- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

فصل اول: مجموعه ها

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

هو الحق

درسنامه ، نکات و تمرینات فصل اول ریاضی نهم به قلم : زکی پور- خیریت-مرداسی-عزیزی

گئورگ کانتور(۱۸۴۵_۱۹۱۸)
ریاضیدان آلمانی
خالق نظریه مجموعه ها

مقدمه

برخی مفاهیم با اینکه قابل تعریف نیستند(بنداشت) ولی ما آنها را درک میکنیم و میشناسیم؛ از جمله مفاهیم که در ریاضیات قابل تعریف نبوده اند و با آن آشنا شده اید مفهوم نقطه و خط بوده است. در فصل اول ریاضیات نهم با یکی دیگر از مفاهیم غیر قابل تعریف ریاضی با نام مجموعه آشنا خواهید شد.

دانش آموزان عزیز، یک شخص به اسم آقا علی که دانش آموز باهوشی هستند سعی میکند جایی که توضیحات فهمیدنش سخت می باشد از من سوال بپرسد که بیشتر توضیحش بدهم. اگر میخواهید دقیقا مطالب را یاد بگیرید به سوالات آقا علی دقت کنید و جایی که انتظار میرود آقا علی مثال بزند شما هم یک مثال بزنید.

درس اول: معرفی مجموعه

توضیح مجموعه: برای بیان و نمایش دسته یا گروهی از اشیا، حروف، اعداد و ...که متمایز(غیر تکراری) و کاملا مشخص هستند، از مجموعه استفاده میکنیم.

آقا علی: ببخشید آقا من فهمیدم متمایز بودن یعنی مثلا عدد تکراری توی مجموعه نباشه ، ولی اینکه میگیم کاملا مشخص باشه یعنی چی؟

پاسخ: علی جان یک عبارت زمانی مشخص کننده ی مجموعه است که کاملا گویا و شفاف باشد یعنی به طور دقیق مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیز هایی در آن مجموعه قرار ندارند. حالا علی جان به مثال های زیر دقت کنید:

مثال ۱: عبارت « شمارنده های عدد ۱۶» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملا مشخص که اعداد ۱ و ۲ و ۴و ۸ و ۱۶ در مجموعه قرار میگیرند و عددی مثل ۳ در مجموعه نخواهد بود.

مثال ۲: عبارت « اعداد بسیار کوچک» مجموعه نیست، چون این عبارت کاملا مشخص نمیکند چه عددهایی در مجموعه قرار دارند. ممکن است یک نفر عدد ۱ را کوچک بداند و شخص دیگری عدد ۰/۰۰۰۰۱

حالا علی جان شما مثالی بگو:

مثال ۳ از آقا علی:

آقا عبارت « چهار عدد مرکب کوچکتر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملا مشخص است اعداد ۴و ۶ و ۸ و ۹ در این مجموعه قرار دارند.

ایستگاه حل سوال

۱ . با دلیل مشخص کنید کدام عبارت مجموعه است و کدام عبارت مجموعه نیست؟

الف) چهار میوه خوشمزه

پاسخ: مجموعه نیست. چون انتخاب چهار میوه کاملا سلیقه ایست و دقیقا مشخص نمیکند چه میوه ای در مجموعه است.

ب) سه فصل از سال

پاسخ: مجموعه نیست. چون هر سال چهار فصل دارد، در نتیجه دقیقا مشخص نیست چه فصل های در مجموعه هستند .

پ) کل حالت های پرتاب یک تاس استاندارد

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است که اعداد ۱ و ۲ و ۳و ۴و ۵و ۶ در مجموعه هستند.

ت) پنج شاعر معروف ایرانی

پاسخ: مجموعه نیست. چون کاملا مشخص نیست چه شاعرانی در این مجموعه قرار میگیرند.

۲ . کدام عبارت مشخص کننده یک مجموعه است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف) سه اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون اعداد اول کمتر از ۱۰ عبارت اند از: ۲ و ۳و ۵و ۷ ، پس دقیقا مشخص نیست کدام سه تا از این اعداد در مجموعه قرار دارند.

ب) پنج عدد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون تعداد اعداد اول کمتر از ۴ تا می باشد پس نمیتوان پنج عدد متمایز اول از آنها انتخاب کرد.

پ) اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه است. کاملا مشخص است که اعداد ۲ و ۳و ۵ و ۷ در این مجموعه هستند.

ت) شمارنده های اول عدد ۱۲

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است شمارنده های اول عدد ۱۲ اعداد ۲ و ۳ میباشند.

ث) مضارب اول ۱۱

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است. تنها مضرب اول عدد یازده خود ۱۱ است که در مجموعه قرار می گیرد.

۳ . عباراتی که یک مجموعه را مشخص می‌کنند را با «✓» و عباراتی که یک مجموعه را مشخص نمی‌کند را با «✕» مشخص کنید.

الف)سه عدد زوج متوالی. ب) اعداد حسابی کوچکتر از ۱.

پ) جواب معادله ۳ = ۱ − $۲x$ ت) اعداد صحیح بزرگتر از ۱−

پاسخ: الف ✕(چون اعضاء نامشخص هستند) ب ✓ پ✓ ت ✓

ایستگاه مطالعه

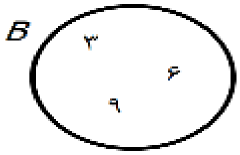
نمایش های مختلف مجموعه: مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری میکنیم و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

۱ . استفاده از یک جفت آکولاد: به این نوع نمایش ، نمایش تفصیلی مجموعه میگویند.

