -3 ب) -2 ج) $\frac{1}{3}$ د) 3

تست ۳۶: ساده شده کسر $\frac{(1+\tan^2 \theta)(1+\cot^2 \theta)}{1-\sin^2 \theta-\cos^2 \theta}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

- الف) $8\cos^{-2} 2\theta$ ب) $8\sin^{-2} 2\theta$ ج) $16\sin^{-4} 2\theta$ د) $16\cos^{-4} 2\theta$

تست ۳۷: اگر $1 = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ باشد مقدار $\cos(2x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۸۸)

- الف) $-\frac{2}{3}$ ب) $-\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{2}{3}$

تست ۳۸: به ازای کدام مقدار k تساوی $1 = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{k}{\cos^2 x} = \tan^4 x - k$ یک اتحاد است؟

- الف) 2 ب) 1 ج) -1 د) -2

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل سوم: خرمنل های مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۳۹: اگر $\cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $a + b =$ است؟

- الف) $\sin^4 a$ ب) $\cos^4 a$ ج) $\sin^2 2a$ د) $\cos^2 2a$

تست ۴۰: اگر $\sin x \cos x = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $\tan^4 x + \cot^4 x$ تقریباً چقدر است؟

- الف) $14/5$ ب) $15/5$ ج) $16/5$ د) $17/5$

تست ۴۱: اگر $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ باشد بیشترین مقدار $\sin \theta + \cos \theta$ کدام است؟

- الف) ۱ ب) $\sqrt{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\sqrt{3}$

تست ۴۲: به ازای کدام مقدار x ، $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}$ کدام نامساوی درست است؟

- الف) $\cos^3 x > \cos x$ ب) $\sin^3 x < \cos^3 x$ ج) $\sin^3 x > \cos x$ د) $\cos^3 x > \sin^3 x$

تست ۴۳: به ازای کدام مقدار x ، $\sin(x) = x^3 - 6x + 10$ همواره درست است؟

- الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل سوم: فرمول های مثلثاتی

سوال: اگر $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $\tan x$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۳.۳ فرمول های تقلیل (کاهش) دادن توان ها یا ازدیاد آن ها

$$1) (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$2) 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$3) 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$4) \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$5) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$6) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

تست ۴۴: خلاصه عبارت $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$ برابر کدام است؟

الف) $\sin 20^\circ$ ب) $\sin 40^\circ$ ج) $\cos 20^\circ$ د) $\cos 40^\circ$

تست ۴۵: اگر $2 \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{5}{4}$ باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{5}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{3}{4}$

تست ۴۶: اگر $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد حاصل $2 \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) ۱ د) صفر

سوال ۲۰: اگر $\tan 2a = 3$ و $\tan b = 3$ باشد حاصل $\tan(a - b) = ?$ را بیابید.

۴.۳ چند رابطه مهم

۱) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

۲) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

۳) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$

۴) $\cot x - \tan x = 2 \cot g 2x$

تست ۴۷: اگر $\cos(2x - \frac{\pi}{4})$ باشد، آنگاه $\sin x(\cos x - \sin x) = -1$ چقدر است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$) ۵

$\frac{\sqrt{2}}{2}$) ۶

ب) ۳

الف) صفر

تست ۴۸: حاصل $\tan 67/5^\circ - \cot 67/5^\circ$ کدام است؟

- $\frac{1}{2}$) ۵

۲) ۶

ب) $\frac{1}{2}$

الف) -۲

تست ۴۹: اگر $\tan a + \tan b = \frac{\pi}{2} - a$ حاصل $a + b = ?$ کدام است؟

$\frac{1}{\cos b}$) ۵

$\frac{1}{\sin a}$) ۶

ب) cosa

الف) sinb

۵.۳ فرمول های تبدیل جمع به ضرب (ویژه رشته ریاضی)

$$1) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2) \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$3) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$4) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$5) \tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$6) \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$7) \cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

تست ۵۰: مقدار عبارت $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a$ به ازای $a = \frac{7\pi}{9}$ چقدر است؟

- الف) ۱ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ۵

۶.۳ فرمول های تبدیل ضرب به جمع (ویژه رشته ریاضی)

$$1) \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$2) \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$3) \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل سوم: خرمنل های مثلثاتی

تست ۵۱ : ساده شده ای عبارت $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ کدام است ؟

- الف) $\cos 2a - \sin a$ ب) $\cos 2a$ ج) $1 + \sin 2a$ د) $1 - \sin 2a$

تست ۵۲ : حاصل $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$ کدام است ؟

- الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{4}$

تست ۵۳ : حاصل $\sin 70^\circ + \cos 70^\circ \tan 10^\circ$ کدام است ؟

- الف) $\sqrt{2}$ ب) ۱ ج) $1 - \sqrt{2}$ د) $\sqrt{2} + 1$



۴ معادلات مثلثاتی

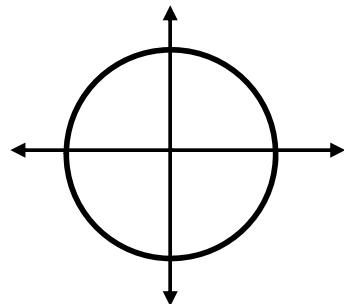
۱.۴ معادله‌ی مثلثاتی ساده

منظور از حل یک معادله‌ی مثلثاتی تعیین کلیه‌ی کمان‌هایی است که در تساوی مثلثاتی صدق می‌کند. برای حل این نوع معادلات می‌بایستی به کمک روابط مثلثاتی کل معادله تنها بر حسب یک نوع نسبت مثلثاتی نوشت: شوند:

۱.۱.۴ معادله‌ی $\sin x = \sin a$

جواب معادله‌ی بالا به شکل زیر است:

$$\sin x = \sin a \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{cases}$$



حالات خاص معادله‌ی بالا

$$1) \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$3) \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

مثال ۷: مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\sin x = 1$ را بیابید.

دقت کنید که در حالت کلی :

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

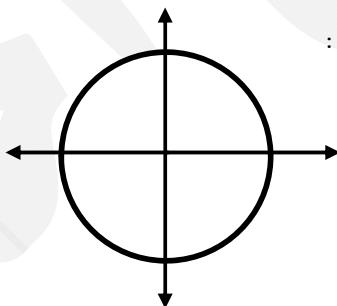
مثال ۸ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\sin 2x = 1$ را بیابید.

مثال ۹ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin 3x$ را بیابید.

۲.۱.۴ معادله‌ی $\cos x = \cos a$

جواب معادله‌ی بالا به شکل زیر است :

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = k\pi \pm a$$



حالات خاص معادله‌ی بالا

$$1) \cos x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \cos x = -1 \Rightarrow x = k\pi$$

$$3) \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۰ : مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x = 0$ را بیابید.

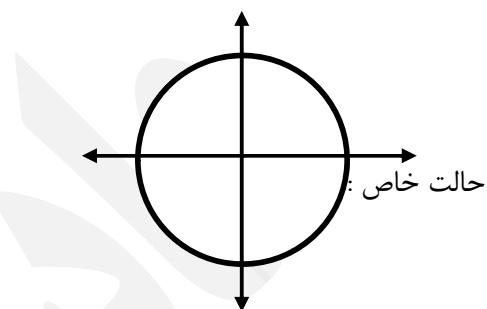
نکته ۱۷ : جواب کلی دو معادله $\cos^2 x = \cos^2 a$ و $\sin^2 x = \sin^2 a$ به شکل $x = k\pi \pm a$ است.

۳.۱.۴ معادله $\tan x = \tan a$

جواب کلی معادله $\tan x = \tan a$ به صورت زیر است :

$$\tan x = \tan a \Rightarrow x = k\pi + a$$

$$\tan x = \cdot \Rightarrow x = k\pi$$



۴.۱.۴ معادله $\cot x = \cot a$

جواب کلی معادله $\cot x = \cot a$ به شکل زیر است :

$$\cot x = \cot a \Rightarrow x = k\pi + a$$

حالات خاص :

$$\cot x = \cdot \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

نکته ۱۸: در هر دور دایره ای مثلثاتی دو جواب برای $\cot x = a$ و $\tan x = a$ وجود دارد.

نکته ۱۹: در بعضی از موارد می توان دسته جواب بدست آمده را به صورت یک دسته جواب نوشت.

نکته ۲۰: در حل معادلات به صورت $x \cdot y = \cdot$ باید $x = \cdot$ و $y = \cdot$ باشد و جواب کلی اجتماع جواب ها می باشد.

نکته ۲۱: روش تغییر متغیر در حل معادلات مثلثاتی یک روش پرکاربرد است.

تست ۵۴: مجموع جواب های معادله $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

د) 3π

ج) $\frac{10\pi}{3}$

ب) $\frac{11\pi}{3}$

الف) $\frac{8\pi}{3}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل چهارم: معادلات مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۵۵ : جواب کلی معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۵)

$$x = k\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{د} \quad x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad \text{ج} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ب} \quad x = 2k\pi \pm \frac{7\pi}{3} \quad \text{الف}$$

تست ۵۶ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۵)

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{د} \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{ج} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ب} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{الف}$$

تست ۵۷ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۴)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \text{د} \quad \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad \text{ج} \quad k\pi + \frac{\pi}{8} \quad \text{ب} \quad k\pi - \frac{\pi}{8} \quad \text{الف}$$

تست ۵۸ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ به کدام صورت است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۴)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{د} \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \text{ج} \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ب} \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{الف}$$

تست ۵۹ : مجموع جواب های معادله $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی داخل

کشور ۹۵)

$$\frac{11\pi}{3} \quad \text{د} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ج} \quad \frac{9\pi}{4} \quad \text{ب} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \text{الف}$$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل چهارم: معادلات مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۶۰: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan^3 x$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۴)

- د) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ ج) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ ب) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ الف) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

تست ۶۱: در معادله مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها

در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی داخل کشور ۹۳)

- د) $\frac{7\pi}{4}$ ج) $\frac{5\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{2}$ الف) $\frac{3\pi}{4}$

تست ۶۲: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟

- د) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ج) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ب) $2k\pi + \pi$ الف) $k\pi$

نکته ۲۲: در بعضی از معادلات مثلثاتی دو کمان متمم اند. لذا می توانیم با فرمول تبدیل $a \pm \frac{\pi}{2}$ مساله را حل کنیم.

