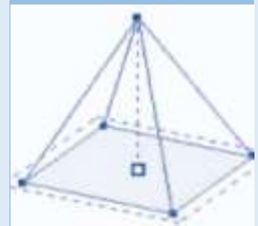


درس نامه ریاضی

@riazicafe

مطالب درسی ریاضی نهم

اصغر بابائی

@Riazi9 AB

ویژه دانش آموزان مدارس دوره اول دبیرستان

۱۳۹۹

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 1 – مجموعه ها

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

آشنائی با مفهوم مجموعه:

مجموعه تعریف ریاضی ندارد و جزء مفاهیم اولیه و بنیادی می باشد . چون دانشمندان بر این عقیده هستند که برای تعریف هر موضوع از مفاهیمی استفاده می کنند که قبلا برای ما تعریف شده هستند و چون قبل از مجموعه ، مفهومی تعریف شده وجود ندارد که بتوان با استفاده از آن ، مجموعه رو تعریف کرد لذا مجموعه رو(مثل نقطه در هندسه) بدون تعریف قبول می کنیم و هر مجموعه را با عناصر و اعضای آن می شناسیم و تعریف مشخص و در قالب کلمات برای مجموعه نداریم.

دو موضوع مهم را در مورد مجموعه به صورت جدی در نظر می گیریم که به آن می پردازیم:

1 – مشخص بودن اعضا **2 – تکراری نبودن اعضا**

معرفی مجموعه در کتاب درسی به صورت زیر آمده است :

از مجموعه در ریاضی

برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) استفاده می‌کنیم.

منظور از مشخص بودن اعضا

این است که باید همه افراد درک یکسانی از اعضای مجموعه داشته باشند و هر شخص با نظر و عقیده خود نسبت به اعضای مجموعه نگاه نکند.

به مثال های زیر توجه کنید :

1 - مجموعه دانش آموزان خوب ← در این مورد حداقل دو تا ابهام وجود دارد یکی این که از نظر شما خوب بودن یک معنی دارد و از نظر اشخاص دیگر هم معنای دیگری دارد . یعنی اگر قرار باشد این مجموعه رو تشکیل دهیم یک جواب منحصر بفرد ندارد و هر شخصی از نظر خود این مجموعه رو تشکیل خواهد داد . البته ابهام دوم مربوط به دانش آموز بودن است که شاید از نظر تعدادی از افراد هر شخصی که مطلبی را در جامعه یاد می گیرد دانش آموز است و لازم نیست که از دانش آموزان رسمی مدرسه انتخاب شوند.

2- مجموعه اعداد بزرگ ← ابهام اصلی مربوط به بزرگ بودن اعداد است که کاملا عدد ها مشخص نیست.

3- مجموعه گل های زیبا ← زیبا بودن گل هم نظر شخصی افراد است و حتی در مورد گل بودن هر مورد شاید اختلاف نظر باشد.

4 – مجموعه نظرات مفید ← ابهام اصلی مربوط به مفید بودن نظرات است که کاملا مشخص نیست و ضمن این که هر مطلبی را می توان نظر تلقی کرد یا نه؟

توجه داشته باشید که مجموعه قرار نیست مثل موارد بالا باشد و اعضا کاملا مشخص باشد .مثل :

1 – مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی

2 – مجموعه دانش آموزان نهم 1 مدرسه سعدی تبریز

3 – مجموعه چهارضلعی که اضلاع آن ها برابرند.

4 – مجموعه اعداد گویا

5 – مجموعه دانشجویان دانشگاه تبریز **6 - ....**

نکته : توجه داشته باشید که زیاد بودن تعداد اعضا مهم نیست اما اگر دیدیم که یک عضو در مجموعه به صورت تکراری آورده شده است آن عضو را دوبار محسوب نکرده و یک بار می نویسیم . البته تکراری نوشتن عضو به موضوع مجموعه لطمه نمی زند ولی دقت کنید که دوبار محسوب نشود.

مجموعه های آشنا و مهم در ریاضیات :

مجموعه اعداد طبیعی $\quad N=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,\dots\}\Rightarrow$

مجموعه اعداد حسابی $\quad W=\{0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,\dots\}\Rightarrow$

مجموعه اعداد صحیح $\quad Z=\{\dots\,,-2\,,-1\,,0\,,+1\,,+2\,,\dots\}\Rightarrow$

مجموعه اعداد گویا $\quad Q=\left\{\frac{a}{b}\;\middle|\;a\,,b\in Z\;,\;b\neq 0\right\}\Rightarrow$

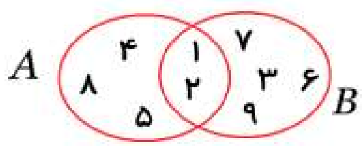
نحوه نمایش و نشان دادن اعضا در مجموعه ها :

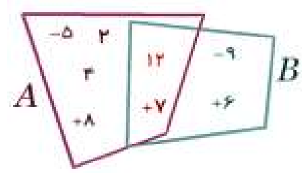
معمولا از سه شیوه زیر در نشان دادن مجموعه ها استفاده می کنیم :

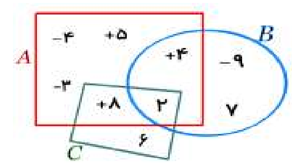
1 – روش تفصیلی : دراین روش اعضا به صورت مفصل در درون علامت آکلاد نشان داده می شود . مثل:

$A=\{5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,10\}$ و $B=\{10\,,20\,,30\,,000\,,200\}$ و $C=\left\{-2\,,3\,,21\,,5/2\,,\frac{3}{4}\right\}$

2 – روش هندسی (نمودار ون) : در این روش ، اعضای مجموعه ها درون خط های بسته نشان داده می شوند :







3 – روش توصیفی : در این روش بدون نوشتن اعضا ، توضیحات و شرایط اعضا به زبان ریاضی ارائه می شود تا مخاطب خود به اعضای مجموعه پی ببرد. این روش کمی تخصصی تر است که فقط به چند مثال زیر اکتفا می کنیم و در درس های آتی به جزئیات اشاره خواهد شد :

$A=\{x\mid x\in Z\;,\;-2<x<+5\}$

$B=\{x\mid x\in N\;,\;3<x<10\}$

$C=\{x\mid x\in W\;,\;5\leq x<21\}$

$D=\{x\mid x\in Z\;,\;x<-8\}$

مثال ها و توضیحات کامل تر در ادامه درس فصل یک، ارائه خواهد شد .

مجموعه تهی :

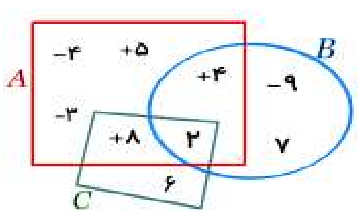
هر مجموعه که عضو ندارد تهی نامیده می شود و به صورت مقابل نشان می دهیم. $\quad \phi=\{\;\}$

دقت کنید که نشان دادن مجموعه تهی به صورت های مقابل غلط هستند : $\{0\}\qquad \{\{\;\}\}\qquad \{\phi\}$

علامت عضویت :

اگرمجموعه را به صورت $A=\{5\,,m\,,7\,,d\}$ درنظر بگیریم، برای نشان دادن این که m عضوی از A است ، می نویسیم : $m\in A$ و می خوانیم:" m عضو A است" و چون عدد 4 عضو A نیست، می نویسیم $4\notin A$ ومی خوانیم : " 4 عضو A نیست "

مثال : با توجه مجموعه های داده شده، در هر یک از جاهای خالی علامت مناسب $\in$ یا $\notin$ قرار دهید :



$-9\;(\quad)\;A$	$+4\;(\quad)\;B$	$+5\;(\quad)\;A$
$3^2\;(\quad)\;B$	$-5\;(\quad)\;C$	$+2\;(\quad)\;B$
$\frac{-20}{5}\;(\quad)\;A$	$(-3)^2\;(\quad)\;B$	$-3^2\;(\quad)\;B$
$-3\;(\quad)\;A$	$+3\times 1/7\;(\quad)\;B$	$8\;(\quad)\;C$

تعریف زیر مجموعه : اگر تمام اعضای مجموعه A از مجموعه B انتخاب شوند در این صورت A زیر مجموعه B است . یعنی اگر تمام اعضای A در داخل مجموعه B باشند در این صورت A زیر مجموعه B است و با علامت مربوط به زیر مجموعه به صورت زیر نشان می دهیم :

$$A \subseteq B \quad \text{یا} \quad A \subset B$$

این دو علامت تفاوت چندانی ندارند ، مگر در یک مورد جزئی که در ادامه درس ها با این موضوع آشنا خواهیم شد.

مثال : اگر $K = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \}$ باشد، مجموعه های زیر که به صورت نمونه ارائه شده اند زیرمجموعه K هستند :

$A = \{ 3 , 8 , 4 , 6 \} \Rightarrow A \subset K$	$L = \{ 4 , 5 \} \Rightarrow L \subset K$	$B = \{ 8 \} \Rightarrow B \subset K$
$P = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \} \Rightarrow P \subseteq K$	$H = \{ 3 , 7 \} \Rightarrow H \subset K$	$M = \{ 4 , 6 \} \Rightarrow M \subset K$

نکته 1 : به علامت زیر مجموعه ، در مثال آخر توجه کنید .

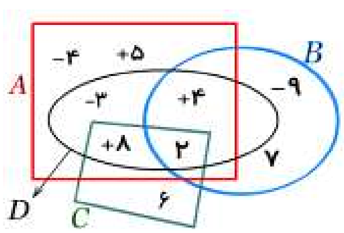
اگر یک یا چند عضو از اعضای مجموعه A از مجموعه B انتخاب نشوند در این صورت A زیر مجموعه B نیست . مثل :

$T = \{ -3 , 8 , 4 , 6 \} \Rightarrow T \not\subset K$	$S = \{ 4 , 9 \} \Rightarrow S \not\subset K$	$D = \{ 2 \} \Rightarrow D \not\subset K$
$B = \{ 2, 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \} \Rightarrow B \not\subset K$	$Y = \{ 0 , 7 \} \Rightarrow Y \not\subset K$	$E = \{ -4 , -6 \} \Rightarrow E \not\subset K$

نکته 2 : مجموعه تهی زیر مجموعه همه مجموعه ها است .

مثال : با توجه مجموعه های داده شده در هر یک از جاهای خالی علامت مناسب $\subset$ یا $\not\subset$ قرار دهید :

$B(\quad)A$	$A(\quad)B$	$D(\quad)A$
$B(\quad)B$	$A(\quad)C$	$C(\quad)A$
$\phi(\quad)\phi$	$A(\quad)A$	$\phi(\quad)B$
$C(\quad)C$	$C(\quad)\phi$	$A(\quad)\phi$



نکته ای مهم در مورد تعداد تمام زیر مجموعه های یک مجموعه : به مثال های زیر توجه کنید :

مثال 1 : تمام زیر مجموعه های $A = \{ 7 \}$ را بنویسید : جواب : $\phi = \{ \}$ و $\{ 7 \}$

اگر دقت کنید به غیر از این دو مجموعه ، نمی توان زیر مجموعه دیگری برای A نوشت . تعداد زیر مجموعه ها با تعداد اعضای A ارتباط دارد .

مثال 2 : تمام زیر مجموعه های $A = \{ 7 , 8 \}$ را بنویسید :

جواب : $\phi = \{ \}$ و $\{ 7 , 8 \}$ و $\{ 8 \}$ و $\{ 7 \}$

اگر دقت کنید به غیر از این چهار مجموعه ، نمی توان زیر مجموعه دیگری برای A نوشت . تعداد زیر مجموعه ها با تعداد اعضای A ارتباط دارد .

مثال 3 : تمام زیر مجموعه های $A = \{ 7 , 8 , 9 \}$ را بنویسید :

جواب : $\phi = \{ \}$ و $\{ 7 , 8 , 9 \}$ و $\{ 7 , 9 \}$ $\{ 8 , 9 \}$ و $\{ 7 , 8 \}$ و $\{ 9 \}$ و $\{ 8 \}$ و $\{ 7 \}$

اگر دقت کنید به غیر از این هشت مجموعه ، نمی توان زیر مجموعه دیگری برای A نوشت . تعداد زیر مجموعه ها با تعداد اعضای A ارتباط دارد .

مثال 4 : تمام زیر مجموعه های $A = \{ 6 , 7 , 8 , 9 \}$ را بنویسید : جواب :

$A = \{ 6 , 7 , 8 , 9 \}$ و $\phi = \{ \}$	$\{ 6 , 7 , 9 \}$ و $\{ 6 , 7 , 8 \}$ $\{ 7 , 8 , 9 \}$ و $\{ 6 , 8 , 9 \}$	$\{ 6 , 8 \}$ و $\{ 6 , 7 \}$ $\{ 7 , 8 \}$ و $\{ 6 , 9 \}$ $\{ 8 , 9 \}$ و $\{ 7 , 9 \}$	$\{ 9 \}$ و $\{ 8 \}$ $\{ 7 \}$ و $\{ 6 \}$

اگر دقت کنید به غیر از این شانزده مجموعه ، نمی توان زیر مجموعه دیگری برای A نوشت . تعداد زیر مجموعه ها با تعداد اعضای A ارتباط دارد .

نکته 3 : اگر توجه کنید با افزایش تعداد اعضای مجموعه ، تعداد کل زیر مجموعه ها دو برابر می شود .

یعنی اگر مجموعه ای n تا عضو داشته باشد، در این صورت تعداد زیرمجموعه هایش 2^n تا خواهد بود .

تعداد زیرمجموعه	تعداد عضو
$2^0=1$	0
$2^1=2$	1
$2^2=4$	2
$2^3=8$	3
$2^4=16$	4
$2^5=32$	5
$2^6=64$	6

تعداد زیرمجموعه	تعداد عضو
$2^7=128$	7
$2^8=256$	8
$2^9=512$	9
$2^{10}=1024$	10
$2^{11}=2048$	11
$2^{12}=4096$	12
2^n	n

نکته 4: نحوه به دست آوردن تعداد زیر مجموعه های خاص از یک مجموعه :

به مثال زیر توجه کنید :

مثال 1 : اگر مجموعه A به تعداد 10 تا عضو داشته باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه 3 عضوی دارد؟

حل : مجموعه A تعداد 1024 تا زیرمجموعه دارد که باید حساب کنیم چند تا از آن ها سه عضوی هستند.

$$\binom{10}{3}=\frac{10\,!}{3\,!\times 7\,!}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times1\times2\times3\times\ldots\times7}=120$$

اگر دقت کنید با استفاده از فرمول بالا و محاسبه فاکتوریل ، تعداد 120 تا از 1024 تا زیرمجموعه سه عضوی هستند. پس به فرمول زیر دقت کنید :

اگر مجموعه ای n تا عضو داشته باشد ، تعداد زیرمجموعه های k عضوی آن به صورت زیر به دست می آید :

$$\binom{n}{k}=\frac{n\,!}{k\,!\times(n-k)\,!}$$

مثال 2 : اگر مجموعه A به تعداد 8 تا عضو داشته باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه 5 عضوی دارد؟

حل : مجموعه A تعداد 256 تا زیرمجموعه دارد که باید حساب کنیم چند تا از آن ها پنج عضوی هستند.

$$\binom{8}{5}=\frac{8\,!}{5\,!\times 3\,!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4\times5\times1\times2\times3}=56$$

مثال 3 : اگر مجموعه A به تعداد 8 تا عضو داشته باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه 3 عضوی دارد؟

حل : مجموعه A تعداد 256 تا زیرمجموعه دارد که باید حساب کنیم چند تا از آن ها سه عضوی هستند.

$$\binom{8}{3}=\frac{8\,!}{3\,!\times 5\,!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times1\times2\times3\times4\times5}=56$$

مثال 4 : اگر مجموعه A به تعداد 12 تا عضو داشته باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه 7 عضوی دارد؟

حل : مجموعه تعداد 4096 تا زیرمجموعه دارد که باید حساب کنیم چند تا از آن ها هفت عضوی هستند.

$$\binom{12}{7}=\frac{12\,!}{7\,!\times 5\,!}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times7\times\ldots\times11\times12}{1\times2\times3\times\ldots\times7\times1\times2\times3\times4\times5}=792$$

مثال 5 : اگر مجموعه A به تعداد 12 تا عضو داشته باشد، این مجموعه چند زیرمجموعه 5 عضوی دارد؟

حل : مجموعه تعداد 4096 تا زیرمجموعه دارد که باید حساب کنیم چند تا از آن ها پنج عضوی هستند.

$$\binom{12}{5}=\frac{12\,!}{5\,!\times 7\,!}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times7\times\ldots\times11\times12}{1\times2\times3\times4\times5\times1\times2\times3\times\ldots\times7}=792$$

نکته 5 : از مثال 2 و 3 همچنین با توجه به دو مثال 4 و 5 می توان به نکته مهمی دست یافت که توضیح اون به عهده دانش آموزان است.

نتیجه گیری : اگر مجموعه ای 10 تا عضو داشته باشد ،

تعداد زیر مجموعه های 1 عضوی و تعداد زیرمجموعه های 9 عضوی با هم برابرند و

تعداد زیر مجموعه های 2 عضوی و تعداد زیرمجموعه های 8 عضوی با هم برابرند و

تعداد زیر مجموعه های 3 عضوی و تعداد زیرمجموعه های 7 عضوی با هم برابرند و

تعداد زیر مجموعه های 4 عضوی و تعداد زیرمجموعه های 6 عضوی با هم برابرند و

تعداد زیر مجموعه های 0 عضوی و تعداد زیرمجموعه های 10 عضوی با هم برابرند .

تساوی مجموعه ها:

اگر A زیر مجموعه B باشد و همچنین B زیر مجموعه A باشد در این صورت دو مجموعه A و B با هم برابرند . یعنی :

$$A\subset B\ ,\ B\subset A \iff A=B$$

مثال 1 : در جاهای خالی اعداد مناسب را طوری قرار دهید تا دو مجموعه با هم برابر باشند :

$$\left\{5\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \frac{2}{5}\ ,\ 4\ ,\ -3\ ,\ 1/2\right\}=\left\{\frac{4}{10}\ ,\ 3^{-1}\ ,\ \sqrt{25}\ ,\ \frac{6}{5}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ -\frac{9}{3}\right\}$$

جواب : اگر دقت کنید یک عضو از هرکدام در مجموعه دیگر نیست که باید در جای خالی قرار گیرند:

$$\left\{۵\ ,\ ۳^{-۱}\ ,\ \frac{۲}{۵}\ ,\ ۴\ ,\ -۳\ ,\ ۱/۲\right\}=\left\{\frac{۴}{۱۰}\ ,\ ۳^{-۱}\ ,\ \sqrt{۲۵}\ ,\ \frac{۶}{۵}\ ,\ ۴\ ,\ -\frac{۹}{۳}\right\}$$

مثال 2 : در جاهای خالی اعداد مناسب را طوری قرار دهید تا دو مجموعه با هم برابر باشند :

$$\left\{\frac{6}{10}\ ,\ -0/75\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ -8\right\}=\left\{-\frac{3}{4}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \sqrt{\frac{9}{25}}\right\}$$

جواب : اگر دقت کنید یک عضو از هرکدام در مجموعه دیگر نیست که باید در جای خالی قرار گیرند:

$$\left\{\frac{۶}{۱۰}\ ,\ -۰/۷۵\ ,\ \frac{۱}{۵}\ ,\ -۸\right\}=\left\{-\frac{۳}{۴}\ ,\ -۸\ ,\ \frac{۱}{۵}\ ,\ \sqrt{\frac{۹}{۲۵}}\right\}$$

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که :

۱- هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم : $A\subseteq A$.

۲- اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم :

$$B\not\subseteq A$$

۳- مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی؛

$$\varnothing\subseteq A$$

نمایش مجموعه ها به زبان و علائم ریاضی (روش توصیفی بیان مجموعه ها)

قبلا با دو روش نشان دادن مجموعه ها آشنا شدیم (روش تفصیلی و روش هندسی) .

در روش سوم می خواهیم با بیان شرایط موجود بین اعضا مجموعه به نحوی اعضا را معرفی کنیم تا همه بدانند که اعضای مجموعه شامل چه موارد است .

برای بیان مجموعه ها دانستن چند مجموعه مهم مثل اعداد طبیعی و اعداد حسابی و اعداد صحیح و نظیر این ها خیلی مهم است. به مثال زیر توجه کنید :

$$A=\{-3,-2,-1,0,\dots,+10\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad -4<x<11\}$$

در این مثال گفته شده که مجموعه شامل x هائی است که آن x ها عضو اعداد صحیح هستند و x ها مابین 4- و 10+ می باشند.

این مثال را می توان به صورت زیر هم نوشت . به تغییرات جزئی توجه کنید :

$$A=\{-3,-2,-1,0,\dots,+10\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad -3\le x\le 10\}$$

در مثال های زیر نکات و موارد دیگری را هم با توجه به شرایط مجموعه ها باید رعایت کنیم

$$B=\{2,3,4,5,\dots,90\}=\{x \mid x\in N \quad , \quad 1<x<91\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad 1<x<91\}$$

اگر دقت کنید مثال بالا به دوصورت بیان شد و البته به شکل های دیگری هم امکان بیان مجموعه وجود داشت.

$$C=\{1,2,3,4,\dots,+20\}=\{x \mid x\in N \quad , \quad x<21\}$$

$$D=\{-4,-3,-2,-1,\dots\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad -5<x\}$$

$$E=\{\dots,-2,-1,0,\dots,+8\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad x\le 8\}$$

به دو مثال آخر با دقت توجه کنید . در مثال های زیر برای نوشتن به زبان و علائم ریاضی ، داشتن خلاقیت و دانستن برخی از نکات درسی ریاضی مهم است.

1 - مجموعه های زیر را به زبان و علائم ریاضی بنویسید:

$$A=\{-3,-2,-1,0,\dots,+10\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad -4<x<11\}$$

$$B=\{-4,-5,-6,0,\dots,-21\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad -22<x<-3\}$$

$$C=\{\dots,-7,-6,-5\}=\{x \mid x\in Z \quad , \quad x<-4\}$$

$$D=\{+4,+6,+8,10,\dots,+20\}=\{2x \mid x\in N \quad , \quad 2\le x<11\}$$

$$E=\{1,3,5,7,\dots,27\}=\{2x+1 \mid x\in Z \quad , \quad -1<x<14\}$$

$$E=\{1,3,5,7,\dots,27\}=\{2x-1 \mid x\in Z \quad , \quad 0<x<15\}$$

$$F=\{13,15,17,19,\dots,111\}=\{2x+1 \mid x\in W \quad , \quad 5<x<55\}$$

$$F=\{13,15,17,19,\dots,111\}=\{2x-1 \mid x\in W \quad , \quad 6<x<56\}$$

$$G=\{-3,-6,-9,-12,-15\}=\{3x \mid x\in Z \quad , \quad -6<x<0\}$$

$$G=\{-3,-6,-9,-12,-15\}=\{-3x \mid x\in N \quad , \quad x<6\}$$

$$H=\{1,4,9,\dots,289\}=\{x^2 \mid x\in N \quad , \quad x<18\}$$

$$I=\{1,8,27,\dots,1000\}=\{x^3 \mid x\in N \quad , \quad x<11\}$$

$$J=\{-27,-8,-1,\dots,1000\}=\{x^3 \mid x\in Z \quad , \quad -4<x<11\}$$

$$K=\{1,2,4,8,\dots,1024\}=\{2^x \mid x\in W \quad , \quad x<11\}$$

$$K=\{1,2,4,8,\ldots,1024\}=\{2^x \mid x\in Z \;,\; 0\le x<11\}$$

$$L=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,\ldots,256\right\}=\{2^x \mid x\in Z \;,\; -3<x<9\}$$

$$M=\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{20}\right\}=\left\{\frac{1}{x} \;\middle|\; x\in N \;,\; 4<x<21\right\}$$

$$O=\left\{\frac{8}{5},\frac{10}{5},\frac{12}{5},\frac{14}{5},\ldots,\frac{32}{5}\right\}=\left\{\frac{2x}{5} \;\middle|\; x\in N \;,\; 3<x<17\right\}$$

$$P=\left\{\frac{7}{5},\frac{8}{6},\frac{9}{7},\ldots,\frac{24}{22}\right\}=\left\{\frac{x+2}{x} \;\middle|\; x\in N \;,\; 4<x<23\right\}$$

$$P=\left\{\frac{7}{5},\frac{8}{6},\frac{9}{7},\ldots,\frac{24}{22}\right\}=\left\{\frac{x}{x-2} \;\middle|\; x\in N \;,\; 6<x<25\right\}$$

$$P=\left\{\frac{7}{5},\frac{8}{6},\frac{9}{7},\ldots,\frac{24}{22}\right\}=\left\{\frac{x+1}{x-1} \;\middle|\; x\in N \;,\; 5<x<24\right\}$$

$$S=\left\{\frac{1}{1},\frac{4}{8},\frac{9}{27},\ldots,\frac{100}{1000}\right\}=\left\{\frac{x^2}{x^3} \;\middle|\; x\in N \;,\; x<11\right\}$$

$$S=\left\{\frac{1}{1},\frac{4}{8},\frac{9}{27},\ldots,\frac{100}{1000}\right\}=\left\{\frac{1}{x} \;\middle|\; x\in N \;,\; x<11\right\}$$

$$T=\left\{\frac{1}{10},\frac{2}{9},\frac{3}{8},\ldots,\frac{10}{1}\right\}=\left\{\frac{x}{11-x} \;\middle|\; x<N \;,\; x<11\right\}$$

$$U=\{-1,+1\}=\{(-1)^x \mid x\in Z\}$$

$$Y=\{-1,+2,-3,+4,\ldots.,+200\}=\{(-1)^x\times x \mid x\in N \;,\; x<201\}$$

$$\prod=\{+1,-2,+3,-4,\ldots.,-200\}=\{(-1)^{x+1}\times x \mid x\in N \;,\; x<201\}$$

$$\prod=\{+1,-2,+3,-4,\ldots.,-200\}=\{(-1)^x\times(-x) \mid x\in N \;,\; x<201\}$$

$$\Psi=\{-5,+10,-15,+20,\ldots.,+200\}=\{(-1)^x\times 5x \mid x\in N \;,\; x<41\}$$

$$\Sigma=\{-1,+4,-9,0,\ldots.,+64\}=\{(-1)^x\times x^2 \mid x\in N \;,\; x<9\}$$

در مثال های بالا ، تعدادی از مجموعه ها به دو یا چند نوع مختلف به زبان ریاضی بیان شده است . این موضوع می تواند در مورد بقیه مثال ها هم اتفاق بیافتد.

در برخی از موارد از ما خواسته می شود اعضای مجموعه ای را که به زبان ریاضی بیان شده است را به صورت تفصیلی بنویسیم. مثل :

2 - اعضای مجموعه های زیر را بنویسید:

$$A=\{x \mid x\in N \;,\; x<+7\}=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$B=\{x \mid x\in Z \;,\; -3<x<+7\}=\{-2,-1,0,\ldots,6\}$$

$$C=\{x \mid x\in Z \;,\; x<-5\}=\{\ldots,-8,-7,-6\}$$

$$D=\{x \mid x\in N \;,\; x<-4\}=\{\;\}=\phi$$

$$E=\{x \mid x\in N \;,\; x>+3\}=\{4,5,6,7,\ldots\}$$

$$F=\{2x \mid x\in Z \;,\; -2<x<+15\}=\{-2,0,2,4,\ldots,28\}$$

$$G=\left\{\,2x\;\middle|\;x\in N\ ,\ -2<x<+15\right\}=\left\{\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ \ldots\ ,\ 28\ \right\}$$

$$H=\left\{\,\frac{3}{x}\;\middle|\;x\in N\ ,\ x\le 4\right\}=\left\{\ \frac{3}{1}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ \right\}$$

$$I=\left\{\,x^{2}\;\middle|\;x\in Z\ ,\ -5<x\le 5\right\}=\left\{\ 16\ ,\ 9\ ,\ 4\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 25\ \right\}$$

$$J=\left\{\,x^{10}\;\middle|\;x\in Z\ ,\ -2<x<+3\right\}=\left\{\ +1\ ,\ 0\ ,\ 1024\ \right\}$$

$$K=\left\{\,x^{-2}\;\middle|\;x\in N\ ,\ x\le 5\right\}=\left\{\ \frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{16}\ ,\ \frac{1}{25}\ \right\}$$

$$M=\left\{\,\frac{2x+1}{5-x}\;\middle|\;x\in N\ ,\ 7<x\le 10\right\}=\left\{\ \frac{17}{-3}\ ,\ \frac{19}{-4}\ ,\ \frac{21}{-5}\ \right\}$$

$$O=\left\{\,x\;\middle|\;x\in N\ ,\ \frac{x}{3}\in N\ ,\ x<10\right\}=\left\{\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ \right\}$$

$$P=\left\{\,x\;\middle|\;x\in N\ ,\ 5x+3=23\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$S=\left\{\,x\;\middle|\;x\in N\ ,\ 2x+12=-5x-16\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$T=\left\{\,x\;\middle|\;x\in N\ ,\ 2x<15\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$U=\left\{\,-3x\;\middle|\;x\in W\ ,\ x^{2}<17\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

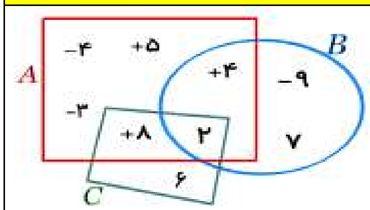
$$Y=\left\{\,x^{2}+1\;\middle|\;x\in Z\ ,\ -5<x^{3}\le 30\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$\lambda=\left\{\,(-x)^{2}\;\middle|\;x\in Z\ ,\ -10<x<+11\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$\mu=\left\{\,\frac{x}{17x}\;\middle|\;x\in Z\ ,\ -118<x<+800\right\}=\{\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

تکالیف : سوالات کاردر کلاس و تمرین صفحه **10** کتاب و جواب های آن ها را در دفتر بنویسید.

اجتماع و اشتراک و تفاضل و متمم مجموعه ها



1 – اجتماع مجموعه ها : به مجموعه های مقابل توجه کنید .

اگربخواهیم تمام اعضا مجموعه A رابه همراه تمام اعضای مجموعه B انتخاب کنیم و مجموعه بزرگ تری ایجاد کنیم مجموعه حاصل را اجتماع A و B می گویند . اعضای این مجموعه بزرگ یا عضو A هستند یا عضو B .یعنی:

$$\{\ -5\ ,\ -4\ ,\ -9\ ,\ +8\ ,\ +2\ ,\ +5\ ,\ +7\ ,\ -3\ \}$$

به این مجموعه تشکیل شده اجتماع مجموعه A و B می گوئیم و با علامت زیر نشان می دهیم:

$$A\cup B=\{\ -3\ ,\ -4\ ,\ -9\ ,\ +8\ ,\ +2\ ,\ +5\ ,\ +7\ ,\ +4\ \}$$

اگر بخواهیم اجتماع دو مجموعه را به زبان ریاضی بنویسیم به صورت زیر خواهد بود :

$$A\cup B=\left\{\ x\ \middle|\ x\in A\ \text{یا}\ x\in B\ \right\}$$

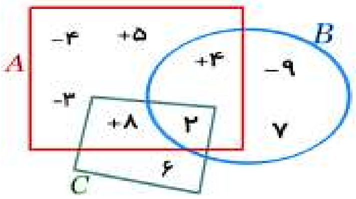
در مثال بالا ، اجتماع سایر مجموعه ها به صورت زیر خواهند بود :

$$A\cup C=\{\ -3\ ,\ -4\ ,\ +6\ ,\ +8\ ,\ +2\ ,\ +5\ ,\ +4\ \}$$

$$B\cup C=\{\ -9\ ,\ +7\ ,\ +6\ ,\ +8\ ,\ +2\ ,\ +4\ \}$$

$$A\cup B\cup C=\{\ -3\ ,\ -4\ ,\ -9\ ,\ +8\ ,\ +2\ ,\ +5\ ,\ +7\ ,\ +4\ ,\ 6\ \}$$

2 - اشتراک مجموعه ها : به مجموعه های مقابل توجه کنید .



اگربخواهیم اعضای مشترک دو مجموعه A و B انتخاب کرده و مجموعه ای جدید ایجاد کنیم مجموعه حاصل را اشتراک A و B می گویند . اعضای این مجموعه هم عضو A هستند و هم عضو B .یعنی:

$$\{ +4 \ , \ +2 \}$$

به این مجموعه تشکیل شده اشتراک مجموعه A و B می گوئیم و با علامت زیر نشان می دهیم:

$$A \cap B = \{ +4 \ , \ +2 \}$$

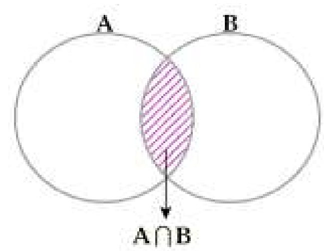
اگر بخواهیم اشتراک دو مجموعه را به زبان ریاضی بنویسیم به صورت زیر خواهد بود :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \text{و} \ x \in B \}$$

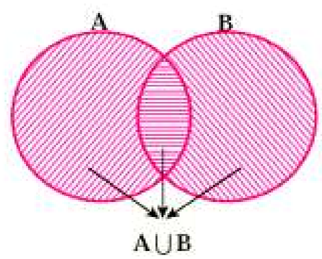
در مثال بالا ، اشتراک سایر مجموعه ها به صورت زیر خواهند بود :

$A \cap B \cap C = \{ +2 \}$ $\quad$ $B \cap C = \{ +2 \}$ $\quad$ $A \cap C = \{ +8 \ , \ +2 \}$

نکته : به تفاوت جزئی در تعریف ریاضی اجتماع و اشتراک دو مجموعه دقت کنید.

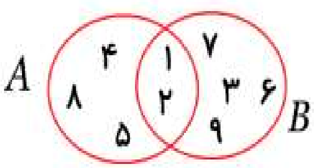


$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \text{و} \ x \in B \}$



$A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \text{یا} \ x \in B \}$

3 - تفاضل مجموعه ها : به مجموعه های مقابل توجه کنید .



اگربخواهیم اعضایی از مجموعه A را انتخاب کنیم که در مجموعه B نیستند و مجموعه ای جدید ایجاد کنیم مجموعه حاصل را $A-B$ می گویند . اعضای این مجموعه ، عضو A هستند ولی عضو B نیستند . یعنی:

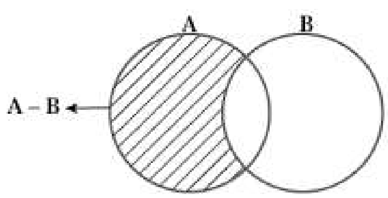
$$A - B = \{ 4 \ , \ 8 \ , \ 5 \}$$

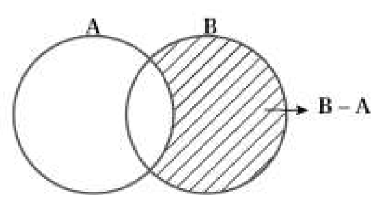
اگر بخواهیم تفاضل دو مجموعه را به زبان ریاضی بنویسیم به صورت زیر خواهد بود :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \ , \ x \notin B \}$$

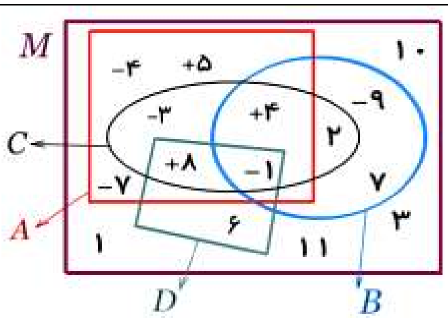
البته می توانیم $B - A$ را هم به صورت زیر بنویسیم:

$$B - A = \{ x \mid x \in B \ , \ x \notin A \} \qquad \Rightarrow B - A = \{ 7 \ , \ 3 \ , \ 6 \ , \ 9 \}$$





4 – مجموعه مرجع: به مجموعه های مقابل توجه کنید .



مجموعه مرجع یا مجموعه مادر ، مجموعه ای است که در هر مساله یا موضوع ریاضی می توانیم چنان انتخاب کنیم که انگار مجموعه ای بزرگ تر از آن وجود ندارد و همه اعضا سایر مجموعه ها از این مجموعه انتخاب شده اند . این مجموعه مرجع می تواند از سوالی به سوال دیگر تغییر کند و به انتخاب ما و یا طراح سوال بستگی دارد. معمولا مجموعه مرجع را با M یا U نشان می دهیم.

مثل مجموعه M در شکل مقابل :

اگر مجموعه مرجع انتخاب شد می توانیم متمم هر مجموعه را با توجه به آن ، به صورت زیر انتخاب کنیم.

5 - متمم مجموعه ها : اعضایی از مجموعه مرجع که عضو مجموعه B نیستند، مجموعه دیگری تشکیل می دهند که متمم B نامیده می شود .

و به صورت زیر نشان می دهیم:

$$B' = \{\ x \mid x \in M \ ,\ x \notin B\ \}$$

در مثال بالا متمم هر یک از مجموعه های داده شده به صورت زیر خواهند بود :

$$B' = \{ -4 , -3 , 5 , 8 , 1 , -7 , 6 , 11 , 3 , 10 \} \qquad A' = \{ -9 , 1 , 2 , 3 , 6 , 7 , 10 , 11 \}$$

$$C' = \{ -4 , -9 , 5 , 7 , 1 , -7 , 6 , 11 , 3 , 10 \}$$

$$D' = \{ -4 , -3 , 5 , -9 , 1 , -7 , 2 , 11 , 3 , 10 , 4 , 7 \}$$

نکته : با توجه به تعریف بالا ، دو مورد مهم به صورت زیر داریم:

$$M' = \phi \qquad , \qquad \phi' = M$$

عدد اصلی مجموعه :

اگر مجموعه ای متناهی باشد ، تعداد اعضای مجموعه قابل شمارش خواهد بود . در این صورت تعداد اعضای مجموعه را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$n(A)$$

و به آن عدد اصلی مجموعه می گوئیم . سال بعد با مفهوم متناهی بودن مجموعه بیشتر آشنا خواهید شد

مثال 1 : عدد اصلی (تعداد اعضای) مجموعه های زیر را مشخص کنید :

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \} \Rightarrow n(A) = ...$

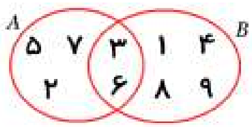
$B = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , ... , 100 \} \Rightarrow n(B) = ...$

$C = \{ x \mid x \in Z , -10 \leq x \leq +15 \} \Rightarrow n(C) = ...$

$D = \{ x \mid x \in N , -10 < x < +8 \} \Rightarrow n(D) = ...$

$E = \{ x \mid x \in W , x \leq \sqrt{17} \} \Rightarrow n(E) = ...$

مثال 2 : با توجه به مجموعه های مقابل ، تعداد اعضای مجموعه های زیر را مشخص کنید؟



$n(B-A) = ...$ $\quad n(A-B) = ...$ $\quad n(A) = ...$

$n[(A \cap B) - (A \cup B)] = ...$ $\quad n(A \cap B) = ...$ $\quad n(A \cup B) = ...$

مثال 3 : در کدام گزینه زیر ، تعداد اعضا نادرست نوشته شده است؟

الف) $A = \{ 3 , 6 , 9 , 12 , ... , 105 \} \Rightarrow n(A) = 35$ ( )

ب) $A = \{ -35 , -33 , -31 , -29 , ... , +17 \} \Rightarrow n(A) = 27$ ( )

ج) $A = \{ -35 , -33 , -31 , -29 , ... , +17 \} \Rightarrow n(A) = 28$ ( )

د) $A = \{ -100 , -95 , -90 , ... , +110 \} \Rightarrow n(A) = 43$ ( )

مثال 4 : اگر مجموعه $A = \{ 4, 5, 6, 7, ... \}$ باشد در این صورت $N - A$ چند عضو دارد؟

الف) 2 ( ) ب) 3 ( ) ج) 4 ( ) د) بی نهایت ( )

مثال 5 : مجموعه $A = \{ 5 , 7 , 9 , 11 , ... , 137 \}$ چند عضو بیش تر از مجموعه $B = \{ 3 , 7 , 11 , 15 , ... , 123 \}$ دارد؟

الف) 31 ( ) ب) 34 ( ) ج) 36 ( ) د) 38 ( )

تکالیف : فعالیت و کار درکلاس و تمرینات صفحات 12 و 13 و14 را بنویسید.

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال های گذشته با مفهوم احتمال آشنائی مختصری پیدا کردید . برای به دست آوردن احتمال ، دانستن دو مورد لازم است :

تعداد تمام حالت های ممکن و **تعداد حالت های مطلوب**

از تقسیم تعداد حالت های مطلوب بر تعداد تمام حالت های ممکن ، عددی از صفر تا یک به دست می آید .

- اگر عدد به دست آمده صفر باشد به عبارت دیگر احتمال آن پیشامد صفر باشد ، یعنی آن پیشامد اتفاق نمی افتد.
- اگر عدد به دست آمده یک باشد به عبارت دیگر احتمال آن پیشامد یک باشد ، یعنی آن پیشامد حتما اتفاق می افتد.
- اگر عدد به دست آمده عددی ما بین صفر و یک باشد ، یعنی آن پیشامد ممکن است اتفاق بیافتد ، ولی حتمی نیست .

در درس قبلی با عدد اصلی مجموعه آشنا شدیم که بیانگر تعداد اعضای مجموعه است . اگر مجموعه تمام حالت های ممکن را با S نشان داده و مجموعه حالت های مطلوب را با اسامی مثل A یا B و ... نشان دهیم ، در این صورت تعداد اعضای مجموعه تمام حالت های ممکن به صورت $n\ (S)$ و تعداد اعضای مجموعه حالت های مطلوب به صورت $n\ (A)$ یا $n\ (B)$ و ... خواهد بود و احتمال پیشامد به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}} \Rightarrow P\ (A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)}$$

مثال 1 : در پرتاب تاس احتمال این که عدد بزرگ تر از 4 بیاید چه قدر است ؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n\ (S) = 6$$
$$A = \{5, 6\} \Rightarrow n\ (A) = 2$$
$$\Rightarrow P\ (A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال 2 : در پرتاب تاس احتمال این که عدد زوج بیاید ، چه قدر است ؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n\ (S) = 6$$
$$B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n\ (B) = 3$$
$$\Rightarrow P\ (B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال 3 : در پرتاب تاس احتمال این که عدد اول بیاید، چه قدر است ؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n\ (S) = 6$$
$$C = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n\ (C) = 3$$
$$\Rightarrow P\ (C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال 4 : در جعبه ای 3 تا مهره قرمز و 2 تا مهره آبی و 4 تا مهره زرد وجود دارد . احتمال این که مهره ای برداریم و رنگ قرمز باشد ، چه قدر است ؟

$$S = \{\text{ق}, \text{ق}, \text{ق}, \text{آ}, \text{آ}, \text{ز}, \text{ز}, \text{ز}, \text{ز}\} \Rightarrow n\ (S) = 9$$
$$D = \{\text{ق}, \text{ق}, \text{ق}\} \Rightarrow n\ (D) = ۳$$
$$\Rightarrow P\ (D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال 5 : در جعبه ای 3 تا مهره قرمز و 2 تا مهره آبی و 4 تا مهره زرد وجود دارد . احتمال این که مهره ای برداریم و رنگ آبی باشد، چه قدر است ؟

$$S = \{\text{ق}, \text{ق}, \text{ق}, \text{آ}, \text{آ}, \text{ز}, \text{ز}, \text{ز}, \text{ز}\} \Rightarrow n\ (S) = 9$$
$$E = \{\text{آ}, \text{آ}\} \Rightarrow n\ (E) = ۲$$
$$\Rightarrow P\ (E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{9}$$

نکته 1 : اگر در یک مثال ، تعداد حالت های چند پیشامد مشخص باشد و بخواهیم که این چند پیشامد به صورت همزمان اتفاق بیافتد از اصل ضرب استفاده می کنیم . به مثال زیر توجه کنید :

مثال 1 : یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم . به چند حالت مختلف سکه و تاس روی زمین می نشینند؟

حل : چون 6 حالت مختلف برای تاس ممکن است و 2 حالت برای سکه وجود دارد پس می توان گفت 12 حالت وجود خواهد داشت : $6 \times 2 = 12$

مثال 2 : دو تا تاس را با هم پرتاب می کنیم . به چند حالت مختلف تاس ها روی زمین می نشینند؟

حل : چون 6 حالت مختلف برای هر تاس ممکن است پس می توان گفت 36 حالت وجود خواهد داشت : $6 \times 6 = 36$

مثال 3 : سه تا سکه را با هم پرتاب می کنیم . به چند حالت مختلف سکه ها روی زمین می نشینند؟

حل : چون 2 حالت مختلف برای هر سکه ممکن است پس می توان گفت 8 حالت وجود خواهد داشت : $2 \times 2 \times 2 = 8$

مثال 4 : خانواده ای 4 فرزند دارد . از نظر پسر و دختر بودن چند حالت مختلف برای فرزندان آ ن ها وجود دارد ؟

حل : چون 2 حالت مختلف برای هر فرزند ممکن است پس می توان گفت 16 حالت وجود خواهد داشت : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

مثال 5 : با ارقام 4 و 5 و 6 و 7 و 8 چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

حل : چون برای هر رقم یکان و دهگان و صدگان در این عدد سه رقمی ، پنج حالت مختلف وجود دارد یعنی هر یک از این 5 عدد داده شده می توانند در یکان و دهگان و صدگان ، قرار بگیرند پس می توان گفت 125 نوع عدد سه رقمی مختلف تشکیل می شود و 125 حالت مختلف وجود خواهد داشت :

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

مثال 6 : با ارقام 4 و 5 و 6 و 7 و 8 چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم ها می توان نوشت ؟

حل : چون برای رقم صدگان در این عدد سه رقمی ، پنج حالت و برای رقم دهگان 4 حالت و برای رقم یکان هم سه حالت می توان در نظر گرفت یعنی هر یک از این 5 عدد داده شده ، می توانند در صدگان عدد سه رقمی قرار بگیرند ولی عددی که در صدگان نوشته شده دوباره در دهگان نمی تواند قرار داشته باشد پس چهار امکان برای دهگان وجود خواهد داشت و در مورد رقم یکان هم اعدادی که در صدگان و دهگان قرار گرفته اند نمی توانند در یکان باشند ، پس سه حالت برای یکان باقی می ماند ، به این دلیل می توان گفت 60 حالت مختلف وجود خواهد داشت :

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

یعنی از 125 مورد عدد مثال قبلی 60 تا عدد بدون تکرار رقم می باشند.