بطور مثال اگر A مجموعه ی شمارنده های عدد ۱۰ باشد، نمایش تفضیلی A به صورت زیر است:

$A = \{۱۰ \text{ و } ۵ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$

۲. نمایش هندسی (نمودار وِن): اعضای مجموعه را داخل یک دایره یا اشکال هندسی قرار می دهیم. دقت شود بین اعضا در این روش «و» قرار نمی دهیم.به طور مثال اگرB مجموعه ی مضرب های طبیعی و یک رقمی عدد ۳ باشد نمایش هندسی آن بصورت زیر است:

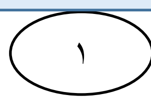


۳ . نمایش ریاضی: با استفاده از علائم ریاضی رابطه ی جبری برای مجموعه تعریف میشود. این نوع نمایش را در ایستگاه های مطالعه بعدی بررسی خواهیم کرد.

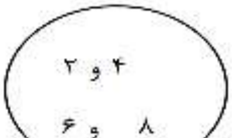
آقا علی: آقا اجازه از کجا بفهمیم از کدوم نمایش برای جواب باید استفاده کنیم؟

آفرین علی جان سوال خوبی پرسیدی.این سه روش معادل هستند و هیچ تفاوتی نداره که شما از چه روشی استفاده کنی ، مگر اینکه در صورت سوال روش خاصی عنوان گردد. به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه ی اعدادی که نه اول هستند و نه مرکب را به صورت مجموعه نمایش دهیم از دو روش تفصیلی و هندسی (نمودار وِن) استفاده می کنیم.

{۱} یا



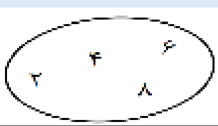
حالا علی جان شما یک مثال بزنید.



آقا علی: آقا اجازه «مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰» ؛

به روش تفصیلی میشه: {۸ و ۶ و ۴ و ۲} نمودار ون هم

علی جان خیلی خوب نوشتی فقط یک اشتباه کوچیک داره ما در نمودار ون بین اعضا " و " قرار نمیدیم بلکه اعضا را با فاصله از هم مینویسیم یعنی بایستی اینطور نمایش میدادی:



ایستگاه مطالعه

عضو مجموعه: هر کدام از اعداد، اشیاء ، افراد و ... که درون یک مجموعه قرار می گیرند را عضوی از مجموعه می گویند. برای مثال اگر مجموعه ی A به صورت $A = \{a$ و ۳ و ۲$\}$ را در نظر بگیریم . برای مثال می گوییم a عضوی از مجموعه ی A است و می نویسیم $a \in A$ و همچنین برای عددی مثل ۴ که عضو مجموعه ی A نیست می نویسیم: $۴ \notin A$

آقا علی: آقا اجازه این نکته را داریم : نماد عضو بودن : $\in$ و نماد عضو نبودن : $\notin$

به نحوه ی استفاده از نماد عضویت دقت کنید. اگر بنویسیم $A \in ۳$ ، با توجه به این که این عبارت را " A عضو ۳ است" می خوانیم ، بی معنی و عبارتی نادرست است و عبارت درست به صورت $۳ \in A$ است.

آقا علی: آقا اجازه مثلا اگر مجموعه ی A شمارنده های عدد ۱۸ باشد ، مجموعه ی A به صورت زیر است:

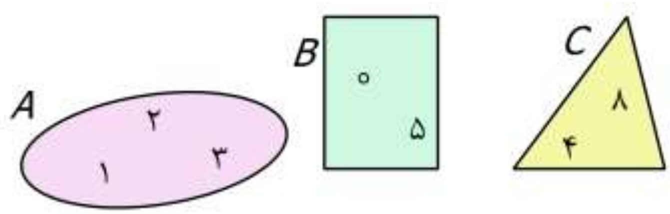
$\{$۱۸ و ۹ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱$\} = A$ و داریم: $۶ \in A$ و $۱۲ \notin A$ و $۲ \notin A$ و $۱ \in A$

علی جان همه ی پاسخ ها درست بود به جز $۲ \notin A$ چون در A عضو ۲ وجود دارد پس باید $۲ \in A$ می نوشتی.

توجه: با بیان چند مثال می خواهیم با نحوه ی کشیدن نمودار ون برای تعدادی مجموعه آشنا شویم.

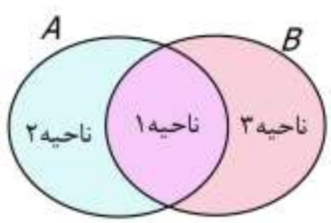
مثال۱) مجموعه های $A = \{$ ۳ و ۲ و ۱ $\}$ و $B = \{$ ۵ و ۰ $\}$ و $C = \{$ ۸ و ۴ $\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

دقت کنیم سه مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند . در این حالت سه نمودار کاملا مجزا(جدا از هم) ترسیم می کنیم.



مثال۲) مجموعه های $A = \{$ ۳ و ۲ و ۱ $\}$ و $B = \{$ ۲ و ۵ و ۱ $\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

اگر خوب دقت کنید اعداد ۱ و ۲ هم عضو A هستند و هم عضو B پس مجبوریم قسمتی از دو نمودار را درون هم ترسیم کنیم.



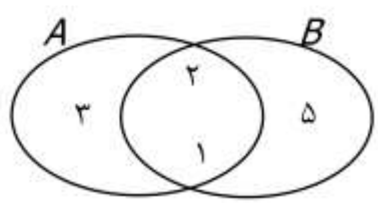
به شکل ۱ دقت کنید. برای قرار دادن اعداد در نمودار به صورت زیر عمل می کنیم:

در ناحیه شماره ۱ اعدادی را قرار می دهیم که هم در A باشند و هم در B

در ناحیه ی ۲ اعدادی را می نویسیم که فقط در A هستند.

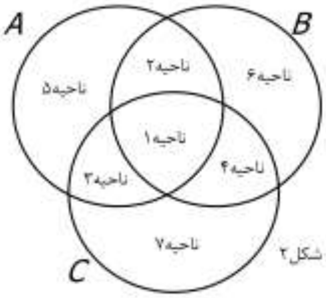
در ناحیه ی ۳ اعدادی را می نویسیم که فقط در B هستند.