تست ۶۳: صورت کلی تمام قوس هایی که در معادله ای $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(2\pi - x) = \sin^2 \frac{7\pi}{6}$ صدق می کنند کدام است؟

- د) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ب) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ الف) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$

نکته ۲۳: در حل بعضی از فرمول های $a \pm b$ ، مساله را به معادله ای ساده تر تبدیل کرده و سپس جواب را می یابیم.

تست ۶۴: یکی از جواب های معادله $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 1$ به کدام صورت است؟

- د) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ الف) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل چهارم: معادلات مثلثاتی

نکته ۲۴: در حل معادلات کسری باید ریشه های مخرج را از جواب ها کسر کنیم.

نکته ۲۵: اگر در معادلات مثلثاتی طرفین را به توان ۲ برسانیم ممکن است یک سری جواب های اضافی ظاهر شود باید آن جواب اضافی را از جواب کلی کسر کنیم.

تست ۶۵: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{\sin 4x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

- الف) $\frac{k\pi}{3}$ ب) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ج) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ د) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

نکته ۲۶: در حل بعضی از معادلات از فرمول های تبدیل جمع به ضرب و ضرب به جمع، مسئله را به معادله ای مثلثاتی ساده کنید.

تست ۶۶: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} + 3x)$ کدام است؟

- الف) $\frac{k\pi}{4}$ ب) $\frac{k\pi}{3}$ ج) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ د) $\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

تست ۶۷: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- الف) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ب) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ج) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ د) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

تست ۶۸: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{3}(\sin x + \cos x) = 1 + \sin(2x)$ کدام است؟

- الف) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ب) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ د) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل چهارم: معادله مثلثاتی

تست ۶۹ : جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ د) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

تست ۷۰ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{\Delta\pi}{2} + x\right)$ کدام است ؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ د) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

تست ۷۱ : جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^3 x = 3\cos x$ به کدام صورت است ؟

الف) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ب) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ج) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ د) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

تست ۷۲ : جواب معادله $2\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3\cot g x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است ؟

الف) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ب) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ج) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ د) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

تست ۷۳ : جواب کلی معادله $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است ؟

الف) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ ج) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ د) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل چهارم: معادلات مثلثاتی

تست ۷۴: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ به کدام صورت است؟

- د) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ج) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{2k\pi}{3}$ الف) $\frac{k\pi}{3}$

تست ۷۵: نقاط پایانی کمان جواب های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی رأس های کدام چندضلعی است؟

- د) مثلث متساوی الساقین ج) مثلث قائم الزاویه ب) مستطیل الف) مربع

تست ۷۶: مجموع جواب های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- د) $\frac{3\pi}{2}$ ج) $\frac{5\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{4}$ الف) $\frac{7\pi}{4}$

تست ۷۷: جواب کلی معادله ای مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ به کدام صورت است؟

- د) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ج) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ الف) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

فصل چهارم: معادله مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

تست ۲ : مجموع تمام جواب های معادله $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است ؟

- الف) 8π ب) 9π ج) 10π د) 11π

تست ۷۹ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ به کدام صورت است ؟

- الف) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ د) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

تست ۸۰ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ به کدام صورت است ؟

- الف) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{k\pi}{2}$ د) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

تست ۸۱ : جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است ؟

- الف) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ ج) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ د) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

تمرین : معادله مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

تست ۸۲ : معادله $\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{2\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$ چند جواب روی بازه $[0, 2\pi]$ دارد ؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵

جزوه آموزشی مبحث مثلثات و دایره مثلثاتی

آموزشگاه علمی آینده سازان

فصل چهارم: معادلات مثلثاتی

تمرینات جمع بندی کل مثلثات

تست ۸۳ : حاصل $x = \frac{\pi}{12}$ به ازای $\frac{\tan^3 x}{1 - \tan^4 x}$ کدام است؟

- د) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ ج) $\frac{\sqrt{6}}{24}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{72}$ الف) $\frac{\sqrt{6}}{72}$

تست ۸۴ : حاصل $\frac{\sin 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ}$ کدام است؟

- د) $\tan 40^\circ$ ج) $\tan 10^\circ$ ب) $\cos 10^\circ$ الف) $\sin 10^\circ$

تست ۸۵ : اگر $\tan(x - 2y) = \frac{1}{5}$ و $\tan(2x + y) = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\tan(x + 2y)$ کدام است؟

- د) $\frac{3}{9}$ ج) $\frac{3}{11}$ ب) $\frac{7}{9}$ الف) $\frac{7}{11}$