نکته 2 : اگر در یک مثال ، تعداد حالت های چند پیشامد مشخص باشد و بخواهیم که حداقل یکی از این چند پیشامد اتفاق بیافتد از اصل جمع استفاده می کنیم . به مثال زیر توجه کنید :

مثال 1 : دو تاس را با هم پرتاب می کنیم . چه قدر احتمال دارد که حداقل یکی از تاس ها عدد 5 بیاید ؟

حل : چون احتمال 5 آمدن هر تاس $\frac{1}{6}$ است ، پس می توان گفت احتمال این که حداقل یکی از تاس ها عدد 5 بیاید: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تکالیف : فعالیت و کار درکلاس و تمرینات صفحات 16 و 17 را بنویسید.

سوالات چهار گزینه ای

1- اگر A را احتمال رو آمدن سکه و B را احتمال آمدن اعداد 5 یا 2 در تاس درنظر بگیریم، در این صورت کدام گزینه زیر درست است ؟

الف) $A < B$ ( )　ب) $A > B$ ( )　ج) $A = B$ ( )　د) $2A - 2B = 1$ ( )

2- یک سکه و یک تاس را با هم به هوا پرتاب می کنیم . به چند حالت مختلف سکه و تاس روی زمین می نشینند؟

الف) 8 ( )　ب) 12 ( )　ج) 16 ( )　د) 64 ( )

3- در پرتاب هم زمان دو تا تاس با هم ، تعداد حالت های ممکن کدام گزینه زیر است؟

الف) 6 ( )　ب) 12 ( )　ج) 36 ( )　د) 6^6 ( )

4 - یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم . احتمال این که حداقل یک بار رو داشته باشیم ، کدام گزینه زیر است؟

الف) $\frac{1}{8}$ ( )　ب) $\frac{1}{2}$ ( )　ج) $\frac{7}{8}$ ( )　د) 1 ( )

5 - 10 تا سکه را با هم پرتاب می کنیم . احتمال این که حداقل یکی از آن ها رو شده باشد ؛ کدام گزینه زیر است ؟

الف) $\frac{1}{2}$ ( )　ب) $\frac{1}{1024}$ ( )　ج) $\frac{1023}{1024}$ ( )　د) $\frac{1}{10}$ ( )

6 - چند عدد 5 رقمی بدون تکرار رقم ها می توان نوشت؟

الف) 45000 ( )　ب) 32000 ( )　ج) 27216 ( )　د) 24324 ( )

7 - چند عدد 5 رقمی فرد ، بدون تکرار رقم ها می توان نوشت؟

الف) 13440 ( ) ب) 15120 ( ) ج) 22680 ( ) د) 23124 ( )

8 - چند عدد 5 رقمی زوج ، بدون تکرار رقم ها می توان نوشت؟

الف) 13440 ( ) ب) 15120 ( ) ج) 13776 ( ) د) 22680 ( )

9 - احتمال این که عدد پنج رقمی نوشته شده با ارقام 2 و 3 و 6 و 7 و 9 بدون تکرار رقم ها ، عددی زوج باشد ، کدام گزینه زیر است ؟

الف) 0 / 2 ( ) ب) 0 / 3 ( ) ج) 0 / 4 ( ) د) 0 / 5 ( )

10 - 6 نفر به چند حالت می توانند در یک صف شش نفره ، قرار بگیرند؟

الف) 6 ( ) ب) 360 ( ) ج) 720 ( ) د) 24 ( )

11 - یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم . احتمال این که دو با ر رو بیاید، کدام گزینه زیر است؟

الف) $\frac{1}{8}$ ( ) ب) $\frac{3}{8}$ ( ) ج) $\frac{4}{8}$ ( ) د) $\frac{7}{8}$ ( )

12 - دو تا تاس را با هم پرتاب می کنیم . احتمال این که هر دو تا زوج باشند ، کدام گزینه زیر است؟

الف) $\frac{1}{9}$ ( ) ب) $\frac{1}{4}$ ( ) ج) $\frac{1}{2}$ ( ) د) $\frac{3}{4}$ ( )

13 - سه تا سکه متفاوت را با هم پرتاب می کنیم . احتمال این که هر سه رو بیاید چه قدر است ؟

الف) $\frac{1}{2}$ ( ) ب) $\frac{1}{8}$ ( ) ج) $\frac{1}{6}$ ( ) د) $\frac{1}{4}$ ( )

14 - احتمال کدام مورد زیر بیش تر است ؟

الف) یک تاس بیندازیم و عدد شش بیاید ( )

ب) از یک دسته کارت که اعداد از 1 تا 20 روی آن نوشته شده کارتی بیرون بیاریم که عدد 7 یا 15 باشد ( )

ج) در پرتاب سه تا سکه ، همگی رو بیاید ( )

د) نخستین فرزند خانواده در روز شنبه به دنیا بیاید ( )

15 – سه تا تاس را هم زمان پرتاب می کنیم چه قدر احتمال دارد هر سه عدد روی تاس ها زوج باشد ؟

الف) $\frac{1}{2}$ ( ) ب) $\frac{1}{8}$ ( ) ج) $\frac{3}{36}$ ( ) د) $\frac{1}{4}$ ( )

نکته پایانی :

خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم : گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه بگوییم :

در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است.

به عبارت دیگر ، مجموعه جزء نخستین تعریف نشده‌هاست . مانند مفاهیمی چون : نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم .

عددهای حقیقی

فصل ۲

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 2 – اعداد حقیقی

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

سال های قبل با مجموعه های اعداد طبیعی و حسابی و صحیح و گویا آشنا شدید . البته برای شروع درس مروری بر آن ها خواهیم داشت:

$N = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...\} \Rightarrow$ مجموعه اعداد طبیعی

$W = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...\} \Rightarrow$ مجموعه اعداد حسابی

$Z = \{... , -2 , -1 , 0 , +1 , +2 , ...\} \Rightarrow$ مجموعه اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a , b \in Z \ , \ b \neq 0 \right\} \Rightarrow$ مجموعه اعداد گویا

طبق تعریف اعدادی را که بتوان به صورت کسر نوشت که در آن صورت و مخرج عددی صحیح بوده و مخرج صفر نباشد اعداد گویا می گویند ، که در بالا به زبان ریاضی ارائه شده است. به نمونه های زیر توجه کنید :

$+4 = \frac{12}{3}$	$-7 = \frac{-14}{2}$	$-53 = \frac{-53}{1}$	$14 = \frac{-28}{-2}$	$2/8 = \frac{28}{10}$	$-4/83 = \frac{-483}{100}$
$0/246 = \frac{246}{1000}$	$0 = \frac{0}{7}$	$5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$	$4/7777 = \frac{47777}{10000}$		$4/7777.... = \frac{43}{9}$
$\sqrt{9} = 3 = \frac{15}{5}$	$\sqrt{16} = 4 = \frac{-32}{-8}$	$\sqrt{400} = 20 = \frac{40}{2}$	$\sqrt{1/21} = 1/1 = \frac{11}{10}$		$\sqrt{0/0049} = 0/07 = \frac{7}{100}$
$3/33333... = \frac{10}{3}$		$3/\overline{3} = \frac{10}{3}$		$5/12121212... = \frac{507}{99}$	
$2/231231231... = \frac{2229}{999}$		$2/2313131... = \frac{2209}{990}$		$1/24575757... = \frac{12333}{9900}$	

مثال های بالا که از انواع مختلف هستند به صورت کسر نوشته شده اند پس نمونه هایی از اعداد گویا می باشند . به اعداد اعشاری دو سطر آخر با دقت نگاه کنید، این اعداد اعشاری را متناوب می گویند و امکان نوشته شدن به صورت کسر را دارند که در ادامه نحوه نوشتن به صورت کسر را خواهیم آموخت.

در تمام موارد بالا ، اگر عددی اعشاری وجود دارد یا مختوم است و یا متناوب (یعنی تعدادی از ارقام اعشاری تا بی نهایت رقم اعشار تکرار می شوند)

در مقابل اعداد اعشاری دیگری هم وجود دارند که امکان نوشته شدن به صورت کسر را ندارند ، مثل موارد زیر :

5 / 12455478	1547 / 32548921	63 / 87515214 .....
π = 3 / 14159265	π^2 = 9 / 8696044 ...	5π = 15 / 70796326 ....
$\frac{\pi}{2}$ = 1 / 570796326 ...	$\sqrt{2}$ = 1 / 41421356	$\sqrt{3}$ = 1 / 73205508 ..
$\sqrt{5}$ = 2 / 23606797	$\sqrt{6}$ = 2 / 44948974	$\sqrt{7}$ = 2 / 64575131 ....
$\sqrt{8}$ = 2 / 828425	$\sqrt{10}$ = 3 / 162276601	$\sqrt{11}$ = 3 / 3166247 ....
$\sqrt{12}$ = 3 / 4641016	$\sqrt{0/4}$ = 0 / 632455532	$\sqrt{./9}$ = 0 / 948683 ....

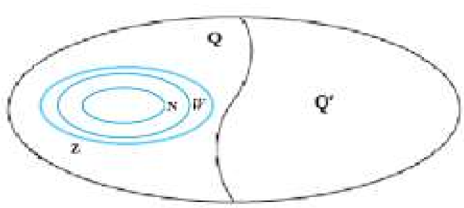
در مثال هائی مثل موارد بالا ، مشخص است که رقم های اعشاری مختوم نیستند و متناوب هم نیستند . این اعداد قابلیت نوشته شدن به صورت کسر را ندارند پس به این اعداد، اعداد گنگ می گوئیم. در این مثال ها به رادیکال هائی که عدد داخل آنها عدد مربع کامل نیست ، توجه کنید.

نتیجه گیری: اعداد اعشاری که غیر مختوم و غیر متناوب باشند عدد گنگ هستند و همه اعداد اعشاری مختوم و یا متناوب ، عددگویا هستند .

اعداد اعشاری
- ۱ – مختوم ← گویا
- ۲ – غیر مختوم
  - ۱ – متناوب
    - ۱ – ساده ← گویا
    - ۲ – مرکب ← گویا
  - ۲ – غیر متناوب ← گنگ

اعداد اعشاری
- ۱ – مختوم $\xleftarrow{\text{مثال}}$ ۲/۸ و ۴/۸۳- و ۰/۲۴۶-
- ۲ – غیر مختوم
  - ۱ – متناوب
    - ۱ – ساده $\xleftarrow{\text{مثال}}$ $۲/\overline{۳۱}$ و ...۵/۱۲۱۲۱۲۱۲ و ...۴/۷۷۷۷
    - ۲ – مرکب $\xleftarrow{\text{مثال}}$ $۲/۲\overline{۳۱}$ و ...۱/۲۴۵۷۵۷ و ...۲/۲۳۱۳۱۳۱
  - ۲ – غیر متناوب $\xleftarrow{\text{مثال}}$ $\sqrt{۵}$ و ...π=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵ و ۵/۱۲۴۵۵۴۷۸

نکته 1 :



تمام اعداد طبیعی و حسابی وصحیح ، عدد گویا هستند و زیر مجموعه آن می باشند .

به نمودار ون مقابل توجه کنید :

اعداد گنگ را با نماد Q' یا Q^c نشان می دهیم .

عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$ ، ...۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ و π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی‌شمار بوده و دارای دورهٔ تناوب نیستند، عدد گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

عدد π عددی گنگ است. در زیر عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته‌شده است؛ امّا در محاسبات، معمولاً تا دو رقم اعشار π استفاده می‌شود : π ≃ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹

سوال 1) کدام عبارت زیر درست و کدام عبارت نادرست است ؟

$\mathbb{Z} \subseteq Q'$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \subseteq Q$ $\qquad$ $\mathbb{N} \subseteq Q'$ $\qquad$ $Q \cap Q' = \varnothing$

سوال 2) کدام عبارت زیر درست است؟

الف) $Z \subset N$ ( ) $\qquad$ ب) $Z \subset Q \subset N$ ( ) $\qquad$ ج) $N \subset Z \subset Q$ ( ) $\qquad$ د) $R \subset Q \subset N$ ( )

سوال 3) کدام یک از اعداد زیر ، عدد گویا نیست؟

الف) $\sqrt{0/0169}$ ( ) $\qquad$ ب) $\sqrt{\pi^2}$ ( ) $\qquad$ ج) $-\sqrt{(-4)^2}$ ( ) $\qquad$ د) $3/\overline{12}$ ( )

سوال 4) کدام یک از اعداد زیر ، عدد گویا است؟

الف) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ( ) $\qquad$ ب) $-\sqrt{32 \times 3}$ ( ) $\qquad$ ج) $-\sqrt{3^2 + 2^6}$ ( ) $\qquad$ د) $\sqrt{37 - 1^5}$ ( )

سوال 5) چند تا از اعداد زیر ، عدد گویا هستند ؟

$\frac{22}{7}$ و $-\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{8}\pi}$ و $\frac{\pi}{3}$ و 18 و $(\sqrt{2})^2$ و $\frac{0/5}{-3}$ و $3/14$ و π و $3/1\overline{4}$

الف) 5 ( ) $\qquad$ ب) 6 ( ) $\qquad$ ج) 7 ( ) $\qquad$ د) 8 ( )

سوال 6) کدام یک از اعداد زیر ، گنگ است؟

الف) $\sqrt{5}$ ( ) $\qquad$ ب) $\sqrt{225}$ ( ) $\qquad$ ج) $\sqrt{256}$ ( ) $\qquad$ د) هر سه مورد ( )

نحوه شناسائی نوع اعداد اعشاری حاصل از کسر ها:

1- اگر کسر را تا جائی که امکان دارد ساده کرده و مشاهده کردیم که مخرج کسر به جز 2 یا 5 یا هردو ، بر عدد اول دیگری بخش پذیر نبود ، در این صورت عدد اعشاری حاصل از آن کسر ، عدد اعشاری مختوم است . مثل :

$\frac{11}{125} = 0/088$ $\qquad$ $\frac{47}{40000} = 0/001175$ $\qquad$ $\frac{519}{4} = 129/75$ $\qquad$ $\frac{18}{250} = \frac{9}{125} = 0/072$ $\qquad$ $\frac{31}{5} = 6/2$

دقت کنید که قبل از بررسی ، باید مخرج کسر حتما تا حد امکان ساده شده باشد.

2 - اگر کسر را تا جائی که امکان دارد ساده کرده و مشاهده کردیم که مخرج کسر بر 2 و 5 بخش پذیر نباشد ولی ، بر عدد اول دیگری بخش پذیر باشد ، در این صورت عدد اعشاری حاصل از آن کسر ، عدد اعشاری متناوب ساده است .

مثل :

$\frac{43}{27} = 1/592592\ ...$ $\qquad$ $\frac{5}{999} = 0/005005005\ ...$ $\qquad$ $\frac{18}{11} = 1/636363\ ...$ $\qquad$ $\frac{31}{3} = 10/33333\ ....$

3 - اگر کسر را تا جائی که امکان دارد ساده کرده و مشاهده کردیم که مخرج کسر بر 2 یا 5 بخش پذیر باشد و هم زمان، بر عدد اول دیگری هم بخش پذیر باشد ، در این صورت عدد اعشاری حاصل از آن کسر ، عدد اعشاری متناوب مرکب است . مثل :

$\frac{1231}{900} = 1/3677777\ ....$ $\qquad$ $\frac{83}{9900} = 0/00838383\ ....$ $\qquad$ $\frac{19}{6} = 3/16666\ .....$ $\qquad$ $\frac{31}{15} = 2/066666\ ...$

کسر مولد اعداد اعشاری متناوب :

اگر عددی اعشاری بوده و مختوم نباشد و به صورت متناوب رقم های اعشاری آن تکرار شود ، در این صورت می توان برای آن کسر متعارفی نوشت که این عدد اعشاری متناوب را تولید کند . به این کسر نوشته شده کسر مولد اعشاری می گویند.

1 - نوشتن کسر مولد اعداد اعشاری متناوب ساده :

برای این کار به تعداد رقم های تکرار شونده در قسمت اعشاری عدد ، در مخرج کسر ، عدد **9** می نویسیم و برای نوشتن صورت ، عدد را تا انتهای اولین بسته تکرار شونده (بدون در نظر گرفتن ممیز) در نظر گرفته و عدد پشت قسمت تکرار شونده را از آن کم می کنیم. مثل :

مثال ۱ :

عدد تکرار شونده — عدد پشت تکرار

$$A = \underbrace{۳/\overline{۴}}_{\text{کل عدد}} \Longrightarrow A = \frac{\text{کل عدد} - \text{عدد پشت تکرار}}{۹} = \frac{۳۴ - ۳}{۹} = \frac{۳۱}{۹}$$

مثال ۲ :

عدد تکرار شونده — عدد پشت تکرار

$$A = \underbrace{۵/\overline{۱۲}}_{\text{کل عدد}} \Longrightarrow A = \frac{\text{کل عدد} - \text{عدد پشت تکرار}}{۹۹} = \frac{۵۱۲ - ۵}{۹۹} = \frac{۵۰۷}{۹۹}$$

مثال ۳ :

$$A = ۱۷/\overline{۳۷} \Longrightarrow A = \frac{۱۷۳۷ - ۱۷}{۹۹} = \frac{۱۷۲۰}{۹۹}$$

مثال ۴ :

$$A = ۱/\overline{۱۲۴} \Longrightarrow A = \frac{۱۱۲۴ - ۱}{۹۹۹} = \frac{۱۱۲۳}{۹۹۹}$$

2 - نوشتن کسر مولد اعداد اعشاری متناوب مرکب :

دراین اعداد تعدادی رقم اعشار وجود دارد که تکرار نمی شوند و بعد از آن ها رقم های اعشاری هستند که تکرار می شوند .

برای این کار به تعداد رقم های تکرار شونده در قسمت اعشاری ، در مخرج کسر، عدد **9** و به تعداد رقم های تکرار نشونده در مخرج ، صفر می نویسیم و برای نوشتن صورت ، عدد را تا انتهای اولین بسته تکرار شونده (بدون در نظر گرفتن ممیز) در نظر گرفته و عدد پشت قسمت تکرار شونده را از آن کم می کنیم. مثل :

مثال ۱ :

عدد تکرار شونده — عدد پشت تکرار

$$A = \underbrace{۳/۱\overline{۲}}_{\text{کل عدد}} \Longrightarrow A = \frac{\text{کل عدد} - \text{عدد پشت تکرار}}{۹۰} = \frac{۳۱۲ - ۳۱}{۹۰} = \frac{۲۸۱}{۹۰}$$

مثال ۲ :

عدد تکرار شونده — عدد پشت تکرار

$$A = \underbrace{۲/۵\overline{۳۲}}_{\text{کل عدد}} \Longrightarrow A = \frac{\text{کل عدد} - \text{عدد پشت تکرار}}{۹۹۰} = \frac{۲۵۳۲ - ۲۵}{۹۹۰} = \frac{۲۵۰۷}{۹۹۰}$$

مثال ۳ :

$$A = ۱/۱۲\overline{۴} \Longrightarrow A = \frac{۱۱۲۴ - ۱۱۲}{۹۰۰} = \frac{۱۰۱۲}{۹۰۰}$$

سوال 1) کسر مولد اعشاری $2/\overline{6}$ کدام گزینه زیر است ؟

الف) $\frac{211}{19}$ ( ) ب) $\frac{8}{3}$ ( ) ج) $\frac{11}{9}$ ( ) د) $\frac{25}{9}$ ( )

سوال 2) کسر مولد اعشاری عدد A کدام گزینه زیر است ؟

$A = ۰/\overline{۴۲}$

الف) $\frac{42}{9}$ ( ) ب) $\frac{42}{99}$ ( ) ج) $\frac{42}{90}$ ( ) د) $\frac{42}{999}$ ( )

سوال 3) کسر مولد اعشاری عدد A کدام گزینه زیر است ؟

$A = ۳۲/۰\overline{۷}$

الف) $\frac{3175}{90}$ ( ) ب) $\frac{2887}{90}$ ( ) ج) $\frac{2887}{99}$ ( ) د) $\frac{3175}{99}$ ( )

سوال 4) کسر مولد اعشاری عدد A کدام گزینه زیر است ؟

$A = ۱۴/۰\overline{۳۷}$

الف) $\frac{13897}{90}$ ( ) ب) $\frac{14023}{90}$ ( ) ج) $\frac{13897}{990}$ ( ) د) $\frac{13897}{999}$ ( )

سوال 5) کسر مولد اعشاری $0/715\overline{32}$ کدام گزینه زیر است ؟

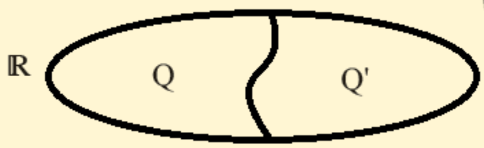
الف) $\frac{715}{99}$ ( ) ب) $\frac{70817}{99000}$ ( ) ج) $\frac{71532}{99000}$ ( ) د) $\frac{71532}{9900}$ ( )

تکالیف : کار درکلاس و تمرینات صفحه 22 را بنویسید.

درس دوم: عددهای حقیقی

اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ (اصم) را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم

و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. $\mathbb{R} = Q \cup Q'$



عددهای حقیقی به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود.

مثال : $۰/۷۵ \in \mathbb{R}$ $-\frac{۵}{۶} \in Q$ $\sqrt{۱۰} \in \mathbb{R}$ $۰ \in \mathbb{R}$

$\frac{۵}{\sqrt{۲}} \in \mathbb{R}$ $\pi \in \mathbb{R}$ $۰/۰۲۰۲۲۰۲۲۲۰۲۲۲۲... \in \mathbb{R}$

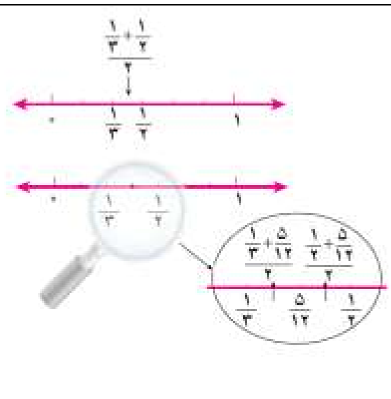
در روی محور اعداد که معمولا رسم می کنیم اعداد طبیعی و اعداد صحیح و برخی از اعداد اعشاری به راحتی قابل نشان دادن است .به محور اعداد مقابل توجه کنید که در آن چند عدد صحیح و منفی و صفر نشان داده شده است.

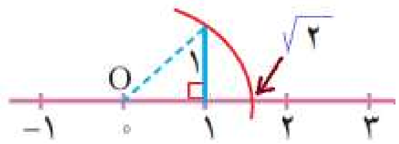
در تصویر مقابل هم چند عدد کسری (عدد گویا) مابین دو عدد صفرو یک نشان داده شده است .

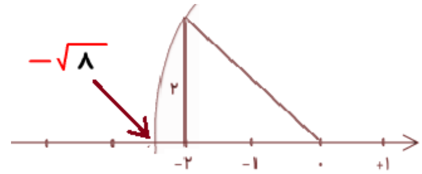
مشخص است که از این اعداد کسری به تعداد خیلی زیادی بین صفر و یک وجود دارند ، یعنی :

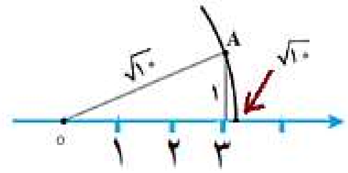
روی محور اعداد تعداد خیلی زیادی عدد طبیعی و صحیح و گویا وجود دارند .

می خواهیم نشان دهیم که در روی همین محور تعداد خیلی زیادی هم عدد گنگ وجود دارند . برای پیدا کردن محل آن ها معمولا دشواری هایی وجود دارد که با خلاقیت می توان محل این اعداد را هم تا حدودی مشخص کرد . سال قبل نحوه نشان دادن برخی از این اعداد گنگ را روی محور یاد گرفتید ، مثل اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و .... که با استفاده از پرگارمی توان روی محور نشان داد. درتصاویر زیرمحل چند عدد گنگ را نشان داده ایم :

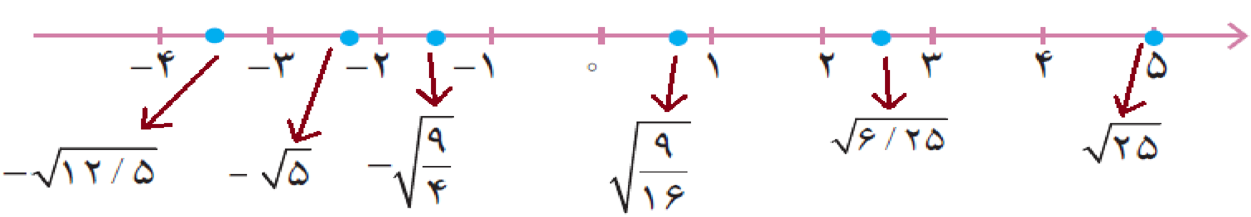








به تصویر زیر نگاه کنید . محل چندین عدد گویا و گنگ و عدد طبیعی به صورت دقیق یا حتی به صورت تقریبی روی محور نشان داده شده است :



سوال : نزدیک‌ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید.

$\sqrt{175}$ $\sqrt{280}$ $\sqrt{9999}$ $\sqrt{310}$ $\sqrt{401}$

نتیجه : در روی محور اعداد بالا ، بی نهایت عدد **گویا** و بی نهایت عدد **گنگ** وجود دارند که در کنار هم محور اعداد حقیقی را تشکیل می دهند. البته به صورت یک در میان و یا با نظم خاصی قرار نگرفته اند به طوری که بین هر دو عدد (حتی خیلی نزدیک به هم) که از روی محور انتخاب کنیم بین آن ها بی نهایت عدد گویا و بی نهایت عدد گنگ وجود دارد .

سوال : ۱ــ بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

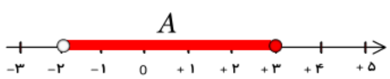
۲ــ بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

نحوه نشان دادن زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی روی محور اعداد :

به مجموعه مقابل توجه کنید : $A=\{x \mid x\in R \quad , \quad -2< x \le +3\}$

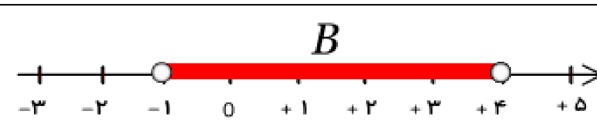
در این مجموعه تمام اعداد گویا و گنگ مابین **2 -** و **3 +** مورد نظر است البته دقت کنید که خود **3 +** هم جزء اعضای مجموعه است . چون تعداد اعضای این مجموعه خیلی زیادند و نمی توان یکی یکی ،آن ها را روی محور نشان داد . برای نشان دادن اعضا به صورت زیر عمل می کنیم:

اگر دقت کنید یک دایره **توخالی** روی عدد **2 –** و یک دایره **توپر** روی عدد **3 +** رسم شده و تمام اعداد مابین این دو عدد با نوار قرمز رنگ پوشانده شده است . علت توخالی و توپر بودن دایره ها به این دلیل است که عدد **2 –** جزء اعضای مجموعه نیست و بادایره توخالی نشان داده شده است ، ولی عدد **3 +** جزء اعضای مجموعه است و به این دلیل با دایره توپر نشان داده شده است.

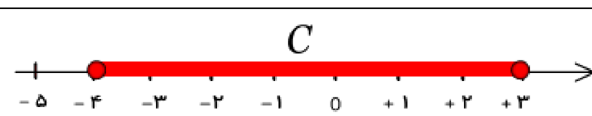


به مثال های زیر توجه کنید :

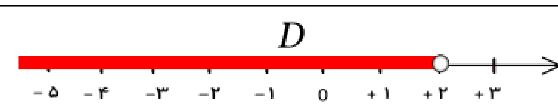
$B=\{x \mid x\in R \quad , \quad -1< x < +4\}$



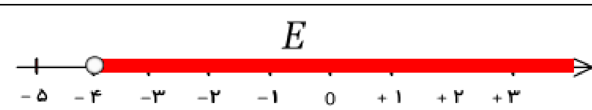
$C=\{x \mid x\in R \quad , \quad -4\le x \le +3\}$



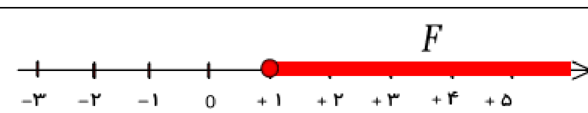
$D=\{x \mid x\in R \quad , \quad x < +2\}$



$E=\{x \mid x\in R \quad , \quad -4\le x\}$

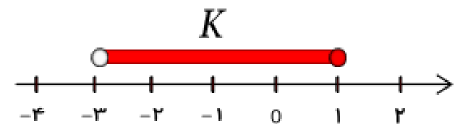


$F=\{x \mid x\ge +1\}$

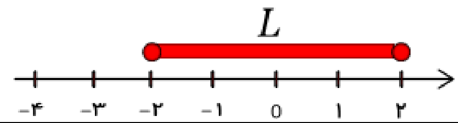


نکته1 : با مثال آخر توجه کنید که در آن $x \in R$ نوشته نشده ، علتش اینست که در روی محور اعداد داده شده عددی غیر از اعداد حقیقی وجود ندارد و وقتی تمام اعداد بزرگ تر از $+1$ را انتخاب کنیم در اینصورت اعداد حقیقی بزرگ تر از $+1$ انتخاب شده اند و لزوم و اجباری به نوشتن $x \in R$ نیست .

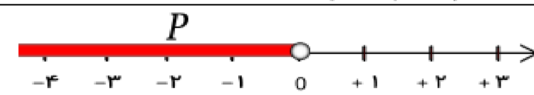
نکته2 : برای این که رسم نوار رنگی روی محور اعداد حقیقی ، در برخی از موارد مشکل ساز است و با خودکار به راحتی رسم نمی شود به این دلیل ما معمولا این نوار رنگی را کمی بالاتر از خود محور رسم می کنیم که به راحتی دیده شود . مثل موارد زیر:



$$K = \{ x \mid x \in R \quad , \quad -3 < x \le +1 \}$$



$$L = \{ x \mid -2 \le x \le +2 \}$$



$$P = \{ x \mid x \in R \quad , \quad x < 0 \}$$

تکالیف : کار درکلاس و تمرینات صفحه **25** و **26** و **27** را در کتاب حل کنید .

درس سوم: قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

قدر مطلق به زبان ساده یعنی مقدار خالص عدد بدون در نظر گرفتن علامت.

البته قدر مطلق در ریاضیات تعریف دقیق و مشخصی دارد که در پایین مطالب به آن اشاره خواهد شد .

به زبان دیگر به فاصله هر عدد از مبدا محور اعداد را قدر مطلق آن عدد می گویند .

مثلا فاصله عدد **3** + از مبدا (یعنی صفر) محور برابر با سه واحد است و فاصله عدد **3** – هم از مبدا (یعنی صفر) محور برابر با **3** می باشد.

به این دلیل قدر مطلق هم **3** + و هم **3** – برابر با **3** می باشد .

فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت | a | نمایش می‌دهیم ؛

(بخوانید قدر مطلق a) بنابراین برای مثال می‌توان نوشت : $|-۲| = |+۲| = ۲$

قدر مطلق صفر، مساوی صفر بوده و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است.

قدر مطلق هر عدد منفی، قرینهٔ آن عدد است.

تعریف ریاضی قدر مطلق : اگر a یک عدد حقیقی باشد ؛

$$\begin{cases} a > 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = a \\ a = 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = 0 \\ a < 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = -a \end{cases}$$

به زبان ساده تر ، قدر مطلق ، علامت عدد در اعداد مثبت و صفر را تغییر نمی دهد ، ولی علامت اعداد منفی را تغییر داده و آن عددها را قرینه می کند.

به مثال های زیر توجه کنید که ساده کرده و بدون علامت قدر مطلق نوشته ایم :

مثال 1 :

$$\left| 4+5\times(4-5) \right| = \left| 4+(-5) \right| = \left| -1 \right| = +1$$

مثال 2 :

$$\left| 2\times 7-3\times 5 \right| = \left| 14-15) \right| = \left| -1 \right| = +1$$

مثال 3 :

$$\left| -3(2-8)-3\times(7^2+2) \right| = \left| -3(-6)-3\times(51) \right| = \left| 18-153 \right| = \left| -135 \right| = +135$$

مثال 4 :

$$\left| -3^2-4^2+(-5)^2 \right| = \left| -9-16+25 \right| = \left| 0 \right| = 0$$

مثال 5 :

$$\left| 2\frac{1}{5}-\frac{5}{4} \right| = \left| \frac{11}{5}-\frac{5}{4} \right| = \left| \frac{44-25}{20} \right| = \left| \frac{19}{20} \right| = \frac{19}{20}$$

مثال 6 :

$$\left| \sqrt{7}-12 \right| = -(\sqrt{7}-12) = -\sqrt{7}+12 = 12-\sqrt{7}$$

مثال 7 :

$$\left| \sqrt{(-5)^2} \right| + \left| -8 \right|^2 = \left| \sqrt{25} \right| + (8)^2 = 5+64 = 69$$

مثال 8 :

$$\left| -15 \right| \times \left| (8-9)^3 \right| = \left| -15 \right| \times \left| (-1) \right| = +15\times(+1) = 15$$

مثال 9 :

$$\left| -5\times(1-\sqrt{5}) \right| = \left| -5+5\sqrt{5} \right| = \left| -5+\sqrt{125} \right| = -5+\sqrt{125}$$

مثال10:

$$\left| -3\times\sqrt{5}+5\times\sqrt{3} \right| = \left| -\sqrt{45}+\sqrt{75} \right| = -\sqrt{45}+\sqrt{75} = \sqrt{75}-\sqrt{45}$$

مثال11:

$$\left| \sqrt{5}-\sqrt{7} \right| + \left| \sqrt{7}-\sqrt{5} \right| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7})+(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{5} = -2\sqrt{5}+2\sqrt{7}$$

مثال12:

$$\left| \sqrt{5}-\sqrt{7} \right| - \left| \sqrt{7}-\sqrt{5} \right| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7})-(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{7}+\sqrt{5} = 0$$

مثال13:

$$\left| 3-\sqrt{11} \right| + \left| 5-\sqrt{11} \right| = -(3-\sqrt{11})+(5-\sqrt{11}) = -3+\sqrt{11}+5-\sqrt{11} = +2$$

نکات و قواعد مهم در مورد قدر مطلق

نکته 1 : قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق آن ها کوچک تر یا مساوی است :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

نکته 2 : قدر مطلق تفاضل دو عدد ، از تفاضل قدر مطلق آن ها بزرگ تر یا مساوی است .

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

نکته 3 : قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد ، برابر با حاصل ضرب قدر مطلق آن ها است .

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

نکته 4 : قدر مطلق نسبت (تقسیم) دو عدد ، برابر با نسبت قدر مطلق آن ها است .

$$|x \div y| = |x| \div |y|$$

مثال برای نکته 1 :	$\lvert 2 + 5 \rvert = \lvert 7 \rvert = 7 \leq \lvert 2 \rvert + \lvert 5 \rvert$
	$\lvert -3 + 11 \rvert = \lvert 8 \rvert = 8 \leq \lvert -3 \rvert + \lvert 11 \rvert$
	$\lvert (-7) + (-8) \rvert = \lvert -15 \rvert 15 \leq \lvert -7 \rvert + \lvert -8 \rvert$
مثال برای نکته 2 :	$\lvert 8 - 12 \rvert = \lvert -4 \rvert = 4 \geq \lvert 8 \rvert - \lvert 12 \rvert$
	$\lvert -17 - 5 \rvert = \lvert -22 \rvert = 22 \geq \lvert -17 \rvert - \lvert +5 \rvert$
	$\lvert (-9) - (-14) \rvert = \lvert +5 \rvert = +5 \geq \lvert -9 \rvert - \lvert -14 \rvert$
مثال برای نکته 3 :	$\lvert 3 \times 7 \rvert = \lvert 21 \rvert = 21 = \lvert 3 \rvert \times \lvert 7 \rvert$
	$\lvert -8 \times (-5) \rvert = \lvert +40 \rvert = 40 = \lvert -8 \rvert \times \lvert -5 \rvert$
	$\lvert +3 \times (-10) \rvert = \lvert -30 \rvert = 30 = \lvert +3 \rvert \times \lvert -10 \rvert$
مثال برای نکته 4 :	$\lvert 18 \div 6 \rvert = \lvert +3 \rvert = 3 = \lvert 18 \rvert \div \lvert 6 \rvert$
	$\lvert -45 \div 9 \rvert = \lvert -5 \rvert = 5 = \lvert -45 \rvert \div \lvert 9 \rvert$
	$\lvert 28 \div (-7) \rvert = \lvert -4 \rvert = 4 = \lvert 28 \rvert \div \lvert -7 \rvert$

تکالیف : 1 - سوالات کار درکلاس صفحه 29 را در کتاب حل کنید .

2 – برای هر یک از چهار نکته بالا پنج مثال متفاوت، در دفتر خود بنویسید.

کاربرد مهم قدر مطلق در محاسبه جذر اعداد

به جدول زیر دقت کرده و اعداد سطر دوم آن را کامل کنید:

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳						

اگر دقت کنید همه اعداد داخل رادیکال به توان **2** رسیده و سپس از آن ها جذر گرفته شده است . اگر محاسبات را درست انجام داده باشید به جواب زیر خواهید رسید :

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

یعنی می توان نتیجه گرفت که حاصل جذر، در مواردی که فرجه رادیکال زوج است ، نباید عددی منفی بیاید و حاصل با استفاده از قدر مطلق به صورت زیر خواهد بود:

$$\sqrt{a^۲} = \cancel{\sqrt{}}\, a^{\cancel{۲}} = |a|$$

یعنی رادیکال و توان هم دیگر را خنثی کرده اند و حاصل آن ، قدر مطلق a خواهد بود .

به مثال های مهم زیر توجه کنید :

مثال 1 :

$$\cancel{\sqrt{}}(-۸)^{\cancel{۲}} = |-۸| = +۸$$

مثال 2 :

$$\cancel{\sqrt{}}(۱۱)^{\cancel{۲}} = |۱۱| = ۱۱$$

مثال 3 :

$$\sqrt{7^2} = |+7| = 7$$

مثال 4 :

$$\sqrt{(1-15)^2} = |-14| = +14$$

مثال 5 :

$$\cancel{\sqrt{}}(۴-\sqrt{۳})^{\cancel{۲}} = |۴-\sqrt{۳}| = ۴-\sqrt{۳}$$

مثال 6 :

$$\sqrt{(\sqrt{12}-3)^2} = |\sqrt{12}-3| = \sqrt{12}-3$$

مثال 7 :

$$\sqrt{(\sqrt{7}-10)^2} = |\sqrt{7}-10| = -(\sqrt{7}-10) = -\sqrt{7}+10$$

مثال 8 :

$$\sqrt{(-\sqrt{18}+1)^2} = |-\sqrt{18}+1| = -(-\sqrt{18}+1) = +\sqrt{18}-1$$

تکالیف : سوالات کار درکلاس و تمرین های صفحه 31 را در دفتر نوشته و حل کنید .

استدلال و اثبات در هندسه

فصل ۳

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 3 – استدلال و اثبات در هندسه

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اوّل: استدلال

انسان ها در زندگی روزمره خود بارها نیاز پیدا می کنند که موضوعی یا مطلبی را برای اطرافیان خود ثابت کنند . این موضوع هر لحظه از هر روز هم اتفاق می افتد و ما پس از بیان مطلبی، در مقابل این پرسش قرار می گیریم که چرا؟

وقتی مطلبی را بیان می کنیم اطرافیان مان یا به صورت مستقیم و یا غیر مستقیم ، از ما علت و دلیل مان را برای مطلبی بیان شده ، طلب می کنند و ما هم یا به صورت دقیق و یا بعضا به صورت غیر علمی دلیل هائی ارائه می کنیم که در برخی از موارد اصلا دلیل محکمی برای گفته هایمان وجود ندارد و اصطلاحا به آن مطالب ، سفسطه گفته می شود .

در زمان های قدیم انسان ها دلیل های زیادی برای پدیده هایی که اتفاق می افتادند، نداشتند. مثلا نمی دانستند که دلیل واقعی بارش باران چیست؟ برای دلیل بارش باران مطالب خنده آور هم گفته می شد و برخی از افراد هم، آن مطالب را باور می کردند مثلا در دوره ای از زمان های قدیم ، باور داشتند که خدای مخصوص باران وجود دارد و هروقت او اراده کند باران می بارد و هر وقت نخواهد بارانی نخواهد بارید . با این تفکر هم تعدادی از افراد شروع به پرستش چنین خدایی می کردند که کارشان شرک هم هست . این موضوع در مورد علت پدیده هائی مثل : زلزله ، باد ، آتش گرفتن مواد ، طلوع و غروب خورشید ، .... هم به وقوع پیوسته است . شما جریان گالیله را که ادعا کرد خورشید به دور زمین نمی چرخد و زمین به دور خورشید می چرخد و برای ادعای خود هم دلیل آورد ، شاید شنیده باشید که با مخالفت عمومی حاکمان و کشیشان و مردم زمان خود روبرو شد و او را به جرم کفرگوئی به مرگ محکوم کردند ، البته او ناچار به توبه از گفته هایش شد. سال های بعد دانسته های انسان ها از علم ، باعث شد ، نظریه او به اثبات برسد . این موضوع در مورد خیلی باورها و خرافات امروزی هم صادق است که با یافتن دلیل علمی خیلی ازاین موضوعات ؛ اشتباهات افراد در ارائه دلیل برای کارخود ، مشخص می شود.

به چند مثال زیر که افراد برای کارهای خود دلیل های غیرعلمی و خنده دار ارائه می کنند، توجه کنید :

امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.»

امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟»

محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که من به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ آیا دلیل محسن مورد قبول است؟

نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما : هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟

چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام، پس در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

چون من امروز تکالیف درسی را ننوشته ام حتما معلم مان تکالیف را بررسی خواهد کرد. یا این که هر روز من درس هایم را مطالعه نکرده باشم ، همان روز معلم مان حتما از من درس را خواهید پرسید .

دربسیاری ازموارد برای گفته هایمان دلیل قانع کننده نداریم و باگفتن مطالب مبهم و درخی ازموارد مطالب غلط از ارائه دلیل ، فرار می کنیم. ریاضیات به دنبال این موضوع است که برای ارائه هرمطلبی دلیل قانع کننده علمی وثابت شده ارائه شودوهرمطلبی را به عنوان دلیل قبول نکنیم. این موضوع انسان ها را منطقی تر و معقول تر می کند و هر شخصی در برابر قانون و ارائه دلیل ، خود را مسئول می داند . در اثبات هر مساله ریاضی باید این موضوع مدنظر باشد و حتی یک مورد دلیل غیر علمی برای اثبات یک مطلب ریاضی ، مورد قبول نیست .

روش های اثبات در هندسه و ریاضیات :

1 – روش استدلالی **2 – روش استنتاجی** **3 – روش شهودی** **4 – روش استقرائی**

1 – روش استدلالی : در این روش با استفاده از دانسته های قبلی و مطالب علمی ثابت شده ، موضوعی را که برای ما مجهول است ، معلوم و ثابت می کنیم .

به تعریف استدلال و اثبات توجه کنید :

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد ، اثبات می گوئیم .

در درس دوم و ادامه مطالب با ارائه دلیل برای اثبات موضوعات ریاضی بیشتر آشنا خواهیم شد . به مثال زیر توجه کنید :

عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

2 – روش استنتاجی :

در این روش با استفاده از چند یافته قبلی ، موضوعی برای ما نتیجه می شود . شاید این موضوع چندین بار به ترتیب در یک اثبات اتفاق بیافتد که از مطلب اول ، مطلب دوم را نتیجه بگیریم و از آن مطلب هم مطلب سوم را نتیجه بگیریم و این جریان ادامه یابد.

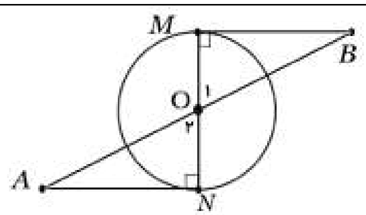
به مثال های زیر توجه کنید :

مثال 1 :

$$a < b \quad , \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

در این مثال از دو تا نامساوی ، نامساوی دیگری ، نتیجه گیری شده است .

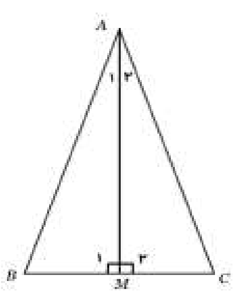
مثال 2 :



$$\overset{\triangle}{AON} = \overset{\triangle}{MOB} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B}$$

در این مثال از تساوی مثلث ها تساوی دو ضلع مثلث ها ، نتیجه گیری شده است .