پس اعضاء را در نمودار طبق شکل مقابل می نویسیم

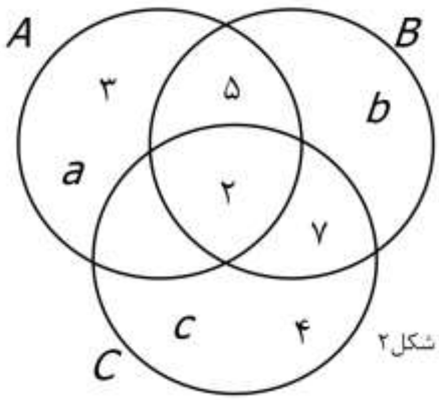


@riazicafe

مثال۳) مجموعه های $A=\{a$ و ۳ و ۲ و ۵$\}$ و $B=\{$b و ۲ و ۵ و ۷$\}$ و $C=\{c$ و ۲ و ۷ و ۴$\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.



با توجه به شکل۲ برای کامل کردن نمودار ون برای سه مجموعه به ترتیب شماره ناحیه ها عمل میکنیم.



ناحیه ۱: اعضایی که در سه مجموعه مشترک هستند.

ناحیه ۲: اعضایی که هم در A و هم درB هستند، ولی در C قرار ندارند.

ناحیه ۳: اعضایی که هم در A و هم در C هستند ولی در B نیستند.

ناحیه ۴: اعضایی که هم در B و هم در C هستند ولی در A نیستند.

ناحیه ۵: اعضایی که فقط در A هستند.

ناحیه ۶: : اعضایی که فقط در B هستند.

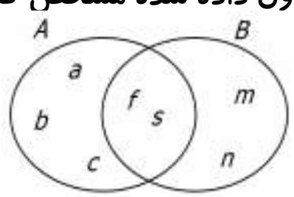
ناحیه ۷: اعضایی که فقط در C هستند.

برای پاسخ به مثال ۳: در ناحیه ۱: عدد ۲ در ناحیه ۲: عدد ۵ در ناحیه ۳: عضوی قرار نمیگیرد.

در ناحیه ۴: عدد ۷ در ناحیه ۵: عضوهای a و ۳ درناحیه ۶: عضو b در ناحیه ۷:عضوهای c و ۴ (شکل۲)

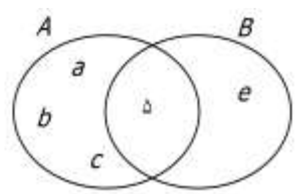
ایستگاه حل سوال

۱) اعضای مجموعه های A , B را با اعضایشان با توجه به نمودار ون داده شده مشخص کنید.



پاسخ: $A=\{a$ و b و c و f و $s\}$ و $B=\{s$ و f و m و $n\}$

۲) با توجه به نمودار ون مقابل در جای خالی علامت $\notin$ یا $\in$ قرار دهید.



b....A a....B ۵....B ۵.....A

پاسخ:

$b\in A$ $a\notin B$ $۵\in B$ $۵\in A$

۳) با توجه به مجموعه ی $A=\{-۱$ و $۳^۰$ و $-(-۲)^۴$ و $\frac{-۹}{۳}\}$ در جای خالی علامت $\notin$ یا $\in$ قرار دهید.

۰ .... A ۱۶....A ۳....A -۱۶....A ۱.....A

پاسخ: ابتدا در صورت امکان اعضاء را ساده میکنیم سپس به سوال جواب میدهیم در نتیجه داریم:

$$A=\{-۱ \text{ و } \cancel{۲^۰}^{\boxed{۱}} \text{ و } \cancel{-(-۲)^۴}^{\boxed{-۱۶}} \text{ و } \cancel{\frac{-۹}{۳}}^{\boxed{-۳}}\}=\{-۱ \text{ و } ۱ \text{ و } -۱۶ \text{ و } -۳\}$$

پس : $۰\notin A$ $۱۶\notin A$ $۳\notin A$ $-۱۶\in A$ $۱\in A$

ایستگاه مطالعه

نکته: در یک مجموعه با جابه جا کردن اعضا، مجموعه ی جدیدی ایجاد نمیشود.

به طور مثال مجموعه های {۵ و۳ و ۲} با {۵ و۲ و ۳} و {۲ و۳ و ۵} همگی یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص میکنند.

نکته: اگر در یک مجموعه عضو تکراری وجود داشته باشد ،اعضای تکراری را حذف میکنیم و آن عضو را فقط یکبار مینویسیم.

بطور مثال مجموعه ی {۳ و ۳ و ۲ و ۵ و۳ و ۲} عضو ۲ دوبار و ۳ سه بار تکرار شده اند که تکرارهایشان را حذف میکنیم و مجموعه را به حالت استاندارد {۵ و۳ و ۲} مینویسیم.

تعداد اعضای یک مجموعه (عدد اصلی مجموعه)

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه میگویند. عدد اصلی یک مجموعه مثل B را با نماد n(B) نمایش می دهیم.

مثال ۱: $A =$ {۷ و ۵ و ۳ و ۱} بنابراین $n(A) =$ ۴

آقا علی: آقا اجازه اگر مجموعه عضوهای تکراری داشت و عدد اصلی مجموعه رو پرسیده بود اقا باید بشماریمشون یا طبق نکته اول مجموعه رو استاندارد کنیم بعد تعداد اعضای مجموعه رو مشخص کنیم؟

علی جان ابتدا اعضای تکراری رو حذف میکنیم بعد عدد اصلی مجموعه رو تعیین میکنیم.

به این مثال دقت کن: $A =$ {۶ و۶ و ۲ و ۵ و۶ و ۲} ← $A =$ {۶ و ۵ و ۲} ← $n(A) =$ ۳

ایستگاه حل سوال

سوال۱: اعضای هر مجموعه را مشخص کنید و تعداد اعضای هر کدام را تعیین کنید.

