فصل ششم : خط و معادله های خطی

معادله خط : به رابطه ی بین نقاط یک خط معادله خط میگوییم.

فرم کلی معادله خط به صورت y=ax+b میباشد که در آن a شیب خط و b عرض از مبدا است.

دو نوع معادله خط داریم.

۱-رابطه خطی: وقتی که خط ما راست باشد رابطه ی آن خطی است یعنی توان x ۱ میباشد.

۲-رابطه ی غیرخطی: وقتی که خط راست نباشد رابطه ی آن غیر خطی است یعنی توان x ۱ نباشد.

انواع معادله ی خط:

۱-مبدا گذر که فرم کلی آن به صورت y=ax است و از مبدا می گذرد مثل y=-3x

۲-غیر مبدا گذر که فرم کلی آن به صورت y=ax+b است و از مبدا نمی گذرد مثل y=2x-5

۳-خطوط موازی با محور که فرم کلی آن به صورت x=m یا y=n که خطوط x=m موازی محور عرض ها و خطوط y=n موازی محور طول ها هستند مثل y=-3 و x=4

استاندارد کردن معادله یک خط :

گاهی نیاز است معادله ی خط را استاندارد کنیم. برای این کار باید معادله را به صورت y=ax+b در بیاوریم. یعنی y را در سمت چپ مساوی و بقیه را به سمت راست مساوی ببریم و اگر y ضریب داشته باشد باید طرفین را بر ضریب y تقسیم کنیم.

مثال: $4y - 8x = 12 \quad \rightarrow \quad 4y = 8x + 12 \xrightarrow{\div 4} y = 2x + 6$

نکته: اگر در معادله ی استاندارد شده ضریب x عددی منفی باشد نمودار نزولی است

یعنی به صورت \ و اگر ضریب x در معادله استاندارد مثبت باشد نمودار صعودی است یعنی به صورت / میباشد

رسم کردن خط: برای رسم کردن خط در صفحه ی مختصات نیاز به مختصات ۲ نقطه داریم.

نکته: برای رسم خط و بدست آوردن مختصات دو نقطه اگر ضریب x در معادله y=ax+b یک عدد صحیح باشد به جای x ، 0 و 1 قرار میدهیم و اگر ضریب x کسری بود به جای x ،0 و مخرج کسر را قرار میدهیم تا محاسبات راحت تر شود.

مثال: معادله خط y=2x-3 را در دستگاه مختصات رسم کنید

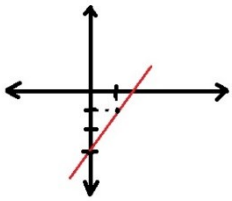
حل:

برای بدست آوردن دو نقطه ابتدا یک جدول میکشیم و جای x صفر و یک قرارمیدهیم:

$x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$

$x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

x	0	1
Y	-3	-1



حال در دستگاه مختصات دو نقطه ی بدست آمده $\begin{bmatrix}+1\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$ را پیدا میکنیم و به هم وصل میکنیم و از دو طرف ادامه میدهیم

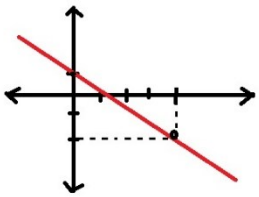
مثال: معادله ی خط $y=-\frac{3}{4}x+1$ را در دستگاه مختصات رسم کنید :

حل: برای بدست آوردن دو نقطه ابتدا یک جدول رسم میکنیم و چون ضریب x کسری است باید به جای x صفر و مخرج کسر که در اینجا ۴ میباشد را قرار دهیم

$$x=0\rightarrow y=-\frac{3}{4}(0)+1=1$$

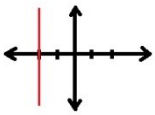
$$x=4\rightarrow y=-\frac{3}{4}\times 4+1=-3+1=-2$$

x	0	4
y	1	-2



حال دو نقطه ی بدست آمده $\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ را روی دستگاه مختصات مشخص میکنیم و به هم وصل میکنیم و از دو طرف ادامه میدهیم

نکته : برای رسم معادله x= n کافی است روی محور x ها نقطه ی n را پیدا کنیم و از آن نقطه موازی با محور عرض ها خط رسم می کنیم .



مثال: خط x=-2 را رسم کنید .

نکته: برای رسم معادله y=m کافی است روی محور y ها نقطه ی m را پیدا کنیم و از آن نقطه موازی با محور x ها خط رسم کنیم.