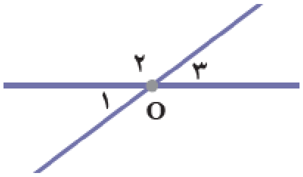
مثال 3 :



$\overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC} \overset{\text{پس}}{\Rightarrow} \overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

در این مثال دو موضوع به صورت پشت سر هم ، نتیجه گیری شده است .

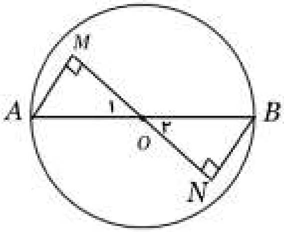
مثال 4 :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

در این مثال از دو موضوع که قبلا برای ما مشخص بود ، یک مطلب جدید نتیجه گیری شده است .

مثال 5 :



دلیل

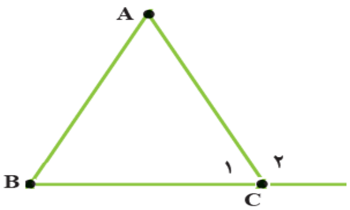
$$\left\{\begin{array}{ll}1)\ \hat{M} = \hat{N} = 90 & \\ 2)\ \overline{AO} = \overline{BO} & \text{شعاع دایره} \\ 3)\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{متقابل به راس}\end{array}\right.$$

تساوی

$$\xrightarrow{\text{پس}} \overset{\triangle}{AMF} = \overset{\triangle}{ANF} \xrightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \left\{\begin{array}{l}1)\ \overline{BO} = \overline{ON} \\ 2)\ \overline{AM} = \overline{BN} \\ 3)\ \hat{A} = \hat{B}\end{array}\right.$$

در این مثال از دلیل های ارائه شده ، ابتدا تساوی مثلث ها نتیجه گیری شده است و سپس تساوی اجزای دیگر مثلث ها نتیجه گیری شده است .

مثال 6 :



$$\left\{\begin{array}{r}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \\ \hat{C}_2 + \hat{C}_1 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

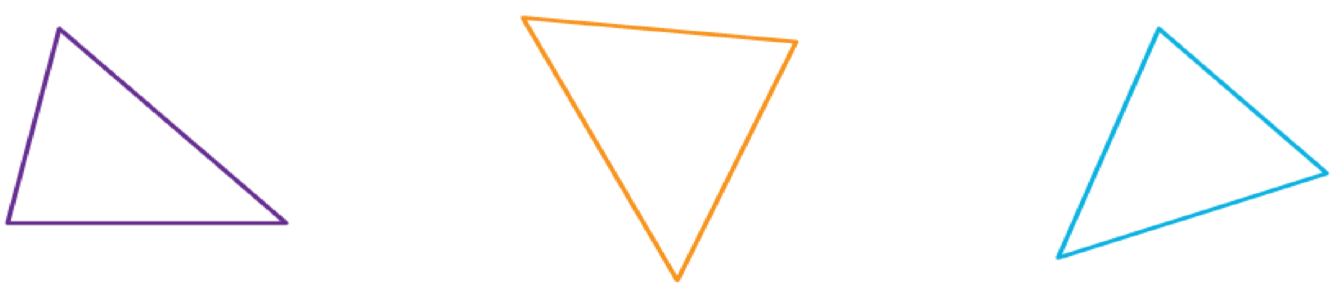
در این مثال از دو تساوی که از قبل برای ما معلوم بود ، اندازه زاویه خارجی مثلث را نتیجه گرفته ایم.

نکته مهم : آشنائی با مثال نقض

در اثبات ریاضی باید در نظر گرفت هر چند تا دلیل برای اثبات ارائه کنیم یا هر چند بار از مطالب مختلف نتیجه گیری کنیم نباید نتیجه به دست آمده توسط حتی یک مثال نقض شود .

یعنی اگر کسی مثالی بیاورد که برخلاف نتیجه گیری ما باشد در این حالت اثبات ما باطل است . پس با ارائه یک مثال نقض ، کل نتیجه گیری ارائه شده باید کنار گذاشته شود. علت این موضوع می تواند این باشدکه دلیل های ارائه شده دقیق نبودند یا نتیجه گیری به اشتباه انجام شده است . به مثال زیر توجه کنید:

در مثلث های زیر هر سه ارتفاع مثلث را رسم کنید :



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون مثلث است؟

یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند.

مشخص است که با رسم مثلثی که زاویه باز دارید و یا مثلث قائم الزاویه مطلب بالا ، نقض خواهد شد .

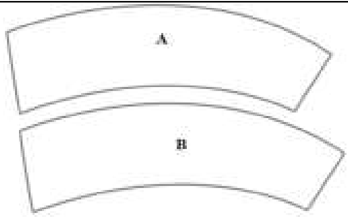
نتیجه : پس نمی توان با ارائه چند مثال مثل سه مثال بالا ، موضوعی را اثبات کرد . ارائه مثال برای اثبات با شرایط سخت گیرانه ای امکان دارد ولی در اغلب موارد ارائه مثال برای تایید یک مطلب را قبول نخواهیم کرد.

3 –روش شهودی : در این روش تلاش می شود با مشاهده و آزمایش و اندازه گیری به وسیله ابزارهای مختلف ، درستی یک مطلب اثبات شود. مثل کارهائی که درآزمایشگاه درس علوم مشاهده کرده اید. مثلا دبیر علوم با گرم کردن یک قطعه فلز و استفاده از ابزار های مختلف اندازه گیری، انبساط و بزرگ شدن آن را نتیجه می گیرد و یا با استفاده از کاغذ تورنسل، اسید و باز بودن مواد را نتیجه می گیرد.

در شکل پایین سمت چپ دو نمونه از دایره ها کشیده شده و از ما خواسته اند که بگوییم کدام یک از دایره های **1** و **2** بزرگ تراست ؟

با نگاه کردن به نظر میرسد که دایره **1** کمی بزرگ تر است. این به دلیل دایره های کناری آن ها است که ما به اشتباه می اندازد ، در حالی که دو دایره با هم برابرند. با اندازه گیری قطر دودایره یا منطبق کردن آن ها در روی هم می توانید ببینید که با هم برابرند. در تصویر سمت راست این کار انجام شده است :

یا اشتباهی که شاید در تشخیص بزرگ یا کوچک بودن دو نوار روبرو رخ دهد . برخی از دوستان
شاید با عجله بگویند که نوار B بزرگ تر از نوار A است در حالی که هر دو با هم برابرند .
با منطبق کردن آن ها در روی هم ، می توانید ببینید که این دو نوار با هم برابر هستند.



هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، امّا به تشخیصی که براساس این روش‌ها حاصل می‌گردد، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

در خیلی از موارد ما با اعتماد به حواس پنج گانه می خواهیم در مورد پدیده ها نظر بدهیم معلوم است که احتمالا اشتباهاتی هم در این بین خواهد بود .
مثل این که با نگاه کردن به دو تا پنجره ، بخواهیم بگوئیم که دو تا پنجره با هم برابرند ،
و یا این که با دست زدن به دو جسم گرم ، بگوییم که کدام یک گرم تر است . یا با وزن کردن دستی دو جسم بگوییم که کدام سنگین تر است .
اگر وضعیت دمای دو جسم یا وزن آن ها تفاوت زیادی نداشته باشند، به صورت طبیعی ، احتمال خطا در بیان نظرمان خیلی زیاد است .
حتی اندازه گیری هم درخیلی مواردبا خطای انسانی یاخطای ابزار اندازه گیری همراه است ونمی توان به نتایج حاصل از مشاهده ، یا اندازه گیری اعتماد کرد.

تکالیف : حل تمرینات صفحه 35 و 36 را کتاب بنویسید.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

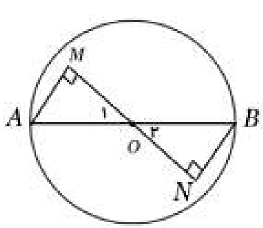
برای چنین اثباتی باید با فرض و حکم آشنا شویم . در توضیحات زیر به این موضوع اشاره می کنیم :

فرض: به تمام اطلاعات مستقیم یا غیر مستقیم و حقایقی که در متن سوال یا شکل ، ارائه شده است و ازدرستی آن ها اطمینان داریم ، فرض مساله می گوییم.

حکم : موضوعی را که سوال از ما خواسته که اثبات کنیم و از درستی آن فعلا مطمئن نیستیم ، حکم مساله نامیده می شود .

به مثال های زیر توجه کنید :

مثال 1 : در دایره مقابل ، ثابت کنید که دو مثلث AOM و BON هم نهشتند ؟



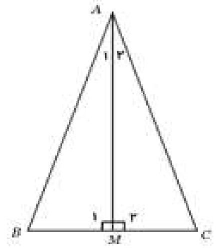
حل : توجه کنیدکه درروی سوال به اسم دایره اشاره شده وتعدادی از اطلاعات درروی شکل مشخص شده است.
مثلا اندازه زاویه های M و N که قائمه هستندو یا وجود زوایای متقابل به راس که درشکل مشخص است و یا
شعاع های دایره که می دانیم با هم برابرند . این همه اطلاعات و حقایق را فرض مساله می گویند .
البته شاید همه این اطلاعات برای حل مساله لازم نباشد و ما فقط از تعدادی از فرض ها برای اثبات کمک بگیریم.

در این مساله، از ما خواسته شده تساوی مثلث ها را ثابت کنیم و این همان حکم مساله است . هر دو مورد را به زبان ریاضی در پایین نوشته شده است :

متقابل به راس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\hat{M} = \hat{N} = ۹۰$: فرض های مساله

حکم مساله : $\overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{BON}$

مثال 2 : در مثلث متساوی الساقین مقابل ، ثابت کنید که BM و MC با هم برابرند؟

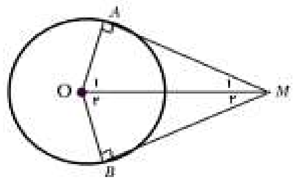


حل : $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90$ و زاویه پای ساق $\hat{B} = \hat{C}$ و ساق $\overline{AB} = \overline{AC}$: فرض های مساله

حکم مساله : $\overline{BM} = \overline{MC}$

دقت کنید که برای تساوی زاویه های $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ دلیلی نداریم و به اشتباه ، مساوی بودن آن ها را در فرض ننویسید.

مثال 3 : در دایره مقابل ، ثابت کنید دو زاویه $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ با هم برابرند ؟

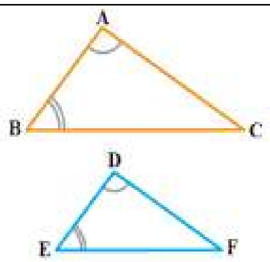


حل : $\hat{A} = \hat{B} = 90$ و ضلع مشترک $\overline{OM}$ و شعاع $\overline{AO} = \overline{BO}$: فرض های مساله

حکم مساله : $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

دقت کنید که برای تساوی زاویه های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ و همچنین تساوی AM , BM دلیلی نداریم و به اشتباه ، مساوی بودن آن ها را در فرض ننویسید.

مثال 4 : اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر، برابرباشند، ثابت کنید که زاویه سوم شان هم با هم برابرند؟

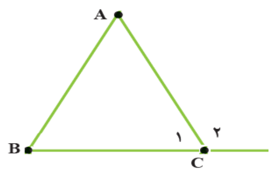


حل : با توجه به شکل $\hat{B} = \hat{E}$ و با توجه به شکل $\hat{A} = \hat{D}$: فرض های مساله

حکم مساله : $\hat{C} = \hat{F}$

مثال 5 : ثابت کنید که زاویه خارجی هر مثلث ، با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است؟

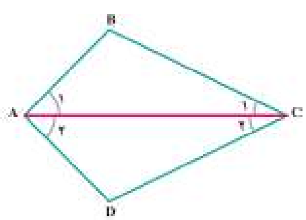
حل :



زوایای نیم صفحه $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180$ و مجموع زوایای داخلی مثلث $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180$: فرض های مساله

حکم مساله : $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$

مثال 6 : در شکل مقابل ، نیمساز دو زاویه A و C رسم شده است ، ثابت کنید که دو مثلث ABC و ADC هم نهشتند.



حل : ضلع مشترک $\overline{AC}$ و نیمساز $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$: فرض های مساله

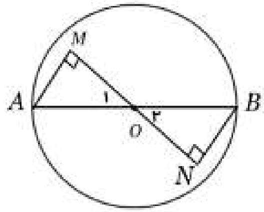
حکم مساله : $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DBC}$

درس سوم: هم‌نهشتی مثلث‌ها

بعد از این که فرض و حکم مساله مشخص شد ، انتخاب یک روش برای اثبات که بتواند ما را با استفاده از فرض ها به اثبات حکم برساند ، خیلی مهم است و این کار جزء خلاقیت های هر شخص است . راه و مسیر رسیدن به حکم مساله همواره منحصر بفرد نیست، یعنی شاید با روش های مختلف و از مسیرهای مختلف بتوانیم یک سوال و مساله را اثبات کنیم که سلیقه و خلاقیت افراد در این زمینه موثر می باشد .

در نمونه های زیر ، تلاش شده با تعدادی از اثبات ها و نحوه انجام کار و نحوه نگارش اثبات ، آشنا شوید:

مثال 1 : در دایره مقابل ، ثابت کنید که دو مثلث AOM و BON با هم برابرند؟



متقابل به راس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\hat{M} = \hat{N} = 90$: فرض های مساله

حکم مساله : $\overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{BON}$

اثبات : با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث BON و AOM با هم برابرند:

دلیل تساوی
$$\begin{cases} 1)\ \hat{M} = \hat{N} = 90 \\ 2)\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \text{متقابل به راس} \\ 3)\ \overline{AO} = \overline{BO} \end{cases} \xrightarrow[\text{(وتر و یک زاویه)}]{\text{بنا به حالت}} \overset{\triangle}{AMO} = \overset{\triangle}{BNO}$$

از این مثال می توان به گونه ای دیگر استفاده کرد .

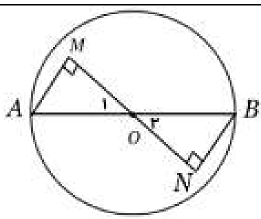
مثلا به جای این که تساوی مثلث ها را از ما بخواهد ، شاید انتظار داشته باشد که ثابت کنیم اجزای مثلث ها با هم برابرند .

برای این کار ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث هم نهشتند و از آن نتیجه می گیریم دو قسمت مورد نظر با هم برابرند .

یعنی ابتدا با روش استدلالی هم نهشتی مثلث ها را ثابت می کنیم و سپس با روش استنتاجی به هدف خود یعنی تساوی اجزا می رسیم.

به حل مثال بعد توجه کنید :

مثال 2 : در دایره مقابل ، ثابت کنید که دو ضلع AM و BN با هم برابرند؟



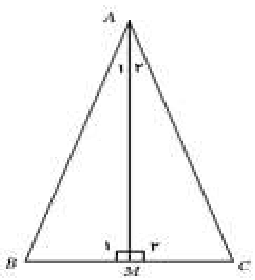
فرض های مساله : $\hat{M}=\hat{N}=۹۰$ و $\overline{AO}=\overline{BO}$ شعاع دایره و $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به راس

حکم مساله : $\overline{AM}=\overline{BN}$

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث با هم برابرند و از آن اثبات نتیجه می گیریم که دوضلع موردنظر مساویند:

دلیل تساوی
$$\left\{\begin{array}{ll} ۱)\ \hat{M}=\hat{N}=۹۰ & \\ ۲)\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 & \text{متقابل به راس} \\ ۳)\ \overline{AO}=\overline{BO} & \end{array}\right. \xRightarrow[\text{(وتر و یک زاویه)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle AMO=\triangle BNO \Longrightarrow \overline{AM}=\overline{BN}$$

مثال 3 : در مثلث متساوی الساقین مقابل ، ثابت کنید که BM و MC با هم برابرند؟



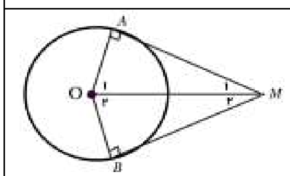
فرض های مساله : $\overline{AB}=\overline{AC}$ ساق و $\hat{B}=\hat{C}$ زاویه پای ساق و $\hat{M}_1=\hat{M}_2=۹۰$

حکم مساله : $\overline{BM}=\overline{MC}$

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABM و AMC برابرند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که دوضلع موردنظر مساویند:

دلیل تساوی
$$\left\{\begin{array}{ll} ۱)\ \hat{M}_1=\hat{M}_2=۹۰ & \\ ۲)\ \overline{AM}=\overline{AM} & \text{ضلع مشترک} \\ ۳)\ \overline{AB}=\overline{AC} & \text{ساق} \end{array}\right. \xRightarrow[\text{(وتر و یک ضلع)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle ABM=\triangle AMC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{BM}=\overline{MC}$$

مثال 4 : در دایره مقابل ، ثابت کنید دو زاویه $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ با هم برابرند ؟



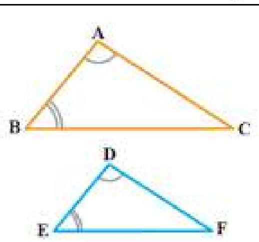
فرض های مساله : $\overline{AO}=\overline{BO}$ شعاع و $\overline{OM}$ ضلع مشترک و $\hat{A}=\hat{B}=۹۰$

حکم مساله : $\hat{M}_1=\hat{M}_2$

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث BMO و AMO برابرند و از آن ، نتیجه می گیریم که دوزاویه موردنظر مساویند:

دلیل تساوی
$$\left\{\begin{array}{ll} ۱)\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰ & \\ ۲)\ \overline{OM}=\overline{OM} & \text{ضلع مشترک} \\ ۳)\ \overline{AO}=\overline{BO} & \text{شعاع} \end{array}\right. \xRightarrow[\text{(وتر و یک ضلع)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle AMO=\triangle BMO \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{M}_1=\hat{M}_2$$

مثال 5 : اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر، برابرباشند، ثابت کنید که زاویه سوم شان هم با هم برابرند؟



فرض های مساله : $\hat{A}=\hat{D}$ با توجه به شکل و $\hat{B}=\hat{E}$ با توجه به شکل

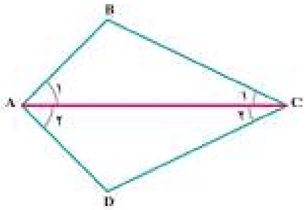
حکم مساله : $\hat{C}=\hat{F}$

اثبات : می دانیم مجموع زوایای مثلث 180 درجه است و با روش استنتاجی، نتیجه می گیریم که زاویه های سوم مساویند:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \\ \hat{D}+\hat{E}+\hat{F}=۱۸۰ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{D}+\hat{E}+\hat{F} \xRightarrow[\hat{B}=\hat{E}]{\text{چون } \hat{A}=\hat{D}} \cancel{\hat{A}}+\cancel{\hat{B}}+\hat{C}=\cancel{\hat{D}}+\cancel{\hat{E}}+\hat{F} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{C}=\hat{F}$$

دقت کنید که در هر اثبات ، ابتدا فرض و حکم را نوشته و سپس مراحل اثبات را انجام می دهیم.

مثال 6 : در شکل مقابل ، نیمساز دو زاویه A و C رسم شده است ، ثابت کنید که دو ضلع AB و AD برابرند.



فرض های مساله : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نیمساز و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ نیمساز و $\overline{AC}$ ضلع مشترک

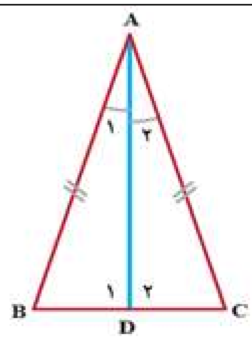
حکم مساله : $\overline{AB} = \overline{AD}$

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ADC و ABC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که دوضلع موردنظر مساویند:

دلیل تساوی:
۱) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ بنا به فرض
۲) $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ بنا به فرض
۳) $\overline{AC} = \overline{AC}$ ضلع مشترک

بنا به حالت (ز ض ز) $\Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ADC}$ نتیجه می گیریم $\Longrightarrow \overline{AB} = \overline{AD}$

مثال 7 : در مثلث متساوی الساقین مقابل ، AD نیمساز زاویه A است ، ثابت کنید که AD میانه وارد بر BC هم است ؟



تعریف میانه : میانه پاره خطی است که از یک راس مثلث بر وسط ضلع مقابل رسم می شود.

فرض های مساله : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق و $\hat{B} = \hat{C}$ زاویه پای ساق

حکم مساله : $\overline{BD} = \overline{DC}$

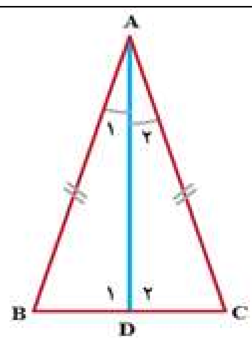
اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات ، نتیجه می گیریم که $BD = DC$

دلیل تساوی:
۱) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نیمساز
۲) $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق
۳) $\overline{AD} = \overline{AD}$ ضلع مشترک

بنا به حالت (ض ز ض) $\Longrightarrow \overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{ADC}$ نتیجه می گیریم $\Longrightarrow \overline{BD} = \overline{DC}$

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین ، نیمساز زاویه راس مثلث ، میانه وارد بر قاعد مثلث هم می باشد.

مثال 8 : در مثلث متساوی الساقین مقابل ، AD نیمساز زاویه A است، ثابت کنیدکه AD ارتفاع وارد بر BC هم است؟



تعریف ارتفاع : پاره خطی است که از یک راس مثلث بر ضلع مقابل (یا امتداد آن) عمود رسم می شود.

فرض های مساله : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق و $\hat{B} = \hat{C}$ زاویه پای ساق

حکم مساله : $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = ۹۰$

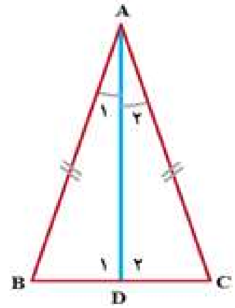
اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \mathbf{90}$

دلیل تساوی:
۱) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نیمساز
۲) $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق
۳) $\overline{AD} = \overline{AD}$ ضلع مشترک

بنا به حالت (ض ز ض) $\Longrightarrow \overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{ADC}$ نتیجه می گیریم $\Longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = ۹۰$

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین ، نیمساز زاویه راس مثلث ، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث هم می باشد.

مثال 9 : در مثلث متساوی الساقین مقابل ، AD ارتفاع وارد برقاعده است ، ثابت کنید: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$



فرض های مساله : زاویه پای ساق $\hat{B} = \hat{C}$ و ساق $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90$

حکم مساله : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

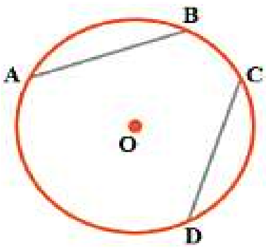
اثبات : ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث ABD و ADC هم نهشتند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

دلیل تساوی
۱) $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90$
۲) $\overline{AB} = \overline{AC}$ ساق
۳) $\overline{AD} = \overline{AD}$ ضلع مشترک

$\xRightarrow[\text{(ض و ض)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle ABD = \triangle ADC \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

یعنی در هر مثلث متساوی الساقین ، ارتفاع وارد بر قاعده ، نیمساز زاویه راس مثلث هم می باشد.

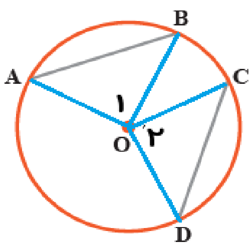
مثال 10 : در دایره مقابل ، اگر وترهای AB و CD با هم برابر باشند ،ثابت کنید کمان های AB و CD با هم برابرند.



فرض های مساله : $\overline{AB} = \overline{CD}$ شعاع $\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{OB} = \overline{OD}$

حکم مساله : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

اثبات : ابتدا نقاط A و B و C و D را به مرکز دایره وصل کرده و ثابت می کنیم دو مثلث COD و AOB برابرند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و از آن به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید:

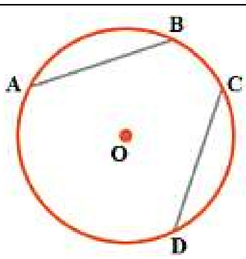


دلیل تساوی
۱) $\overline{AO} = \overline{OC}$ شعاع دایره
۲) $\overline{BO} = \overline{OD}$ شعاع دایره
۳) $\overline{AB} = \overline{CD}$ بنا به فرض

$\xRightarrow[\text{(ض ض ض)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle AOB = \triangle COD \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

دقت کنید که از ابتدا ، تساوی زاویه های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برای ما مشخص نبود و دلیلی برای تساوی آن ها نداشتیم.

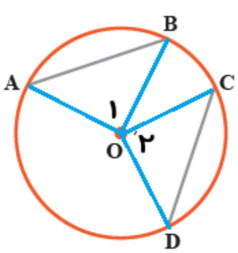
مثال 11 : در دایره مقابل ، اگر کمان های AB و CD با هم برابر باشند، ثابت کنید وترهای AB و CD با هم برابرند.



فرض های مساله : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ شعاع $\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{OB} = \overline{OD}$

حکم مساله : $\overline{AB} = \overline{CD}$

اثبات : ابتدا نقاط A و B و C و D را به مرکز دایره وصل کرده و ثابت می کنیم دو مثلث COD و AOB برابرند و از آن اثبات، نتیجه می گیریم وترهای AB و CD برابرند :



دلیل تساوی
۱) $\overline{AO} = \overline{OC}$ شعاع دایره
۲) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$ بنا به فرض
۳) $\overline{BO} = \overline{OD}$ شعاع دایره

$\xRightarrow[\text{(ض ز ض)}]{\text{بنا به حالت}} \triangle AOB = \triangle COD \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AB} = \overline{CD}$

نکته : به تفاوت فرض ها و حکم و نحوه اثبات در دو مساله 10 و 11 توجه کنید. یعنی :

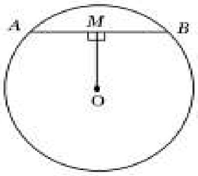
در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر انها نیز با هم برابرند.

تکالیف : تمرینات و کاردرکلاس صفحه51 و 52 را مثل نمونه های بالا با رسم دقیق شکل ها و نوشتن فرض و حکم مساله در دفتر بنویسید.

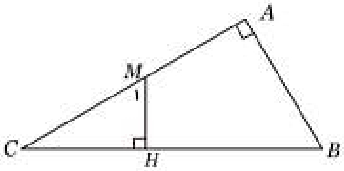
تمرین های مناسب برای اثبات هندسی

در هریک از مثال های زیر ابتدا فرض و حکم مساله را نوشته و سپس آنها را اثبات کنید

1 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم مربوطه ثابت کنید که پاره خط OM وتر AB را نصف کرده است؟

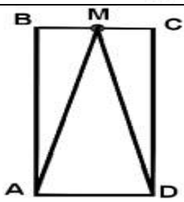


2 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که زاویه $\hat{M}_1$ با زاویه $\hat{B}$ برابر است؟

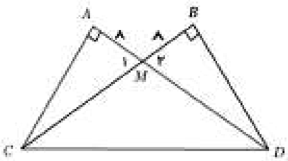


3 - در مستطیل مقابل ، نقطه ی M وسط BC است. با نوشتن فرض و حکم ثابت کنید :

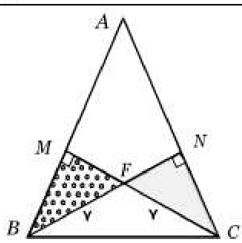
مثلث AMD متساوی الساقین است .



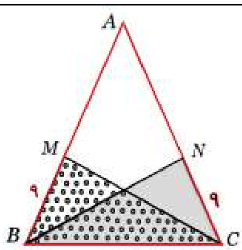
4 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث AMC و BMD برابرند؟



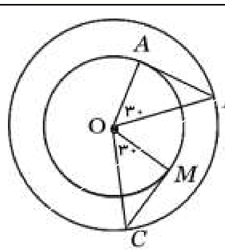
5 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث FNC و BMF برابرند؟



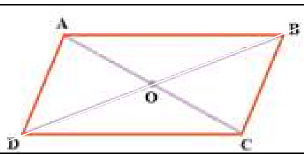
6 – اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد ، ثابت کنید که دو مثلث BNC و BMC برابرند؟



7 – اگر نقطه O مرکز دو دایره باشد ، ثابت کنید که دو مثلث AOB و MOC برابرند؟

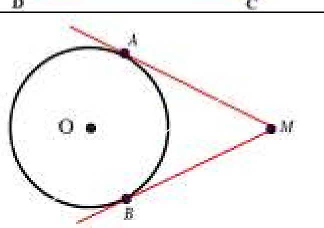


8 – ثابت کنید که دو قطر متوازی الاضلاع ، همدیگر را نصف می کنند ؟



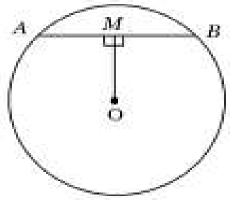
9 – اگر از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم ،

ثابت کنید که طول دو پاره خط مماس بر دایره با هم مساویند ؟



حل و اثبات نمونه سوالات ، در صفحات بعدی ارائه شده است:

1 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم مربوطه ثابت کنید که پاره خط OM وتر AB را نصف کرده است؟

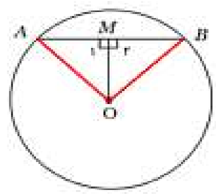


فرض : $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = ۹۰$ و $\overline{AO} = \overline{BO}$

حکم : $\overline{AM} = \overline{BM}$

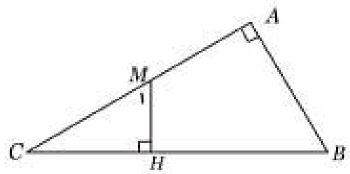
اثبات :

از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کرده وابتدا ثابت می کنیم دو مثلث AOM و BOM هم نهشت هستند :



دلیل تساوی
$$\left\{\begin{array}{ll} ۱)\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = ۹۰ & \\ ۲)\ \overline{OM} = \overline{OM} & \text{ضلع مشترک} \\ ۳)\ \overline{AO} = \overline{BO} & \text{شعاع} \end{array}\right. \xRightarrow[\text{(وتر و یک ضلع)}]{\text{بنا به حالت}} \overset{\triangle}{AMO} = \overset{\triangle}{BMO} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AM} = \overline{BM}$$

2 - با توجه به شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که زاویه $\hat{M}_1$ با زاویه $\hat{B}$ برابر است؟



فرض : $\widehat{H} = \widehat{A} = ۹۰$ و $\widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = ۱۸۰$ و $\widehat{C} + \widehat{H} + \widehat{M}_1 = ۱۸۰$

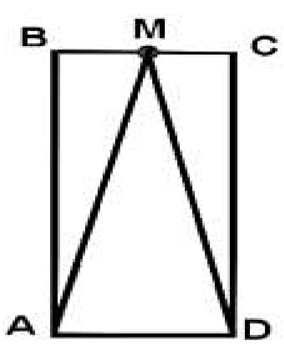
حکم : $\widehat{M}_1 = \widehat{B}$

اثبات : با توجه به این که مجموع زوایای مثلث ها 180 درجه است می توان نوشت :

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{H} + \widehat{M}_1 = ۱۸۰ \\ \widehat{H} = \widehat{A} = ۹۰ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \cancel{\widehat{C}} + \cancel{\widehat{A}} + \widehat{B} = \cancel{\widehat{C}} + \cancel{\widehat{H}} + \widehat{M}_1 \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \widehat{M}_1 = \widehat{B}$$

3 - در مستطیل مقابل ، نقطه ی M وسط BC است. با نوشتن فرض و حکم ثابت کنید :

مثلث AMD متساوی الساقین است .



فرض : $\widehat{B} = \widehat{C} = ۹۰$ و $\overline{AB} = \overline{CD}$ طول مستطیل و $\overline{BM} = \overline{MC}$ M وسط BC است

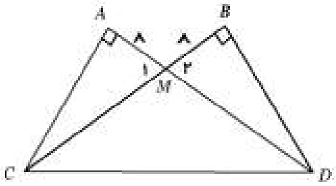
حکم : $\overline{AM} = \overline{DM}$

اثبات : اگر ثابت کنیم دو مثلث ABM و DMC با هم برابرند در این صورت AM و DM برابر خواهند بود که به معنی متساوی الساقین بودن مثلث AMD است . پس :

دلیل تساوی
$$\left\{\begin{array}{ll} ۱)\ \widehat{B} = \widehat{C} = ۹۰ & \\ ۲)\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{طول مستطیل} \\ ۳)\ \overline{BM} = \overline{MC} & M \text{ وسط } BC \text{ است} \end{array}\right. \xRightarrow[\text{(ض ز ض)}]{\text{بنا به حالت}} \overset{\triangle}{ABM} = \overset{\triangle}{DMC} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overline{AM} = \overline{DM} \xRightarrow{\text{نتیجه می گیریم}} \overset{\triangle}{AMD}$$

متساوی الساقین است

4 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث AMC و BMD برابرند؟



فرض : $\widehat{B} = \widehat{A} = ۹۰$ و $\overline{AM} = \overline{BM} = ۸$ و $\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}$ متقابل به راس

حکم : $\overset{\triangle}{AMC} = \overset{\triangle}{BMD}$

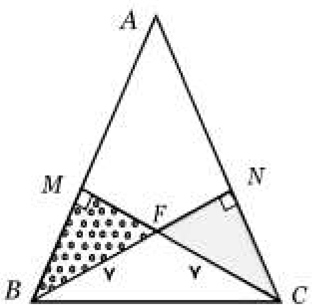
اثبات : با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث BMD و AMC با هم برابرند:

دلیل تساوی
۱) $\widehat{B} = \widehat{A} = ۹۰$
۲) $\overline{AM} = \overline{BM} = ۸$
۳) $\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}$ متقابل به راس

$\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{AMC} = \overset{\triangle}{BMD}$

بنا به حالت
(ز ض ز)

5 - در شکل مقابل و با نوشتن فرض و حکم ، ثابت کنید که دو مثلث FNC و BMF برابرند؟



فرض : $\widehat{M} = \widehat{N} = ۹۰$ و $\overline{BF} = \overline{FC} = ۷$ و $\widehat{F_۱} = \widehat{F_۲}$ متقابل به راس

حکم : $\overset{\triangle}{FNC} = \overset{\triangle}{BMF}$

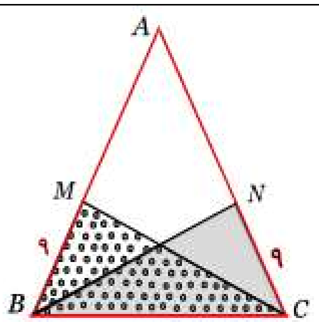
اثبات : با توجه به فرض های سوال ثابت کنیم دو مثلث BMF و FNC با هم برابرند:

دلیل تساوی
۱) $\widehat{M} = \widehat{N} = ۹۰$
۲) $\overline{BF} = \overline{FC} = ۷$
۳) $\widehat{F_۱} = \widehat{F_۲}$ متقابل به راس

$\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{FNC} = \overset{\triangle}{BMF}$

بنا به حالت
(وتر و یک زاویه تند)

6 – اگر مثلث ABC متساوی الساقین باشد ، ثابت کنید که دو مثلث BNC و BMC برابرند؟



فرض : $\widehat{B} = \widehat{C}$ زاویه پای ساق و $\overline{BM} = \overline{NC} = ۹$

حکم : $\overset{\triangle}{BMC} = \overset{\triangle}{BNC}$

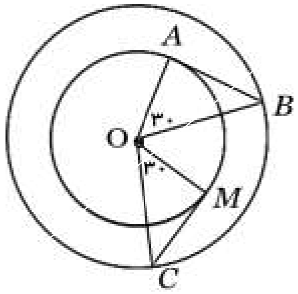
اثبات : با توجه به فرض های سوال ، ثابت کنیم دو مثلث BNC و BMC با هم برابرند:

دلیل تساوی
۱) $\widehat{B} = \widehat{C}$ زاویه پای ساق
۲) $\overline{BM} = \overline{NC} = ۹$
۳) $\overline{BC} = \overline{BC}$ ضلع مشترک

$\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{BMC} = \overset{\triangle}{BNC}$

بنا به حالت
(ض ز ض)

7 – اگر نقطه O مرکز دو دایره باشد ، ثابت کنید که دو مثلث AOB و MOC برابرند؟



شعاع دایره بزرگ = $\overline{BO} = \overline{CO}$ و شعاع دایره کوچک = $\overline{AO} = \overline{MO}$ و $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = ۳۰$: فرض

حکم : $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{MOC}$

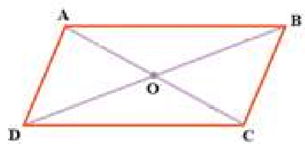
اثبات : با توجه به فرض های سوال ، ثابت کنیم دو مثلث AOB و MOC با هم برابرند:

دلیل تساوی
۱) شعاع دایره کوچک = $\overline{AO} = \overline{MO}$
۲) $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = ۳۰$
۳) شعاع دایره بزرگ = $\overline{BO} = \overline{CO}$

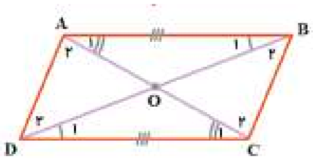
$\xrightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}}$ $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{MOC}$

---

8 – ثابت کنید که دو قطر متوازی الاضلاع ، همدیگر را نصف می کنند ؟



⇓



اضلاع متوازی الاضلاع $\overline{AB} = \overline{CD}$ و خطوط موازی و مورب $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ خطوط موازی و مورب $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$: فرض

حکم : $\overline{AO} = \overline{CO}$ $\overline{DO} = \overline{BO}$

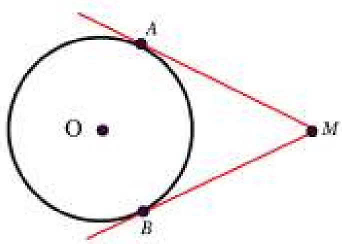
اثبات : اگر ثابت کنیم دو مثلث AOB و DOC با هم برابرند در این صورت AO با OC و همچنین BO با OD برابر خواهند بود که این به معنی نصف شدن قطر می باشد :

دلیل تساوی
۱) خطوط موازی و مورب $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$
۲) اضلاع متوازی الاضلاع $\overline{AB} = \overline{CD}$
۳) خطوط موازی و مورب $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

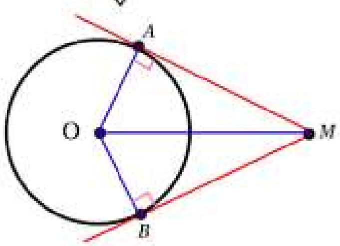
$\xrightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}}$ $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{DOC}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه می گیریم}}$ $\begin{cases} \overline{AO} = \overline{CO} \\ \overline{BO} = \overline{DO} \end{cases}$

---

9 – اگر از نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم ،
ثابت کنید که طول دو پاره خط مماس بر دایره ، با هم مساویند ؟



⇓



شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$ و $\widehat{A} = \widehat{B} = ۹۰$: فرض

حکم : $\overline{AM} = \overline{BM}$

اثبات :

از مرکز دایره به نقاط A و B و M وصل کرده و ابتدا ثابت می کنیم دو مثلث AOM و BOM هم نهشت هستند. البته می دانیم که خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره **عمود** است،
که از این مطلب در فرض مساله استفاده شده است :

دلیل تساوی
۱) $\widehat{A} = \widehat{B} = ۹۰$
۲) شعاع دایره $\overline{AO} = \overline{BO}$
۳) ضلع مشترک $\overline{MO} = \overline{OM}$

$\xrightarrow{\text{بنا به حالت (و ض)}}$ $\overset{\triangle}{AOM} = \overset{\triangle}{BOM}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه می گیریم}}$ $\overline{AM} = \overline{BM}$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی،راه حل کلّی وجود ندارد؛

امّا می‌توان مراحلی را مشخص کرد که برای حل مسئلهٔ هندسه،توصیه می‌شود.

قدم های حل مسئله

۱ــ صورت مسأله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید.

در مسأله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط و ... سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟

۲ــ اگر برای مسأله شکل رسم نشده است، با توجه به‌صورت مسأله ، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

۳ــ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جا بنویسید.

۴ــ برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این‌کار هست، مثلاً :

یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها است.

درس پنجم: شکل‌های متشابه

در هندسه ما معمولا به دنبال این موضوع بودیم که ثابت کنیم دو شکل یا دو مفهوم با هم برابرند . در خیلی از موارد دو شکل یا جسم به هم شبیهند ولی با هم برابرنیستند .

وقتی شما 6 تا عکس پرسنلی برای ثبت نام مدرسه تهیه می کنید این 6 تا عکس همه با هم برابرند و از همه جهت با هم یکسان هستند ولی در برخی موارد عکاس، شاید یک نمونه بزرگ تر از عکس شما هم چاپ کند که برای قاب گرفتن مناسب است .

این عکس بزرگ از خیلی جهات مثل عکس های قبلی است ولی از یک نظر با آن ها متفاوت است و آن یک نظر هم اندازه است .

یعنی با این که این عکس و عکس های قبلی مساوی نیستند ولی به هم شبیه هستند.

این اتفاق در خیلی جاهای دیگر هم می افتد ، مثلا وقتی شما در فروشگاه ، یک مدل کفش را انتخاب می کنید که بخرید شاید اندازه کفش اول برای پای شما مناسب نباشد و از فروشنده بخواهید که یک یا دو سایز کوچک تر یا بزرگ تر از نمونه اول را برای شما بیاورد . این کفش ها اگر از نظر رنگ و مدل و جنس هم یکسان باشند از نظر اندازه برابرنیستند ولی به هم شبیه هستند.

در عکس های زیر دقت کنید، ما اسباب بازی ها یا ماکت هایی از خیلی چیزها دیده ایم که برابر با نمونه اصلی نیستند ولی به مورد اصلی ، خیلی شباهت دارند و انسان ها از این مدل ها برای مقاصد مختلف استفاده می کنند . مثلا بچه ها با استفاده از شباهت اسباب بازی ها با نمونه های اصلی ، بازی خود را می کنند ، بزرگتر ها هم در کارهای روزمره خود از آن بهره می برند .

مثلا نقشه جغرافیای روی یک صفحه ، مشابه با محل واقعی یک شهر یا خیابان یا محله را در نظر بگیرید که با محیط واقعی برابر نیست ولی به آن شبیه است و ما بارها از نقشه برای رسیدن به مقاصد خود استفاده می کنیم. مثل نقشه تبریز یا تهران یا جاهای دیگر .

یک طراح که می خواهد نقشه یک ساختمان یا سازه بزرگ را طراحی کند می تواند ماکتی از آن بسازد ، تا بقیه هم متوجه شوند سازه اصلی به چه شکلی خواهد بود. مجسمه ها یا اجسامی از این دست ، هم مشابه چهره های اشخاص مشهور ساخته می شوند.

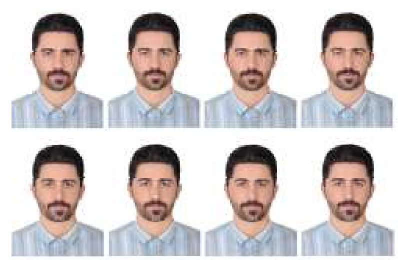
تصویر واقعی برج میلاد

ماکت برج میلاد

یک دستگاه تاکسی سمند

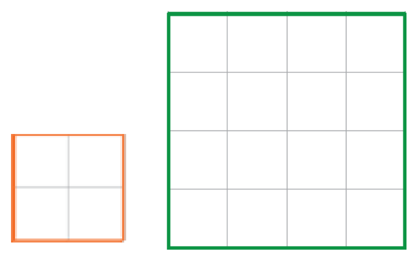
اسباب بازی سمند

عکس پرسنلی 3 در 4

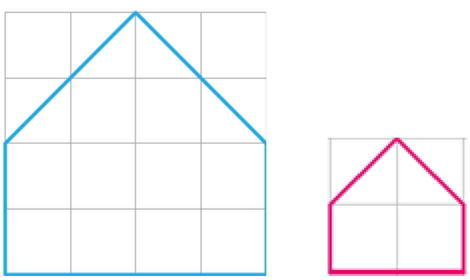


عکس بزرگ مخصوص قاب گرفتن

ابتدا به پنج ضلعی ها و بعدا به مربع های زیر توجه کنید



مشاهده می کنید که مربع ها به هم شبیه هستند



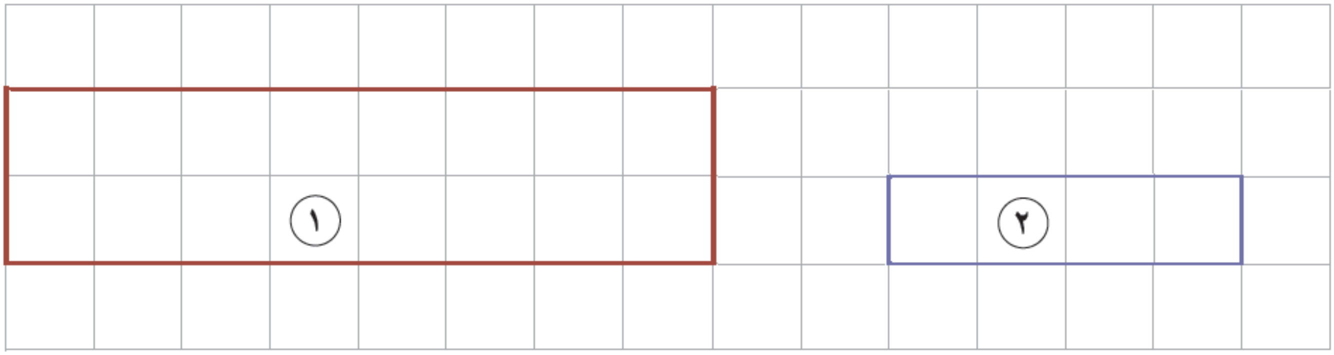
مشاهده می کنید که پنج ضلعی ها به هم شبیه هستند

اگر به جعبه های مقابل توجه کنید

خواهید دید که در برخی موارد با هم تفاوت دارند .