الف) مجموعه ی اعداد اول بین ۲۰ و ۳۵

ب) مجموعه ی اعداد فرد بین ۵ و ۱۶

ج) مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۳۰ و ۱۸

پاسخ:

الف) $A =$ {۳۱ و ۲۹ و ۲۳} ← $n(A) =$ ۳

ب) $B =$ {۱۵ و ۱۳ و ۱۱ و ۹ و ۷} ← $n(B) =$ ۵

ج) مقسوم علیه های عدد ۳۰: ۱ و ۲و ۳و ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۳۰

مقسوم علیه های عدد ۱۸: ۱ و ۲و ۳و ۶و ۹و ۱۸

مجموعه مقسوم علیه های مشترک دو عدد عبارت است از : $C =$ {۶ و ۳ و ۲ و ۱} بنابراین $n(C) =$ ۴

ایستگاه مطالعه

مجموعه تهی:

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه ی تهی می گوییم.

مجموعه تهی را با { } یا ∅ نمایش می دهیم. دقت کنید مجموعه های {۰} یا {∅} مجموعه ی تهی نیستند.

توجه: با توجه به تعریف مجموعه تهی $n(\emptyset)=۰$ یعنی عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: الف) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از یک، تهی است.

ب) مجموعه ی مضارب اول عدد ۴ ، چون ۴ عددی مرکب است پس مضرب اولی ندارد این مجموعه تهی است.

ج) مجموعه ی اعداد صحیح بین ۰ و ۱- ، تهی است.

بیشتر بدانیم

مجموعه یکانی: مجموعه هایی که فقط یک عضو دارند را یکانی می گوییم.

مثال: مجموعه ی مضرب های اول عدد ۷ .زیرا هر عدد اول فقط یک مضرب اول که خودش دارد پس این مجموعه یکانی و تنها عضو آن خود ۷ است.

مجموعه ی اعداد صحیح بین ۱ و ۱-   تنها عدد صحیح بین این دو عدد ۰ میباشد پس این مجموعه نیز یکانی است.

مجموعه ی {∅} این مجموعه نیز یکانی است و تنها عضو آن ∅ میباشد.

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آنکه بین این عضو ها نظم وجود داشته باشد، میتوانیم ابتدا تعدادی از آنها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم(...) و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم.

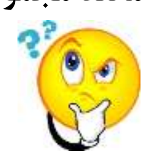
$$A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } \dots \text{ و } ۱۰۰۰\}$$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسد(حتی اگر خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه متناهی می گوییم. مجموعه A یک مجموعه ی متناهی با ۱۰۰۰ عضو می باشد.

در صورتی که مجموعه دارای بی شمار عضو باشد یعنی عضوهای آن تمام نشود آن را مجموعه نامتناهی می گوییم.

مانند مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳: $B = \{۳ \text{ و } ۶ \text{ و } ۹ \text{ و } \dots\}$

ایستگاه حل سوال



۱ . مجموعه {∅ و ۰} چند عضو دارد؟ پاسخ: ۲ عضو

۲ . مجموعه {۰ و ۲ و ۴ و ... و ۲۰} چند عضو دارد؟ پاسخ: ۱۱ عضو

۳ .در مورد تعداد اعضای مجموعه {۰ و ۲ و ۴ و ...} چه می توان گفت؟

پاسخ: این مجموعه نامتناهی است پس بی شمار عضو دارد.

برای یادگیری بیشتر و مرور مطالب تمرینات صفحه ی ۵ کتاب درسی را حل کنید.

ایستگاه مطالعه

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

تعریف دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوییم درصورتی که عضوهایشان کاملا یکسان باشد.(دقت کنید جابه جایی عضو ها ایرادی ندارد.) درصورتی که مجموعه های A و B مساوی باشند با نماد A=B این موضوع را بیان میکنیم.

مثال: دو مجموعه ی $A=\{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $B=\{۲ \text{ و } ۱ \text{ و } ۰\}$ با هم برابرند.

آقا علی: آقا اجازه یعنی برای اینکه دو مجموعه برابر باشند هر چی اولی داشت دومی هم باید داشته باشه و برعکس درسته؟

دقیقا علی جان ما با توجه به همین نکته سوالات این قسمت رو حل میکنیم. به این مثال توجه کنید:

مثال: اگر دو مجموعه زیر مساوی باشند، جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید؟

$$\{۲^۳ \text{ و } ... \text{ و } ۵\} = \{... \text{ و } \sqrt{۲۵} \text{ و } \sqrt{۸۱}\}$$

پاسخ: اگر اعضای مجموعه ها را ساده کنیم آنگاه جاهای خالی را به سادگی میتوان با عدد مناسب کامل کرد.

$$\{\cancel{۲^۳} \text{ و } ۹ \text{ و } ۵\} = \{۸ \text{ و } \cancel{\sqrt{۲۵}} \text{ و } \cancel{\sqrt{۸۱}}\}$$

۸ ۵ ۹

ایستگاه حل سوال

۱ . جاهای خالی را طوری کامل کنید که تساوی بین مجموعه ها برقرار باشد.

$$\{۹ \text{ و } ... \text{ و } \sqrt{۴۹} \text{ و } \frac{۱}{۳}\} = \{۳^۲ \text{ و } \frac{۰}{۲۵} \text{ و } \sqrt{\frac{۱}{۹}} \text{ و } ...\}$$ (الف

پاسخ:

$$\{۹ \text{ و } ۰ \text{ و } \cancel{\sqrt{۴۹}} \text{ و } \frac{۱}{۳}\} = \{\cancel{۳^۲} \text{ و } \cancel{\frac{۰}{۲۵}} \text{ و } \cancel{\sqrt{\frac{۱}{۹}}} \text{ و } ۷\}$$ (الف