مثال : خط y=3 را در دستگاه مشخصات رسم کنید .

نکته : زاویه بین دو خط x= n و y= m همیشه ۹۰ درجه است .

نکته : برای اینکه یک نقطه روی یک خط قرار بگیرد باید در معادله ی آن خط صدق کند که دو روش برای بررسی اینکه یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا نه وجود دارد .

۱) روش تحلیلی : در این روش به جای x و y در معادله ی خط همان x و y نقطه ی مورد نظر را قرار می دهیم و اگر دو طرف تساوی با هم برابر بودند می گوییم نقطه روی خط قرار دارد و اگر برابر نبودند نقطه روی خط قرار ندارد .

مثال : آیا نقطه ی $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ روی خط $y=5x+2$ قرار دارد؟

$$y=5x+2$$

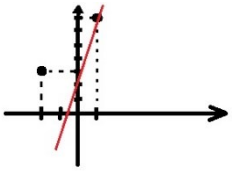
$$3=5(-2)+2$$

$$3=-10+2$$

$3 \neq -8$

چون طرفین تساوی با هم برابر نیست پس نقطه روی خط قرار ندارد .

۲) روش ترسیمی : در این روش خط داده شده را در دستگاه مختصات رسم می کنیم و نقطه ی مورد نظر را با هم مشخص می کنیم .پس متوجه می شویم که نقطه روی خط قرار دارد یا نه .



برای مثال فوق:

با رسم خط و نقطه متوجه می شویم که نقطه روی خط قرار ندارد .

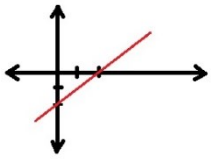
گاهی معادله خط داده شده استاندارد نیست و از ما می خواهند که نمودار آن معادله را رسم کنیم .که به صورت ax+by=c هستند مثل 4x-fy=8

برای رسم این مدل معادلات کافی است یکبار به جای x و یک بار به جای y صفر بگذاریم .

$$x = 0 \rightarrow 4(0) - 4y = 8 \rightarrow -4y = 8 \rightarrow y = \frac{8}{-4} = -2$$

$$y = 0 \rightarrow 4x - 4(0) = 8 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

x	0	2
y	-2	0



شیب خط : زاویه ای که یک خط با سمت راست محور x ها می سازد را شیب خط می گوییم و با a نمایش می دهیم .

عرض از مبدا : نقطه ای که خط محور عرض ها (y) را در آن نقطه قطع می کند را عرض از مبدا می گوییم و با b نمایش می دهیم .

نکته : برای مشخص کردن شیب و عرض از مبدا در معادله ی یک خط باید معادله استاندارد باشد .

مثال : شیب و عرض مبدا را در معادله 40x-64y=24 مشخص کنید .

حل :

$$4x - 8y = 12 \rightarrow -8y = 24 - 40x \rightarrow y = \underset{b}{(-3)} + \underset{a}{(5)}x$$

دو خط موازی : دو خط در صورتی موازی هستند که شیب آنها برابر باشند . مانند دو خط y=(-5)x+4 و y=(-5)x+3 که در هر دو a=-5 می باشد .

دو خط عمود : دو خط در صورتی بر هم عمود هستند که شیب آنها قرینه و معکوس هم باشند یعنی در واقع ضرب شیب آنها برابر با ۱- شود .

مثال : $y = (-3)x + 2$ و $y = (\frac{1}{3})x - 4$ که $\frac{1}{3} \times (-3) = -1$

نوشتن معادله خط : می دانیم که در فرم کلی معادله ی خط به صورت y=ax+b می باشد . پس برای نوشتن معادله کافی است شیب و عرض از مبدا را بدست آوریم و در معادله ی فوق جاگذاری می کنیم .

محاسبه شیب a:

برای محاسبه شیب با توجه به اینکه چند مدل سوال می دهند از هر کدام توضیح می دهم .

۱- در مساله خودشان شیب را می دهند : مثلا معادله خطی را بنویسید که شیب آن a=2 باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد .در این جور مسائل شیب را داریم .

۲- مسائلی که می گویند معادله خطی را بنویسید که با خط فلان موازی باشد و یا میگویند عمود باشد و از نقطه فلان بگذرد . برای محاسبه شیب اگر گفت موازی پس شیب می شود شیب همان معادله و اگر گفت عمود شیب می شود قرینه و معکوس شیب معادله ی داده شده .