مثلا از نظر رنگ و اندازه با هم تفاوت دارند. ولی به هم شبیه هستند

به مستطیل رنگی زیر توجه کنید که با هم متشابهند :



سه شرط اصلی تشابه دو شکل (دو جسم)

1 – تعداد اضلاع برابر باشد . دو تا شکل که تعداد اضلاع یکسانی ندارند نمی توانند مشابه باشند . مثلا چهار ضلعی و پنج ضلعی ها نمی توانند مشابه باشند.

2 – اندازه زاویه های متناظر با هم برابر باشند . یعنی اندازه هر زاویه در یک شکل ، با اندازه زاویه مشابه در شکل دیگر ، کاملا برابر باشند.

3 – اندازه اضلاع متناظر در دو شکل با هم متناسب باشند . یعنی اندازه هرضلع یک شکل ، با اندازه ضلع مشابه در شکل دیگر متناسب باشند.

و این بدان معنی است که اگر یک ضلع از یک شکل در شکل دیگردوبرابر شده است، بقیه اضلاع هم بایددوبرابر شوندو اگر یک ضلع از یک شکل در شکل دیگر پنج برابر شده است ، بقیه اضلاع هم بایدپنج برابر شوند.اگر یک ضلع از یک شکل در شکل دیگر نصف شده است ، بقیه اضلاع هم باید نصف شوند.

هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه‌اند.

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

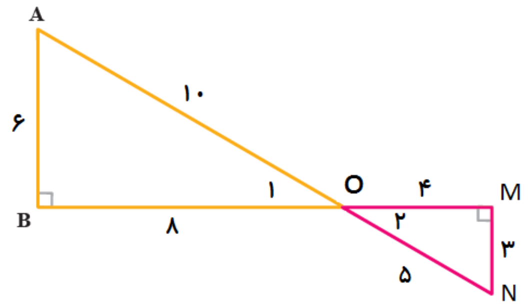
مقیاس در نقشه های جغرافیایی ، همان نسبت تشابه هندسی است .

اگر مقیاس نقشه $\frac{1}{10000}$ باشد یعنی نقشه به اندازه 10000 برابر کوچک تر از اندازه محیط واقعی است .

در تصویر زیر، نقشهٔ قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است یا $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$

یعنی هر ۱ سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر (۱۰۰۰ متر) مقدار واقعی برابر است.

مثال 1: به تصویردقت کنید که دوتامثلث قائم الزاویه با هم مشابه هستند.



اولا : هر کدام سه تا ضلع دارند.

ثانیا : اندازه زاویه های متناظر هم با هم برابر است . یعنی :

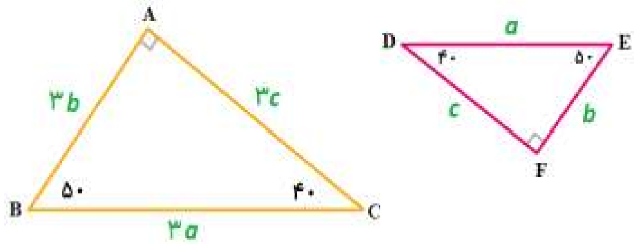
$$\hat{B} = \hat{M} \quad و \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad و \quad \hat{A} = \hat{N}$$

ثالثا : اضلاع متناظر هم متناسب هستند ، یعنی :

$$AB = 2MN \quad و \quad BO = 2OM \quad و \quad AO = 2ON$$

نسبت تشابه دو شکل 1 به 2 است که به صورت $\frac{1}{2}$ نشان می دهیم.

مثال 2: به تصویردقت کنید که دوتا مثلث قائم الزاویه با هم مشابه هستند .



اولا : هر کدام سه تا ضلع دارند.

ثانیا : اندازه زاویه های متناظر هم با هم برابر است . یعنی :

$$\hat{B} = \hat{E} = 50 \quad و \quad \hat{A} = \hat{F} = 90 \quad و \quad \hat{D} = \hat{C} = 40$$

ثالثا : اضلاع متناظر هم متناسب هستند ، یعنی :

$$AC = 3DF \quad و \quad AB = 3FE \quad و \quad BC = 3DE$$

نسبت تشابه دو شکل 1 به 3 است که به صورت $\frac{1}{3}$ نشان می دهیم ، به زبان ساده شکل کوچک سه برابر ، بزرگ تر شده است .

تکالیف : تمرینات و کاردرکلاس صفحه های 55 و 56 و 57 و 58 را در کتاب حل کنید.

سوالات چهار گزینه ای

1 - مقیاس نقشه ای $\frac{1}{300000}$ است اگر فاصله ی دو نقطه در طبیعت $600000\ cm$ باشد ، فاصله این دو نقطه در نقشه :

الف) $20cm$ ( ) ب) $2cm$ ( ) ج) $2m$ ( ) د) $200\ cm$ ( )

2 - اگر نسبت تشابه دومثلث $\frac{2}{5}$ باشد ، نسبت اضلاع این دو مثلث :

الف) $\frac{2}{5}$ ( ) ب) $\frac{4}{5}$ ( ) ج) $\frac{4}{25}$ ( ) د) $\frac{8}{125}$ ( )

3 - نسبت تشابه دو تا مثلث ، برابربا $\frac{1}{2}$ است . اگر اندازه اضلاع مثلث بزرگ 38 , 20 , 30 سانتی مترباشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگرچه قدر است؟

الف) 38 , 20 , 30 ( ) ب) 76 , 40 , 60 ( ) ج) 57 , 30 , 45 ( ) د) 19 , 10 , 15 ( )

4 - نسبت تشابه دو تا مثلث، برابر با $\frac{2}{3}$ است. اگراندازه اضلاع مثلث کوچک 38 , 20 , 30 سانتی مترباشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگرچه قدر است؟

الف) 38 , 20 , 30 ( ) ب) 76 , 40 , 60 ( ) ج) 57 , 30 , 45 ( ) د) 19 , 10 , 15 ( )

5 - نسبت تشابه دو تا مثلث ، برابربا $\frac{1}{4}$ است . اگر اندازه اضلاع مثلث کوچک 16, 12, 8 سانتی مترباشد ، اندازه اضلاع مثلث دیگرچه قدر است؟

الف) 16, 12, 8 ( ) ب) 4, 3, 2 ( ) ج) 64, 48, 32 ( ) د) 32, 24, 16 ( )

6 – اگر مقیاس نقشه ی یک محل 1 به 100 بوده و در روی نقشه ، زاویه بین دو کوچه 30 درجه باشد ، زاویه این دو کوچه در محل واقعی چند درجه است؟

الف) 30 درجه ( ) ب) 60 درجه ( ) ج) 15 درجه ( ) د) 300 درجه ( )

7 - نسبت تشابه دو تا مربع 3 به 5 است . اگر اندازه ضلع مربع بزرگ $20cm$ باشد ، اندازه ضلع مربع کوچک چه قدر است ؟

الف) $12\ cm$ ( ) ب) $144\ cm$ ( ) ج) $12\ cm^2$ ( ) د) $144\ cm^2$ ( )

8 - نسبت تشابه دو تا مربع 3 به 5 است . اگر اندازه ضلع مربع بزرگ $20cm$ باشد مساحت مربع کوچک چه قدر است ؟

الف) $12\ cm$ ( ) ب) $144\ cm$ ( ) ج) $12\ cm^2$ ( ) د) $144\ cm^2$ ( )

9 - کدام جمله مقابل درست است؟

الف) هر دو مثلث دلخواه متشابهند ( ) ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند ( )

ج) هر دو مربع دلخواه متشابهند ( ) د) هر دو لوزی دلخواه متشابهند ( )

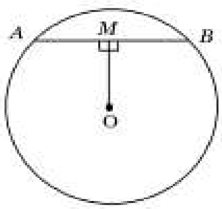
10- کدام جمله مقابل درست است ؟

الف) هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند ( ) ب) هر دو 6 ضلعی دلخواه متشابهند ( )

ج) هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند ( ) د) هر دو ذوزنقه دلخواه متشابهند ( )

11- در دایره مقابل OM بر AB عمود است . اگر بخواهیم ثابت کنیم OM عمود منصف AB است،

کدام گزینه زیر به عنوان حکم نوشته می شود؟



الف) $OB = OA$ ( ) ب) $AM = AB$ ( ) ج) $AM = MB$ ( ) د) $\hat{M} = 90^\circ$ ( )

12 - با توجه به جمله مقابل ،کدام یک از استدلال های زیر درست است؟ (شرکت کفشپا ، فقط کفش مشکی یا قهوه ای تولید می کند)

الف) اگر حمید کفش آبی داشته باشد ، حتما تا حالا از شرکت کفشپا خرید نکرده است. ( )

ب) هادی حتما کفش مشکی اش رو از شرکت کفشپا خریده است . ( )

ج) مسعود غیرازکفش مشکی وقهوه ای کفشی ندارد، پس حتما حداقل یکبار از این شرکت خرید داشته است. ( )

د) حمید فقط کفش این شرکت را می پوشد، پس دیروز در مهمانی کفش های سفید برای او نبوده است. ( )

13 - از جملات " پرندگان نوعی حیوانند " و " برخی از پرندگان سبز رنگ هستند " کدام نتیجه زیر حاصل نمی شود؟

الف) همه پرندگان سبز رنگ هستند ( ) ب) برخی از حیوانات سبز رنگ نیستند ( )

ج) برخی از پرندگان سبزرنگ نیستند ( ) د) برخی از حیوانات سبز رنگ هستند ( )

14 - کدام گزینه زیر همواره درست است؟

الف) مربع نوعی لوزی ا ست که قطرهایش برابرند. ( )

ب) هر چهار ضلعی که قطرهایش برهم عمود باشند ، مربع است . ( )

ج) هر متوازی الاضلاع که قطرهایش برهم عمود باشند ، مربع است. ( )

د) هر ذوزنقه ای که دو زاویه 90 درجه داشته باشد ، مربع است . ( )

توان و ریشه

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 4 – توان و ریشه در اعداد

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اوّل: توان صحیح

سال های قبل با اعداد توان دار آشنا شده اید . برای آموختن مفاهیم و نکات جدید از اعداد توان دار به تعریف ریاضی توان اشاره می کنیم:

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ مرتبه}} \\ a^{\circ} = 1 \qquad (a \neq 0) \end{cases}$$

نکته : همان طور که از تعریف مشخص است هر عدد غیر صفر اگر به توان صفر برسد، حاصل آن یک است . البته توجه کنید که صفر به توان صفر تعریف نشده است ، یعنی پایه و توان به تنهائی می توانند صفر باشند، ولی هم زمان هر دو نمی توانند عدد صفر باشند .

به مثال های زیر توجه کنید :

$$(\frac{2}{9})^{\circ} = 1 \quad , \quad 100000^{\circ} = 1 \quad , \quad 3/4^{\circ} = 1 \quad , \quad (-3)^{\circ} = 1 \quad , \quad 712^{\circ} = 1$$

و یا مثال های زیر :

$$0^{\frac{3}{4}} = 0 \quad , \quad 0^{0/5} = 0 \quad , \quad 0^{100} = 0 \quad , \quad 0^{15} = 0 \quad , \quad 0^{4} = 0$$

در سال های قبل با نکات و فرمول های مختلفی در محاسبات اعداد توان دار آشنا شدید . با مرور آن ها ، نکات جدیدی هم به آن ها اضافه کرده و مثال های مختلفی را حل خواهیم کرد .

نکته 1 :

$$a^n + b^m = (\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ مرتبه}}) + (\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{m \text{ مرتبه}})$$

مثال 1 : $2^4 + 5^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) + (5 \times 5 \times 5) = 16 + 125 = 141$

مثال 2 : $3^2 + 4^3 = (3 \times 3) + (4 \times 4 \times 4) = 9 + 64 = 73$

مثال 3 : $(-5)^3 + (-9)^2 = (-5 \times -5 \times -5) + (-9 \times -9) = -125 + 81 = -41$

مثال 4 : $8^3 + 8^2 = (8 \times 8 \times 8) + (8 \times 8) = 512 + 64 = 576$

مثال 5 : $5^2 + 7^2 = (5 \times 5) + (7 \times 7) = 25 + 49 = 74$

نکته 2 :

$$a^{n}-b^{m}=(\underbrace{a\times a\times a\times\dots\times a}_{\text{مرتبه } n})-(\underbrace{b\times b\times b\times\dots\times b}_{\text{مرتبه } m})$$

مثال 1 :

$$7^{3}-6^{2}=(7\times7\times7)-(6\times6)=343-36=307$$

مثال 2 :

$$15^{2}-4^{4}=(15\times15)-(4\times4\times4\times4)=225-256=-31$$

مثال 3 :

$$(-1)^{4}-(-2)^{3}=(-1\times-1\times-1\times-1)-(-2\times-2\times-2)=(+1)-(-8)=+9$$

مثال 4 :

$$10^{4}-10^{3}=(10\times10\times10\times10)-(10\times10\times10)=10000-1000=9000$$

مثال 5 :

$$14^{2}-10^{2}=(14\times14)-(10\times10)=196-100=96$$

نکته 3 :

$$a^{n}\times b^{m}=(\underbrace{a\times a\times a\times\dots\times a}_{\text{مرتبه } n})\times(\underbrace{b\times b\times b\times\dots\times b}_{\text{مرتبه } m})$$

مثال 1 :

$$3^{4}\times5^{3}=(3\times3\times3\times3)\times(5\times5\times5)=81\times125=10125$$

مثال 2 :

$$8^{2}\times2^{5}=(8\times8)\times(2\times2\times2\times2\times2)=64\times32=2048$$

مثال 3 :

$$2/3^{2}\times1/2^{3}=(2/3\times2/3)\times(1/2\times1/2\times1/2)=5/29\times1/728=9/14112$$

نکته 4 :

$$a^{n}\div b^{m}=(\underbrace{a\times a\times a\times\dots\times a}_{\text{مرتبه } n})\div(\underbrace{b\times b\times b\times\dots\times b}_{\text{مرتبه } m})$$

مثال 1 :

$$20^{3}\div4^{2}=(20\times20\times20)\div(4\times4)=8000\div16=500$$

مثال 2 :

$$12^{2}\div4^{3}=(12\times12)\div(4\times4\times4)=144\div64=\frac{144}{64}=2/25$$

مثال 3 :

$$17^{2}\div5^{4}=(17\times17)\div(5\times5\times5\times5)=289\div625=\frac{289}{625}$$

نکته 5:	$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$
مثال 1:	$3^{7} \times 3^{8} = 3^{7+8} = 3^{15}$
مثال 2:	$5^{4} \times 5^{2} = 5^{4+2} = 5^{6}$
مثال 3:	$8^{3} \times 8^{2} \times 8^{7} = 8^{3+2+7} = 8^{12}$
مثال 4:	$(-2)^{3} \times (-2)^{5} = (-2)^{3+5} = (-2)^{8} = 2^{8}$
مثال 5:	$9 \times 9^{2} \times 9^{3} \times 9^{4} = 9^{1+2+3+4} = 9^{10}$
مثال 6:	$1/5^{4} \times (\frac{3}{2})^{7} = 1/5^{4+7} = 1/5^{11}$
نکته 6:	$a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}$
مثال 1:	$4^{6} \times 3^{6} = (4 \times 3)^{6} = 12^{6}$
مثال 2:	$5^{3} \times 10^{3} = (5 \times 10)^{3} = 50^{3}$
مثال 3:	$3^{9} \times 2^{9} \times 5^{9} = 30^{9}$
مثال 4:	$(-4)^{7} \times (+5)^{7} = (-20)^{7}$
مثال 5:	$(-2)^{4} \times (-4)^{4} \times (-5)^{4} = (-40)^{4} = 40^{4}$

نکته 7 : $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$

مثال 1 : $11^{7} \div 11^{3} = 11^{7-3} = 11^{4}$

مثال 2 : $9^{5} \div 9^{3} = 9^{5-3} = 9^{2}$

مثال 3 : $\dfrac{6^{13}}{6^{5}} = 6^{13-5} = 6^{8}$

مثال 4 : $10^{8} \div 10^{15} = 10^{8-15} = 10^{-7}$

مثال 5 : $(7^{9} \div 7) \div 7^{3} = 7^{8} \div 7^{3} = 7^{5}$

نکته 8 : $a^{m} \div b^{m} = (a \div b)^{m}$ یا $a^{m} \div b^{m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m}$

مثال 1 : $12^{8} \div 3^{8} = (12 \div 3)^{8} = 4^{8}$

مثال 2 : $20^{3} \div 2^{3} = (20 \div 2)^{3} = 10^{3}$

مثال 3 : $\dfrac{38^{5}}{19^{5}} = 2^{5}$

مثال 4 : $42^{2} \div 13^{2} = \left(\dfrac{42}{13}\right)^{2}$

مثال 5 : $7^{8} \div 14^{8} = \left(\dfrac{7}{14}\right)^{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{8}$

نکته 9 : توان قدیم و جدید

$$(a^m)^n = a^{m\times n} = a^{mn}$$

مثال 1 :

$$(7^3)^4 = 7^{3\times 4} = 7^{12}$$

مثال 2 :

$$(10^2)^8 = 10^{2\times 8} = 10^{16}$$

مثال 3 :

$$(-2^3)^5 = (-2)^{3\times 5} = (-2)^{15}$$

مثال 4 :

$$(-2^3)^2 = (-2)^{3\times 2} = (-2)^6 = 2^6$$

مثال 5 :

$$((۸^۲)^۵)^۴ = ((۸^۲)^۵)^۴ = ۸^{۲\times ۵\times ۴} = ۸^{۴۰}$$

نکته 10 :

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$$

مثال 1 :

$$10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{+1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$$

مثال 2 :

$$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{+2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

مثال 3 :

$$4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{+3} = \frac{1}{4^3} \Rightarrow 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

مثال 4 :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+4} = \frac{5^4}{3^4}$$

مثال 5 :

$$\frac{7^{-4}}{8^{-2}} = \frac{8^2}{7^4}$$

مثال 6 :

$$\frac{9^3 \times 10^{-2}}{9^{-5}} = \frac{9^3 \times 9^5}{10^2} = \frac{9^8}{10^2}$$

نکته 11 :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

یعنی اگر توان عددی به صورت کسری باشد ، می توان به صورت رادیکالی نوشت که صورت کسر، در توان عدد زیر رادیکال قرار می گیرد و مخرج کسر هم ، فرجه رادیکال می باشد .

مثال 1 :

$$7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$$

مثال 2 :

$$100^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{100^3} = \sqrt[2]{1000000} = 1000$$

مثال 3 :

$$2^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{1024}$$

مثال 4 :

$$\sqrt[7]{11^3} = 11^{\frac{3}{7}}$$

مثال 5 :

$$20^{1/5} = 20^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{20^3} = \sqrt[2]{8000}$$

مثال 6 :

$$9^{0/75} = 9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{729}$$

نکته : می توان با استفاده از این نکات ، سوالات به ظاهر خیلی سخت را حل کرد که به یک مورد زیر اشاره می شود :

$$\sqrt[3]{8^5} \times \sqrt[2]{4^7} = 8^{\frac{5}{3}} \times 4^{\frac{7}{2}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} \times (2^2)^{\frac{7}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{15}{3}} \times 2^{\frac{14}{2}} = 2^5 \times 2^7 = 2^{12}$$

تکالیف : کاردرکلاس صفحات 61 و 62 و 63 و تمرینات صفحات 63 و 64 را در کتاب بنویسید

حاصل هر یک عبارات زیر را به دست آورید:

$3^4 \times 3^5 \times 3^7 =$	$3^4 \times 3^5 \times 15^9 =$
$5^2 \times 4^2 \times 20^6 =$	$3^7 \times 3^4 \times 8^{11} \times 24^2 =$
$\dfrac{4^5 \times 4^7 \times 10^{12}}{5^3 \times 8^3} =$	$\dfrac{3^{10} \times 4^{10} \times 2^7 \times 6^7}{12^8 \times 12^8} =$
$\left(\dfrac{3}{5}\right)^7 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^7 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^8 =$	$\dfrac{3^9 \times 8^9 \times 4^3 \times 6^3}{4^{12} \times 3^{12}} =$
$(3/5)^2 \times \left(\dfrac{7}{2}\right)^8 \times 3^{10} =$	$7^5 \times 32 \times 14^6 =$
$64 \times 27 \times 12^7 =$	$27 \times 64 \times 125 \times 216 =$
$5^{-3} =$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} =$
$\dfrac{14^8 \times 2^{-3}}{7^3} =$	$\dfrac{14^8 \times 2^{-3}}{7^3 \times 14^{-5}} =$
$a \times a^2 \times a^3 \times \ldots \times a^{99} =$	$6^{-2} \times 4^{-2} \times 24^7 =$
$3^{99} + 3^{99} + 3^{99} =$	$\left(4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7\right) \times 3^8 =$
$\dfrac{3\left(a \times a \times a\right)}{a + a + a} =$	$\dfrac{a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3}{b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3} =$
$\dfrac{(a^{10})^3 \div a^7}{(a^8)^2 \div a^{11}} =$	$\dfrac{8^3}{2^4} \div \dfrac{2^7}{8^8} =$
$(8/4)^7 \div (0/007)^7 =$	$(6/3)^7 \div (0/009)^7 =$
$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 =$	$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 =$
$5^{-1} + 3^{-2} =$	$(5 + 3)^{-2} =$
$(5^{-1} + 3^{-2})^{-1} =$	$(5^{-1} + 3^{-2})^{-2} =$

درس دوم: نماد علمی

در علوم مختلف مثل ریاضیات یا شیمی یا فیزیک و .... در برخی موارد با اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک برخورد می کنیم . مثل موارد زیر :

سرعت حرکت نور :	3000000000 متر برثانیه
قطر متوسط گلبول های قرمز :	0/000007 میلی متر
ضخامت یک برگ کاغذ معمولی	0/0016 سانتی متر
شعاع کره خورشید	69500000000 سانتی متر
قطر یک باکتری	0/0000005 متر
قطر کره زمین	1300000000 سانتی متر
فاصله کره مریخ از کره زمین	9170000000000 سانتی متر
جرم یک الکترون :	0/0000000000000000000000000000009109 کیلوگرم

با دقت در اعداد مثال های بالا ، اولین چیزی که به ذهن ما می رسد که کار کردن با این اعداد و به یاد سپردن و محاسبه و نوشتن مکرر آن ها ، خیلی مشکل است و محاسبات ما را سخت تر می کند .

در ریاضیات با استفاده از مفهوم توان ها برای این مشکل چاره ای پیدا کرده اند که نوشتن این اعداد به صورت نماد علمی می باشد .

در نماد علمی ، اعداد به صورت حاصل ضرب یک عدد (بعضاً اعشاری) در توانی از عدد 10 نوشته می شوند و برای این نگارش دو شرط مهم وجود دارد که در مثال های زیر با آن دو شرط آشنا می شویم :

$$30000 = 3 \times 10000 = 3 \times 10^{4}$$

$$254000000 = 2/54 \times 100000000 = 2/54 \times 10^{8}$$

$$0/27 = 2/7 \times 0/1 = 2/7 \times \frac{1}{10} = 2/7 \times 10^{-1}$$

دقت کنید که اگر مثال های بالا را به صورت زیر بنویسیم به عنوان نماد علمی مورد قبول نیست :

$$30000 = 30 \times 1000 = 30 \times 10^{3}$$

$$254000000 = 25/4 \times 10000000 = 25/4 \times 10^{7}$$

$$0/27 = 27 \times 0/01 = 27 \times \frac{1}{100} = 27 \times 10^{-2}$$

هر چند که در این مثال ها ، مساوی بودن دو طرف مشکلی ندارد ولی این ها به عنوان نماد علمی مورد قبول نیست .

دلیل این مورد مربوط به تعریف نماد علمی است که به صورت زیر است :

به‌طورکلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به‌صورت $a \times 10^{n}$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

نتیجه : عددی که در سمت چپ علامت ضرب نوشته می شود ، باید عددی کوچک تر از 10 بوده و از عدد 1 کوچک تر نباشد. یعنی :

مثال اول :

$$۵۲۰۰۰۰۰ = \cancel{۵۲\times ۱۰۰۰۰۰ = ۵۲\times ۱۰^{۵}} = ۵/۲\times ۱۰۰۰۰۰۰ = ۵/۲\times ۱۰^{۶}$$

یا در مثال زیر توجه کنید :

$$۲۱۵۴۲۰۰ = \cancel{۲۱۵۴۲\times ۱۰۰ = ۲۱۵۴۲\times ۱۰^{۲}} = ۲/۱۵۴۲\times ۱۰۰۰۰۰۰ = ۲/۱۵۴۲\times ۱۰^{۶}$$

مثال سوم : $0/000127 = 1/27\times 10^{-4}$

مثال چهارم : $253 = 2/53\times 10^{+2}$

مثال پنجم : $380000 = 3/8\times 10^{+5}$

مثال ششم : $0/000008921 = 8/921\times 10^{-6}$

تکالیف : کار در کلاس صفحه 66 و تمرینات صفحه 67 را در دفتر بنویسید .

سوالات چهار گزینه ای

1 - عدد $0/004718$ برابر با کدام از اعداد زیر است ؟

الف) $0/4718\times 10^{+2}$ ( )　ب) $0/4718\times 10^{-3}$ ( )　ج) $4/718\times 10^{-3}$ ( )　د) $0/04718\times 10^{+2}$ ( )

2 - عدد $5/3\times 10^{-4}$ برابر با کدام از اعداد زیر است ؟

الف) $0/00053$ ( )　ب) $400\times 5/3$ ( )　ج) $0/4\times 5/3$ ( )　د) 530000 ( )

3 - نمایش علمی عدد $79/451\times 10^{5}$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟

الف) $794/51\times 10^{4}$ ( )　ب) $7/9451\times 10^{6}$ ( )　ج) $7/9151\times 10^{6}$ ( )　د) $7/9451\times 10^{7}$ ( )

4 - نمایش علمی عدد $2879/45\times 10^{4}$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟

الف) $2/87945\times 10^{7}$ ( )　ب) $2/87945\times 10^{1}$ ( )　ج) $28/7945\times 10^{6}$ ( )　د) $28/7945\times 10^{2}$ ( )

5 - عدد $0/00471\times 10^{+4}$ برابر با کدام گزینه زیر است ؟

الف) $4/71\times 10^{3}$ ( )　ب) $4/71\times 10^{4}$ ( )　ج) $4/71\times 10^{7}$ ( )　د) $4/71\times 10$ ( )

6 - عدد 5247800000 برابر با کدام از اعداد زیر است ؟

الف) $5/247\times 10^{+5}$ ( )　ب) $5/2478\times 10^{+9}$ ( )　ج) $52/478\times 10^{+9}$ ( )　د) $52/478\times 10^{+5}$ ( )

7 - سمت راست کدام تساوی زیر، نماد علمی عدد سمت چپ تساوی است ؟

الف) $\frac{1}{200} = 0/5\times 10^{-2}$ ( )　ب) $14/2\times 10^{-4} = 142\times 10^{-5}$ ( )

ج) $2/5\times 2\times 10^{6} = 5\times 10^{5}$ ( )　د) $10^{2}\times 0/00621 = 6/21\times 10^{-1}$ ( )

8 - کدام گزینه زیر نماد علمی عدد $\frac{1}{11}$ تا چهار رقم اعشار می باشد ؟

الف) $0/909\times 10^{-3}$ ( )　ب) $9/09\times 10^{-3}$ ( )　ج) $0/909\times 10^{-2}$ ( )　د) $9/09\times 10^{-2}$ ( )

درس سوم: ریشه گیری

به حاصل هر یک از عبارت‌های زیر توجه کنید.

$\left(+\frac{۲}{۳}\right)^۲ = +\frac{۴}{۹}$	$۴^۲ = +۱۶$	$\left(+\frac{۱}{۷}\right)^۲ = \frac{۱}{۴۹}$	$(\sqrt{۵})^۲ = ۵$
$\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۲ = +\frac{۴}{۹}$	$(-۴)^۲ = +۱۶$	$\left(-\frac{۱}{۷}\right)^۲ = +\frac{۱}{۴۹}$	$(-\sqrt{۵})^۲ = +۵$

مربع هر یک اعداد به شکل های مختلف محاسبه شده است . در مثال های بالا :

اعداد 4+ و 4− ریشه های دوم عدد 16 هستند و آن را به صورت $-\sqrt{16}$, $+\sqrt{16}$ نشان می دهیم .

اعداد $-\frac{2}{3}$, $+\frac{2}{3}$ ریشه های دوم عدد $\frac{4}{9}$ هستند و آن را به صورت $-\sqrt{\frac{4}{9}}$, $+\sqrt{\frac{4}{9}}$ نشان می دهیم.

اعداد $-\frac{1}{7}$, $+\frac{1}{7}$ ریشه های دوم عدد $\frac{1}{49}$ هستند و آن را به صورت $-\sqrt{\frac{1}{49}}$, $+\sqrt{\frac{1}{49}}$ نشان می دهیم.

اعداد $-\sqrt{5}$, $+\sqrt{5}$ ریشه های دوم عدد 5 هستند و آن را به صورت $-\sqrt{5}$, $+\sqrt{5}$ نشان می دهیم.

البته می دانیم که ریشه های دوم صفر همان صفر است و داریم : $\sqrt{0} = 0$

به‌طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند.
همان‌طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشهٔ دوم ندارند.

به حاصل هر یک از عبارت‌های زیر توجه کنید.

$\sqrt[۳]{+\frac{۱}{۸}} = +\frac{۱}{۲}$	$\sqrt[۳]{+۲۷} = +۳$	$\sqrt[۳]{+۱۲۵} = +۵$	$\sqrt[۳]{+۸} = +۲$
$\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}} = -\frac{۱}{۲}$	$\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$	$\sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$	$\sqrt[۳]{-۸} = -۲$

مکعب هر عدد یعنی آن عدد را سه بار به خودش ضرب کنیم . مثل : $4 \times 4 \times 4 = 64$

ریشه سوم عدد 64 یعنی عددی پیدا کنیم که اگر سه بار به خودش ضرب شود حاصل 64 شود .

به این عدد 4 ، ریشه سوم عدد 64 گفته می شود و می نویسیم : $\sqrt[3]{+64} = +4$

این موضوع درمورد اعداد دیگر هم می تواند صدق کند . مثلا :

$$-4 \times -4 \times -4 = -64 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{-64} = -4$$

به‌طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشهٔ سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

به حاصل هر یک از عبارت‌های زیر توجه کنید.

$\sqrt[3]{+\frac{8}{1000}}=+\frac{2}{10}$	$\sqrt[3]{+216}=+6$	$\sqrt[3]{+1}=+1$	$\sqrt{4^2}=+4$
$\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}}=-\frac{2}{10}$	$\sqrt[3]{-216}=-6$	$\sqrt[3]{-1}=-1$	$\sqrt{(-4)^2}=+4$

به عددی که پشت رادیکال و در بالای آن نوشته شده دقت کنید که در این مثال ها عدد **3** می باشد .

به این عدد فُرجه رادیکال گفته می شود و نشان دهنده ریشه چندم بودن عدد داخل رادیکال می باشد .

تکالیف : کاردرکلاس صفحه 69 را در کتاب بنویسید :

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

اگر فرجه دو یا چند رادیکال مثل هم باشد به راحتی می توانیم چند رادیکال را به هم ضرب یا تقسیم کنیم . مثل :

$\sqrt{10}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{10\times6\times2}=\sqrt{120}$	$\sqrt{8}\times\sqrt{5}=\sqrt{8\times5}=\sqrt{40}$
$\sqrt[8]{10}\times\sqrt[8]{3}\times\sqrt[8]{5}=\sqrt[8]{10\times3\times5}=\sqrt[8]{150}$	$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{3\times7}=\sqrt[4]{21}$
$\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{70}{10}}=\sqrt{7}$	$\sqrt{24}\div\sqrt{8}=\sqrt{24\div8}=\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\frac{32}{4}}=\sqrt[5]{8}$	$\sqrt[4]{38}\div\sqrt[4]{19}=\sqrt[4]{38\div19}=\sqrt[4]{2}$
$\frac{\sqrt{35}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{35\times3}{5}}=\sqrt{21}$	$\sqrt[3]{28}\div\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{28\div7}=\sqrt[3]{4}$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{40}{20}}=\sqrt{2}$	$(\sqrt[7]{6}\div\sqrt[7]{2})\times\sqrt[7]{5}=\sqrt[7]{3\times5}=\sqrt[7]{15}$

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم :

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

همچنین اگر $b \neq 0$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

تکالیف : **کاردرکلاس و تمرینات صفحات 70 و 71 و 72 را در کتاب بنویسید :**

ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

اگر دقت کنید اعداد رادیکالی به شرط برابر بودن فرجه آن ها ، به راحتی به هم ضرب یا تقسیم می شوند ولی جمع و تفریق به این آسانی نیست :

$\sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$	$\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$
$\sqrt{100} - \sqrt{81} \neq \sqrt{19}$	$\sqrt{11} + \sqrt{5} \neq \sqrt{16}$

برای این که بتوانیم تعدادی از اعداد رادیکالی را جمع یا تفریق کنیم ، باید مثل موارد زیر امکان تغییر در آن ها وجود داشته باشند تا بتوانیم جمع یا تفریق را انجام دهیم :

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

به تغییرات زیر توجه کنید از این روش برای محاسبات زیر استفاده خواهیم کرد :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \qquad \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10} \qquad \sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = 10\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} \qquad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \times 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$$

$$2 \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \times 5} = \sqrt[4]{16 \times 5} = \sqrt[4]{80}$$

با توجه به موارد زیر در مثال های زیر تغییر ایجاد نموده و توانسته ایم جمع یا تفریق انجام دهیم .

اگر امکان تغییر در رادیکال ها وجود نداشت هباشد امکان جمع و تفریق هم به آسانی ممکن نخواهد بود .

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \sqrt{75}$$

$$\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{9\times 5}-\sqrt{4\times 5}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=1\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt{200}+3\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{100\times 2}+3\sqrt{2}-\sqrt{4\times 2}=$$

$$=10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=11\sqrt{2}=\sqrt{121\times 2}=\sqrt{242}$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{32}+5\sqrt{2}-\sqrt{18}=\sqrt{4\times 2}+\sqrt{16\times 2}+5\sqrt{2}-\sqrt{9\times 2}=$$

$$=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=8\sqrt{2}=\sqrt{64\times 2}=\sqrt{128}$$

$$\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{27\times 2}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{125\times 2}=$$

$$=3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=\sqrt[3]{16}$$

گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛

به‌طور مثال برای محاسبهٔ $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم کنیم؛ در حالی‌که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\cancel{۲۰}\times\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}=۱۰\sqrt{۲}$$

به این کار ، **گویا کردن مخرج کسر** می گویند .

اگر دقت کنید مخرج کسر عددی گنگ بود که با یک ضرب ساده به شکلی درآمده که مخرج کسر عددی گویا است .

برای گویا کردن مخرج انواع کسرها روش های متعددی وجود دارد که ما در این جا به دو روش معمول اشاره می کنیم:

روش اول : این روش در مورد کسرهائی است که مخرج آن ها شامل یک جمله رادیکالی بوده و جمع یا تفریق در مخرج نباشد . مثل موارد زیر :

$$-\frac{4}{5\sqrt{2}}\qquad -\frac{9}{2\sqrt{12}}\qquad \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{15}}\qquad \frac{12}{\sqrt{6}}\qquad \frac{10}{\sqrt{30}}\qquad \frac{-2}{\sqrt{5}}\qquad \frac{5}{\sqrt{3}}$$

برای گویا کردن مخرج این کسرها ، صورت و مخرج کسر را در همان عددمخرج ضرب می کنیم :

$$\frac{۵}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\frac{۱۰}{\sqrt{۳۰}}\times\frac{\sqrt{۳۰}}{\sqrt{۳۰}}=\frac{\cancel{۱۰}\sqrt{۳۰}}{\cancel{۳۰}}=\frac{\sqrt{۳۰}}{۳}$$

$$\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=\frac{\cancel{۱۲}\sqrt{۶}}{\cancel{۶}}=۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲۴}$$

$$\frac{۵\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۱۵}}\times\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۳\sqrt{۱۵}}=\frac{\cancel{۱۵}\sqrt{۴۵}}{۹\times\cancel{۱۵}}=\frac{\sqrt{۴۵}}{۹}=\frac{\sqrt{۹\times۵}}{۹}=\frac{\cancel{۳}\sqrt{۵}}{\cancel{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$-\frac{۹}{۲\sqrt{۱۲}}=-\frac{۹}{۲\sqrt{۱۲}}\times\frac{۲\sqrt{۱۲}}{۲\sqrt{۱۲}}=-\frac{۱۸\sqrt{۱۲}}{۴\times۱۲}=-\frac{۱۸\sqrt{۴\times۳}}{۴\times۱۲}=-\frac{\cancel{۳۶}\sqrt{۳}}{۴\times\cancel{۱۲}}=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}=-\frac{\sqrt{۲۷}}{۴}$$

$$-\frac{۴}{۵\sqrt{۲}}=-\frac{۴}{\sqrt{۵۰}}=-\frac{۴}{\sqrt{۵۰}}\times\frac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۵۰}}=-\frac{\cancel{۴}\sqrt{۵۰}}{\cancel{۵۰}}=-\frac{۲\sqrt{۵۰}}{۲۵}=-\frac{۲\times۵\sqrt{۲}}{۲۵}=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}=-\frac{\sqrt{۸}}{۵}$$

دقت کنید که گویا کردن مخرج ، همواره باعث گویا شدن عدد صورت کسر نخواهد شد و فقط مخرج کسر به صورت عدد گویا در می آید .

روش دوم : این روش در مورد کسرهائی است که مخرج آن ها شامل **یک جمله رادیکالی با فرجه 3** بوده و جمع یا تفریق در مخرج نباشد مثل موارد زیر :

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{10}}\qquad\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\qquad\frac{-20}{\sqrt[3]{5}}\qquad\frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

در این کسرها ، چون در مخرج ، فرجه رادیکال 3 می باشد و باید به توان 3 برسدتا عدد زیر رادیکال از آن خارج شود به این دلیل ، صورت و مخرج کسر را **دو بار** در **عدد مخرج** ضرب می کنیم :

$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۸\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\cancel{۸}\times(\sqrt[۳]{۴})^{۲}}{\cancel{۴}}=\frac{۲\times\sqrt[۳]{۱۶}}{۱}$$

$$-\frac{۲۰}{\sqrt[۳]{۵}}=-\frac{۲۰}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۵}}=-\frac{۲۰\times\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۵}}=-\frac{۲۰\times(\sqrt[۳]{۵})^{۲}}{۵}=-\frac{۴\times\sqrt[۳]{۲۵}}{۱}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۹}}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۹}}=\frac{۱\times\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۹}}=\frac{(\sqrt[۳]{۹})^{۲}}{۹}=\frac{\sqrt[۳]{۸۱}}{۹}$$

$$\frac{\sqrt[۳]{۲۰}}{\sqrt[۳]{۱۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۰}}{\sqrt[۳]{۱۰}}\times\frac{\sqrt[۳]{۱۰}}{\sqrt[۳]{۱۰}}\times\frac{\sqrt[۳]{۱۰}}{\sqrt[۳]{۱۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۰}\times\sqrt[۳]{۱۰}\times\sqrt[۳]{۱۰}}{\sqrt[۳]{۱۰}\times\sqrt[۳]{۱۰}\times\sqrt[۳]{۱۰}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۰۰۰}}{۱۰}$$

برای گویا کردن کسرهائی که مخرج آن ها به شکل دیگری می باشند ، مثلا مخرج دوجمله ای باشند در این صورت از روش های دیگری استفاده می کنیم که بعدا در این مورد بیشتر خواهید خواند .

تکالیف : فعالیت صفحه 75 و کاردرکلاس و تمرینات صفحات 76 و 77 را در کتاب بنویسید .

عبارت‌های جبری

فصل ۵

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 5 – عبارات جبری

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اوّل: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

تعریف یک جمله‌ای

هر عبارت را، که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفیِ یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.

عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای هستند.

$$\frac{۲}{۹} \quad , \quad +۸ \quad , \quad -\frac{۲}{۷}\,\mathrm{m}\,x^{۲}y^{۳}b\,c^{۴} \quad , \quad ۴z \quad , \quad -۴bx^{۳}ny^{۲} \quad , \quad -\sqrt{۳}a^{۳}b^{۲}z \quad , \quad \frac{۲}{۳}x^{۲}y \quad , \quad ۵x^{۱۰}$$

عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$۲+x \quad , \quad \sqrt[۳]{a} \quad , \quad ۴x^{۳}+۵x \quad , \quad |x| \quad , \quad \sqrt{x} \quad , \quad ۳^{x} \quad , \quad \frac{۱}{x}$$

در برخی موارد ، پس از ساده شدن عبارت جبری ، مشاهده می کنیم که عبارت یک جمله ای به دست آمد ولی اگر پس از ساده شدن ، شرایط یک جمله ای بودن حاصل نشد ، در این صورت عبارت جبری ، یک جمله ای نیست . به مثال های زیر توجه کنید :

$2x+5x=7x \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

$3(4x+8)-24=12x+24-24=12x \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

$4(3x^2\times 5x)=60x^3 \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

$7x\times(2x^4)^2\times 5x^3=7x\times(4x^8)\times 5x^3=140x^{12} \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

$\dfrac{5x+10}{x+2}=\dfrac{5(x+2)}{x+2}=5 \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

$\dfrac{18x^5}{6x}=3x^4 \quad \rightarrow$ یک جمله ای است

هرگاه قسمت‌های حرفی دو یا چند تک جمله‌ای یکسان باشند، به آنها تک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛
به عنوان مثال تک جمله‌ای‌های $4x^2y$ و $\frac{7}{2}x^2y$ و $-3x^2y$ متشابه‌اند، اما یک جمله‌ای‌های $3x$ و $3x^2$ متشابه نیستند.
یک جمله‌ای‌های $3x^2y^3$ و $-5x^3y^2$ را که متشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می گوییم.

حل مثال های صفحه 79 کتاب درسی را کامل کنید :

$$1)\ 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$2)\ (\frac{2}{3}x^2y)^3 = (\frac{2}{3})^3.(x^2)^3.y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$3)\ (-3x^3)^2(\frac{1}{3}x^2)^3 =$$

$$4)\ (\frac{1}{2}a^2b)(ab)(\frac{-2}{7}a^2c^5) =$$

$$5)\ 2(5xy^4)^2(-2x^5y^2) =$$

$$6)\ (2x^2y)(3x^2y^3) + xy^3(-5x^3y) =$$

تعریف چند جمله ای

چنانچه تعدادی یک جمله ای را با یکدیگر جمع یا تفریق (**جمع جبری**) کنیم ، چندجمله ای تشکیل می شود .

توجه داشته باشید که چند جمله ای می تواند شامل یک جمله بوده و یا شامل چندتا یک جمله ای غیرمتشابه باشد . مثل :

$$9x+3x^4-2 \quad , \quad n^2-4x^7 \quad , \quad 7x \quad , \quad 6x^2-5 \quad , \quad m^3-6x+4n-2$$

درجه چند جمله ای ها

برای این که شناخت بهتری نسبت به یک جمله ای ها و چندجمله ای ها داشته باشیم ، ابتدا آن ها را از نظر درجه تقسیم بندی می کنیم .

برای آشنائی با درجه چند جمله ای ها به روش های زیر عمل می کنیم .

توجه داشته باشید قبل از بررسی درجه چندجمله ای ، اگر قابل ساده شدن است آن را ساده کنید به طوری که جمله های مشابه نداشته باشد .

روش اول در بین روش های گفته شده ، مهم تر بوده و بیشتر مورد استفاده خواهد بود :

روش اول : اگر چند جمله ای دارای یک نوع متغیر باشد ، بزرگ ترین توان متغیر ، درجه آن چند جمله ای می باشد . مثل :

$x+8 \quad \rightarrow$ درجه 1

$2x^3+5x+7 \quad \rightarrow$ **درجه 3**

$x^3+x^7+x^5-x^2 \quad \rightarrow$ **درجه 7**

$x^4-8x^2-x^4+x=-8x^2+x \quad \rightarrow$ **درجه 2**

روش دوم : اگر چند جمله ای دارای چند نوع متغیر باشد ، در این صورت بزرگ ترین توان هر متغیر ، درجه آن چند جمله ای نسبت به آن متغیر می باشد . مثل :

$2x^3+5y+7 \rightarrow$	درجه نسبت به x = 3	درجه نسبت به y = 1
$a^4x^2+x^5a-a^8x^6 \rightarrow$	درجه نسبت به x = 6	درجه نسبت به a = 8
$n^4-b^2-x^5+x-x^3+n+1 \rightarrow$	درجه نسبت به n = 4 ، درجه نسبت به b = 2	درجه نسبت به x = 5

در این روش اگر درجه نسبت به چند متغیر خواسته شده باشد درجه ها را با هم جمع می کنیم :

$2x^3+5y+7 \rightarrow$ درجه نسبت به x = 3 ، درجه نسبت به y = 1

درجه نسبت به x و y = $3+1=4$

$a^4x^2+x^5a-a^8x^6 \rightarrow$ درجه نسبت به x = 6 ، درجه نسبت به a = 8

درجه نسبت به x و a = $6+8=14$

$n^4-b^2-x^5+x-x^3+n+1 \rightarrow$ درجه نسبت به n = 4 ، درجه نسبت به b = 2 ، درجه نسبت به x = 5

درجه نسبت به n و b و x = $4+2+5=11$

با توجه به روش دوم تعیین درجه ، جدول زیر را کامل کنید :

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به a	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به a و x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a , x , y	۲	۳	۴	۲+۴=۶	۲+۳+۴=۹
$5x^2y^2a$						
$-12x^3y$			۰			
x^2y^3						
$\frac{3}{5}$						

روش سوم : برای تعیین درجه چند جمله ای نسبت به چند نوع متغیر باید توان های هر یک از متغیر ها را در تک جمله ها با هم جمع کنیم بزرگ ترین عدد به دست آمده ، از هر جمله بود ، درجه آن چند جمله ای نسبت به متغیرها می باشد . مثل :

$$\underbrace{-2xy^3}_{1+3=4} + \underbrace{x^2y}_{2+1=3}$$

در این مثال درجهٔ نسبت به y و x برابر با ۴ است .