۷ ۹ ۰ $\frac{۱}{۳}$

۲. اگر دو مجموعه $A=\{a+۵ \text{ و } ۲ \text{ و } ۶\}$ و $B=\{۶ \text{ و } ۹ \text{ و } -۷+b\}$ با هم مساوی باشند. مقدار a و b را بدست آورید؟

پاسخ: $\{a+۵ \text{ و } ۲ \text{ و } ۶\} = \{۶ \text{ و } ۹ \text{ و } -۷+b\}$

با تشکیل معادله مقدار a و b را بدست می آوریم. چون دو مجموعه برابرند و در مجموعه A عضو ۲ قرار دارد پس این عضو در مجموعه B نیز باید وجود داشته باشد در نتیجه:

$$-۷+b=۲ \quad \rightarrow \quad b=۲+۷=۹$$

و همچنین در مجموعه B عدد ۹ قرار دارد ولی در مجموعه A قرار ندارد که با توجه به تساوی این دو مجموعه نتیجه میگیریم:

$$a+۵=۹ \quad \rightarrow \quad a=۹-۵=۴$$

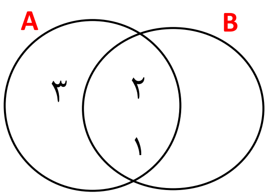
۳ . در صورتی که $\{-۳\} = \{x + ۲ \text{ و } -۳\}$ آنگاه مقدار x را تعیین کنید.

پاسخ: $\{-۳\}$ این مجموعه **یک عضوی** است پس مقدار X را طوری تعیین میکنیم که مجموعه دوم نیز یک عضوی شود و تنها عضوش نیز ۳- باشد. در نتیجه با تشکیل معادله داریم:

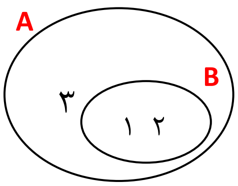
$$x + ۲ = -۳ \quad \rightarrow \quad x = -۳ - ۲ = -۵$$

ایستگاه مطالعه

مثال: نمودار ون مجموعه های $A = \{۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $B = \{۲ \text{ و } ۱\}$ را رسم کنید.



اگر دقت کنید تمام اعضای B در درون مجموعه A وجود دارند در این حالت بهتر است حلقه ی B را درون حلقه ی A رسم کنیم. در واقع نمودار دوم رایج تر میباشد.



زیر مجموعه: اگر همه ی اعضای مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشند، میگوییم B زیرمجموعه ی A است.

زیر مجموعه بودن را با علامت $\subseteq$ و زیر مجموعه نبودن را با علامت $\nsubseteq$ نشان میدهیم.

مثال: مجموعه های $A = \{۵ \text{ و } ۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $B = \{۵ \text{ و } ۴ \text{ و } ۳\}$ و $C = \{۶ \text{ و } ۵ \text{ و } ۴\}$ را در نظر بگیرید روابط زیر بین این سه مجموعه برقرار است:

$B \subseteq A$ و $C \nsubseteq A$

$A \nsubseteq B$ و $A \nsubseteq C$ و $B \nsubseteq C$ و $C \nsubseteq B$

دقت کنید که اگر حتی یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه ی A نباشد B زیرمجموعه A نخواهد بود.

نکته ۱: با توجه به تعریف زیرمجموعه واضح است، هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. که بصورت جبری مینویسیم: $A \subseteq A$

آقا علی: آقا اجازه چرا هر مجموعه زیرمجموعه خودشه؟

علی جان چون اگر یک مجموعه دلخواه مثل $A = \{۲ \text{ و } ۱\}$ داشته باشیم همه ی عضوهای A در خودش قرار دارند.

آیا مجموعه تهی عضوی وجود دارد که در مجموعه دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد؟

پاسخ: خیر، چون تهی عضوی ندارد.

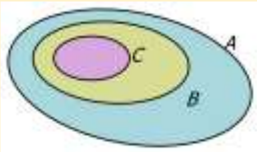
با توجه به سوال میتوان نکته زیر را بیان کرد:

نکته ۲: مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. که به صورت جبری مینویسیم:

$$\emptyset \subseteq A$$

نکته ۳: با توجه به دو نکته بالا میتوان نتیجه گرفت که مجموعه تهی زیر مجموعه خودش نیز است. که بصورت جبری مینویسیم: $\emptyset \subseteq \emptyset$

نکته ۴: مانند نمودار داده شده اگر مجموعه C زیر مجموعه ی، مجموعه B و مجموعه B نیز زیرمجموعه ی، مجموعه A باشد؛ آنگاه مجموعه C نیز زیرمجموعه، مجموعه ی A است. و بطور کلی میتوان نوشت: $C \subseteq B \subseteq A$



مثال: $A =$ {۱ و ۲ و ۳} و $B =$ {۱ و ۳} و $C =$ {۳} باشد آنگاه:

($C \subseteq B$ و $B \subseteq A$) $\rightarrow$ $C \subseteq A$

نوشتن زیرمجموعه های یک مجموعه:

با توجه به عضوهای یک مجموعه میتوان زیرمجموعه های آن را تعیین کرد؛ با استفاده از راهبرد الگوسازی که در پایه هفتم آموختید به شیوه زیر عمل میکنیم:

۱ . نوشتن زیرمجموعه صفر عضوی (یعنی تهی)

۲ . نوشتن زیر مجموعه های یک عضوی (هر عضو مجموعه را اگر داخل یک آکولاد قرار دهیم یک زیرمجموعه یک عضوی ساخته میشود)

۳ . نوشتن زیر مجموعه های دو عضوی (هر دو عضو را داخل آکولاد قرار می دهیم تا زیر مجموعه دو عضوی بوجود آید)

۴ . این مراحل را آنقدر ادامه میدهیم تا آخرین زیر مجموعه که خود مجموعه میباشد برسیم.