۳- گاهی دو نقطه می دهند مثل معادله خطی بنویسید که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$ می گذرد که برای محاسبه ی شیب باید از فرمول زیر محاسبه کنیم .

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-4}{8-4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

پس از اینکه شیب را محاسبه کردیم ، حال شیب به دست آمده را به همراه نقطه داده شده درون معادله ی اصلی $y=ax+b$ قرار می دهیم و تنها مجهول که b یعنی همان عرض از مبدا است را بدست می آوریم پس عرض شیب و عرض از مبدا بدست آمده را در معادله ی اصلی $y=ax+b$ قرار می دهیم و معادله ی خط را می نویسیم . حال من برای هر کدام از حالتهای بالا مثال میزنم تا شما بهتر متوجه شوید .

مثال : معادله ی خطی بنویسید که شیب آن ۵ باشد و از نقطه ی $\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ بگذرد

حل: a=5

$y=ax+b\rightarrow -3=5(2)+b\rightarrow -3=10+b$

-3-10=b

-13=b

$y=ax+b\rightarrow y=5x-13$

مثال : معادله ی خطی بنویسید که با خط y=4x-3 موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ بگذرد

A=4

$y=ax+b\rightarrow -3=4(1)+b\rightarrow -3=4+b$ -7=b

$y=ax+b\rightarrow y=4x-7$

مثال : معادله ی خطی بنویسید که با معادله $2x-y=8$ عمود باشد و از نقطه ی $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ بگذرد .

$3x-y=8\rightarrow -y=-2x+8\rightarrow y=2x-8 \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} a=\frac{1}{8}$

$y=ax+b\rightarrow 4=\frac{1}{8}(2)+b\rightarrow 4-\frac{1}{4}=b$ $b=\frac{15}{4}$

$y=ax+b \xrightarrow{a=\frac{1}{8}\quad b=\frac{15}{4}} y=\frac{1}{8}x+\frac{15}{4}$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\+3\end{bmatrix}$ بگذرد .

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-4}{2-3}=\frac{-1}{-1}=+1$ $a=+1$

$$y = ax + b \xrightarrow{a=1 \ ، \ \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}} 3 = 1(2) + b \rightarrow 3 - 2 = b \rightarrow \boxed{1 = b}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{a=1 \ ، \ b=1} \boxed{y = x + 1}$$

دستگاه معادلات خطی :

برای حل دستگاه دو روش وجود دارد .

۱) روش حذفی : در این روش باید ضرایب یکی متغیر ها را به صورت قرینه در بیاوریم با ضرب کردن یک عدد مناسب در طرفین یکی از معادله ها تا متغیرها را مورد نظر حذف شود و یک معادله ی یک مجهولی داشته باشیم که به راحتی مجهول باقی مانده بدست می آید .پس مقدار به دست آمده را در یکی از معادلات اولیه قرار می دهیم و مجهول اولی که حذف کرده بودیم را بدست می آوریم .

مثال : برای اینکه یکی از متغیرها ضرایبش قرینه شود کافی است معادله پایین را در ۲ ضرب کنیم تا ضرایب y قرینه شود .

-2x

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + \cancel{2y} = 7 \\ -4x + \cancel{2y} = -8 \end{cases}$$

$$-1y = -1$$

$$y = \frac{-1}{-1} = -1 \qquad \boxed{y = +1} \qquad \rightarrow 2x + y = 4 \xrightarrow{y=1} 2x + 1 = 4 \quad \rightarrow \quad 2x = 4 - 1 = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

۲) روش جایگزینی :

در روش جایگزینی یک متغیر را بر حسب متغیر دیگر بدست می آوریم و در معادله ی دیگر جایگزین می کنیم و متغیر ها را بدست می آوریم پس در یکی از معادلات مقدار بدست آمده را قرار می دهیم و متغیر دیگر را محاسبه می کنیم .

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = -y + 3} \xrightarrow{\text{در معادله دوم} \quad x=-y+3} x - 3y = 7 \rightarrow (-y + 3) - 3y = 7$$

$$-y + 3 - 3y = 7$$

$$-4y = 7 - 3$$

$$y = \frac{4}{-4} = -1 \qquad \boxed{y = -1}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله اول} \quad y=-1} x + y = 3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 3 + 1 = 4 \qquad \boxed{x = 4}$$