نکته پایانی :

معمولا در چند جمله ای ها ، جملات را نسبت به توان های یک متغیر و به صورت نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب می کنیم.مثل :

$$4x^2 - 8x + 2x^5 + 9x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^5 + 9x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

چند جمله‌ای‌های زیر را نسبت به متغیر x مرتب کنید :

الف) $۳x^۲ + ۸ - ۲x + ۹x^۳ - x^۴ \quad =$

ب) $۸bx^۲y + ۵xya - ۴xy^۳a - x^۴y \quad =$

ج) $x^۲y^۳ + ۲yx^۷ + ۵x^۴y^۳ - x\ y \quad =$

تکالیف : کاردرکلاس صفحات 80 و 81 را در کتاب بنویسید .

مفهوم اتحاد

ما در سال های قبل با معادله و حل برخی از آن ها آشنا شده ایم . معادله و اتحادهای جبری از یک نظر به هم شبیه هستند و آن این که در هر دو آن ها ، دو تا عبارت جبری با هم برابر هستند .

ولی یک تفاوت خیلی مهم دارند که باعث می شود تا ما هر کدام را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم .

به مثال های زیر توجه کنید :

$$2x + 10y = 2(x + 2y) + 6y$$

اگردقت کنید در مثال بالا ، دو عبارت جبری با هم برابر شده اند . ما هر عددی را به جای x , y قرار دهیم خواهیم دید که دو طرف با هم برابرند :

$$x = 3, \quad y = 1 \quad \Rightarrow 2x + 10y = 2(x + 2y) + 6y \quad \Rightarrow \quad 6 + 10 = 2 \times 5 + 6 \Rightarrow \quad 16 = 16$$

یا در مثال زیر :

$$(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$$

اگر در مثال بالا هر عدد به جای x قرار دهیم دو طرف برابر خواهد شد . مثل :

$$x = 5 \quad \Rightarrow \quad (5 + 8)^2 = 5^2 + 16 \times 5 + 64 \quad \Rightarrow 13^2 = 25 + 80 + 64 \quad \Rightarrow 169 = 169$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad (3 + 8)^2 = 3^2 + 16 \times 3 + 64 \quad \Rightarrow 11^2 = 9 + 48 + 64 \quad \Rightarrow 121 = 121$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad (-1 + 8)^2 = (-1)^2 + 16 \times (-1) + 64 \Rightarrow \quad 7^2 = +1 + (-16) + 64 \quad \Rightarrow 49 = 49$$

$$x = 2/3 \quad \Rightarrow \quad (2/3 + 8)^2 = 2/3^2 + 16 \times 2/3 + 64 \Rightarrow \quad 10/3^2 = 5/29 + 36/8 + 64 \quad \Rightarrow 106/09 = 106/09$$

این موضوع در مورد مثال زیر درست نیست :

$$5x+10=2x+22$$

اگر در این مثال به جای x عدد دلخواه قرار دهیم احتمال دارد دو طرف برابر نباشند و این موضوع باعث می شود که به تفاوت این نوع مثال با مثال های قبلی بیشتر دقت کنیم .

$$x=10 \Rightarrow 5x+10=2x+22 \Rightarrow 5\times10+10\neq2\times10+22 \qquad 60\neq42$$

$$x=-1 \Rightarrow 5x+10=2x+22 \Rightarrow 5\times(-1)+10\neq2\times(-1)+22 \qquad 5\neq20$$

$$x=11 \Rightarrow 5x+10=2x+22 \Rightarrow 5\times11+10\neq2\times11+22 \qquad 65\neq44$$

اما عددی وجود دارد که اگر به جای x قرار دهیم دو طرف برابر خواهند شد :

$$x=4 \Rightarrow 5x+10=2x+22 \Rightarrow 5\times4+10\neq2\times4+22 \qquad 30\neq30$$

این مورد با موارد قبلی تفاوتی که دارد این است که به ازای فقط برخی موارد دو طرف برابرند ولی در مثال های قبلی دیدیم که هر عدد دلخواه که به جای متغیر قرار می دادیم دوطرف مساوی می شدند . تفاوت معادله و اتحاد جبری در همین نکته ظریف قابل توجه می باشد .

به تعریف **اتحاد و معادله** و تفاوت آن ها توجه کنید :

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، یعنی به ازای هر مقدار، دو طرف برابر باشند، اتحاد جبری به وجود می‌آید.

اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای برخی مقادیر برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، یعنی به ازای برخی مقادیر ، دو طرف برابر باشند، معادله به وجود می‌آید.

مثال هائی برای معادله	مثال هائی برای اتحاد جبری
$x+۸y=۳x-۲۰$	$۱۰x+۸=۴x+۳+۶x+۵$
$۱۳+x+۱۰=۷x+۲+۵x$	$(x+۳)^۲=x^۲+۶x+۹$
$y=۴x-۸$	$\frac{x^۲-۴۹}{x+۷}=x-۷$
$x^۲+۳x+۸=۵x$	$x(۵x-۱)=۵x^۲-x$

نکته 1 : تعداد اتحادهای جبری مثل تعداد معادلات جبری ، قابل شمارش نیست . یعنی نمیشه گفت که تعداد خاصی اتحاد داریم .
ما برای این که از مزیت اتحادهای جبری استفاده کنیم تعدادی از آن ها را حفظ کرده و در حل سوالات مختلف از آن ها بهره می گیریم و بابقیه آن ها کاری نداریم .

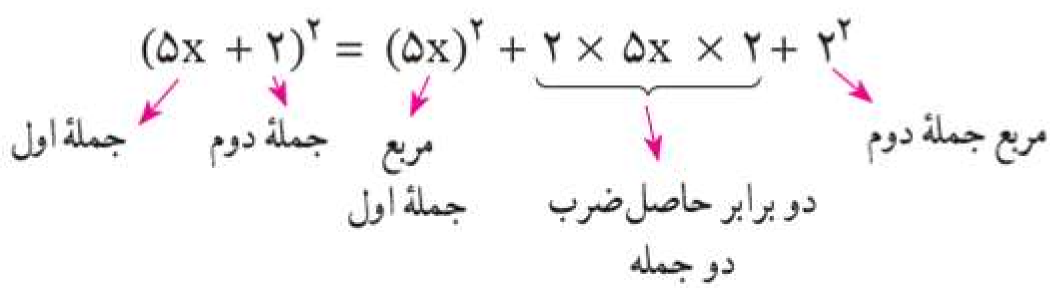
نکته 2 : بیشتر از این که حفظ کردن اتحاد ها مهم باشند ، تشیخص آن ها در یک عبارت جبری مهم است که با تمرین بیشتر و حل برخی از سوالات باید به این مهارت دست پیدا کرد .
در این جا برای سهولت کار تعدادی از اتحاد های مهم را با ذکر شماره برای هر کدام یاد می گیریم و در آینده هم تعداد بیشتری از آن ها را خواهیم آموخت :

اتحاد اول (اتحاد مربع مجموع دوجمله):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

این اتحاد جزء اتحاد های مهم و پرکاربرد جبر می باشد . در این اتحاد مشاهده می کنیم که برای به دست آوردن طرف دوم به شکل زیر عمل کرده ایم :

جمله اول به توان 2 بعلاوه دو برابر جمله اول در جمله دوم ، بعلاوه جمله دوم به توان 2



$$(۵x+۲)^۲ = (۵x)^۲ + ۲ \times ۵x \times ۲ + ۲^۲ = ۲۵x^۲ + ۲۰x + ۴$$

برای تمرین در مورد چند مثال زیر، این کار انجام شده است :

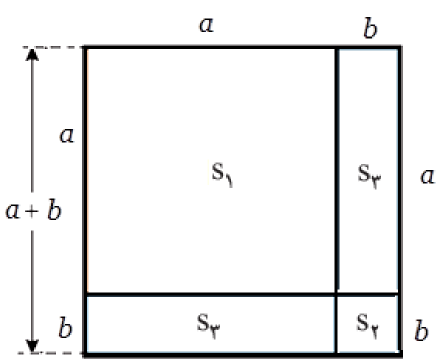
$$(x+4)^2 = x^2 + (2\times x\times 4) + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(m+7)^2 = m^2 + (2\times m\times 7) + 7^2 = m^2 + 14m + 49$$

$$(5+x)^2 = 5^2 + (2\times 5\times x) + x^2 = 25 + 10x + x^2$$

$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

رابطه اتحاد اول را در شکل زیر و پیدا کردن مساحت مربع اصلی ، می توان پیدا کرد:



مساحت مربع بزرگ $S_۱ = a^۲$

مساحت مربع کوچک $S_۲ = b^۲$

مساحت مستطیل ها $S_۳ = a \times b$

مساحت کل شکل $= (a+b)^۲ = S_۱ + ۲S_۳ + S_۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

اتحاد دوم (اتحاد مربع تفاضل دوجمله):

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

این اتحاد هم جزء اتحاد های مهم و پرکاربردجبر می باشد . در این اتحاد مشاهده می کنیم که برای به دست آوردن طرف دوم به شکل زیر عمل کرده ایم :

جمله اول به توان 2 منهای دو برابر جمله اول در جمله دوم ، بعلاوه جمله دوم به توان 2

برای تمرین، در مورد چند مثال زیر، این کار انجام شده است :

$$(x-۴)^۲ = x^۲ - \underbrace{(۲\times x\times ۴)}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + ۴^۲ = x^۲ - ۸x + ۱۶$$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — مربع جملهٔ دوم

$$(m-7)^2 = m^2 - (2\times m\times 7) + 7^2 = m^2 - 14m + 49$$

$$(10-x)^2 = 10^2 - (2\times 10\times x) + x^2 = 100 - 20x + x^2$$

$$(8x-y)^2 = (8x)^2 - (2\times 8x\times y) + y^2 = 64x^2 - 16xy + y^2$$

تکالیف : مثال های زیر را در دفتر و کاردرکلاس صفحه 83 را در کتاب بنویسید .

طرف دوم هر یک از اتحاد های جبری زیر را بنویسید:

$(x-۱۲)^۲ =$	$(x+۴)^۲ =$
$(۴-m)^۲ =$	$(a+۵)^۲ =$
$(۳x-۵)^۲ =$	$(۲x+۶)^۲ =$
$(۲n+۴a)^۲ =$	$(x-۳y)^۲ =$
$(۵+۳y)^۲ =$	$(x-۹)^۲ =$
$(۴-۲n)^۲ =$	$(a+۸b)^۲ =$
$(۱۰x+۷y)^۲ =$	$(x-۱۲)^۲ =$

در ادامه درس به چند اتحاد دیگر هم اشاره خواهیم کرد ، ولی قبل از اشاره به آن ها ؛ با مفهوم تجزیه آشنا می شویم تا از کاربردهای آن استفاده کنیم .

تجزیه عبارات جبری

تعریف :

اگر یک عبارت جبری را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری بنویسیم، آن عبارت را تجزیه کرده ایم.

مثل موارد زیر :

$$xy + xb = (\quad)\times(\quad + \quad) \Rightarrow xy + xb = (x)(y+b)$$

$$m^2 - 14m + 49 = (m-7)\times(m-7)$$

به صورت ها و روش های مختلف امکان این وجود داردکه عبارت جبری به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشته شود.به مثال زیر توجه کنید:

$$4x^2 + 8xy + 20x = (2)(2x^2 + 4xy + 10x)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (2x)(2x + 4y + 10)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (x)(4x + 8y + 20)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (4)(x)(x + 2xy + 5)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (-1)(-4x^2 - 8xy - 20x)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (-2)(-2x^2 - 4xy - 10x)$$

$$4x^2 + 8xy + 20x = (-2x)(-2x - 4y - 10)$$

در همه این موارد مشاهده می شود که عبارت سه جمله ای داده شده به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت نوشته و تجزیه شده است .

روش های متعددی برای تجزیه عبارات جبری وجود دارد که ما دو روش مهم را می خوانیم :

روش اول : فاکتور گیری

فاکتور به معنی عامل مشترک می باشد و ما در عبارت چندجمله ای، این عامل مشترک جملات را پیدا کرده و در پرانتز اول نوشته و تمام جملات چند جمله ای داده شده را بر آن عامل مشترک تقسیم کرده و در پرانتز دوم می نویسیم. مثل :

تجزیه

$$ab + ac = (a)(b+c)$$

عامل مشترک

مثال دوم :

$$8x^2 + 12x = 4x \times 2x + 4x \times 3 = (4x)(2x+3)$$

عامل مشترک $= 4x$

مثال سوم:

$$8ax^2 + 24axy + 18ay^2 = (2a)(4x^2 + 12xy + 9y^2)$$

عامل مشترک $= 2a$

به تجزیه مثال های زیر با فاکتورگیری توجه کنید :

$$2x^3 + 10x^2 + 8x = (2x)(x^2 + 5x + 4)$$

$$3a^3b - 15a^2b^2 = (3a^2b)(a - 5b)$$

$$x^3y^2 + x^8y - x^5y^4z = (x^3y)(y + x^5 - x^2y^3z)$$

$$10x^3 + 8x^5 - 6x^4 + 3x^2 = (x^2)(10x + 8x^3 - 6x^2 + 3)$$

$$2x^3 + 7y^2 - 9b = (-1)(-2x^3 - 7y^2 + 9b)$$

$$a(x+2) + b(x+2) = (x+2)(a+b)$$

$$a(x+2) + b(x+2)^3 = (x+2)\left(a + b(x+2)^2\right)$$

روش دوم : استفاده از اتحاد های جبری

به اتحاد اول زیر توجه کنید:

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 10x + 25 = (x+5)(x+5)$$

یعنی عبارت سه جمله ای $x^2 + 10x + 25$ به کمک اتحاد اول به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری نوشته شده است . در مثال های دیگری هم شاید تشخیص دهیم که عبارت داده شده با یکی از اتحادها امکان تجزیه دارد .البته با یادگیری اتحادهای دیگر این امکان برای ما بیشتر فراهم خواهد شد .

به مثال های زیر هم توجه کنید که با اتحاد اول و دوم تجزیه شده اند :

$$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2)$$

$$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 12x + 36 = (x+6)(x+6)$$

در این چهار مثال نشان داده شد که عبارات جبری با کمک اتحاد اول یا اتحاد دوم تجزیه شدند .

برای این که بهتر بتوانیم از اتحاد ها استفاده کنیم بهتر است با برخی از آن ها آشنا شویم و بعد با کمک آن ها برخی از مثال های ریاضی را حل کنیم

برای نمونه به نه تا از اتحاد های زیر توجه کنید که ما از بین آنها دو تا اتحاد دیگر را هم امسال می خوانیم و بقیه برای سال های بعدی خواهد بود :

اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به ازای همه مقادیر با هم برابر باشند اتحاد جبری تشکیل می شود.

اتحاد اول (اتحاد مربع مجموع دو جمله):	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
اتحاد دوم (اتحاد مربع تفاضل دو جمله):	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
اتحاد سوم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
اتحادچهارم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
اتحاد ششم (اتحاد مزدوج):	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
اتحاد هفتم (اتحاد مجموع مکعبات دو جمله (اتحاد چاق و لاغر)):	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
اتحاد هشتم (اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله (اتحاد چاق و لاغر)):	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
اتحاد نهم (اتحاد جمله مشترک):	$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

ما در ادامه درس با اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک (اتحاد ششم و نهم) آشنا می شویم.

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد ششم (اتحاد مزدوج):

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

این اتحاد هم جزء اتحاد های مهم و پرکاربردجبر می باشد . در این اتحاد مشاهده می کنیم که برای به دست آوردن طرف دوم به شکل زیر عمل کرده ایم :

جمله اول به توان 2 منهای جمله دوم به توان 2

برای تمرین، در مورد چند مثال زیر، این کار انجام شده است :

$$(x+4)(x-4) = x^2-4^2 = x^2-16$$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — مربع جملهٔ دوم

$$(a-5)(a+5)=a^2-5^2=a^2-25$$

$$(m+7)(m-7)=m^2-7^2=m^2-49$$

$$(6+x)(6-x)=6^2-x^2=36-x^2$$

$$(5a-1)(5a+1)=(5a)^2-1^2=25a^2-1$$

$$(8x-2y)(8x+2y)=(8x)^2-(2y)^2=64x^2-4y^2$$

$$(x^2-3)(x^2+3)=(x^2)^2-3^2=x^4-9$$

نکته : اگر تساوی های بالا که با اتحاد مزدوج نوشته شده اند برعکس نوشته شوند ، در این صورت می گوییم که با اتحاد مزدوج **تجزیه** کرده ایم یعنی:

$$a^2-25=(a-5)(a+5)$$

$$m^2-49=(m+7)(m-7)$$

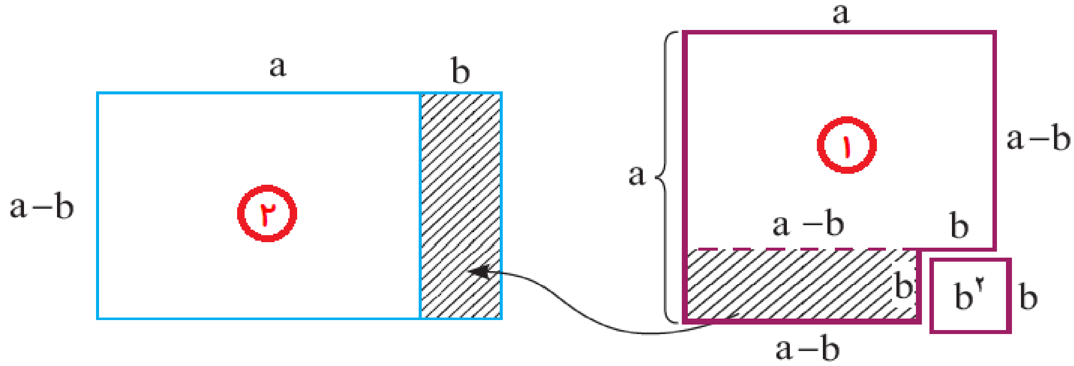
$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

$$36-x^2=(6+x)(6-x)$$

$$25a^2-1=(5a-1)(5a+1)$$

$$64x^2-4y^2=(8x-2y)(8x+2y)$$

برای تشریح این اتحاد به تصویر زیر هم می توان توجه کرد :



$S_۲ = (a - b)(a + b)$ $S_۱ = a^۲ - b^۲$

توضیح : در تصویر شماره **1** مشاهده می شود که از مربع بزرگ به ضلع a به اندازه مربع کوچک به ضلع b جدا کرده و می خواهیم مساحت قسمت باقی مانده که شامل ناحیه سفید رنگ و هاشور خورده هستند را محاسبه کنیم . مساحت باقی مانده از آن را S_1 نامیده و S_1 را به دست آورده ایم .

$$S_1=a^2-b^2$$

در شکل سمت چپ ، ناحیه هاشور خورده را به کناره راست قسمت سفید چسبانده ایم و در حقیقت مساحت تغییری نکرده و ظاهر آن تغییر کرده و مستطیلی تشکیل شده است . این بار مساحت را با استفاده از مستطیل به دست می آوریم که در زیر شکل **2** مشاهده می کنید :

$$S_2=(a-b)(a+b)$$

پس می توان نتیجه می گرفت که حاصل S_1 با حاصل S_2 برابرند. یعنی :

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

مثال : طرف دوم هر یک از اتحاد های جبری زیر را بنویسید:
$(b-8)(b+8)=$
$(4n+1)(4n-1)=$
$(5x-9y)(5x+9y)=$
$(3+x)(3-x)=$
$(3+x)(x-3)=$
$(x+2)(x-2)(x^2+4)=(\qquad\qquad)(x^2+4)=$

از اتحاد مزدوج در تجزیهٔ عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود. جاهای خالی را پر کنید.

۱) $x^۲-۹=(x+۳)(\quad-\quad)$

۲) $۴y^۲-\frac{۱}{۴}z^۴=(\quad+\quad)(\quad-\quad)$

۳) $(۲x+۱)^۲-y^۲=[(۲x+۱)-\_\_\_\_][(\qquad)+y]$

۴) $۱-(۳a+z)^۲=\left[۱-(\qquad)\right]\left[۱+(\qquad)\right]=(\qquad)(۱+۳a+z)$

۵) $(۲x+۱)^۲-(۳x+۴)^۲=\left[(\qquad)-(\qquad)\right]\left[(\qquad)+(\qquad)\right]=(-x-۳)(\quad+\quad)$

۶) $x^۴-y^۴=(x^۲+y^۲)(\quad-\quad)=(x^۲+y^۲)\left[(x+y)(\quad-\quad)\right]$

اتحاد نهم (اتحاد جمله مشترک):

شاید بتوان گفت این اتحاد مهم ترین اتحادی است که ما در پایه نهم با آن آشنا می شویم . از نظر کاربرد هم از اتحادهای مهم می باشد .

برای آشنائی با این اتحاد به مثال های زیر توجه کنید :

$(a+5)(a+7)=a^2+(5+7)\times a+(5\times 7)=a^2+12a+35$
$(x+3)(x+10)=x^2+(3+10)\times x+(3\times 10)=x^2+13x+30$

$$(x-8)(x+1)=x^2+(-8+1)\times x+(-8\times 1)=x^2-7x-8$$

$$(n+4)(n-2)=n^2+(4-2)\times n+(4\times -2)=n^2+2n-8$$

$$(n-4)(n+2)=n^2+(-4+2)\times n+(-4\times 2)=n^2-2n-8$$

در این مثال ها مشاهده می شود درهر دو پرانتز ، دوجمله وجود دارد که پرانتزها در یک جمله با هم مشترک هستند و جمله دیگر هر پرانتز با جمله دیگر پرانتز دوم متفاوت است . برای نوشتن طرف دوم این اتحاد سه تا کار ساده زیر رو انجام می دهیم :

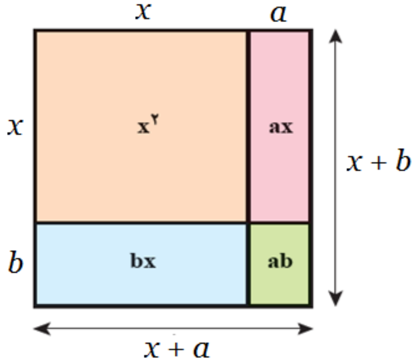
جمله مشترک به توان 2 ، مجموع غیرمشترک ها رو در مشترک ضرب می کنیم ، غیرمشترک ها رو به هم ضرب می کنیم

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

به مثال های زیر توجه کنید :

$(x+۳)(x+۷)=x^۲+۱۰x+۲۱$	$(x+۵)(x+۸)=x^۲+۱۳x+۴۰$
$(x-۳)(x-۷)=x^۲-۱۰x+۲۱$	$(x+۳)(x-۷)=x^۲-۴x-۲۱$
$(x-۳)(x+۷)=x^۲+۴x-۲۱$	$(x+۱)(x+۲)=x^۲+۳x+۲$
$(x+۴)(x+۵)=x^۲+۹x+۲۰$	$(x-۹)(x-۳)=x^۲-۱۲x+۲۷$
$(۳x+۲)(۳x+۴)=(۳x)^۲+(۲+۴)\times(۳x)+(۲\times۴)=۹x^۲+۱۸x+۸$	
$(۵x-۷)(۵x+۸)=(۵x)^۲+(-۷+۸)\times(۵x)+(-۷\times۸)=۲۵x^۲+۵x-۵۶$	
$(-۲x+۹)(-۲x+۳)=(-۲x)^۲+(۹+۳)\times(-۲x)+(۹\times۳)=+۴x^۲-۲۴x+۲۷$	

مثل اتحاد های قبلی ، می توان این اتحاد را هم در روی شکل زیر توضیح داد :



$$S_{\text{مستطیل بزرگ}}=S_{\text{مربع قهوه ای}}+S_{\text{مستطیل سبز}}+S_{\text{مستطیل آبی}}+S_{\text{مستطیل صورتی}}$$

$$S_{\text{مستطیل بزرگ}}=(x+a)(x+b)=x^۲+bx+ax+ab$$

$$\Rightarrow (x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

تجزیه عبارت های جبری با کمک اتحاد جمله مشترک

به مثال های زیر توجه کنید :

$$x^2+8x+12=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 8+ بوده و حاصل ضرب آن ها 12+ باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 2+ و 6+ با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2+8x+12=(x+2)(x+6)$$

$$x^2+6x+5=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 6+ بوده و حاصل ضرب آن ها 5+ باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 1+ و 5+ با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$$

$$x^2-7x+10=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 7 - بوده و حاصل ضرب آن ها 10 + باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 2 - و 5 - با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

$$x^2+5x+6=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 5+ بوده و حاصل ضرب آن ها 6+ باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 2+ و 3+ با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2-5x+6=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 5 - بوده و حاصل ضرب آن ها 6+ باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 2 - و 3 - با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2+x-20=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 1+ بوده و حاصل ضرب آن ها 20 - باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 4 - و 5+ با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2+x-20=(x+5)(x-4)$$

$$x^2-x-20=(x+....)(x+.....)$$

در این مثال باید دو تا عدد پیدا کنیم که مجموع آن ها 1 - بوده و حاصل ضرب آن ها 20 - باشد ، این دو عدد رو که با شرایط جور درآید پیدا کرده و در جای خالی می نویسیم . در این مثال دو عدد 4+ و 5 - با شرایط سوال جور خواهد بود. پس :

$$x^2-x-20=(x-5)(x+4)$$

به همین شکل عمل کنید و جاهای خالی را در مثال های زیر کامل کنید :

$x^2+(a+b)x+ab=(x+\quad)(x+\quad)$

الف) $x^2+7x+10=(x+\quad)(\quad+\quad)$

ب) $x^2+7x+12=(x+\quad)(\quad+\quad)$

ج) $y^2+y-6=(\quad+\quad)(\quad-\quad)$

د) $y^2-y-6=(\quad+\quad)(\quad-\quad)$

هـ) $y^2+5y+6=(\quad+\quad)(\quad+\quad)$

هر یک از عبارات جبری زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک، تجزیه کنید: (یعنی به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری بنویسید)

$x^2+10x+16=(\quad)(\quad)$

$x^2+10x+9=(\quad)(\quad)$

$x^2-10x+16=(\quad)(\quad)$

$x^2+10x-24=(\quad)(\quad)$

$x^2+10x+9=(\quad)(\quad)$

$x^2+x-6=(\quad)(\quad)$

$x^2+x-20=(\quad)(\quad)$

$x^2-x-20=(\quad)(\quad)$

$x^2+x-6=(\quad)(\quad)$

$x^2-x-6=(\quad)(\quad)$

$a^2+5a+4=(\quad)(\quad)$

$a^4+5a^2+4=(\quad)(\quad)$

تکالیف : دو سوال کاردر کلاس صفحات 87 و 88 و تمرینات صفحه 89 را به همراه حل آن ها در دفتر بنویسید .

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

به تصویر زیر با دقت نگاه کنید

کاملا مشخص است که وزنه 1 کیلوگرمی از وزنه 3 کیلوگرمی سبک تر است . اگر بخواهیم با گذاشتن این دو وزنه در ترازو ، حالت تعادل ایجاد شود به یک وزنه 2 کیلوگرمی نیاز خواهیم داشت . یعنی اگر یک وزنه دو کیلوگرمی به وزنه یک کیلوگرمی اضافه شود و در کفه دیگر وزنه 3 کیلو گرمی قرار داده شود این دوکفه برابر و معادل خواهند بود .

در عبارات جبری هم این گونه است . یعنی اگر $x < y$ باشد در این صورت مقدار مثبتی مثل $a > 0$ وجود دارد که اگر با x جمع شود حاصل آن با y برابر خواهد بود که به صورت زیر نوشته می شود :

اگر $x < y \Longrightarrow$ در این صورت $a > 0$ وجود دارد $\longrightarrow$ به طوری که $x + a = y$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد؛ به‌طوری‌که a>b، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست؛ به‌طوری که a=b+p

به مثال زیر توجه کنید :

اگر $۳ < ۷ \Longrightarrow$ در این صورت $۴ > ۰$ وجود دارد $\longrightarrow$ به طوری که $۳ + ۴ = ۷$

برای هر کدام از عبارات زیر ، یک نابرابری می‌نویسیم.

الف) $x = y + ۴ \Longrightarrow x > y$

ب) $m + ۱ = n + ۳ \Longrightarrow m = n + ۲ \Longrightarrow m > n$

ج) $a - ۲ = b + ۳ \Longrightarrow a = b + ۵ \Longrightarrow a > b$

نکته : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های زیر را خواهیم داشت.

«a بزرگ‌تر از b»	یا	«a کوچک‌تر از b»	یا	«a برابر با b»
$a > b$		$a < b$		$a = b$

سوال ۱ : درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a+b>0$ باشد، آنگاه، a و b هر دو مثبت‌اند.

ب) اگر $a \cdot b>0$ باشد. آنگاه، a و b هم علامت هستند.

ج) اگر $\frac{ab}{c}<0$ باشد، آنگاه، a و b و c منفی هستند.

د) اگر $a^2b<0$ باشد، آنگاه، b منفی است.

سوال ۲ : درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر a و b >0 باشند؛ آنگاه $a \cdot b>0$ است.

ب) اگر $a \cdot b>0$ باشد، آنگاه a و b >0 است.

ج) اگر a و b <0 باشند؛ آنگاه $a \cdot b>0$ است.

د) اگر $a>0$ و $b<0$ باشند؛ آنگاه $a \cdot b<0$ است.

م) اگر $a<0$ و $b>0$ باشند؛ آنگاه $a \cdot b<0$ است.

ن) اگر $a<0$ و $b>0$ باشند؛ آنگاه $\frac{a}{b}>0$ است.

سوال ۳ : درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر a و b و c >0 باشند؛ آنگاه $\frac{a \times c}{b}>0$ است.

ب) اگر $c>0$ و a و b <0 باشند؛ آنگاه $a \cdot b \cdot c>0$ است.

ج) اگر $c>0$ و a و b <0 باشند؛ آنگاه $\frac{a \times c}{b}>0$ است.

د) اگر $c<0$ و a و b >0 باشند؛ آنگاه $a \cdot b \cdot c>0$ است.

م) اگر a و b و c <0 باشند؛ آنگاه $a^2 \cdot b \cdot c>0$ است.

ن) اگر a و b و c <0 باشند؛ آنگاه $a^2 \cdot b^2 \cdot c>0$ است.

چند خاصیت مهم نامساوی ها

خاصیت 1 :

اگر به طرفین یک نامساوی ، یک مقدار مشخصی را اضافه کنیم یا از هر دو طرف ، مقدار مشخصی کم کنیم ، نامساوی تغییری نمی کند .یعنی :

$$x < y \Rightarrow x + a < y + a$$

$$x < y \Rightarrow x - a < y - a$$

مثال :

$$5 < 9 \Rightarrow 5 + 3 < 9 + 3 \Rightarrow 8 < 12$$

$$5 < 9 \Rightarrow 5 - 2 < 9 - 2 \Rightarrow 3 < 7$$

$$-7 < +4 \Rightarrow -7 + 20 < 4 + 20 \Rightarrow 13 < 24$$

$$-7 < +4 \Rightarrow -7 - 10 < 4 - 10 \Rightarrow -17 < -6$$

خاصیت 2 :

اگر طرفین یک نامساوی را در یک مقدار مثبت ضرب کنیم یا هر دو طرف را بر مقدار مثبتی تقسیم کنیم ، نامساوی تغییری نمی کند .یعنی :

$$x < y \text{ و } a > 0 \Longrightarrow x \times a < y \times a$$

$$x < y \text{ و } a > 0 \Longrightarrow x \div a < y \div a$$

مثال :

$$5 < 9 \Rightarrow 5 \times 4 < 9 \times 4 \Rightarrow 20 < 36$$

$$-5 < -2 \Rightarrow -5 \times 8 < -2 \times 8 \Rightarrow -40 < -16$$

$$18 < 24 \Rightarrow 18 \div 6 < 24 \div 6 \Rightarrow 3 < 4$$

$$-7 < -3 \Rightarrow -7 \div 2 < -3 \div 2 \Rightarrow -3/5 < -1/5$$

خاصیت 3 :

اگر طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب کنیم یا هر دو طرف را بر مقدار منفی تقسیم کنیم ، سمت علامت نامساوی تغییر می کند . یعنی :

$$x < y \quad \text{و} \quad a < 0 \Longrightarrow x \times a > y \times a$$

$$x < y \quad \text{و} \quad a < 0 \Longrightarrow x \div a > y \div a$$

مثال :

$5 < 9 \Rightarrow 5 \times -3 < 9 \times -3 \Rightarrow -15 > -27$
$-5 < -2 \Rightarrow -5 \times -2 < -2 \times -2 \Rightarrow +10 > +4$
$-4 < +3 \Rightarrow -4 \times -10 < +3 \times -10 \Rightarrow +40 > -30$
$30 < 50 \Rightarrow 30 \div (-10) < 50 \div (-10) \Rightarrow -3 > -5$
$-8 < +5 \Rightarrow -8 \div (-5) < +5 \div (-5) \Rightarrow +1/6 > -1$
$-9 < -4 \Rightarrow -9 \div (-1) < -4 \div (-1) \Rightarrow +9 > +4$

خاصیت 4 :

اگر طرفین یک نامساوی هم علامت باشند و هر دو طرف را معکوس کنیم ، سمت علامت نامساوی تغییر می کند. یعنی :

$$x \times y > 0 \quad \text{و} \quad x < y \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

مثال :

$4 < 10 \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$
$2 < 15 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{15}$
$\frac{1}{10} < \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{10}{1} > \frac{5}{3}$
$-\frac{2}{3} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} > -\frac{4}{1}$

نامعادلات و حل آن ها

با توجه به خاصیت ها و نکات گفته شده ، به حل نامعادلات یک مجهولی می پردازیم و توجه داشته باشید که نامعادلات گفته شده از درجه یک هستند و در سال های بعد با حل نامعادلات درجات دیگر و دارای مجهول بیشتر را خواهید خواند :

در حل معادلات ما به یک یا چند جواب محدود می رسیدیم ولی در این جا طیفی یا مجموعه ای از اعداد به عنوان مجموعه جواب پیدا خواهد شد که در حل موارد زیر خواهید دید . مجموعه جواب که معمولا با D نشان می دهیم را به دوصورت خواهیم نوشت :

1 – نشان دادن مجموعه جواب به زبان ریاضی   **2 – نشان دادن مجموعه جواب روی محور اعداد**

مقدار زیادی از حل نامعادلات مثل حل معادلات هست که در سال های قبل خواندید و فقط در مواردی باید خاصیت های درس قبلی به آن اشاره شد .

به حل موارد زیر توجه کنید که مجموعه جواب را هم نشان داده ایم:

مثال 1 : $2x + 5 < -3x + 25$

در این نامعادله از ما X هائی را می خواهد که به ازای آن ها $2x + 5$ از $-3x + 25$ کوچک تر باشد :

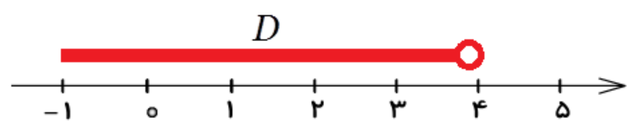
$$2x + 5 < -3x + 25 \Rightarrow$$

$$۲x + ۳x < -۵ + ۲۵ \Rightarrow ۵x < ۲۰$$

$$\frac{\cancel{۵}x}{\cancel{۵}} < \frac{۲۰}{۵} \Rightarrow x < ۴$$

یعنی اگر X از 4 کوچک تر انتخاب شود، در این صورت $2x + 5$ از $-3x + 25$ کوچک تر خواهد بود .

مجموعه جواب $D = \{ x \mid x \in R \ , \ x < ۴ \}$



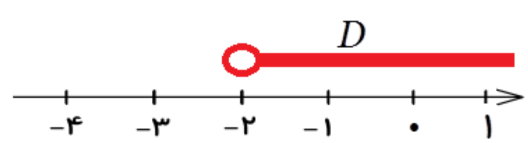
مثال 2 :

$$7x - 12 > 4x - 18 \Rightarrow 7x - 4x > -18 + 12$$

$$۳x > -۶ \Rightarrow \frac{\cancel{۳}x}{\cancel{۳}} > \frac{-۶}{۳} \Rightarrow x > -۲$$

یعنی اگر X از -2 بزرگ تر انتخاب شود ، در این صورت $7x - 12$ از $4x - 18$ بزرگ تر خواهد بود .

مجموعه جواب $D = \{ x \mid x \in R \ , \ x > -۲ \}$



مثال 3 :

$$11 - 5x \le 2x - 17 \quad \Rightarrow \quad -5x - 2x \le -11 - 17$$

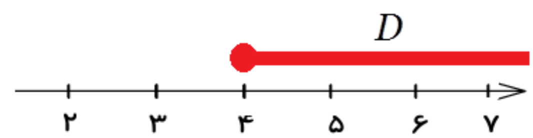
$$-۷x \le -۲۸ \quad \Rightarrow \quad \frac{-۷x}{-۷} \ge \frac{-۲۸}{-۷} \quad \Rightarrow \quad x \ge +۴$$

به تغییر علامت توجه کنید

چون طرفین بر عدد منفی تقسیم شده اند به این دلیل طبق خاصیت 3 که در درس قبلی گفته شد سمت علامت تغییر یافته است .

یعنی اگر x از 4+ بزرگ تر یا مساوی انتخاب شود، در این صورت $11 - 5x$ از $2x - 17$ کوچک تر یا مساوی خواهد بود .

مجموعه جواب $D = \{ x \mid x \in R \ , \ x \ge +۴ \}$



مثال 4 :

$$8x + 10 - 2x \ge 12x - 8 \quad \Rightarrow \quad 8x - 2x - 12x \ge -10 - 8$$

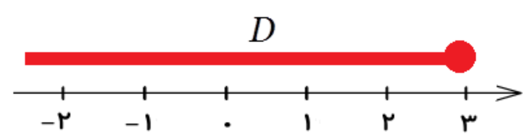
$$-۶x \ge -۱۸ \quad \Rightarrow \quad \frac{-۶x}{-۶} \le \frac{-۱۸}{-۶} \quad \Rightarrow \quad x \le +۳$$

به تغییر علامت توجه کنید

چون طرفین بر عدد منفی تقسیم شده اند به این دلیل طبق خاصیت 3 که در درس قبلی گفته شد سمت علامت تغییر یافته است .

یعنی اگر x از 3+ کوچک تر یا مساوی انتخاب شود، در این صورت $8x + 10 - 2x$ از $12x - 8$ بزرگ تر یا مساوی خواهد بود .

مجموعه جواب $D = \{ x \mid x \in R \ , \ x \le +۳ \}$



مثال 5 :

$$\frac{x+3}{4} + \frac{2+x}{2} < \frac{x-3}{6} \quad \Rightarrow$$

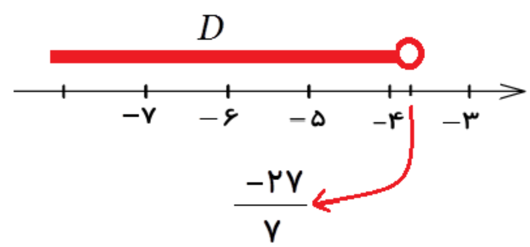
طرفین نا معادله را در 12 ضرب می کنیم . چون 12 عددی مثبت است لذا سمت علامت نامساوی تغییر نمی کند :

$$12 \times \left(\frac{x+3}{4} + \frac{2+x}{2} \right) < \left(\frac{x-3}{6} \right) \times 12$$

$$3x + 9 + 12 + 6x < 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 7x < -27$$

$$\frac{7x}{7} < \frac{-27}{7} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{-27}{7}$$

یعنی اگر X از $\frac{-27}{7}$ کوچک تر انتخاب شود ، در این صورت $\frac{2+x}{2} + \frac{x+3}{4}$ از $\frac{x-3}{6}$ کوچک تر خواهد بود .



مجموعه جواب $D = \left\{ x \mid x \in R \ , \ x < \frac{-۲۷}{۷} \right\}$

مثال 6 :

$$5 + \frac{2x - 8}{3} \geq \frac{4x + 3}{2} - 7 \quad \Rightarrow$$

طرفین نا معادله را در 6 ضرب می کنیم . چون 6 عددی مثبت است لذا سمت علامت نامساوی تغییر نمی کند :

$$6 \times \left(5 + \frac{2x - 8}{3} \right) \geq \left(\frac{4x + 3}{2} - 7 \right) \times 6 \quad \Rightarrow$$

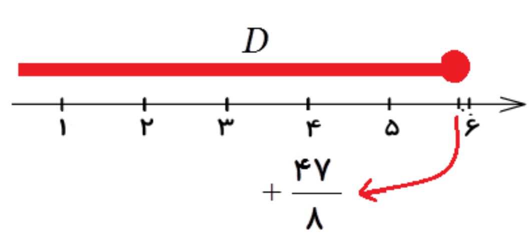
$$30 + 4x - 16 \geq 12x + 9 - 42 \quad \Rightarrow \quad -8x \geq -47$$

$$-۸x \geq -۴۷ \quad \Rightarrow \quad \frac{-۸x}{-۸} \leq \frac{-۴۷}{-۸} \quad \Rightarrow \quad x \leq +\frac{۴۷}{۸}$$

به تغییر علامت توجه کنید

چون طرفین بر عدد منفی تقسیم شده اند به این دلیل طبق خاصیت 3 که در درس قبلی گفته شد سمت علامت تغییر یافته است .

یعنی اگر x از $+\frac{47}{7}$ کوچک تر یا مساوی انتخاب شود، در این صورت $5 + \frac{2x-8}{3}$ از $\frac{4x+3}{2} - 7$ بزرگ تر یا مساوی خواهد بود .