مثال ۱: زیر مجموعه های مجموعه ی $A =$ {۱ و ۲} را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب بالا ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی {۱} و {۲} و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی(خود مجموعه) {۱ و ۲}

در نتیجه مجموعه A، ۴ زیرمجموعه دارد.

مثال ۲: زیر مجموعه های مجموعه $B =$ {۱ و ۴ و ۵} را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی {۵} و {۱} و {۴} و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی {۱ و ۴} و {۱ و ۵} و {۴ و ۵} ۴. زیرمجموعه های ۳ عضوی {۱ و ۴ و ۵} (خود مجموعه.)

در نتیجه تعداد زیر مجموعه های مجموعه B، ۸ تا است.

آقا علی: آقا اجازه تعداد عضو های مجموعه B یدونه بیشتر از A هست و تعداد زیرمجموعه هاش ۲ برابر تعداد زیر مجموعه های A پس میشه نتیجه گرفت اگر به مجموعه ای یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه هاش۲ برابر میشه؟

بله علی جان دقیقا به همین صورت . و اگر بخواهیم این نتیجه رو دقیق تر بیان کنیم، الگویی بین تعداد عضوهای مجموعه و تعداد زیرمجموعه هاش هست به جدول زیر دقت کن و الگو رو حدس بزن:

تعداد عضو های مجموعه	۰ عضو	۱ عضو	۲ عضو	۳ عضو	...	n عضو
تعداد زیر مجموعه ها	۱	۲	۴	۸	...	؟

آقا علی: آقا اجازه اگر الگو یابی کنیم مفهمیم که هر مرحله دوبرابر مرحله قبلشه (البته بجز مرحله اول) که گفتیم علتش یک عضو بیشتر داشتن نسبت به مرحله قبلشه پس میشه گفت

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه که n عضو دارد ۲^n است.

ایستگاه حل سوال

۱ . یک مجموعه ۴ عضوی چه تعداد زیر مجموعه دارد؟

پاسخ: $n = ۴ \rightarrow ۲^n = ۲^۴ = ۱۶$

۲. اگر مجموعه ای ۳۲ زیر مجموعه داشته باشد، چند عضو دارد؟

پاسخ: ۳۲ را تجزیه میکنیم تا توان عدد ۲ را تعیین کنیم که همان تعداد عضوها می باشد.

$$۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵$$

پس میتوان نتیجه گرفت این مجموعه ۵ عضو دارد.

۳. مجموعه $B = \{۴ و ۳ و ۲ و ۱\}$ را در نظر بگیرید؛

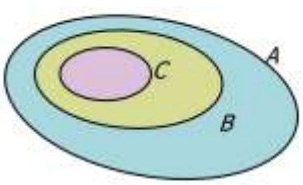
الف) زیر مجموعه های ۲ عضوی این مجموعه را بنویسید.

ب) زیر مجموعه هایی را بنویسید که شامل اعداد ۳ و ۴ باشد.

پاسخ:

الف) $\{۴ و ۳\}$ و $\{۴ و ۲\}$ و $\{۳ و ۲\}$ و $\{۴ و ۱\}$ و $\{۳ و ۱\}$ و $\{۲ و ۱\}$

ب) $\{۴ و ۳\}$ و $\{۴ و ۳ و ۱\}$ و $\{۴ و ۳ و ۲\}$ و $\{۴ و ۳ و ۲ و ۱\}$



۴. با توجه به نمودار ون مقابل گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) $A \subseteq B \subseteq C$ ب) $A \subseteq C \subseteq B$ ج) $C \subseteq A \subseteq B$ د) $C \subseteq B \subseteq A$

پاسخ: پاسخ گزینه د، چون حلقه ی C داخل حلقه ی B و حلقه ی B نیز داخل حلقه ی A قرار گرفته است پس میتوان نتیجه گرفت: $C \subseteq B \subseteq A$

۵. باتوجه به مجموعه های A و B در جالی علامت $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ قرار دهید.

$A=\{-۱ \text{ و } ۳ \text{ و } -۵ \text{ و } ۷\}$ و $B=\{-۱ \text{ و } -۳ \text{ و } -۵\}$

$B \dots B$ $\quad -۳ \dots B$ $\quad \{\} \dots A$ $\quad \{۷\} \dots A$ $\quad A \dots B$ $\quad B \dots A$

پاسخ: $B \subseteq B$ $\quad -۳ \not\subseteq B$ $\quad \{\} \subseteq A$ $\quad \{۷\} \subseteq A$ $\quad A \not\subseteq B$ $\quad B \not\subseteq A$

$-۳ \not\subseteq B$ چون ۳- آکولاد ندارد پس مجموعه نمیتواند باشد و چون مجموعه نیست، زیرمجموعه هم نیست.

۶. با توجه به مجموعه های A و B درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید.(دانش آموزان عزیز به این سوال توجه کنید تا کاربرد نمادها را بهتر درک کنید)

$A=\{۱ \text{ و } a \text{ و } ۵\}$ و $B=\{۱ \text{ و } b \text{ و } ۴\}$

$۵ \subseteq A$ $\quad b \not\subseteq B$ $\quad \{۱ \text{ و } b \text{ و } ۴\} \in B$ $\quad A \subseteq \{۱ \text{ و } a \text{ و } ۵\}$ $\quad b \notin A$ $\quad ۱ \in B$

$۵ \subseteq A$ نادرست چون ۵ آکولاد ندارد ساختار مجموعه ندارد پس زیرمجموعه نیست.

$b \not\subseteq B$ درست. $\quad \{۱ \text{ و } b \text{ و } ۴\} \in B$ نادرست. $\quad A \subseteq \{۱ \text{ و } a \text{ و } ۵\}$ درست $\quad b \notin A$ درست $\quad ۱ \in B$ درست.

۷. با توجه به مجموعه $A=\{۱ \text{ و } \{۱\}\}$؛

الف) این مجموعه چند عضو دارد؟ ب) زیر مجموعه های یک عضوی اش را مشخص کنید؟

پاسخ:

الف) در اینگونه سوالات به اعضایی که در آکولاد قرار گرفته اند دقت کنید، در این سوال ۱ و $\{۱\}$ دو عضو متفاوت هستند و آکولاد باعث این تفاوت شده است. در نتیجه این مجموعه دو عضو دارد.

ب) اگر عضو یک را در نظر بگیریم آنگاه با قرار دادن آکولاد برای آن زیر مجموعه خواهد بود یعنی: $\{۱\} \rightarrow ۱$

با در نظر گرفتن $\{۱\}$ بعنوان عضو دیگر این مجموعه آنگاه: $\{\{۱\}\} \rightarrow \{۱\}$

نتیجه مهم: اگر عضوی خودش در آکولاد قرار داشت برای اینکه ساختار زیر مجموعه بودن به خود بگیرد به یک جفت آکولاد دیگر نیاز دارد.

۸. با توجه به مجموعه $A=\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } \{۱ \text{ و } ۲\}\}$؛

الف . این مجموعه چند عضو دارد؟ ب) تعداد زیر مجموعه های، مجموعه A را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) این مجموعه سه عضو دارد. ۱ ، ۲ و $\{۱ \text{ و } ۲\}$(به تاثیر آکولاد روی این عضو توجه کنید)

ب) طبق رابطه بیان شده در ایستگاه مطالعه : ۲^n و اینکه $n=۳$ پس $۲^۳=۸$ زیرمجموعه دارد.

۹. با توجه به مجموعه $A=\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } \{۲ \text{ و } ۳\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

الف. $n(A)=۳$ $\quad$ ب. $۲ \in A$ $\quad$ ج. $\{۲ \text{ و } ۳\} \subseteq A$ $\quad$ د. $\{۲ \text{ و } \{۲ \text{ و } ۳\}\} \subseteq A$

پاسخ: گزینه ج نادرست است در صورتی که $\{\{۲ \text{ و } ۳\}\} \subseteq A$ یا $\{۲ \text{ و } ۳\} \in A$ درست بود.

ایستگاه مطالعه

یک جمع بندی: ارتباط تساوی دو مجموعه و مفهوم زیرمجموعه:

با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه میتوان گفت:« اگر مجموعه A زیرمجموعه B و همچنین مجموعه B نیز زیر مجموعه A باشد، مجموعه A و B مساوی اند.

$$(B \subseteq A \text{ و } A \subseteq B) \rightarrow A = B$$

برعکس: اگر دومجموعه $A=B$ باشند آنگاه A زیرمجموعه B و همچنین B زیرمجموعه A میباشد.

$$A = B \rightarrow (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$$

مجموعه های عددی مهم:

در بحث مجموعه ها بیشمار مجموعه عددی میتوان نوشت. اما برخی از مجموعه ها پرکاربرد تر هستند، بنابراین این مجموعه ها را با اسامی و حروف خاصی نامگذاری میکنند برخی از این مجموعه ها عبارت اند از:

مجموعه اعداد طبیعی با حرف N نامگذاری میشود: $\mathbb{N} = \{\text{۱ و ۲ و ۳ و ...}\}$

مجموعه اعداد حسابی که با حرف W نامگذاری میشود: $\mathbb{W} = \{\text{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ...}\}$

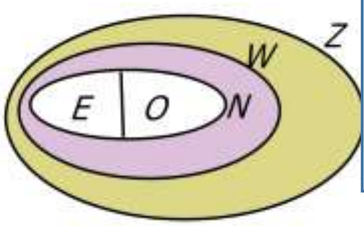
مجموعه اعداد صحیح که با حرف Z نامگذاری میشود: $\mathbb{Z} = \{\text{... و } -۲ \text{ و } -۱ \text{ و ۰ و ۱ و ۲ و ...}\}$

مجموعه اعداد طبیعی دو زیر مجموعه مهم دارد که عبارت اند از:

مجموعه اعداد فرد طبیعی که با حرف O نامگذاری میشود: $\mathbb{O} = \{\text{۱ و ۳ و ۵ و ...}\}$

مجموعه اعداد زوج طبیعی که با حرف E نامگذاری میشود: $\mathbb{E} = \{\text{۲ و ۴ و ۶ و ...}\}$

آقا علی: آقا اجازه ما در پایه هشتم خوندیم که مثلا هر عدد طبیعی عددی صحیح است با توجه به این میشه گفت مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند؟



بله علی جان . و اگر بخوایم کلی تر بیان کنیم میشه گفت:

$$\mathbb{E} \text{ و } \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$$

که اگر به اعضای این مجموعه ها و نمودار ون دقت کنی این رابطه قابل درک خواهد بود.

محدوده های عددی:

دانش آموزان عزیز شما با نمادهای $<$ و $\leq$ آشنا شده اید. با ترکیب کردن این نماد ها و یک متغیر محدوده ای عددی برای آن متغیر ساخته میشود. برای درک بهتر این موضوع به مثال های زیر دقت کنید:

مثال ۱: $-۳ \leq x$ اعداد مورد نظر کوچکتر یا مساوی ۳- هستند.

مثال ۲: $-۳ < x < ۴$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و از ۴ کوچکتر هستند.

مثال ۳: $-۳ < x \leq ۴$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.

مثال ۴: $-۳ \leq x < ۴$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتراز ۴ هستند.

مثال ۵: $-۳ \leq x \leq ۴$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.

ایستگاه حل سوال

۱ . هر کدام از محدوده های عددی با توجه به شرط مشخص شده چه اعدادی را مشخص میکند.