مجموعه جواب $D = \left\{ x \mid x \in R \ , \ x \leq +\frac{۴۷}{۸} \right\}$

تکالیف : مثال های زیر را **به همراه حل** آن ها در دفتر بنویسید . فراموش نکنید که برای هر کدام **مجموعه جواب** را بنویسید

نا معادلات زیر را حل و مجموعه جواب را مشخص کنید :

$۳+۵x \leq ۱۷-۸x-۱$

$۳x-۱ \leq -۲x+۹$

$۵-۲x+۷ > ۷x-۶$

$۵x+۲ \geq ۳x-۱۲$

$\frac{۲-a}{۳} \geq \frac{۴a-۱}{۵}$

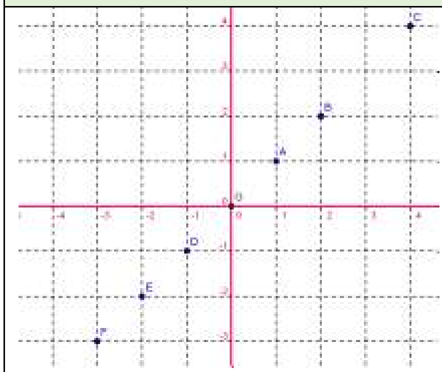
$-۲x-\frac{۱}{۴} < ۴x-۱$

$\frac{۲+۳a}{۲} \geq ۴a-\frac{۱}{۴}$

$\frac{۵x-۷}{۳} \geq \frac{۶-۲x}{۴}$

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 6 – معادله خط

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی



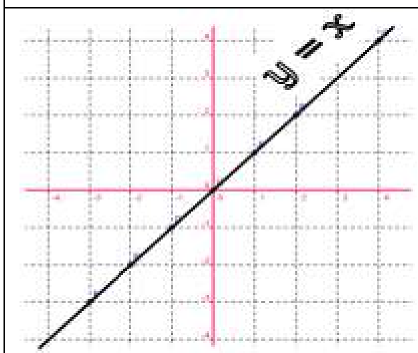
مفهوم معادله خط

مثال 1 : به شکل مقابل خوب نگاه کنید که چند نقطه روی صفحه مختصات رسم شده است:

اگر دقت کنید مختصات نقاط به شکل زیر است :

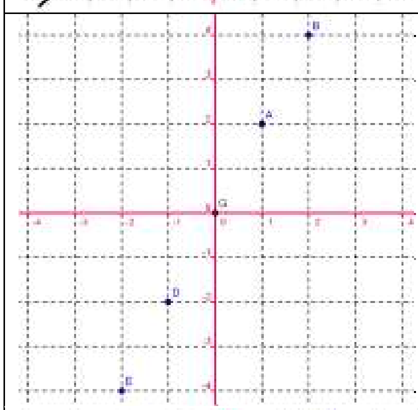
$$A=\begin{bmatrix}+1\\+1\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}+2\\+2\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}+4\\+4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \text{ و } E=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix} \text{ و } F=\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix} \text{ و } G=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$



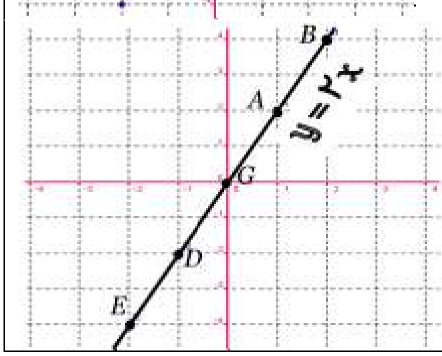
اگر دقت کنیدتمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که طول و عرض شان با هم برابر است. البته فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که طول و عرض شان با هم برابر است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

$$y=x$$



مثال 2 : به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :

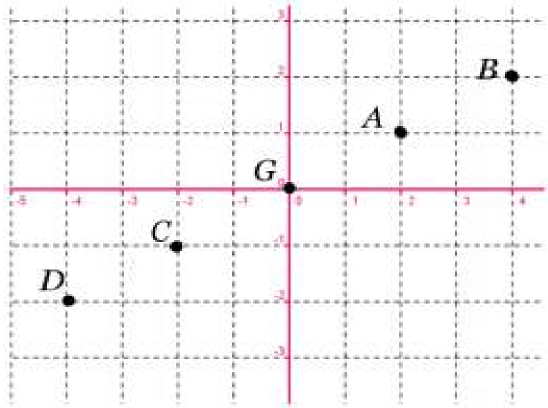
$$A=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}+2\\+4\end{bmatrix} \text{ و } D=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} \text{ و } E=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix} \text{ و } G=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$



اگردقت کنید تمام این نقاط خاصیتی که دارنداین است که عرض شان دو برابر طولشان است و بازهم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارند که عرض شان دو برابر طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

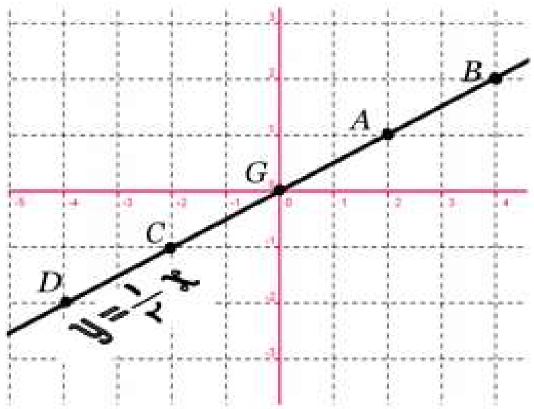
$$y=2x$$

مثال 3 : به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :

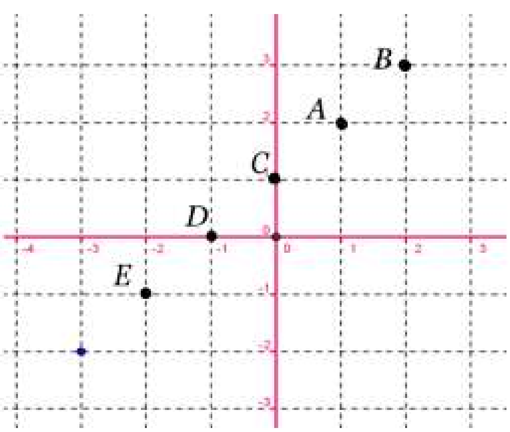


$$A=\begin{bmatrix}+2\\+1\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}+4\\+2\end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \quad و \quad D=\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix} \quad و \quad G=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

اگردقت کنید تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که عرض شان نصف طولشان است و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که عرض شان نصف طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :



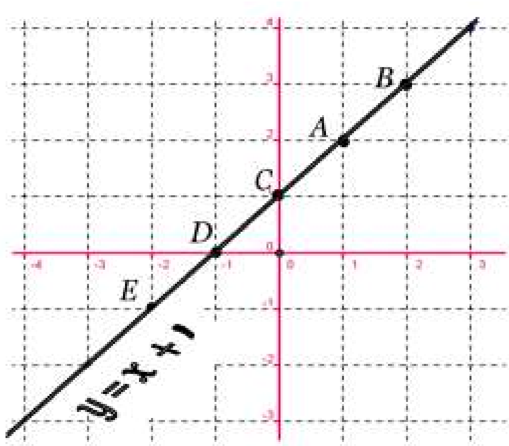
$$y=\frac{1}{2}x$$



مثال 4 : به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :

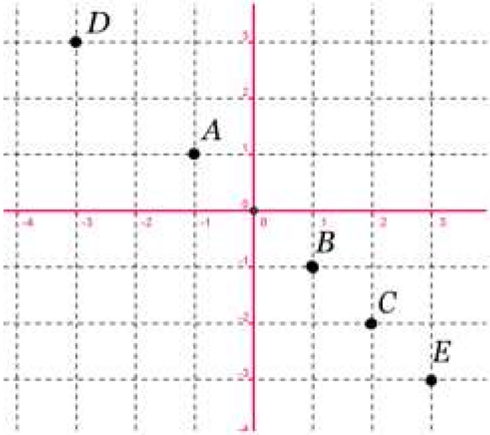
$$A=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}+2\\+3\end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad و \quad D=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \quad و \quad E=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$$

تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که عرض شان یک واحد بزرگ تر از طولشان است و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که عرض شان یک واحد بزرگ تر از طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :



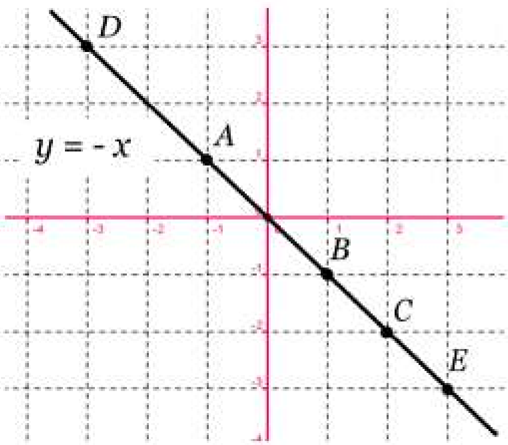
$$y=x+1$$

مثال 5 : به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :



$$A=\begin{bmatrix}-1\\+1\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix}+2\\-2\end{bmatrix} \quad و \quad D=\begin{bmatrix}-3\\+3\end{bmatrix} \quad و \quad E=\begin{bmatrix}+3\\-3\end{bmatrix}$$

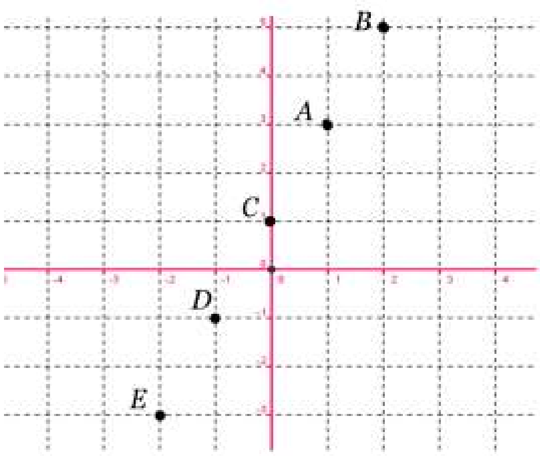
تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که عرض شان قرینه طولشان است



و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که عرض شان قرینه طولشان است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

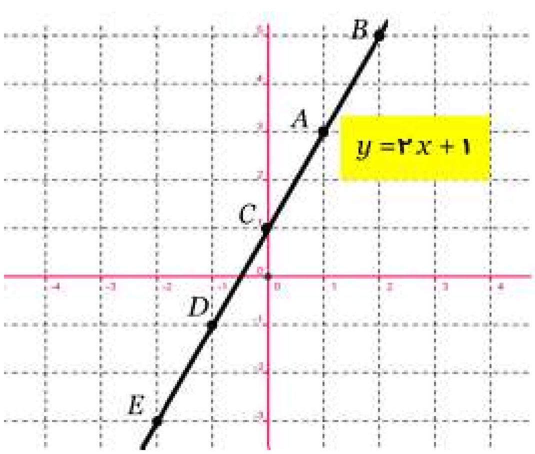
$$y=-x$$

مثال 6 : به پنج نقطه روی تصویر دقت کنید. مختصات آن ها رو می نویسیم :



$$A=\begin{bmatrix}+1\\+3\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}+2\\+5\end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad و \quad D=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \quad و \quad E=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$$

تمام این نقاط خاصیتی که دارند این است که عرض شان از دوبرابر طولشان یک واحد بیشتر است



و باز هم باید گفت که فقط این چند نقطه این چنین نیستند بلکه بی نهایت نقطه وجود دارد که عرض شان از دوبرابر طولشان یک واحد بیشتر است و اگر بخواهیم همه این بی نهایت نقطه را با هم نشان دهیم یک خط راست تشکیل می دهند که خاصیت مشترک همه آن ها را با یک رابطه ریاضی به صورت زیر می نویسیم :

$$y=2x+1$$

نتیجه گیری: هر معادله که برحسب y,x (بادرجه یک) باشد،رابطه بین طول و عرض بی نهایت نقطه را به زبان ریاضی بیان می کند که بارسم خطی راست، آن بی نهایت نقطه را روی صفحه مختصات نشان می دهیم.

رسم خطی که معادله آن داده شده است :

معمولا معادله خط را به صورت $y = ax + b$ نشان می دهیم. البته ضرورتی ندارد که فقط به این شکل نمایش داده شود . یعنی معادلاتی مثل نمونه های زیر هم معادله خط راست هستند:

$2x+5y=-20$ و $y-6x=0$ و $\frac{2x+1}{3y-4}=-1$ و $2x+y=-5x+2y-10$ و $2y+3x=+3$

برای رسم خطی که معادله خط آن داده شده است باید حداقل دو نقطه از آن خط را پیدا کرده و خط راست را رسم می کنیم .

البته توصیه می کنیم که بیشتر از دو نقطه از خط را پیدا کنید. مثل :

مثال 1 : خط به معادله $y=2x+3$ را رسم کنید:

x	
y	
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	

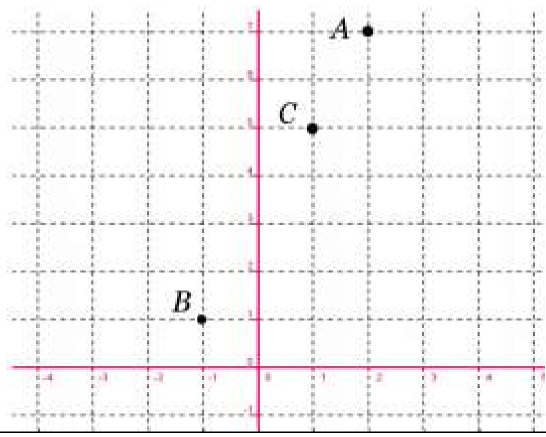
$\Longrightarrow$

x	+۲	−۱	+۱
y			
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	[ ]	[ ]	[ ]

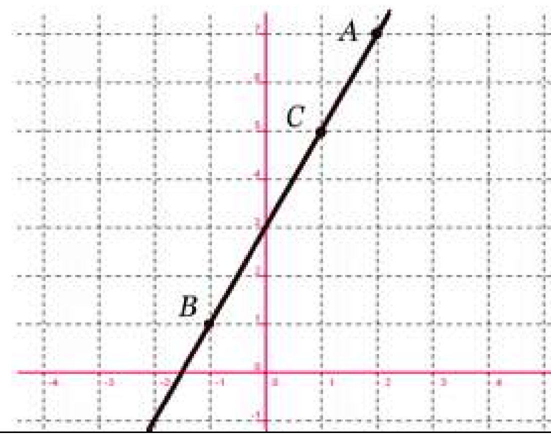
$\Longrightarrow$

x	+۲	−۱	+۱
y	+۷	+۱	+۵
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}+۲\\+۷\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-۱\\+۱\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}+۱\\+۵\end{bmatrix}$

نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات پیدا کرده و خط را رسم می کنیم:



$\Longrightarrow$



مثال 2 : خط به معادله $y=-x+4$ را رسم کنید:

x	
y	
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	

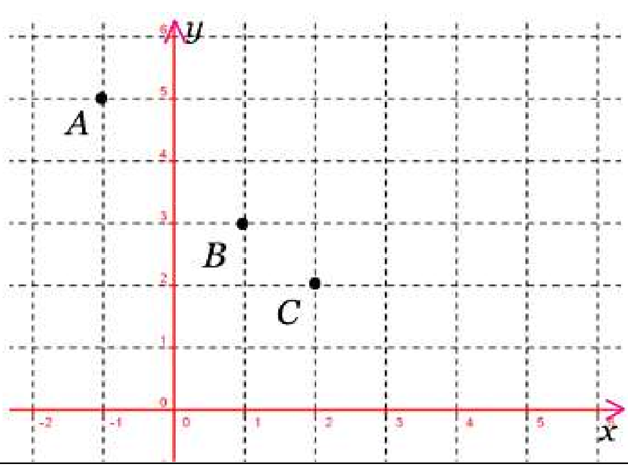
$\Longrightarrow$

x	+۲	−۱	+۱
y			
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	[ ]	[ ]	[ ]

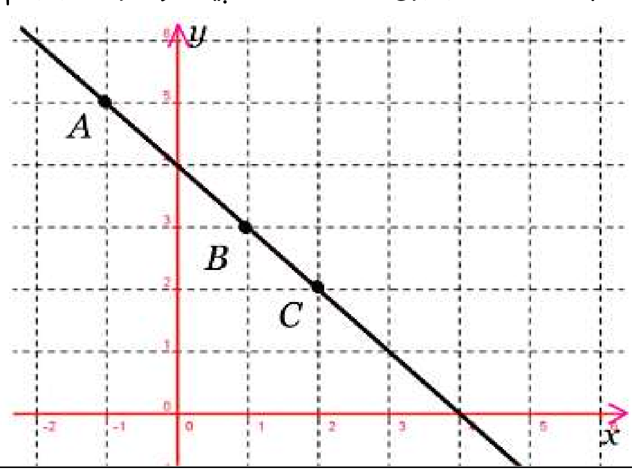
$\Longrightarrow$

x	+۲	−۱	+۱
y	+۲	+۵	+۳
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}+۲\\+۲\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-۱\\+۵\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}+۱\\+۳\end{bmatrix}$

حالا نقاط به دست آمده را روی صفحه مختصات پیدا کرده و خط را رسم می کنیم:



$\Longrightarrow$



رسم خط هائی که معادله آن ها به صورت دیگر معادله خط داده شده اند:

دربرخی موارد، معادله خط به صورت $mx + ny = f$ داده می شود مثل : $2x + 5y = -20$ که دراین موارد با این که می توانیم فرم معادله را به شکل کلی یعنی : $y = ax + b$ در آوریم ولی ضرورتی ندارد ومی توان مثل نمونه های بالائی و حتی با پیدا کردن ساده دونقطه از خط ، آن را رسم کرد.

برای این کار کافی است که **یک بار x را صفر درنظر بگیریم وعرض آن نقطه را پیدا کنیم ویک بار هم y صفردرنظر بگیریم و طول آن نقطه را پیدا کنیم:**

مثال 1 : خط به معادله $2x+3y=-6$ را رسم کنید:

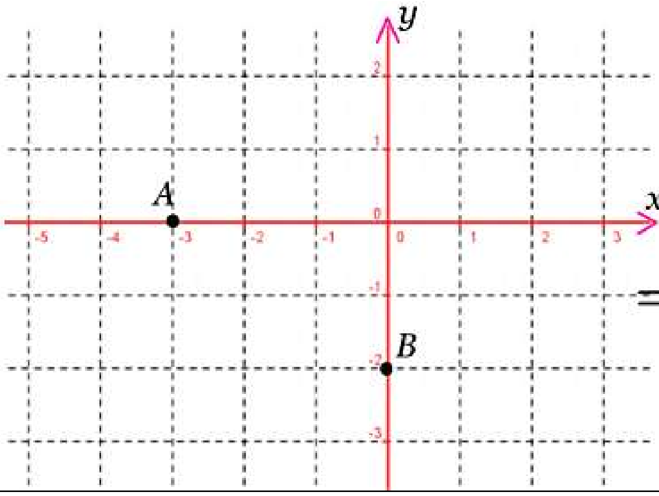
x		
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

$\Longrightarrow$

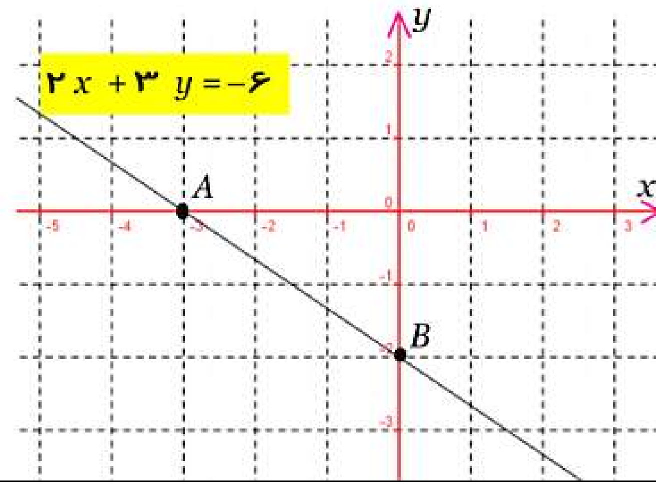
x	۰	
y		۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$

x	۰	-۳
y	-۲	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$



$\Longrightarrow$



مثال 2 : خط به معادله $5x-2y=10$ را رسم کنید:

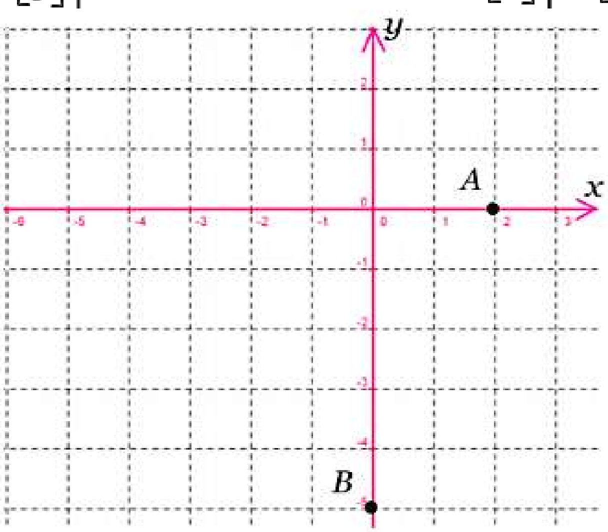
x		
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

$\Longrightarrow$

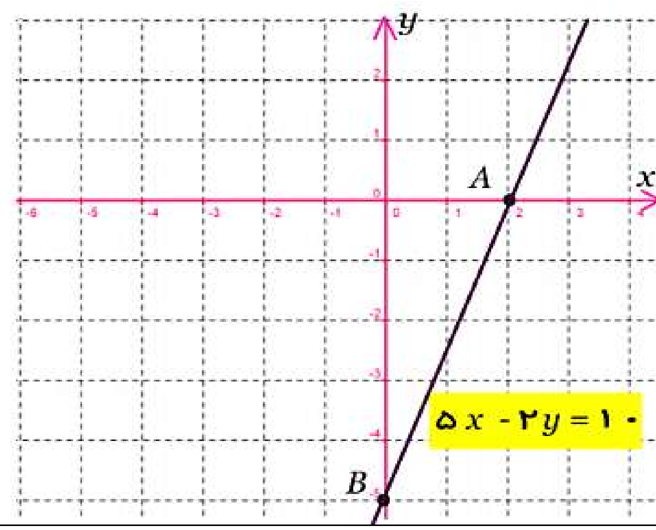
x	۰	
y		۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$

x	۰	+۲
y	-۵	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$



$\Longrightarrow$



نقطه A و B در این دو مثال بالائی به ترتیب **طول از مبدا و عرض از مبدا** خط هستند و در هر معادله خط می توان این دو نقطه را به صورت زیر پیدا کرد:

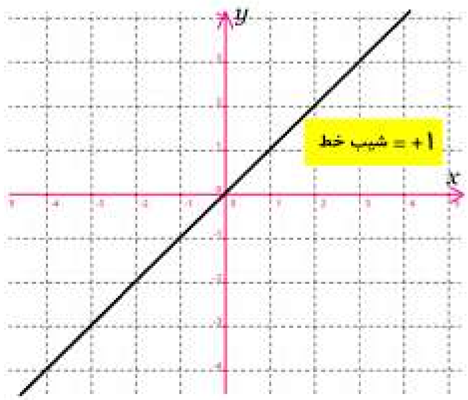
نکته 1 : برای پیدا کردن عرض از مبدا خط ، طول را در آن معادله صفر در نظر می گیریم و برای پیدا کردن طول از مبدا خط ، عرض را در آن معادله صفر در نظر می گیریم.

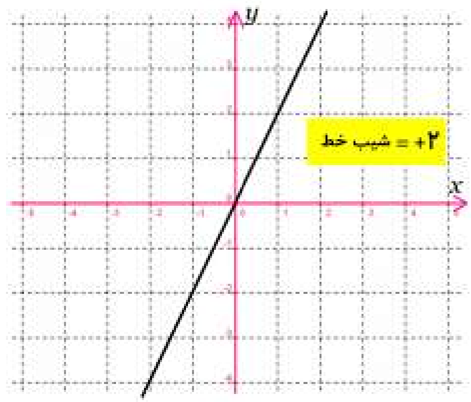
شیب خط

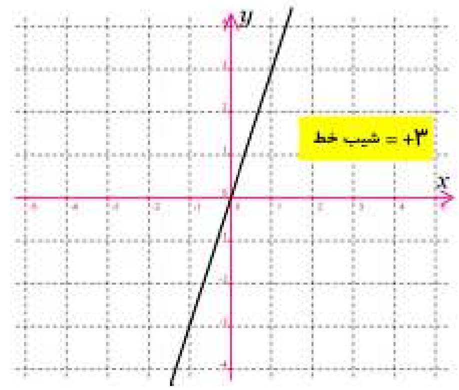
شیب خط نشان گر وضعیت خط نسبت به محور طول ها می باشد و زاویه ای که خط با محور عرض ها می سازد این عدد شیب خط را تعیین می کند.

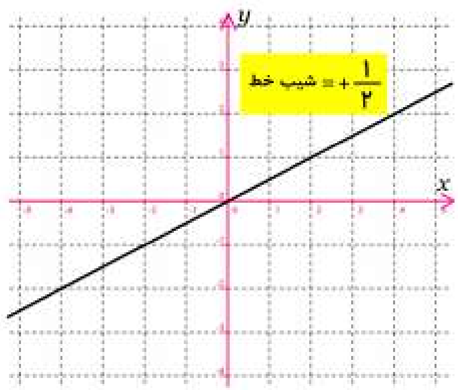
خط هائی که از سمت ناحیه 1 به سمت ناحیه 3 می روند شیب شان مثبت و خط هائی که از سمت ناحیه 2 به ناحیه 4 می روند شیب شان منفی است.

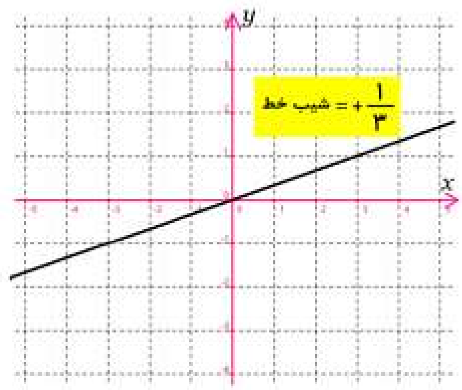
نمونه هائی از شیب خط ها به صورت تصویری در شکل های زیر ارائه شده است:

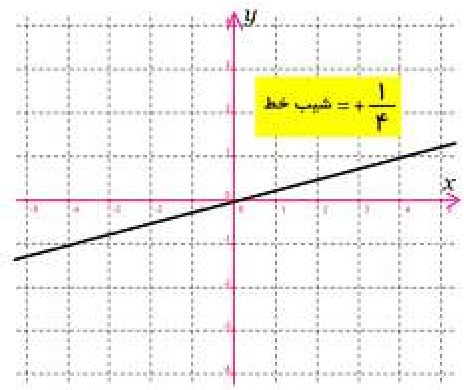


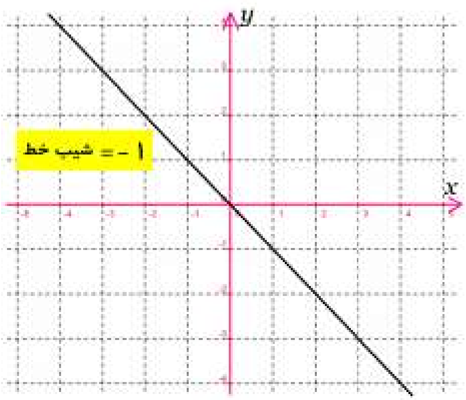


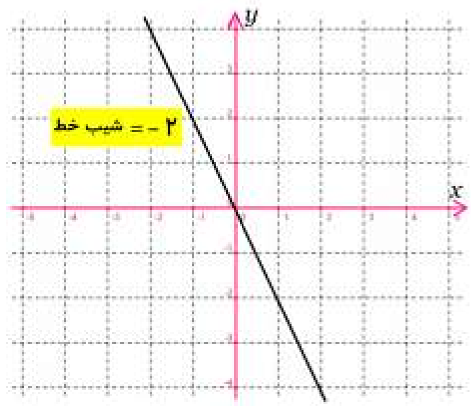


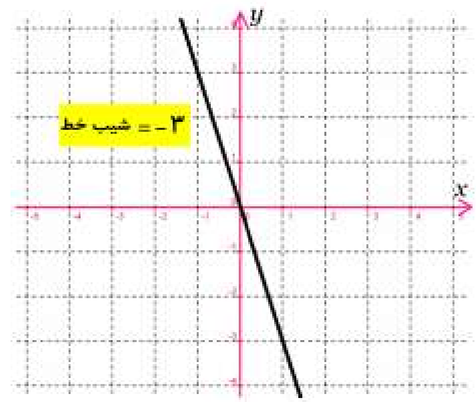


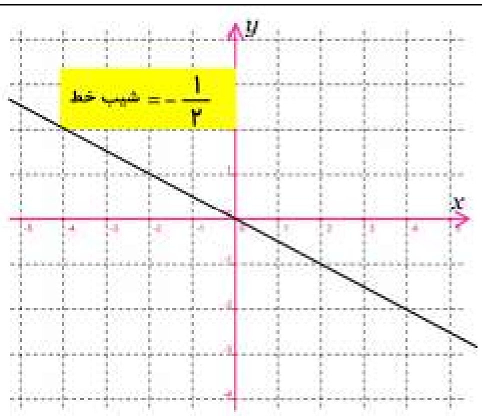


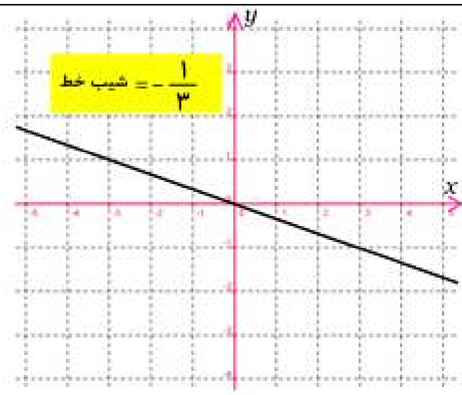


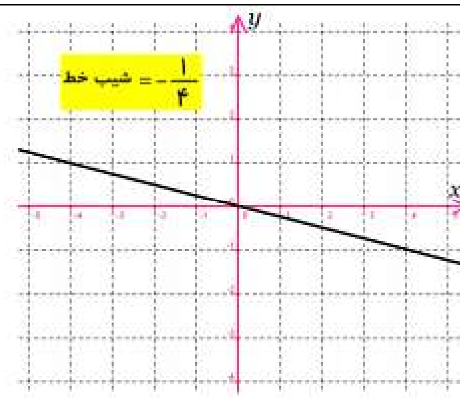












روش های به دست آوردن شیب خط

روش اول : استفاده از معادله خط

شیب خط

$y = ax + b$

الف) اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ (حالت کلی) باشد دراین صورت a شیب خط است.

مثال 1 : اگر معادله خط به صورت $y = 3x + 10$ باشد در این صورت :

$3 =$ شیب خط

مثال 2 : اگر معادله خط به صورت $y = -4x + 7$ باشد در این صورت : $-4 =$ شیب خط

مثال 3 : اگر معادله خط به صورت $y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{9}$ باشد در این صورت : $-\frac{3}{5} =$ شیب خط

ب) اگر معادله خط به صورت $mx + ny = d$ (صورت دیگر معادله خط) باشد دراین صورت برای پیدا کردن شیب خط ،

ضریب x را بر ضریب y تقسیم کرده و قرینه می کنیم . یعنی : $mx + ny = d \Rightarrow$ شیب خط $= -\frac{m}{n}$

مثال 1 : اگر معادله خط به صورت $3x + 11y = 5$ باشد در این صورت : شیب خط $= -\frac{3}{11}$

مثال 2 : اگر معادله خط به صورت $-5x + 2y = 14$ باشد در این صورت : شیب خط $= -\frac{-5}{2} = +\frac{5}{2}$

روش دوم : اگر مختصات دو نقطه از خط را بدانیم مثلا $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ باشند ، در این صورت از فرمول زیر،شیب خط را به دست می آید:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1 : شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $B = \begin{bmatrix} -5 \\ +4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 \\ +8 \end{bmatrix}$ می گذرد؟

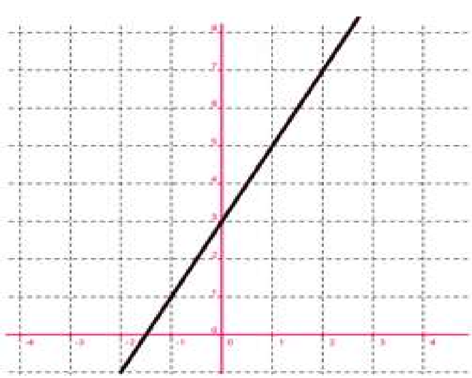
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(+4) - (+8)}{(-5) - (-1)} = \frac{-4}{-4} = +1$$

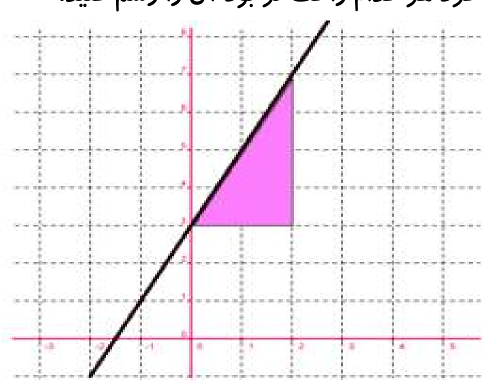
مثال 2 : شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $B = \begin{bmatrix} +3 \\ -9 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \end{bmatrix}$ می گذرد؟

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-9) - (-6)}{(+3) - (-7)} = \frac{-3}{+10} = -\frac{3}{10}$$

روش سوم : پیدا کردن شیب معادله خط ، وقتی خط رسم شده است.

اگر خطی رسم شده و بخواهیم شیب خط را به دست آوریم ، برای این کار به یک مثلث قائم الزاویه نیاز داریم که در روی صفحه مختصات رسم کنیم . مثلث قائم الزاویه ای رسم می کنیم که وتر آن روی خط مورد نظر باشد و اضلاع قائم الزاویه آن موازی محور ها باشد . مشخص است که تعداد زیادی مثلث به این شکل می توان رسم کرد هر کدام راحت تر بود آن را رسم کنید.

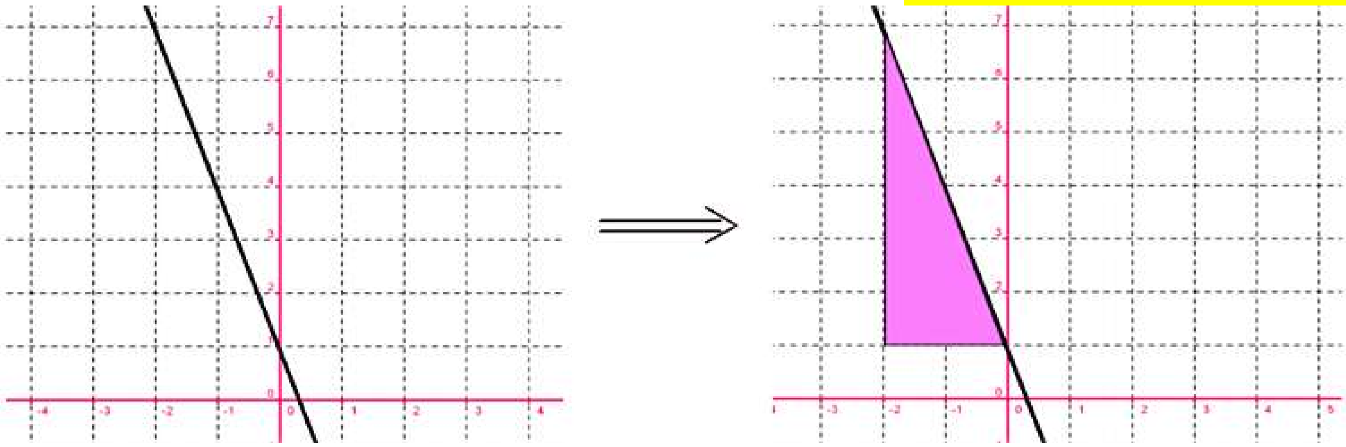




بعد از رسم مثلث ، اندازه ضلع عمودی را بر اندازه ضلع افقی تقسیم می کنیم.

شیب خط $\Rightarrow \frac{+4}{+2} = +2$

توجه داشته باشید که اگر خط به صورت مثال بالا از ناحیه یک مختصات به سمت ناحیه سوم مختصات رسم شده باشد شیب مثبت است و اگر از سمت ناحیه دوم به سمت ناحیه 4 رسم شده باشد شیب منفی است یعنی :

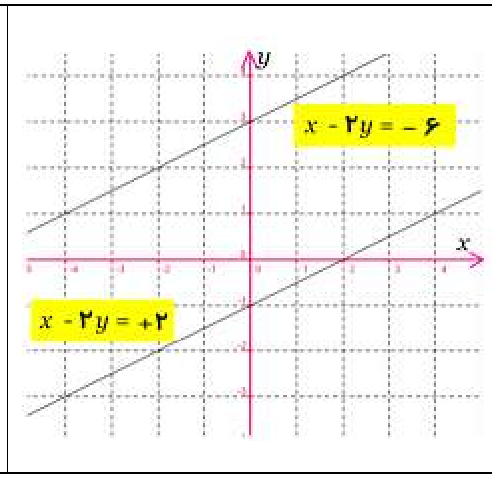


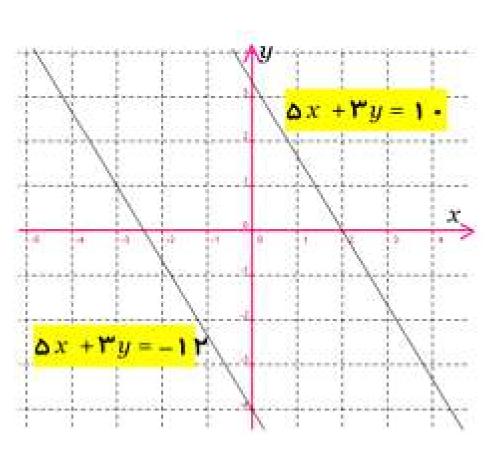
$\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow$ شیب خط $= -3$

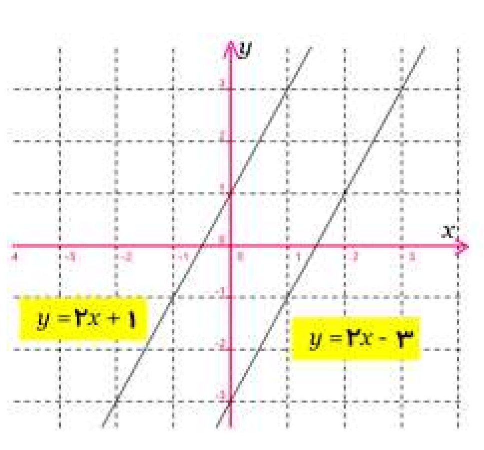
نکات مهم در مورد موازی بودن و عمود بودن خط ها:

نکته 1 : اگر شیب دو خط با هم برابر باشد با هم موازی هستند و برعکس.

درمثال های زیر خط هابا هم موازیند چون شیب هر دو خط رسم شده در هر شکل با هم برابر می باشد :

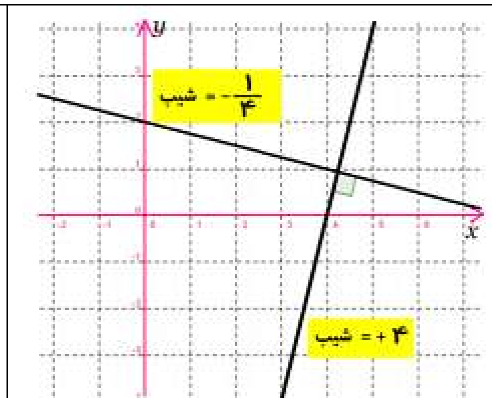


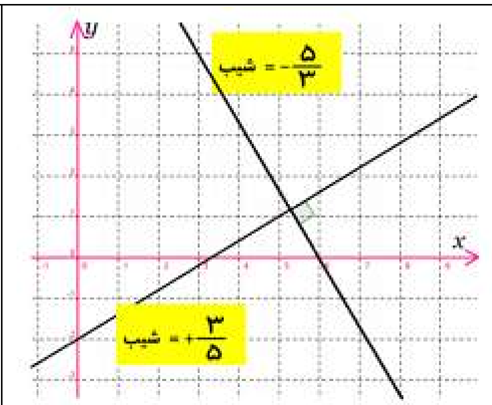


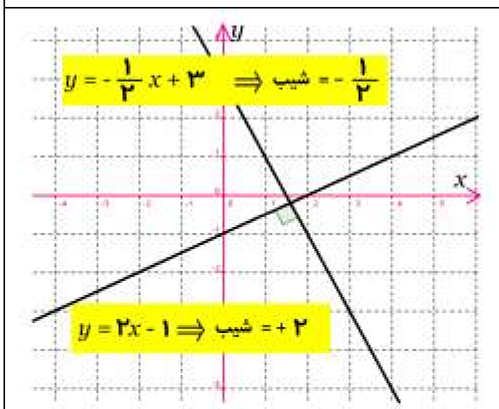


نکته 2 : اگر دو خط بر هم عمود باشند شیب دو خط با هم قرینه و معکوس است و برعکس.

در مثال های زیر خط ها بر هم عمودند . به شیب دو خط در هر شکل توجه کنید:







اگردقت کنید وقتی دوخط برهم عمود باشند حاصل ضرب شیب دوخط برابر با 1 – است یعنی اگردوخط e و d برهم عمود باشند و شیب آن ها به ترتیب a_1 و a_2 باشد در این صورت :

$$d \perp e \Longleftrightarrow a_1 \times a_2 = -1$$

عرض از مبدا و طول از مبدا

خط راست رسم شده احتمال دارد محور طول یا عرض یا هر دو را قطع کند . به دو تعریف ارائه شده زیر توجه کنید :

عرض از مبدا : نقطه از محور عرض که در آن نقطه ، خط محور عرض را قطع می کند عرض از مبدا می گویند.

طول از مبدا : نقطه از محور طول که در آن نقطه ، خط محور طول را قطع می کند طول از مبدا می گویند.

برای پیدا کردن هر کدام از این دو مورد به صورت زیر عمل می کنیم:

برای پیدا کردن عرض از مبدا ، در معادله خط طول را برابر با صفر در نظر می گیریم .

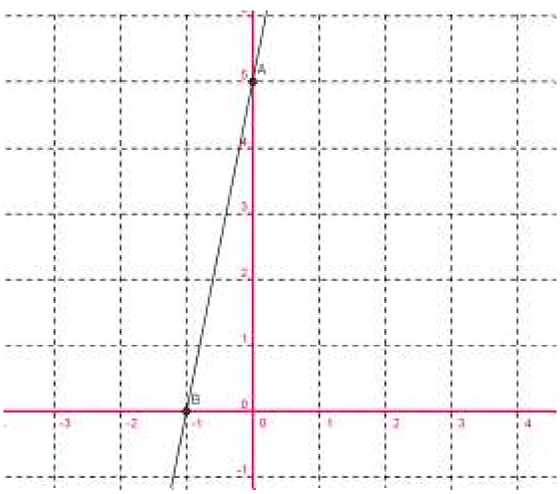
برای پیدا کردن طول از مبدا ، در معادله خط ، عرض را برابر با صفر در نظر می گیریم .

مثال 1 : اگر معادله خط به صورت $5x-y=-5$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

عرض از مبدا $\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=+5 \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}0\\+5\end{bmatrix}$

طول از مبدا $\Rightarrow y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad B=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

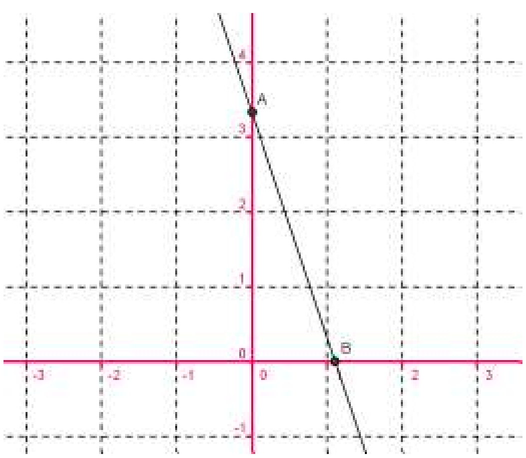


مثال 2 : اگر معادله خط به صورت $9x+3y=10$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

عرض از مبدا $\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}0\\\frac{10}{3}\end{bmatrix}$

طول از مبدا $\Rightarrow y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{10}{9} \quad \Rightarrow \quad B=\begin{bmatrix}\frac{10}{9}\\0\end{bmatrix}$

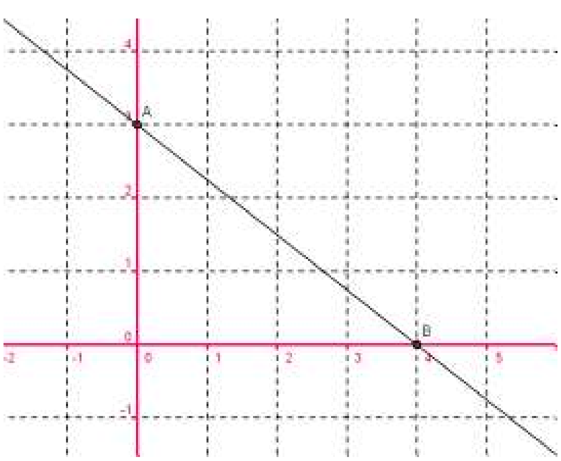


مثال 3 : اگر معادله خط به صورت $3x+4y=12$ باشد ،

در این صورت عرض از مبدا و طول از مبدا را پیدا کنید :

عرض از مبدا $\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=+3 \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}0\\+3\end{bmatrix}$

طول از مبدا $\Rightarrow y=0 \quad \Rightarrow \quad x=+4 \quad \Rightarrow \quad B=\begin{bmatrix}+4\\0\end{bmatrix}$



نوشتن معادله خط

اگر اطلاعاتی از معادله خط به ما داده شده باشد می توانیم معادله خط را بنویسیم . اطلاعاتی مثل : شیب خط و عرض از مبدا و یا نقاطی از خط که خط راست از آن ها عبور می کند. روش هایی که معمولا برای به دست آوردن معادله خط به کار می رود همراه با مثال به ترتیب ارائه شده است :

روش اول : اگر شیب خط و عرض از مبدا خط به ما داده شده باشد . برای نوشتن این معادله ها کار زیادی نداریم فقط کافیه که از حالت کلی معادله خط برای جای گذاری اعداد استفاده کنیم. مثل :

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+4$ بوده و عرض از مبدا آن -5 باشد؟

حل : $y = ax + b \quad , \quad a = +4 \quad , \quad b = -5 \quad \Rightarrow \quad y = +4x - 5$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -3 بوده و عرض از مبدا آن $+7$ باشد؟

حل : $y = ax + b \quad , \quad a = -3 \quad , \quad b = +7 \quad \Rightarrow \quad y = -3x + 7$

روش دوم : اگر شیب خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند به طوری که طول نقطه داده شده صفر باشد مثل مثال بالا عمل می کنیم . چون نقطه ای که طول آن صفر باشد همان عرض از مبدا خط است و روش حل فرق نمی کند :

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -6 بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y = ax + b \quad , \quad a = -6 \quad , A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow b = +4 \quad \Rightarrow \quad y = -6x + 4$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+3$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y = ax + b \quad , \quad a = +3 \quad , A = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow b = -7 \quad \Rightarrow \quad y = +3x - 7$

روش سوم : اگر شیب خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند، حتی اگر طول نقطه داده شده ، صفر نباشد می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

نوشتن معادله خط وقتی شیب خط و یک نقطه از آن را می دانیم

توجه داشته باشید که x_1 و y_1 طول و عرض نقطه مورد نظر بوده و a شیب خط است که به ما داده اند. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن $+2$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y - y_1 = a(x - x_1) \quad , \quad a = +2 \quad , x_1 = 1 \quad , y_1 = 4 \Rightarrow y - 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 2$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که شیب آن -5 بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ +3 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $y - y_1 = a(x - x_1) \quad , \quad a = -5 \quad , x_1 = -2 \quad , y_1 = +3 \Rightarrow y - 3 = -5(x - (-2)) \Rightarrow y = -5x - 7$

روش چهارم : اگر عرض از مبدا خط به همراه یک نقطه از خط را به ما بدهند می توانیم از فرمول شیب ، شیب خط را به دست آورده و با استفاده از معادله کلی ، معادله را بنویسیم :

شیب خط $\Rightarrow \quad a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 　　　 معادله کلی خط $\Rightarrow \quad y = ax + b$

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن $+5$ بوده و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $b = +5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4 - 5}{1 - 0} = -1 \quad \Rightarrow y = -1x + 5$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدا آن $+4$ بوده و از نقطه $A=\begin{bmatrix}-3\\-7\end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $b=+4 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}-3\\-7\end{bmatrix} \quad \Rightarrow a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-7-4}{-3-0}=\dfrac{11}{3} \quad \Rightarrow y=\dfrac{11}{3}x+4$

روش پنجم : اگر فقط دو نقطه از خط را به ما بدهند ابتدا از فرمول شیب ، شیب خط را به دست آورده و سپس مثل مثال ها بالا از فرمول زیر استفاده کنیم :

شیب خط $\Rightarrow \quad a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad\qquad y-y_1=a(x-x_1)$

مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}-3\\+12\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$ بگذرد ؟

حل : $A=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-3\\+12\end{bmatrix} \quad \Rightarrow a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{12-7}{-3-2}=\dfrac{+5}{-5}=-1 \quad \Rightarrow a=-1$

$A=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} \quad , \quad a=-1 \qquad y-y_1=a(x-x_1) \Rightarrow y-7=-1(x-2) \Rightarrow y=-1x+9$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}$ بگذرد ؟

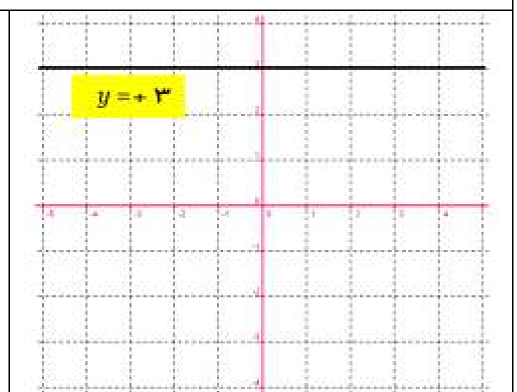
حل : $A=\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}+1\\-2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-2-10}{1-(-1)}=\dfrac{-12}{+2}=-6 \quad \Rightarrow a=-6$

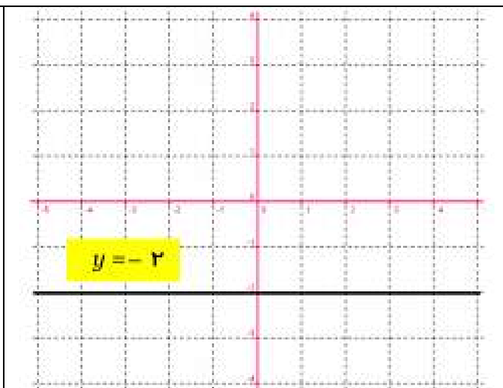
$A=\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix} \quad , \quad a=-6 \qquad y-y_1=a(x-x_1) \Rightarrow y-10=-6(x-(-1)) \Rightarrow y=-6x+4$

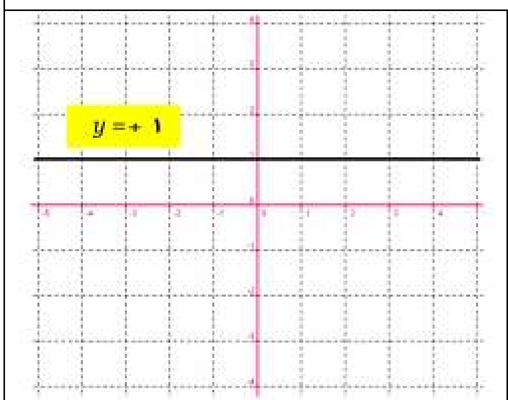
خط های موازی با محور ها

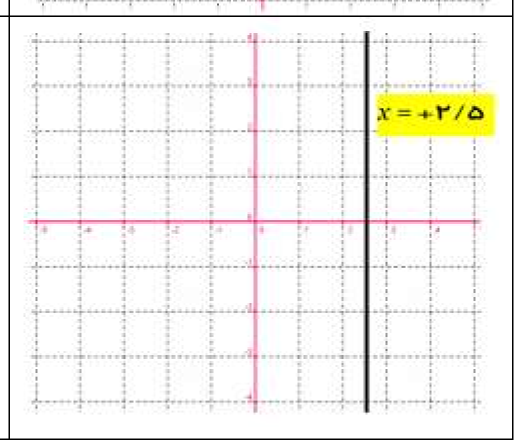
اگر خطی موازی محور طول یا موازی محور عرض باشد ، معادله آن با یک متغیر بیان می شود . رسم این خط ها و بیان معادله آن ها خیلی آسان خواهد بود.

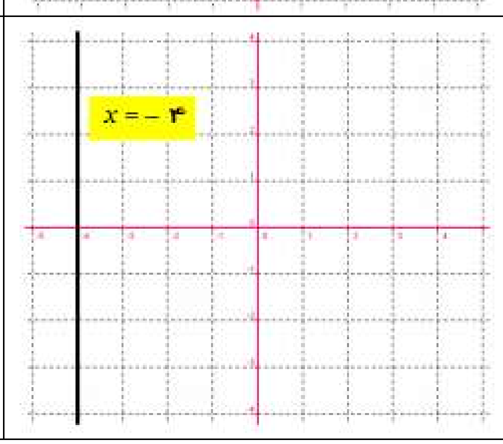
به نمونه های زیر توجه کنید:

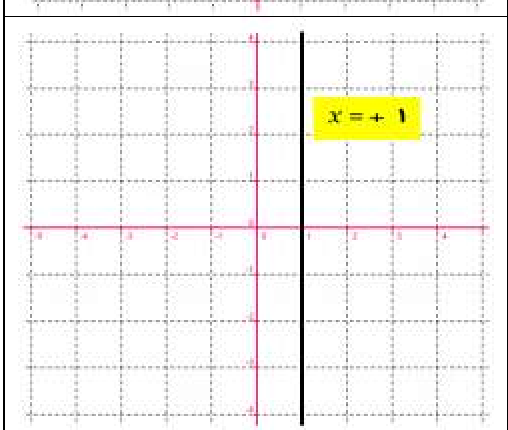






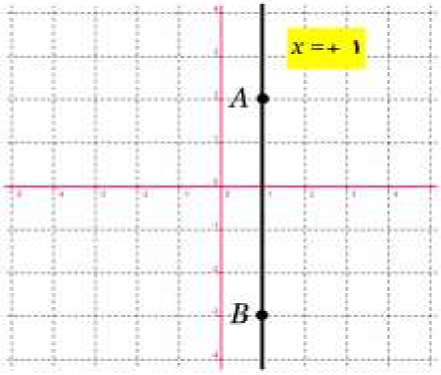






چندمثال و سوال مهم:

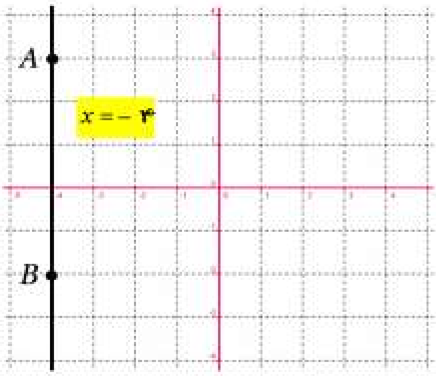
مثال 1 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}+1\\-3\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix}$ بگذرد ؟



حل : اگر دقت کنید متوجه می شوید که طول هر دو نقطه یکسان هستند پس بدون نوشتن فرمول و روش دیگر ، به راحتی معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

$$x=+1$$

مثال 2 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-4\\+3\end{bmatrix}$ بگذرد ؟

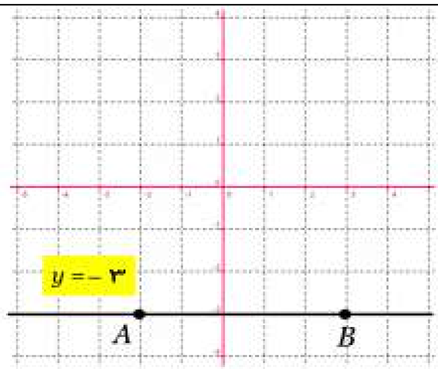


حل : اگر دقت کنید متوجه می شوید که طول هر دو نقطه یکسان هستند

پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

$$x=-4$$

مثال 3 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}+3\\-3\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$ بگذرد ؟

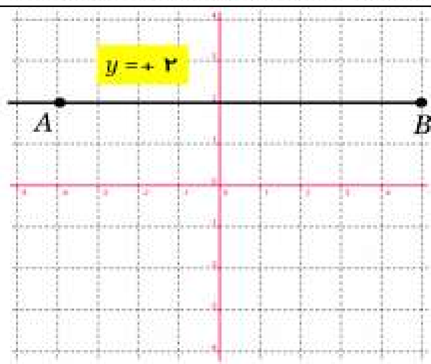


حل : اگر دقت کنید متوجه می شوید که عرض هر دو نقطه یکسان هستند

پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

$$y=-3$$

مثال 4 : معادله خطی را بنویسید که ازدو نقطه $B=\begin{bmatrix}+5\\+2\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-4\\+2\end{bmatrix}$ بگذرد ؟



حل : اگر دقت کنید متوجه می شوید که عرض هر دو نقطه یکسان هستند

پس معادله خط به صورت زیر خواهد بود. به شکل هم توجه کنید:

$$y=+2$$

دستگاه معادلات خطی (دو معادله دو مجهولی)

با توجه به نکاتی که در درس های قبلی اشاره شد هر معادله دو مجهولی با متغیر های x و y که درجه یک باشد معادله یک خط راست می باشد .

اگر معادله دومجهولی به ما بدهند و بخواهند آن را حل کنیم امکان حل وجود ندارد چون بی نهایت x و y می توان پیدا کرد که در این معادله صدق کند .

برای حل معادله دو مجهولی باید دو تا معادله به ما داده شده باشد تا ما محل برخورد این دو خط را پیدا کنیم، یعنی مختصات نقطه ای را پیدا کنیم که هم زمان در دو معادله صدق کند و روی هر دو خط قرار داشته باشد.

این دومعادله به شکل مثال زیر ،در کنار هم نوشته می شوند و به آن دستگاه معادلات خطی گفته می شود :

$$\begin{cases} 2x+5y=-2 \\ 4x-3y=22 \end{cases}$$

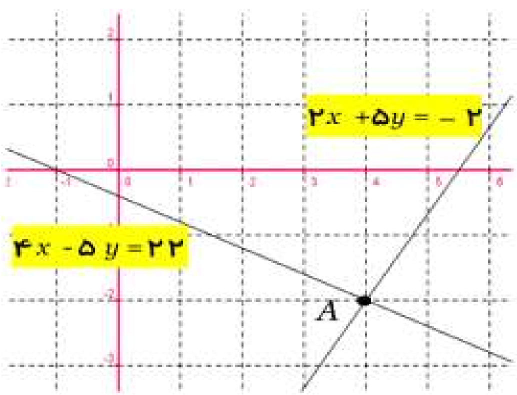
و برای پیدا کردن این جواب و نقطه مورد نظر روش های متعددی وجود دارد که به تدریج به چند روش اشاره می شود:

روش اول : پیدا کردن جواب با استفاده از رسم خط ها

در این روش هر دو خط را رسم کرده و محل برخورد خط ها را پیدا می کنیم.

توجه کنید که این روش همواره با دقت کافی نمی تواند باشد و شاید با خطا مواجه شود، خصوصا در مورد خط هایی که طول و عرض محل برخورد خط ها عدد اعشاری باشد.

مثال 1 :

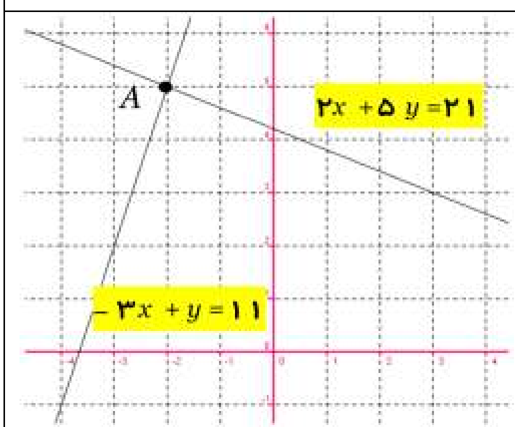


$$\begin{cases} 2x+5y=-2 \\ 4x-3y=22 \end{cases}$$

اگردو خط را رسم کنیم مشاهده می شود که خط ها همدیگر را در نقطه A قطع کرده اند .

پس جواب دستگاه عبارت است از : $A=\begin{bmatrix} +4 \\ -2 \end{bmatrix}$

مثال 2 : جواب دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید:



$$\begin{cases} -3x+y=11 \\ +2x+5y=21 \end{cases}$$

اگردو خط را رسم کنیم مشاهده می شود که خط ها همدیگر را در نقطه A قطع کرده اند .

پس جواب دستگاه عبارت است از :

$$A=\begin{bmatrix} -2 \\ +5 \end{bmatrix}$$

روش دوم : روش حذفی

در این روش با حذف یکی از مجهول ها ، مجهول دیگر را پیدا می کنیم .

چون دو تا مجهول داریم دو بار این کار می تواند انجام شود یعنی با حذف x مجهول y را پیدا کنیم و در مرحله بعد با حذف y مجهول x را پیدا می کنیم تا مختصات نقطه تلاقی دو خط به دست آید.

برای حذف هر مجهول ، به ضرایب اون مجهول در دو معادله دقت می کنیم و تلاش می کنیم با ضرب کردن معادله ها در یک عدد خاص ، ضریب یک مجهول در دو معادله ، قرینه هم باشند و در جمع جبری با هم حذف شوند . بقیه مراحل را در نمونه مثال حل شده زیر ، دنبال کنید:

مثال 1 : مرحله اول)

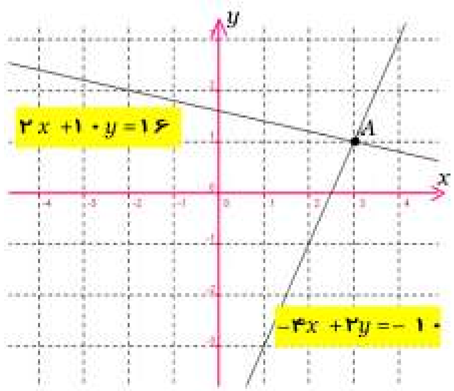
دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله پایینی را در 2+ ضرب کنیم ضرائب x با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} -4x+2y=-10 \\ +2x+10y=16 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} -\cancel{4x}+2y=-10 \\ +\cancel{4x}+20y=32 \end{cases}}_{22y=22 \Rightarrow y=1}$$

مرحله دوم)

دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله بالائی را در5 - ضرب کنیم ضرائب y با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} -4x+2y=-10 \\ +2x+10y=16 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} 20x-\cancel{10y}=+50 \\ +2x+\cancel{10y}=16 \end{cases}}_{22x=66 \Rightarrow x=3} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} +3 \\ +1 \end{bmatrix}$$



مثال 2 : مرحله اول)

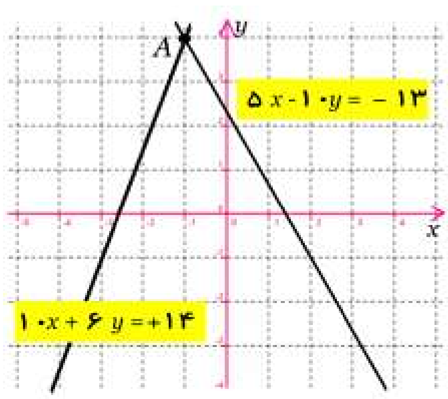
دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله بالائی را در 2- ضرب کنیم ضرائب x با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} 5x-2y=-13 \\ 10x+6y=+14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{10x}+4y=26 \\ +\cancel{10x}+6y=14 \end{cases} \Rightarrow y=4$$

مرحله دوم)

دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله بالائی را در3 + ضرب کنیم ضرائب y با هم قرینه خواهند شد:

$$\begin{cases} 5x-2y=-13 \\ 10x+6y=+14 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} +15x-\cancel{6y}=-39 \\ +10x+\cancel{6y}=14 \end{cases}}_{25x=-25 \Rightarrow x=-1} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} -1 \\ +4 \end{bmatrix}$$

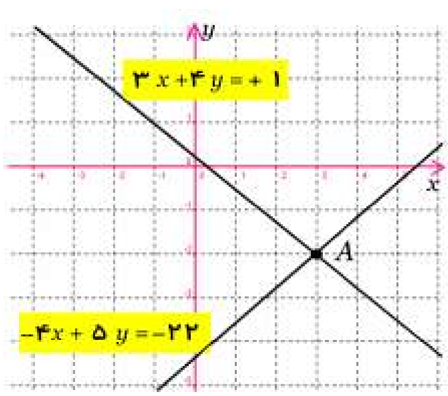


مثال 3 : مرحله اول) دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله بالائی را در 4+ و معادله پایینی را در 3+ ضرب کنیم ضرائب x با هم قرینه شده و حذف خواهند شد :

$$\begin{cases} +3x+4y=+1 \\ -4x+5y=-22 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} +12x+16y=+4 \\ -12x+15y=-66 \end{cases}}_{31y=-63 \Rightarrow y=-2}$$

مرحله دوم) دردستگاه معادلات زیراگرطرفین معادله بالائی را در5 - و معادله پایینی را در 4 + ضرب کنیم ضرائب y با هم قرینه شده و حذف خواهند شد :

$$\begin{cases} +3x+4y=+1 \\ -4x+5y=-22 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} -15x-20y=-5 \\ -16x+20y=-88 \end{cases}}_{-31x=-93 \Rightarrow x=3} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} +3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



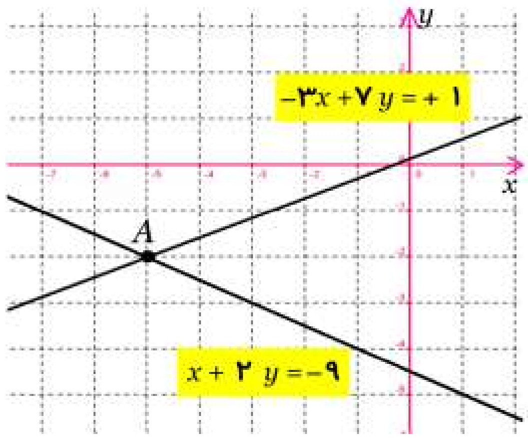
روش سوم : روش جاگذاری :

این روش معمولا در مثال هائی مناسب است که ضریب یک از مجهول ها $+1$ یا -1 باشند . در این روش یکی از مجهول ها را برحسب دیگری پیدا کرده در معادله دیگر جا گذاری می کنیم. مثل :

مثال 1 : مرحله اول) اگر در مثال زیر دقت کنید در معادله اول ، ضریب x برابر با یک می باشد پس x را بر حسب y به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x+2y=-9 & \Rightarrow \quad \underbrace{x=-2y-9}_{\Downarrow} \\ -3x+7y=+1 & \rightarrow \quad -3(-2y-9)+7y=+1 \end{cases}$$

$$6y+27+7y=+1 \rightarrow y=-2$$



مرحله دوم)

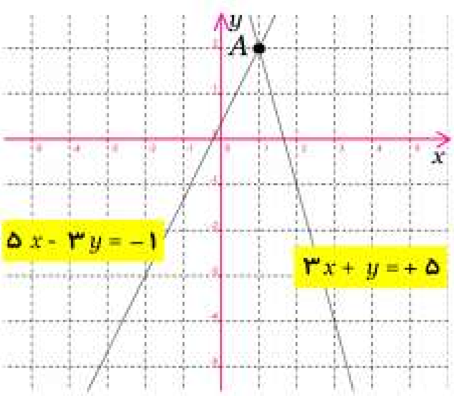
حالا مقدار y را در یکی از معادله های داده شده قرار داده و مقدار x را به دست می آوریم:

$$x+2y=-9 \Rightarrow x+2\times(-2)=-9$$

$$\Rightarrow x=-5 \qquad \Rightarrow A=\begin{bmatrix}-5\\-2\end{bmatrix}$$

مثال 2 : مرحله اول) اگر در مثال زیر دقت کنید در معادله دوم ، ضریب y برابر با یک می باشد، پس y را بر حسب x به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 5x-3y=-1 & \rightarrow 5x-3(-3x+5)=-1 \quad \Rightarrow x=1 \\ & \qquad \Uparrow \\ 3x+y=+5 & \Rightarrow \quad \overbrace{y=-3x+5} \end{cases}$$



مرحله دوم)

حالا مقدار x را در یکی از معادله های داده شده قرار داده و مقدار y را به دست می آوریم:

$$3x+y=+5 \Rightarrow 3x+(+1)=+5$$

$$\Rightarrow y=2 \qquad \Rightarrow A=\begin{bmatrix}+1\\+2\end{bmatrix}$$

روش چهارم : روش ماتریسی :

در این روش دقت می کنیم که جملات معادله به صورت مرتب در محل خودشان نوشته شده باشند .

از دو رابطه زیر ، جواب دستگاه معادلات را به دست می آوریم:

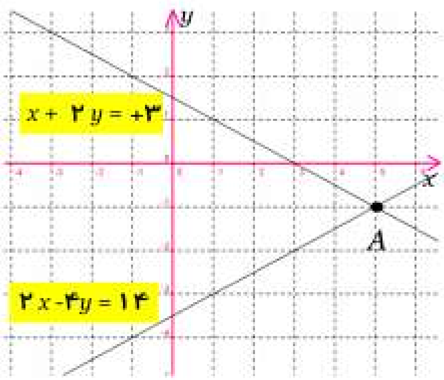
$$\left.\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=d \end{cases}\right) \Rightarrow y=\frac{ad-cm}{an-bm} \quad , \quad x=\frac{cn-bd}{an-bm}$$

مثال 1 :

$$\begin{cases} x+2y=+3 \\ 2x-4y=+14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1\times 14-2\times 3}{1\times(-4)-2\times 2}=\frac{+8}{-8}=-1$$

$$x=\frac{3\times(-4)-2\times 14}{1\times(-4)-2\times 2}=\frac{-40}{-8}=+5 \qquad A=\begin{bmatrix}+5\\-1\end{bmatrix}$$

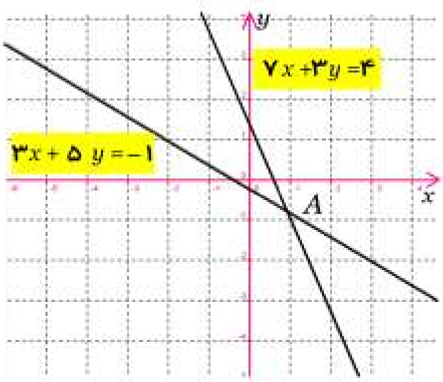


مثال 2 :

$$\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ 7x+3y=+4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3\times 4-7\times(-1)}{3\times 3-7\times 5}=\frac{+19}{-26}=-\frac{19}{26}$$

$$x=\frac{-1\times 3-5\times 4}{3\times 3-7\times 5}=\frac{-23}{-26}=+\frac{23}{26} \qquad A=\begin{bmatrix}+\frac{23}{26}\\-\frac{19}{26}\end{bmatrix}$$



روش پنجم : روش قیاسی

اگر در دستگاه معادلات خطی بتوانیم حالت زیر را به آسانی ایجاد کنیم می توانیم از حالت مقایسه برای حل دستگاه استفاده کنیم:

مثال 1 :

$$\begin{cases} 2x+4y=18 \\ 2x-7y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-4y+18 \\ 2x=+7y-4 \end{cases} \Rightarrow -4y+18=7y-4 \Rightarrow y=+2$$

حالا y به دست آمده را در یکی از معادله ها ، قرار می دهیم تا مقدار x را به دست بیاریم:

$$2x+4y=18 \Rightarrow 2x+4\times(+2)=18 \Rightarrow 2x=18-8 \Rightarrow x=5 \qquad \Rightarrow A=\begin{bmatrix}+5\\+2\end{bmatrix}$$

مثال 2 :

$$\begin{cases} -3x+7y=-24 \\ +5x+7y=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=+3x-24 \\ 7y=-5x-16 \end{cases} \Rightarrow +3x-24=-5x-16 \Rightarrow x=+1$$

حالا x به دست آمده را در یکی از معادله ها ، قرار می دهیم تا مقدار y را به دست بیاریم:

$$7y=+3x-24 \Rightarrow 7y=3\times 1-24 \Rightarrow 7y=-21 \Rightarrow y=-3 \qquad \Rightarrow A=\begin{bmatrix}+1\\-3\end{bmatrix}$$

نکته پایانی :

در هر یک از روش های ارائه شده دو مرحله برای حل دستگاه وجود داشت که می توان یک مرحله از حل را با یک روش و مرحله دوم را با روش دیگر حل کرد . مثلا در روش حذفی می توان مرحله اول را اجرا کرده و مرحله دوم را از روش جاگذاری استفاده کرده و عدد به دست آمده از مرحله اول را در مجهول جاگذاری کرده و مجهول دوم را محاسبه کرد.

انتخاب روش حل کاملا بر عهده خودمان است و در هر مثال با توجه به شرایط دستگاه ، تصمیم می گیریم که از کدام روش استفاده کنیم و این انتخاب به آسان شدن حل کمک می کند به این دلیل خوب است که همه روش ها را یاد بگیریم و در جای خود از آن استفاده کنیم .

فصل ۷ عبارت های گویا

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 7 – عبارت های گویا

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

برای تعریف عبارت گویا باید مرور مختصری بر تعریف چند جمله ای کنیم . در فصل پنجم کتاب تک جمله ای به صورت زیر تعریف شده است:

هر عبارت را، که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفیِ یک یا چند متغیر باشد، تک جمله‌ای (یک جمله‌ای) می‌نامیم.

عبارت‌های زیر همگی تک جمله‌ای هستند.

x ، ۷ ، $۴z$ ، $۵x^{۱۰}$ ، $\pi x^{۲}$ ، $-\sqrt{۳}a^{۳}x^{۲}z$ ، $\frac{۱}{۵}xy$ ، $-\frac{۲}{۷}$

و عبارت‌های زیر تک جمله‌ای نیستند.

$\frac{۱}{x}$ ، ۳^{x} ، $۲\sqrt{x}$ ، $۲x^{۲}+۲x$ ، $\sqrt[۳]{y}$ ، $۱+x$

تعریف چند جمله ای :

چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است.

چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند :

$۳x^{۲}+۵-۲x+۲x^{۳}$ | $۴x^{۲}-۴x+۱$ | ، $x^{۲}-۲x$ | ، $\frac{۲}{۳}ax^{۲}y-\frac{۳}{۲}axy^{۲}-axy$ | ، $۳x^{۴}$

چند تا از عبارت ها ، چند جمله ای هستند ؟ .... تا

x^2+y^3 و $x+3$ و $8x+9y$

$5x^7+1$ و $\frac{5}{x}$ و $\sqrt[3]{x+5}$ و $\sqrt{x^2}$ و $\frac{7x+9}{x}$ و $\frac{7|x|}{5}$ و $\sqrt{z}$ و $\frac{7x}{8}+\frac{5}{8}$ و $\sqrt{2x+5y}$

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.

با توجه به تعریف بالا عبارت‌های زیر گویا هستند :

$\frac{۲x-۵}{۵x^{۳}-۲x^{۲}+۱}$ و $\frac{x+۵}{x-۱}$ و $\frac{-a}{۴}$ و $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{x-۳}{۴}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{x^{۲}-\sqrt{۳}x+۱}{۹xy}$

$\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱۰}{x+۲}$ و $\frac{۳x+\sqrt{۷}}{x^{۲}}$ و $\frac{xy^{۲}}{(x-y)^{۲}}$ و $\frac{x^{۳}}{۱}$ و $\frac{-a}{b}$ و $x^{۳}+۲x-۷$

امّا عبارت‌های زیر گویا نیستند.

$\sqrt{xy}$ و $\frac{\sqrt{x}}{x+y}$ و $\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$

مثال 1: کدام یک موارد زیر عبارت گویا است ؟

$\frac{|x|+|y|}{x}$ و $\frac{\sqrt{۲x}}{۲۵}$ و $\frac{\sqrt{۳}+x}{۵}$ و $\frac{ah}{۲}$ و $\frac{x+۶}{۳}$ و $\frac{۷}{x-۱}$

$\frac{۳-a}{۲+x}$ و ۱۴ و $\frac{mn+n^{۲}}{۵-n}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ و $\frac{x-۵}{\sqrt{۳}+۱}$ و $\frac{x\sqrt{y}+۱}{x^{۲}}$

مثال 2 : چندتا از عبارت های زیر ، عبارت گویا است ؟

$\frac{a\sqrt{2}+1}{\sqrt{3a}+\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ و $\frac{3x+\sqrt{7}}{x^2}$ و $|x-a|$ و $-\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ و $\frac{|x|+|y|}{x}$ و $\frac{\sqrt{5}x^3-x}{x+\sqrt{2}}$

الف) 3 ( ) ب) 4 ( ) ج) 2 ( ) د) 5 ( )

مثال 3 : چندتا از عبارت های زیر ، عبارت گویا است ؟

$\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{2}}$ و $\sqrt{x}$ و $|x^2-x|$ و $|x-a|$ و $\frac{\sqrt{7}+3x}{x^2}$ و $\frac{|x|}{y}$ و $\frac{5y-x}{x^2+y^3}$ و $\frac{5}{\sqrt[3]{2}\,x}$

الف) 2 ( ) ب) 3 ( ) ج) 4 ( ) د) 5 ( )

مثال 4 : کدام یک از عبارات زیر ، عبارت گویا نیست ؟

الف) $\frac{10}{x+2}$ ( ) ب) $\frac{x+5}{x-1}$ ( ) ج) $\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1}$ ( ) د) $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$ ( )

مثال 5 : کدام یک از عبارات زیر ، عبارت گویا نیست ؟

الف) $\frac{a\sqrt{5}}{x^8-10}$ ( ) ب) $\frac{\sqrt{7x}}{2x+1}$ ( ) ج) $x^{-3}(2x^2+4)$ ( ) د) $(2x+9)^{-2}$ ( )

مثال 6 : کدام یک از عبارات زیر گویا نیست ؟

الف) $\frac{\frac{a+2}{y-2}}{x}$ ( ) ب) $\frac{\sqrt{x^2-y+x}}{2z+5y}$ ( ) ج) $x^5-\sqrt{7}$ ( ) د) $\frac{\sqrt{5}x^3-x}{x+\sqrt{2}}$ ( )

مثال 7 : کدام یک از عبارات زیر ، عبارت گویا است ؟

الف) $2\sqrt{x}$ ( ) ب) $\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ( ) ج) $\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+2}}$ ( ) د) $\frac{\sqrt{2}x^3+1}{5+\sqrt{3}x}$ ( )

دامنه تعریف در عبارات گویا

برای تعیین تمام مقادیری که به ازای آن ها یک عبارت گویا ، تعریف شده باشد ، باید مقادیری را حذف کنیم که به ازای آن ها مخرج کسر صفر می شوند.
یعنی مقادیری که نمی توان به جای x یا هر متغیر دیگر در عبارات گویا قرار داد از اعداد حقیقی حذف می کنیم ، چون وقتی آن مقدار جاگذاری شود ، مخرج کسر صفر خواهد شد و کسر تعریف شده نیست.

مثال 1 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{3x^2+5x-2}{2x-10}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز عددی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

$$2x-10=0 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 5 به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ +5\ \}$$

این دامنه تعریف به این معناست که همه اعداد حقیقی R مورد قبول هستند به جز عدد 5+

مثال 2 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{3x+7}{12-4x}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز عددی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

$$12-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 3 + به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ +3\ \}$$

این دامنه تعریف به این معناست که همه اعداد حقیقی R مورد قبول هستند به جز عدد 3+

مثال 3 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{2+6x}{(x+1)(x-7)}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

$$\begin{cases} x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \\ x-7=0 \quad \Rightarrow \quad x=+7 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 7+ و 1 - به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ -1\ ,\ +7\ \}$$

مثال 4 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{-3}{a(a-4)(2a+16)}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \\ a-4=0 \quad \Rightarrow \quad a=4 \\ 2a+16=0 \quad \Rightarrow \quad a=-8 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 4+ و 0 و 8 - به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ -8\ ,\ 0\ ,\ +4\ \}$$

مثال 5 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{x-3}{x^2-16}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

با توجه به این که مخرج اتحاد مزدوج می باشد لذا داریم :

$$x^2-16=0 \Rightarrow (x+4)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-4=0 \Rightarrow x=+4 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 4 + و 4 - به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ -4\ ,\ +4\ \}$$

مثال 6 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{3x+1}{x^2-8x+12}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

با توجه به این که مخرج اتحاد جمله مشترک می باشد لذا داریم :

$$x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-6)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x=+6 \\ x-2=0 \Rightarrow x=+2 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 6 + و 2 + به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ +2\ ,\ +6\ \}$$

مثال 7 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{8+6x}{x^2+3x-10}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

با توجه به این که مخرج اتحاد جمله مشترک می باشد لذا داریم :

$$x^2+3x-10=0 \Rightarrow (x+5)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x-2=0 \Rightarrow x=+2 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 5 - و 2 + به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ +2\ ,\ -5\ \}$$

مثال 8 : دامنه تعریف عبارت گویای $\dfrac{-5}{(x^2+2x-24)(x^2-9)}$ را تعیین کنید :

جواب : در متغیر x همه اعداد حقیقی می توانند قرار بگیرند به جز اعدادی که مخرج را صفر می کنند . به این دلیل آن عدد را باید پیدا کنیم:

با توجه به این که مخرج حاصل ضرب اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج می باشد لذا داریم :

$$x^2+2x-24=0 \Rightarrow (x+6)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-4=0 \Rightarrow x=+4 \end{cases}$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow (x+3)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-3=0 \Rightarrow x=+3 \end{cases}$$

دامنه تعریف این عبارت گویا با مشخص شدن عدد 6 - و 4 + و 3 + و 3 - به صورت زیر بیان می شود:

$$D=R-\{\ -3\ ,\ -6\ ,+3\ ,\ +4\ \}$$

هر یک از عبارت‌های زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\dfrac{8x+5}{2}$ ب) $\dfrac{7+x}{x}$ ج) $\dfrac{2b+1}{2b-1}$

د) $\dfrac{3x}{x^2+4}$ هـ) $\dfrac{x}{x^2-1}$ و) $\dfrac{a+5}{a^2-5a+6}$

ساده کردن عبارت های گویا

در خیلی از موارد ما نیاز داریم عبارات گویا را با هم جمع و تفریق یا ضرب و تقسیم کنیم و بعد یا قبل از محاسبات ، آن ها را تا جائی که لازم باشه ساده تر کنیم . به این دلیل مطالبی که قبلا یاد گرفتیم از قبیل : گرفتن مخرج مشترک و فاکتور گیری و استفاده از اتحاد های جبری برای ساده کردن عبارات جبری لازم خواهند شد . به مثال های زیر توجه کنید :

الف) $\frac{\overset{1}{\cancel{5}}xy^3}{\underset{1}{\cancel{8}}x^2z^2} \times \frac{\overset{2}{\cancel{16}}z^3}{\underset{3}{\cancel{15}}y^2} = \frac{2yz}{3x}$

ب) $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x}} \times \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}}{\cancel{(x+3)}(x-5)} = \frac{x}{(x-5)}$

در مثال اول فقط ساده شده شده و نیاز به کارهای دیگری نبوده است ولی در مثال دوم با استفاده از اتحاد جمله مشترک ، مخرج کسر دوم تجزیه شده و سپس ساده کردن کسرها انجام شده است . برای یاد آوری مطالب مربوط به اتحادها ، آن ها را مرور مختصری بکنیم:

اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به ازای همه مقادیر با هم برابر باشند اتحاد جبری تشکیل می شود.

اتحاد اول (اتحاد مربع مجموع دو جمله):	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
اتحاد دوم (اتحاد مربع تفاضل دو جمله):	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
اتحاد سوم (اتحاد مکعب مجموع دو جمله):	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
اتحادچهارم (اتحاد مکعب تفاضل دو جمله):	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
اتحاد پنجم (اتحاد مربع مجموع سه جمله):	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
اتحاد ششم (اتحاد مزدوج):	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
اتحاد هفتم (اتحاد مجموع مکعبات دو جمله (اتحاد چاق و لاغر)):	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
اتحاد هشتم (اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله (اتحاد چاق و لاغر)):	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
اتحاد نهم (اتحاد جمله مشترک):	$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

از بین این 9 تا اتحاد ارائه شده ، چهار تا از آن ها یعنی اتحاد اول و دوم و ششم و نهم بیشتر مورد استفاده قرار خواهند گرفت . به شکل زیر :

مثال 1 :

$$\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^3}{8x} = \frac{y^2}{6}$$

مثال 2 :

$$\frac{(x-6)}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{(x-6)}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{(x+4)}$$

مثال 3 :

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-4x}\div\frac{x^2+3x+2}{(x-4)}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x)(x-4)}\times\frac{(x-4)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x-5}{(x)(x+2)}$$

مثال 4 :

$$\frac{x^2-81}{x^2+x-72}\times\frac{x^2-3x-40}{(x^2+5x)}=\frac{(x+9)(x-9)}{(x+9)(x-8)}\times\frac{(x-8)(x+5)}{(x)(x+5)}=\frac{(x-9)}{(x)}$$

تمرین : حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{a^۲-a-۶}{a+۳}\times\frac{a+۳}{a^۲-۴}$

ب) $\frac{a^۲b+ab^۲}{a}\times\frac{۳ab}{(a+b)^۲}$

ج) $\frac{x^۲+۳x+۲}{x+۲}\div\frac{x+۱}{x+۵}$

د) $\frac{۴x^۴}{۳xy^۲}\div\frac{۸x}{۹y^۵}$

در برخی مثال ها نیاز داریم که کسرها را با هم جمع و تفریق کنیم که گرفتن مخرج مشترک و ساده کردن کسرها لازم خواهد بود. مثل :

مثال 1 :

$$\frac{3x+7}{x+2}+\frac{2x-3}{x+2}=\frac{3x+7+2x-3}{x+2}=\frac{5x+4}{x+2}$$

مثال 2 :

$$\frac{5x-1}{x+3}-\frac{3x-7}{x+3}=\frac{5x-1-(3x-7)}{x+3}=\frac{5x-1-3x+7}{x+3}=\frac{2x+6}{x+3}=\frac{2(x+3)}{x+3}=\frac{2}{1}=2$$

مثال 3 :

$$\frac{x^2-20}{x^2-4}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{x^2-20+(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-20+x^2-4x+4}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x^2-4x-16}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{(2)(x^2-2x-8)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x-8}{x-2}$$

تمرین : ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید . (در همه تمرین ها ، مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده اند)

الف) $\frac{a^۲-۱۶}{a+۴}\times\frac{a+۲}{a^۲-۸a+۱۶}$

ب) $\frac{m^۲-۴۹}{m+۱}\div\frac{۷-m}{m^۲-۱}$

ج) $\frac{x^۲-۴x+۴}{۴x^۲y-۸xy}\div\frac{x^۲+x-۶}{۶x+۱۸}$

د) $\frac{۱-c^۲}{b^۳}\times\frac{b^۲}{۱-۲c+c^۲}$

تکالیف : کاردرکلاس و تمرینات صفحه 117 و 118 را در دفتر بنویسید .

تقسیم چندجمله‌ای ها

برای تقسیم چند جمله ای ها به سه نوع تقسیم زیر توجه کنید :

1 – تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای

2 – تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

3 – تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

در هر مورد ازاین تقسیم ها به شیوه خاصی عمل می کنیم . البته نوع اول و دوم در این روش ها را شما قبلا آموخته اید که در این جا به صورت یادآوری ارائه می شود ولی نوع سوم تقسیم یعنی : (تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای) برای اولین بار آموزش داده می شود که روش بسیار مهمی خواهد بود و لازم است به خوبی یاد بگیرید:

1 – تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای

به نمونه های زیر توجه کنید : کافی است که در تقسیم ها قواعد مربوط به تقسیم اعداد توان دار را رعایت کنیم :

مثال 1 :

$$12x^2y \div 4xy = \frac{12x^2y}{4xy} = 3x$$

مثال 2 :

$$-45x^7am^3 \div 9xm^2a = \frac{-45x^7am^3}{9xm^2a} = -5x^6m^1$$

مثال 3 :

$$3a^2b^3cd \div ab^2c = \frac{3a^2b^3cd}{ab^2c} = 3abd$$

2 – تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

در این تقسیم مثل نمونه های زیر می توان عمل کرد :

مثال 1 :

$$(15a^2b^7 + 10ab^2) \div (-5ab) = \frac{15a^2b^7 + 10ab^2}{-5ab} = \frac{15a^2b^7}{-5ab} + \frac{10ab^2}{-5ab} = -3ab^6 - 2b$$

مثال 2 :

$$(2x^3y^2 - 10xy^2 + 4x^2y^2) \div (2xy) = \frac{2x^3y^2 - 10xy^2 + 4x^2y^2}{2xy} = \frac{2x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy^2}{2xy} + \frac{4x^2y^2}{2xy} = x^2y - 5y + 2xy$$

مثال 3 :

$$\frac{12x^4y^5z + 8xay^4 - 6bx^3y^4}{-2xy^4} = \frac{12x^4y^5z}{-2xy^4} + \frac{8xay^4}{-2xy^4} - \frac{6bx^3y^4}{-2xy^4} = -6x^3yz - 4a + 3bx^2$$

نکته : در این مثال ها می توانستیم به جای تفکیک به چند کسر ، از روش فاکتور گیری استفاده کنیم. سه مثال بالا را با روش فاکتور گیری هم حل می کنم که به روش حل آن ها می توانید توجه کنید :

مثال 1 با روش فاکتور گیری :

$$(15a^2b^7+10ab^2)\div(-5ab)=\frac{15a^2b^7+10ab^2}{-5ab}=\frac{(-5ab)(-3ab^6-2b)}{-5ab}=-3ab^6-2b$$

مثال 2 با روش فاکتور گیری :

$$(2x^3y^2-10\ xy^2+4x^2y^2)\div(2xy)=\frac{(2xy)(x^2y-5\ y+2xy)}{2xy}=x^2y-5y+2xy$$

مثال 3 با روش فاکتور گیری :

$$\frac{12x^4y^5z+8\ xay^4-6bx^3y^4}{-2xy^4}=\frac{(-2xy^4)(-6x^3yz-4a+3bx^2)}{-2xy^4}=-6x^3yz-4a+3bx^2$$

تکالیف : کاردرکلاس صفحه 121 و 122 و تمرینات صفحات 123 و 124 و 125 را در دفتر بنویسید .

3 – تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

این نوع تقسیم نسبت به دو نوع قبلی کار بیشتری خواهد داشت و اشاره می کنم که ما فعلا تقسیم چند جمله ای هایی را می خوانیم که یک نوع متغیر دارند و فعلا نیازی به یادگیری تقسیم چند جمله ای ها با چند متغیر نداریم که راه حل آسانی هم ندارند .

ابتدا باید قبل از شروع تقسیم جملات هر دو چند جمله ای (هم مقسوم و هم مقسوم علیه) براساس توان های متغیر از بزرگ به کوچک مرتب شوند . یعنی جمله های که متغیرش بالاترین توان را دارد در ابتدای چند جمله ای نوشته شود و بقیه به ترتیب بعد از آن نوشته شوند.
به جمله ای که بالاترین توان متغیر را دارد جمله پیشرو خواهیم گفت که بار اصلی تقسیم در هر مرحله با جمله پیشرو خواهد بود . مثل :

$$-6x^3+8x^7-5x+3x^2-10+7x^4 \quad\Rightarrow\quad 8x^7+7x^4-6x^3+3x^2-5x-10$$

$$10a^5+a^2-1+2a^6-9a^7+3a \quad\Rightarrow\quad -9a^7+2a^6+10a^5+a^2+3a-1$$

بعداز مرتب کردن جملات مقسوم و مقسوم علیه ، به صورت زیر مراحل را انجام می دهیم.

(توجه کنید در هر مرحله از تقسیم بین جملات پیشرو انجام خواهد شد)

مثال 1 : به مثال زیر توجه کنید . در این مثال جملات مقسوم مرتب نیستند که ابتدا آن ها را مرتب می کنیم:

$$(12x^2+8x^3-20x) \quad \div \quad (4x^2-3)=?$$

حل :

$$(8x^3+12x^2-20x) \quad \div \quad (4x^2-3)=?$$

در ادامه مراحل زیر را انجام می دهیم:

$$\begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline & \end{array}$$

مرحله بعد :

$$\begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline & ۲x \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline -(۸x^۳-۶x\ ) & ۲x \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline -(۸x^۳-۶x\ ) & ۲x \\ \hline ۱۲x^۲-۱۴x & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline -(۸x^۳-۶x\ ) & ۲x+۳ \\ \hline ۱۲x^۲-۱۴x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} ۸x^۳+۱۲x^۲-۲۰x & ۴x^۲-۳ \\ \hline -(۸x^۳-۶x\ ) & ۲x+۳ \\ \hline ۱۲x^۲-۱۴x & \\ -(۱۲x^۲-۹) & \\ \hline -۱۴x+۹ & \end{array} \Longrightarrow$$

خارج قسمت $\Longrightarrow ۲x+۳$

باقی مانده $\Longrightarrow -۱۴x+۹$

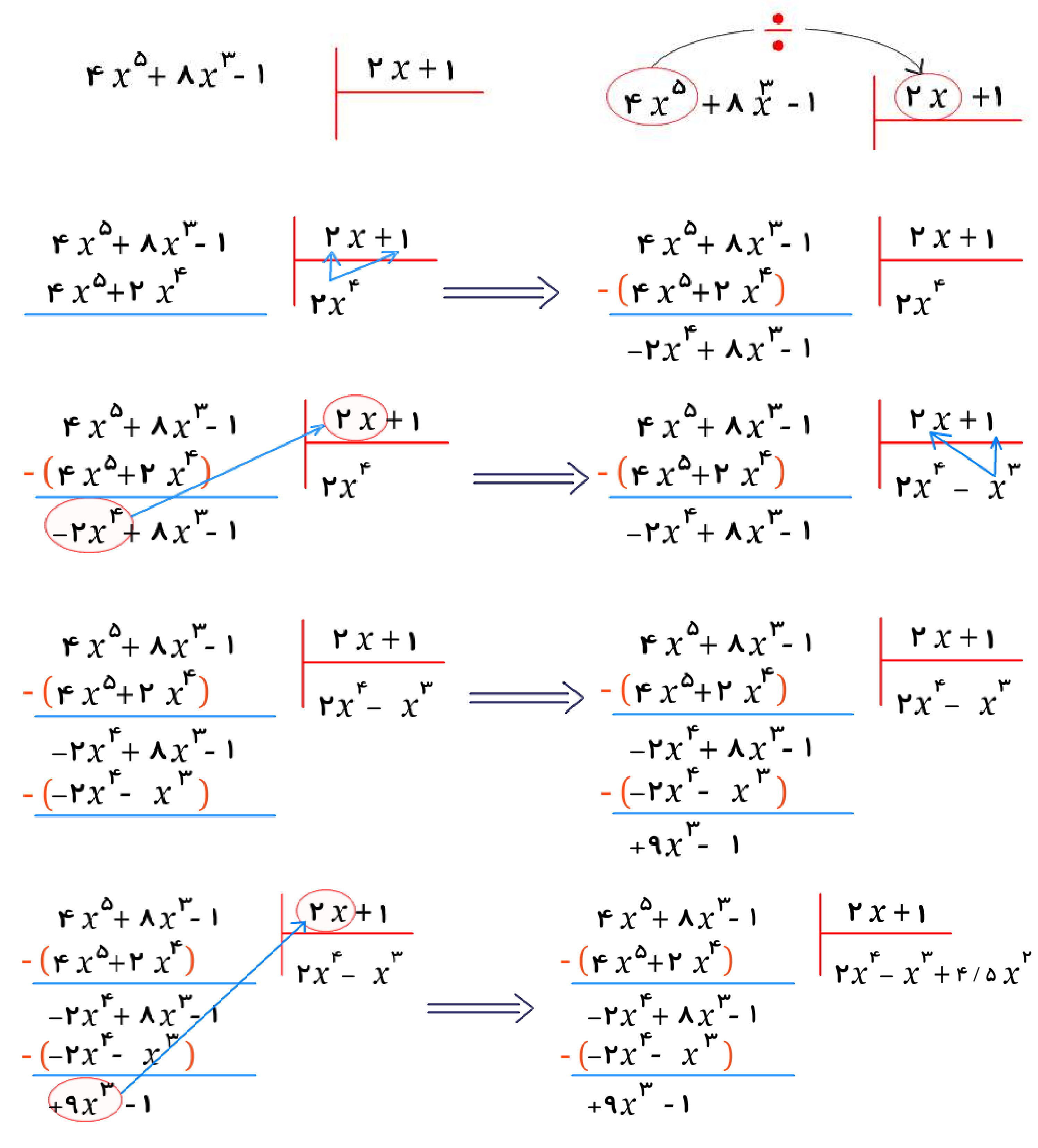
مثال 2 : به مثال زیر توجه کنید . در این مثال جملات مقسوم مرتب نیستند که ابتدا آن ها را مرتب می کنیم:

$$(8x^3 + 4x^5 - 1) \quad \div \quad (1 + 2x) = ?$$

حل :

$$(4x^5 + 8x^3 - 1) \quad \div \quad (2x + 1) = ?$$

در ادامه مراحل زیر را انجام می دهیم:



مثال 3 : به مثال زیر توجه کنید . در این مثال جملات مقسوم و مقسوم علیه مرتب هستند و ما روند تقسیم را انجام می دهیم :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{4x^3} - 3x^2 + x + 7 & x^2 - 2 \\ \cline{3-3}
-(& +\cancel{4x^3} - 8x\ ) & 4x - 3 \\ \cline{2-2}
 & -\cancel{3x^2} + 9x + 7 & \\
-(& -\cancel{3x^2} + 6\ ) & \\ \cline{2-2}
 & +9x + 1 &
\end{array}
$$

مثال 4 : به مثال زیر توجه کنید . در این مثال جملات مقسوم و مقسوم علیه مرتب هستند که روند تقسیم را انجام می دهیم :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^2} - 5x - 24 & x - 8 \\ \cline{3-3}
-(& \cancel{x^2} - 8x\ ) & x + 3 \\ \cline{2-2}
 & \cancel{3x} - \cancel{24} & \\
-(& \cancel{3x} - \cancel{24}\ ) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

مثال 5 : به مثال زیر توجه کنید . در این مثال جملات مقسوم علیه مرتب نیستند که قبل از تقسیم ، مرتب کرده و ادامه می دهیم :

$$
\begin{array}{l|l}
10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 & -3 + 2x^2 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{10x^4} - 3x^2 + 2x - 19 & 2x^2 - 3 \\ \cline{3-3}
-(& \cancel{10x^4} - 15x^2\ ) & 5x^2 + 6 \\ \cline{2-2}
 & \cancel{12x^2} + 2x - 19 & \\
-(& \cancel{12x^2} - 18\ ) & \\ \cline{2-2}
 & 2x - 1 &
\end{array}
$$

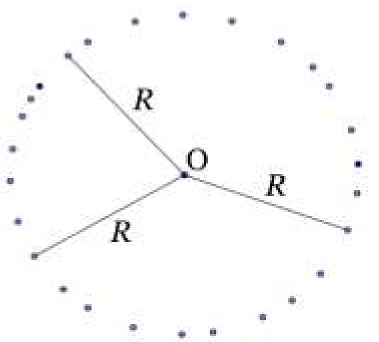
تکالیف : کاردرکلاس و تمرینات صفحه 129 را در دفتر بنویسید .

درس نامه ریاضی پایه نهم - فصل 8 – حجم و مساحت

تهیه و تدوین : اصغر بابائی - دبیر ریاضی

درس اوّل: حجم و مساحت کره

تعریف دایره :



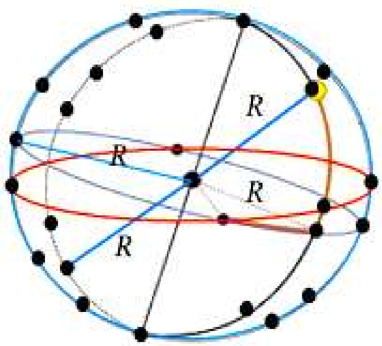
مکان هندسی نقاطی از **صفحه** است که فاصله همه آن نقاط از نقطه ای بنام **مرکز** به یک فاصله می باشد.

به اندازه فاصله این نقاط تا مرکز دایره **شعاع دایره** می گویند. مثل شکل مقابل :

فرمول محاسبه مساحت دایره :

$$S = \pi . R^2$$

تعریف کره :

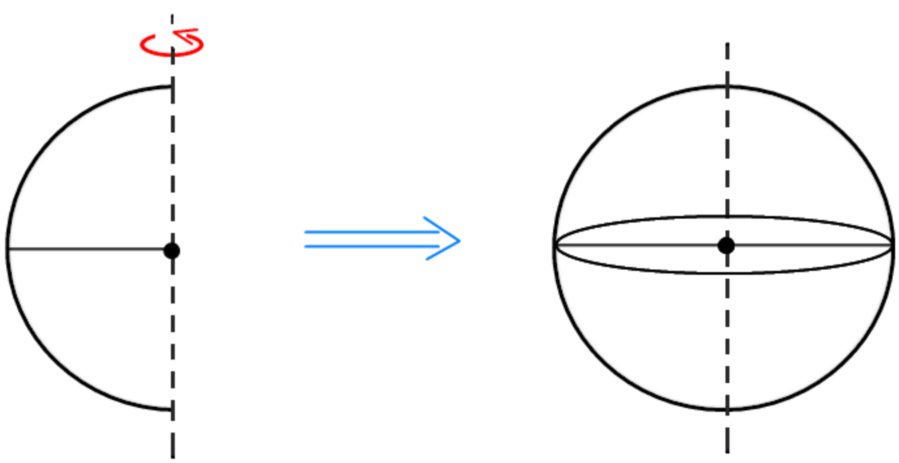


مکان هندسی نقاطی از **فضا** است که فاصله همه آن نقاط از نقطه ای بنام **مرکز** به یک فاصله می باشد.

به اندازه فاصله این نقاط تا مرکز کره **شعاع کره** می گویند. مثل شکل مقابل :

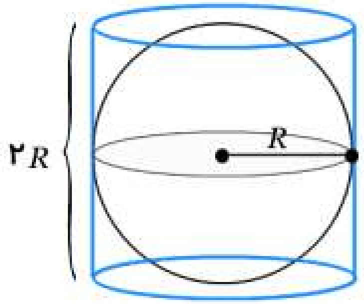
تعریف دوم برای کره :

از دوران یک **نیمدایره (یا دایره) حول قطرش** ، کره تشکیل می شود.

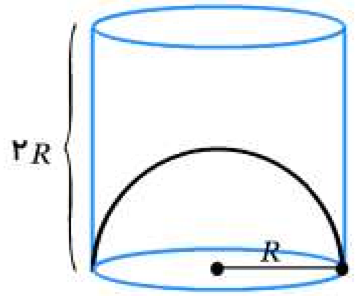


نحوه محاسبه حجم کره :

اگر یک کره در داخل یک استوانه به صورت مقابل محاط شود ، به طوری که از کناره ها و از قاعده های استوانه با محیط کره مماس شود می توان از این استوانه و کره برای محاسبه کره استفاده کرد .



برای این کار از یک توپ پلاستیکی می توان استفاده کرد و بعد از اطمینان از محاط شدن کره در داخل استوانه ، توپ پلاستیکی کره ی مورد نظر را بیرون آورده و به دو تا نیم کره مساوی برش می دهیم .
سپس یکی از نیمکره ها را به صورت وارونه ، با چسب به کف داخل استوانه می چسبانیم ،
به طوریکه موقع ریختن آب ، آب به داخل نیمکره چسبیده شده نرود . مثل تصویر مقابل :



بعد از آماده شدن این ابزار ، با استفاده از نیمکره دوم که در بیرون داریم ، مقداری آب در استوانه می ریزیم
این کار باید بادقت انجام شود به طوری که باید تمام فضای داخلی نیمکره را با آب کاملا پر کنیم و تمام آب را در استوانه بریزیم .
اگر با دقت تمام کارها را انجام داده باشیم خواهیم دید که با دوبار پرکردن و خالی کردن نیمکره در استوانه ، آن استوانه پر خواهد شد.

نتیجه:

حجم داخلی کل استوانه 1/5 برابر حجم یک کره محاط شده اش می باشد .

با توجه به اندازه های شکل بالا می توان حجم استوانه را چنین به دست آورد :

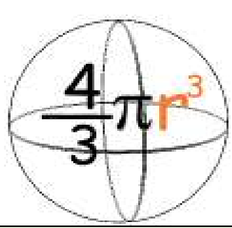
$$V_{\text{استوانه}} = S\,.\,h \quad \Rightarrow \quad V_{\text{استوانه}} = \pi\,.\,R^2 \times h$$

و چون در این شکل ، ارتفاع استوانه دو برابر شعاع کره است ($h = 2R$) در این صورت می توان نوشت :

$$V_{\text{استوانه}} = \pi\,.\,R^2 \times 2R \Rightarrow V_{\text{استوانه}} = 2\pi\,.\,R^3$$

از طرفی چون حجم استوانه 1/5 برابر کره است پس داریم :

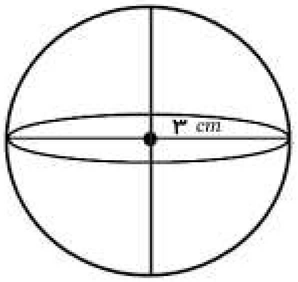
$$1/5V = 2\pi\,.\,R^3 \quad \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{2\pi\,.\,R^3}{1/5}$$



$$V_{\text{حجم کره}} = \frac{4}{3}\pi \times R^3$$

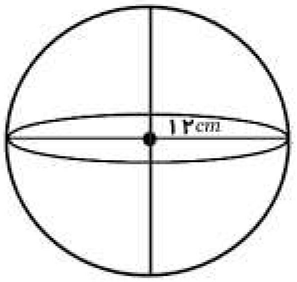
با استفاده از فرمول بالا ، می توانیم حجم کره ها و یا نیم کره ها و امثال آن را محاسبه کنیم.
توجه داشته باشید در حل هر مثال نوشتن فرمول و محاسبه کامل و در نهایت نوشتن واحد ، لازم خواهد بود.

مثال 1 : حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 3 سانتی متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 3 = 36\pi \ cm^3$$

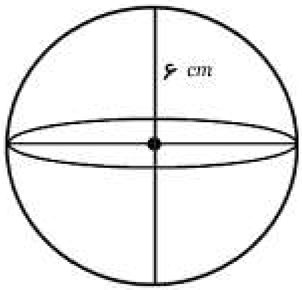
مثال 2 : حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 12 سانتی متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 12 = 2304\pi \ cm^3$$

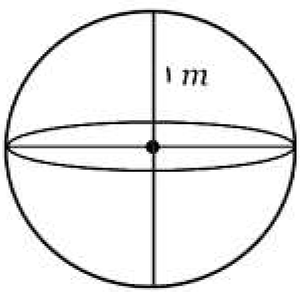
مثال 3 : حجم کره ای را به دست آورید که اندازه قطر آن 12 سانتی متر باشد ؟

توجه داشته باشید در این مثال اندازه شعاع برابر با 6 سانتی متر خواهد بود.



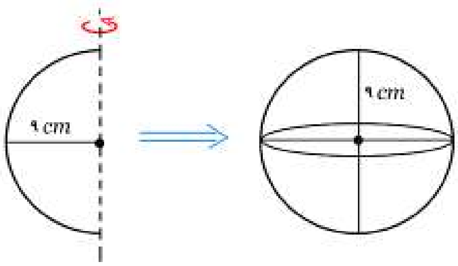
$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 6 = 288\pi \ cm^3$$

مثال 4 : حجم کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 1 متر باشد ؟



$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{4}{3}\pi \quad m^3$$

مثال 5 : نیم دایره ای به شعاع 9 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .

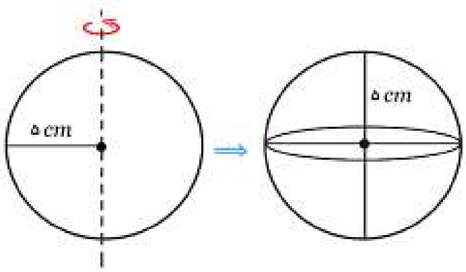


الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ .... جواب : (کره)

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 9 \times 9 \times 9 = 972\pi \ cm^3$$

مثال 6 : دایره ای به قطر 10 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .



الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ .... جواب : (کره)

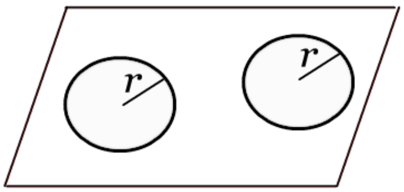
ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5 \times 5 \times 5 = \frac{500}{3}\pi \ cm^3$$

نحوه محاسبه مساحت رویه کره :

برای به دست آوردن مساحت رویه کره می توان به روش زیر عمل کرد . البته توجه داشته باشید این روش اثبات و به دست آوردن فرمول مساحت ، به روش شهودی است و اثبات اصلی را سال های بعد خواهید خواند .

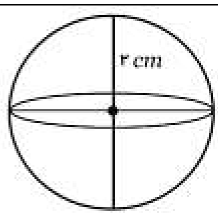
ابتدا یک کره را از وسط به دو نیمکره تقسیم می کنیم و یکی از آن ها را روی یک کاغذ بزرگ قرار داده و دو تا دایره با شعاع مساوی با شعاع کره رسم و از کاغذ جدا می کنیم . با استفاده از قیچی دایره های کاغذی را به نوارهای نازک برش داده و با چسب مایع روی نیکره مورد نظر می چسبایم . در این کار باید توجه کنیم که نوارهای کاغذی باید باریک بوده و موقع چسباندن روی نیمکره چروکیده نشوند و صاف روی نیمکره بچسبند و روی هم قرار نگیرند. حتی از کوچک ترین برش های کاغذ هم باید برای پوشش روی نیکره استفاده کنیم. اگر این کار را با دقت انجام دهید مشاهده خواهید کرد که دوتا دایره کاغذی روی نیمکره را کاملا می پوشانند . با این کار می توان گفت که مساحت روی نیمکره با دوبرابر مساحت دایره ها برابر است یا به عبارت دیگر مساحت کل کره با مساحت چهار تا دایره مورد نظر برابر است و این یعنی :



$$S = 4 \times \pi \ r^2 = 4\pi \ r^2$$

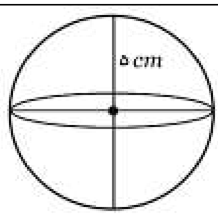
توجه داشته باشید برای واحد اندازه گیری مساحت از پسوند مربع استفاده می کنیم ، مثل : سانتی متر مربع ، متر مربع و ...

مثال 1 : مساحت کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 2 سانتی متر باشد ؟



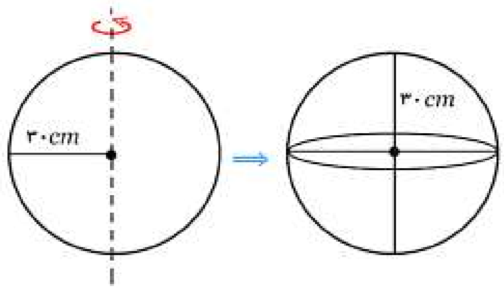
$$S = 4\pi \ r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 2 \times 2 = 16\pi \quad cm^2$$

مثال 2 : مساحت کره ای را به دست آورید که اندازه شعاع آن 5 سانتی متر باشد ؟



$$S = 4\pi \ r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 5 \times 5 = 100\pi \quad cm^2$$

مثال 3 : دایره ای به شعاع 30 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .



الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ .... جواب : (کره)

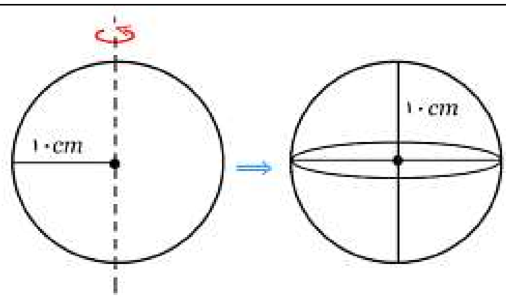
ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 30 \times 30 \times 30 = 36000 \ \pi \ cm^3$$

ج) مساحت آن را به دست آورید :

$$S = 4\pi \ r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 30 \times 30 = 3600\pi \ cm^2$$

مثال 4 : دایره ای به شعاع 10 سانتی متر را حول قطرش دوران می دهیم .



الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ .... جواب : (کره)

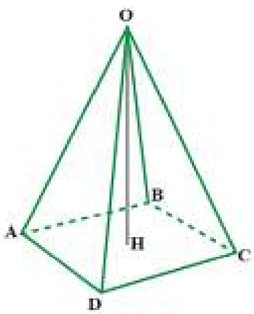
ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10 \times 10 \times 10 = \frac{4000}{3}\pi \ cm^3$$

ج) مساحت آن را به دست آورید :

$$S = 4\pi \ r^2 \Rightarrow 4 \times \pi \times 10 \times 10 = 400\pi \ cm^2$$

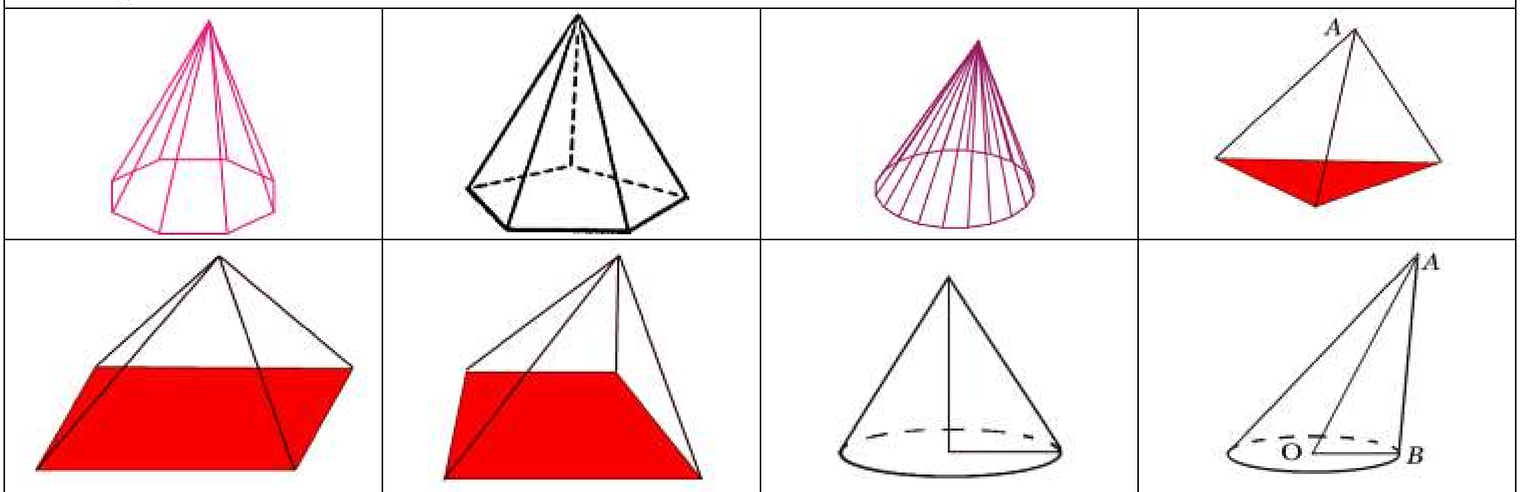
درس دوم: حجم هرم و مخروط



آشنائی با هرم :

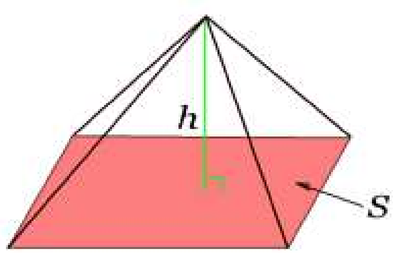
به تصویر مقابل نگاه کنید ، جسمی دیده می شود که تنها قاعده آن یک چند ضلعی بوده و دیواره های جسم به صورت مثلث هستند و یال های کناری با هم موازی نیستند و یال ها همدیگر را در راس بالائی قطع کرده اند ،

به این نوع جسم ها هرم گفته می شود .



نحوه محاسبه حجم هرم :

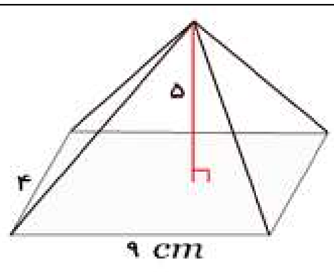
در نمونه های بالا ، قاعده ی جسم یک چند ضلعی است (حتی دایره) که برای محاسبه حجم آن ها باید مساحت قاعده را به دست آورده و به صورت زیر حجم را محاسبه کنیم:



$$V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

مثال 1 : قاعده هرمی به صورت مستطیل به ابعاد 4 و 9 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 5 سانتی متر باشد ،

حجم هرم را به دست آورید ؟

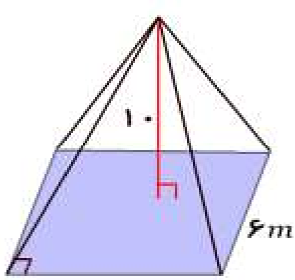


$$S = 4 \times 9 = 36 \ cm^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \ cm^3$$

مثال 2 : قاعده هرمی به صورت مربع به 6 متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 10 متر باشد ،

حجم هرم را به دست آورید ؟

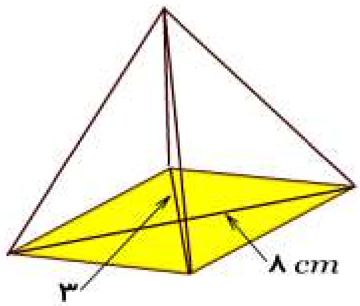


$$S = 6 \times 6 = 36 \ m^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 10 = 120 \ m^3$$

مثال 3 : قاعده هرمی به صورت لوزی با قطر های 8 و 3 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 4 سانتی متر باشد ،

حجم هرم را به دست آورید ؟

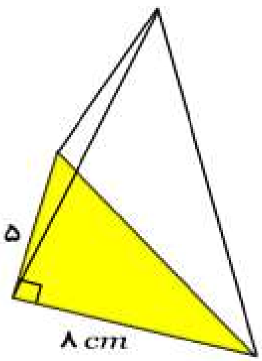


$$S = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \ cm^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times 4 = 16 \ cm^3$$

مثال 4 : قاعده هرمی به صورت مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه 5 و 8 سانتی متر می باشد. اگر ارتفاع هرم 12

سانتی متر باشد ،حجم هرم را به دست آورید ؟



$$S = \frac{5 \times 8}{2} = 20 \ cm^2$$

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times 20 \times 12 = 80 \ cm^3$$

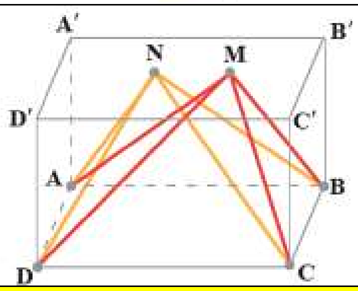
نکته : اگر چند هرم مختلف داشته باشیم که قاعده هم شکل و هم اندازه داشته باشند و ارتفاع آن ها برابر باشد

به صورتی که محل راس یکسان نباشد در این صورت حجم آن ها یکسان خواهد بود .

به تصویر مقابل با دقت نگاه کنید :

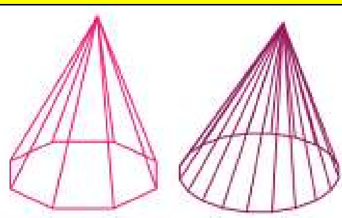
دو تا هرم در داخل یک مکعب مستطیل محاط شده اند .

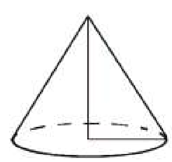
چون قاعده یکسان دارند و ارتفاع برابراست با اینکه محل راس جابجا شده ولی حجم آن ها برابر است .



آشنائی با مخروط

اگر به دوشکل مقابل دقت کنید متوجه می شوید که با افزایش تعداد اضلاع قاعده ، جسم شبیه مخروط می شود .





تعریف مخروط : مخروط نوعی هرم منتظم است که قاعده آن دایره می باشد .

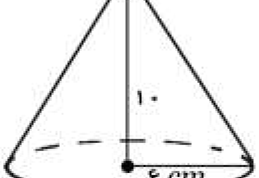
منظور از منتظم بودن هم این است که راس هرم در بالای مرکز دایره قرار بگیرد .

پس با در نظر گرفتن این موضوع برای به دست آوردن حجم مخروط باید از فرمول حجم هرم استفاده کنیم . به صورت زیر :

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times S \times h \\ S = \pi \times r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \ r^2 . \ h$$

مثال 1 : شعاع قاعده مخروطی 6 سانتی متر و ارتفاع مخروط 10 سانتی متر می باشد .

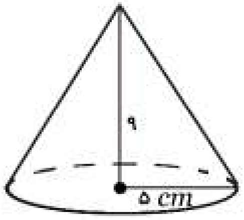
حجم مخروط را به دست آورید ؟



$$V = \frac{1}{3} \times \pi \ r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 10 = 120 \ \pi \quad cm^3$$

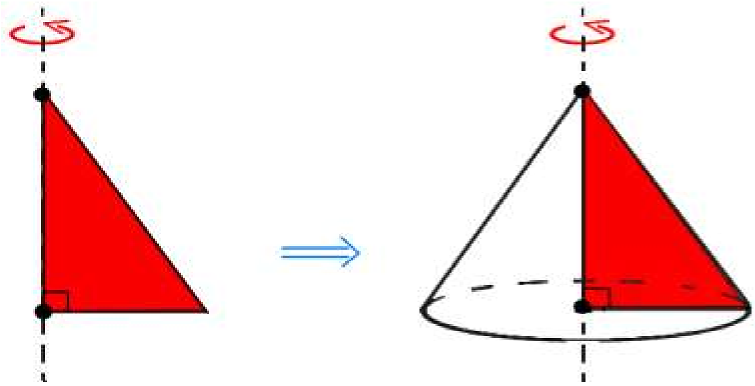
مثال 2 : شعاع قاعده مخروطی **5** سانتی متر و ارتفاع مخروط **9** سانتی متر می باشد .

حجم مخروط را به دست آورید ؟



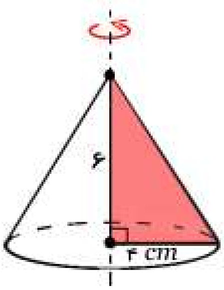
$$V=\frac{1}{3}\times\pi\ r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times 25\times 9=75\ \pi\quad cm^3$$

نکته مهم : اگر دقت کنید از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه آن ، یک مخروط تشکیل می شود :



پس می توان گفت که تعریف دوم برای یک مخروط این است که بگوییم : مخروط از دروان یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه آن به وجود می آید.

مثال 3 : مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه **4** و **6** سانتی متر را حول ضلع **6** سانتی متری دوران می دهیم .

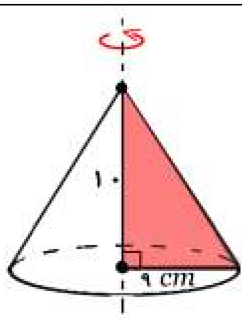


الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ جواب : مخروط

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V=\frac{1}{3}\times\pi\ r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times 16\times 6=32\ \pi\quad cm^3$$

مثال 4 : مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه **10** و **9** سانتی مترا حول ضلع **10** سانتی متری دوران می دهیم .



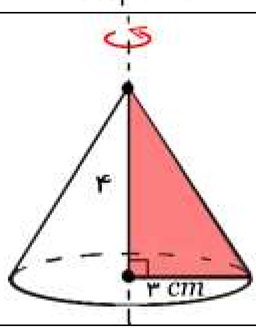
الف) نام جسم حاصل از دوران چیست ؟ جواب : مخروط

ب) حجم آن را به دست آورید ؟

$$V=\frac{1}{3}\times\pi\ r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times 81\times 10=270\ \pi\quad cm^3$$

مثال 5 : مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائمه **3** و **4** سانتی مترا حول ضلع **4** سانتی متری دوران می دهیم .

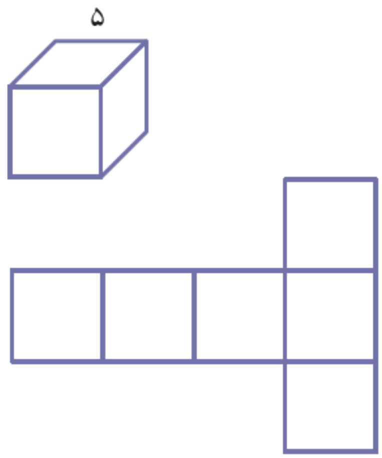
حجم آن را به دست آورید ؟

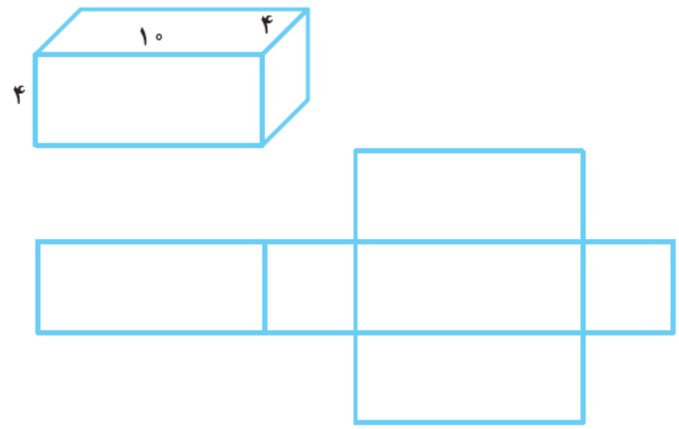


$$V=\frac{1}{3}\times\pi\ r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times 9\times 4=12\ \pi\quad cm^3$$

درس سوم: سطح و حجم

محاسبه مساحت رویه مکعب و مکعب مستطیل به آسانی با محاسبه مساحت مستطیل ها و مربع ها ممکن است که قبلا آموخته اید . مثل شکل های زیر:



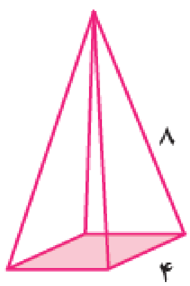


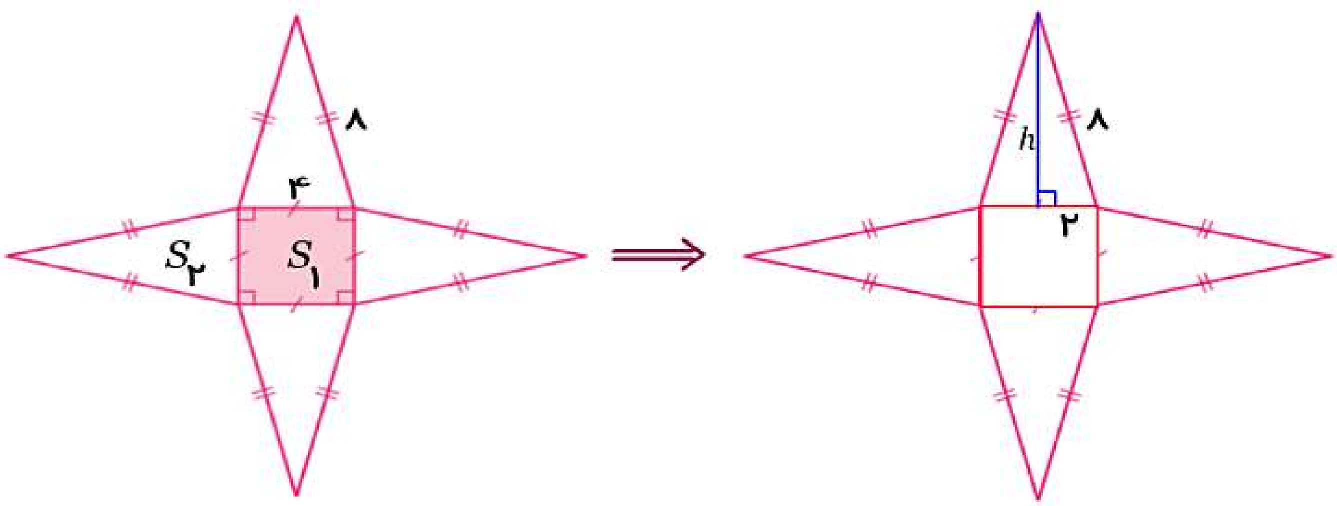
اما محاسبه **مساحت رویه جانبی هرم ها و مخروط ها** شرایط دیگری دارد که به نحوه محاسبه آن ها می پردازیم:

مثال 1 : به **هرم منتظم** مقابل توجه کنید .

در هرم منتظم مقابل ، اگر از راس بالائی ، خط عمودی بر قاعده هرم رسم کنیم بر نقطه مرکز تقارن قاعده وارد خواهد شد .

برای محاسبه مساحت دیواره ها و قاعده به شکل زیر می توان عمل کرد :





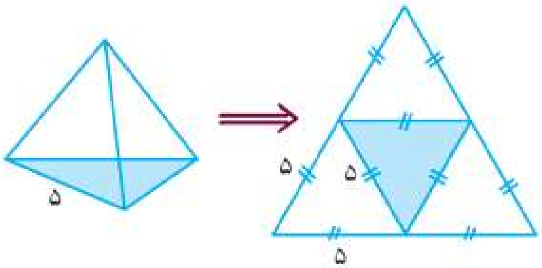
ابتدا ارتفاع مثلث ، درچهارتا **مثلث متساوی الساقین** (دیواره های هرم) را با استفاده از رابطه فیثاغورس پیدا می کنیم:

$$h^2 + 2^2 = 8^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 + 4 = 64 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{60}$$

با محاسبه مساحت قاعده و دیواره ها به صورت زیر ، مساحت کل هرم به دست می آید:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 4 \times 4 = 16 \\ S_2 = \dfrac{4 \times \sqrt{60}}{2} = 2\sqrt{60} \end{array}\right\} \Rightarrow S = 16 + 4 \times 2\sqrt{60} \Rightarrow S = 16 + 8\sqrt{60}$$

مثال 2 : مساحت هرم منتظمی که قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع می باشد چه قدر است ؟

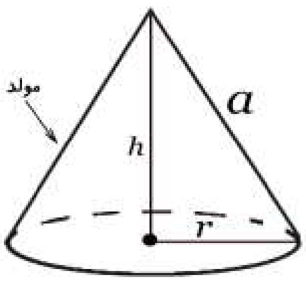


حل: گسترده هرم رسم شده است . اگر دقت کنید گسترده هرم ، خودش یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 10 می باشد.

با توجه به فرمول مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a که به صورت زیر است ، داریم :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 = 25\sqrt{3}$$

محاسبه مساحت رویه و مساحت کل مخروط:



در مخروط برای محاسبه مساحت رویه، به اندازه مولد نیاز داریم . مولد مخروط در شکل مشخص شده است .

این اندازه با استفاده از رابطه فیثاغورس و دانستن شعاع قاعده و ارتفاع مخروط، قابل محاسبه است:

$$a^2 = r^2 + h^2$$

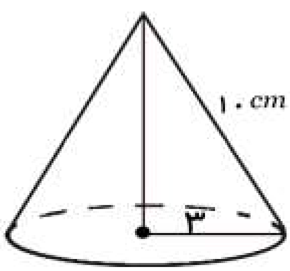
مساحت رویه مخروط از فرمول زیر محاسبه می شود :

$$S = \pi \times r \times a$$

مساحت کل مخروط با اضافه شدن مساحت قاعده دایره شکل آن به مساحت رویه ، به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \pi\ r\ a + \pi\ r^2$$

مثال 1 : مساحت رویه و مساحت کل مخروط به شعاع قاعده 3 سانتی متر و مولد 10 سانتی متر را محاسبه کنید :

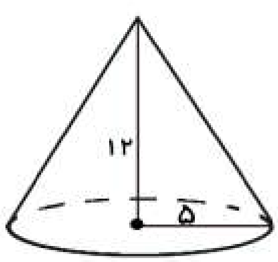


مساحت رویه $S = \pi\ r\ a = \pi \times 3 \times 10 = 30\ \pi\ cm^2$

مساحت کل $S = \pi\ r\ a + \pi\ r^2 = 30\pi + \pi \times 3^2 = 39\ \pi\ cm^2$

مثال 2 : مساحت رویه و مساحت کل مخروط به شعاع قاعده 5 سانتی متر و ارتفاع 12 سانتی متر را محاسبه کنید :

همانطور که مشخص است مولد مخروط داده نشده است که ابتدا با رابطه فیثاغورس ، مولد را محاسبه می کنیم:



مولد $\Rightarrow a^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 5^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad a = 13$

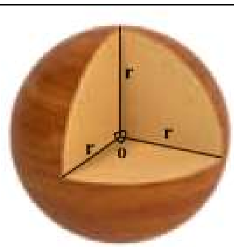
حالا به صورت زیر مساحت ها محاسبه می شود:

مساحت رویه $S = \pi\ r\ a = \pi \times 5 \times 13 = 65\ \pi\ cm^2$

مساحت کل $S = \pi\ r\ a + \pi\ r^2 = 65\pi + \pi \times 5^2 = 90\ \pi\ cm^2$

حل چند تا سوال مهم از کتاب درسی : سوال اول : سوال 4 صفحه 142 کتاب درسی

در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟



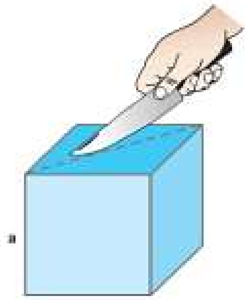
حل : با توجه به شکل معلوم است که $\frac{1}{8}$ از کره برداشته شده است .

سوال دوم : سوال کاردرکلاس صفحه 143 کتاب درسی

یک اسفنج مکعب به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم.

سطح بریده شده (سطح مقطع) به چه شکلی است؟ .... جواب : مستطیل

اندازه اضلاع آن را پیدا کنید؟

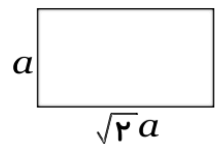


حل : چون قاعده بالائی مربع است پس اندازه قطر آن به صورت مقابل قابل محاسبه خواهد بود .

$$\text{قطر مربع} = \sqrt{۲}\, a$$

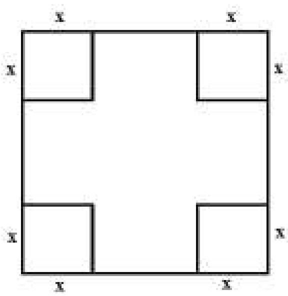
حالا بعد از برش با یک مستطیلی مواجه خواهیم شد که

طول آن $\sqrt{2}a$ بوده و عرض آن a است.



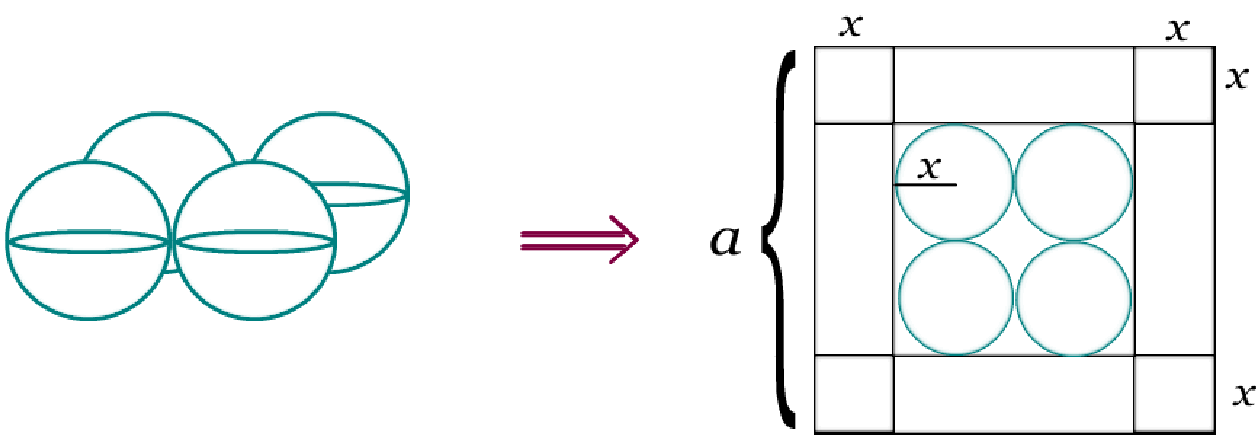
سوال سوم : سوال 2 صفحه 143

از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به‌طوری که هر کره به کرهٔ مجاورش و به دیوارهٔ جعبه مماس باشد؟

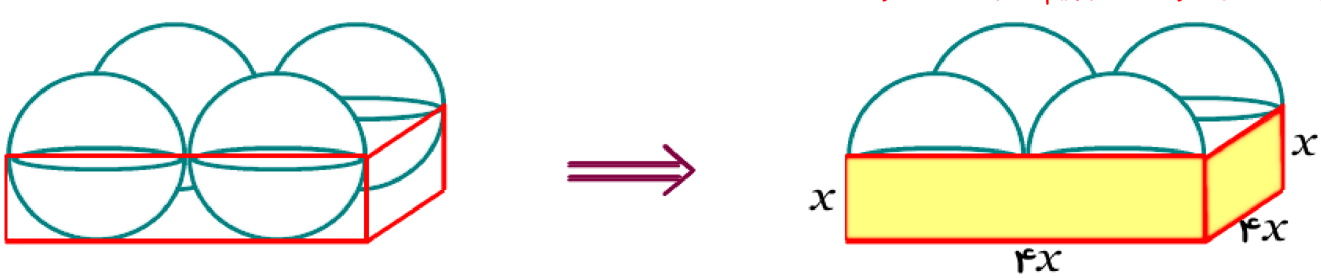


حل :

باتوجه به خواسته سوال ، باید چهار تا کره به صورت زیر در کنار هم قرار گرفته و در داخل جعبه ساخته شده قرار گیرند:



حالا اگر کناره های مقوا را ، تا بزنیم جعبه ساخته خواهد شد :



با توجه به اندازه جعبه مشخص است که ابعاد مربع اولیه (یعنی a) باید 6 برابر اندازه x باشد تا بتوانیم جعبه مورد نظر رابسازیم و کره ها را درون آن قرار دهیم . پس :

$$a = 6x$$