الف) $-۳ \le x < ۴$ و $x \in \mathbb{N}$ ب) $-۳ \le x < ۴$ و $x \in \mathbb{W}$

ج) $-۳ \le x < ۴$ و $x \in \mathbb{Z}$ د) $۳ \le x$ و $x \in \mathbb{W}$

پاسخ: الف) اعدادی که مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند فقط بایستی در نظر داشت که این اعداد طبیعی هستند در نتیجه : اعداد ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

ب) مشابه قسمت الف اعدادی مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ باشد به شرط آنکه این اعداد، عدد حسابی باشند. در نتیجه: اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

ج) اعداد مد نظر بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند به شرط آنکه این اعداد، عدد صحیح باشند. در نتیجه: اعداد: ۳- و ۲- و ۱- و ۰ و۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

د) اعداد مورد نظر بزرگتر مساوی سه و عدد حسابی هستند در نتیجه: اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ... را مشخص میکند.

ایستگاه مطالعه

نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی:

ابتدای فصل عبارت های کلامی را آموختیم که یک مجموعه را مشخص میکردند حال میخواهیم عبارت های ریاضی (جبری) را بیاموزیم که یک مجموعه را با استفاده از علائم و نماد ها توضیح میدهند. هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را بصورت جبری نمایش میدهد معمولا به صورت زیر نوشته میشود:

{قسمت اول | قسمت دوم}

قسمت اول: یک الگو یا رابطه ی کلی است که با استفاده از آن اعضا مجموعه را تعیین میکنیم.

خط عمودی « | » که دو قسمت را از هم جدا میکند « بطوری که یا به شرطی که» خوانده میشود.

قسمت دوم: یک محدوده عددی برای ما مشخص میکند که اعداد این محدوده را در رابطه ای که در قسمت اول آمده قرار میدهیم تا اعضا مشخص شوند.

مثال ۱: اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \le x < ۵\}$$

پاسخ:

محدوده عددی

X=۲و۳و۴

رابطه ای مشخص کننده اعضا

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \le x < ۵\}$$

نحوه خواندن مجموعه: اعدادی(X هایی) عضو مجموعه A است بطوریکه این اعداد، طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ و کوچکتر از ۵ باشند. در نتیجه : $A = \{۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\}$

آقا علی: آقا اجازه یعنی محدوده عددی همون اعضای مجموعه ست؟

علی جان در این مثال اینطور بود. از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش اینه که برای هر سوالی محدوده رو بعنوان اعضای مجموعه در نظر میگیرن. بطور کلی نمیشه اینو گفت به مثال های بعدی توجه کنید:

$B = \{-x \mid x \in \mathbb{N}$ و $۲ < x \leq ۵\}$

پاسخ: نحوه ی خواندن مجموعه: قرینه اعدادی (X-هایی) عضو مجموعه B است بشرطی که خود اعداد طبیعی و بزرگتر مساوی ۲ و کوچکتر از ۵ هستند.

$$x = ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \quad \rightarrow \quad -x = -۳ \text{ و } -۴ \text{ و } -۵$$

در نتیجه مجموعه B: $B = \{-۳ \text{ و } -۴ \text{ و } -۵\}$

توجه: در صورتی که رابطه ی مجموعه در قسمت اول پیچیده بود برای اینکه بدون اشتباه بتوانید اعضا هر مجموعه تعیین کنید میتوانید از جدول زیر استفاده کنید:

اعداد محدوده ای که در قسمت دوم مشخص شده اند	؟	؟	...
جایگذاری رابطه ای که در قسمت اول بیان شده است	؟	؟	..

مثال ۳: اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

$A = \{۲x + ۱ \mid x \in \mathbb{N}$ و $۲ \leq x < ۵\}$

پاسخ: عبارت $۲ \leq x < ۵$ و $x \in \mathbb{N}$ محدود عددی را مشخص میکند که باید در عبارت $۲x + ۱$ جایگذاری کنیم تا اعضا مشخص شود. محدوده عددی که برای ما مشخص میشود : ۲ و ۳و ۴ میباشد که با استفاده از جدول زیر اعضای مجموعه را تعیین میکنیم.

x	۲	۳	۴
$۲x + ۱$	۲×۲+۱=۵	۲×۳+۱=۷	۲×۴+۱=۹

مجموعه A: $A = \{۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\}$

ایستگاه حل سوال

۱. اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.

الف) $M = \{۳x \mid x \in \mathbb{Z}$ و $-۳ < x \leq ۰\}$

ب) $B = \{۵x - ۲ \mid x \in \mathbb{W}$ و $x < ۴\}$

ج) $C = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{Z}$ و $-۲ < x \leq ۲\}$

د) $\mathbb{W} = \{x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

پاسخ:

الف) $M = \{-۶ \text{ و } -۳ \text{ و } ۰\}$

x	−۲	−۱	۰
$۳x$	۳× (−۲)=−۶	۳×(−۱)=−۳	۳×۰=۰

ب)

$B = \{-۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۸ \text{ و } ۱۳\}$

x	۰	۱	۲	۳
$۵x - ۲$	۵×۰−۲=−۲	۵×۱−۲=۳	۵×۲−۲=۸	۵×۳−۲=۱۳

ج)

x	-۱	۰	۱	۲
$x^{۲}$	$(-۱)^{۲}=۱$	۰	۱	۴

دقت کنید عضو ۱ تکرار شد.

$C=\{۰\text{ و }۱\text{ و }۴\}$

د)

x	۱	۲	...
$x-۱$	۱−۱=۰	۲−۱=۱	...

مجموعه اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰\text{ و }۱\text{ و }۲\text{و......}\}$

ایستگاه مطالعه

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:

در این حالت اعضای مجموعه مشخص است و از ما میخواهند که زبان ریاضی مجموعه را بیان کنیم. برای این کار ابتدا رابطه ی بین اعضا را با استفاده از الگویابی مشخص میکنیم، سپس با توجه به رابطه محدوده عددها را مشخص میکنیم.

مثال ۱: مجموعه $A=\{-۵\text{ و }-۴\text{ و }-۳\text{ و ... و }۲\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ: با توجه به اعضا: $A=\{x|\ x\in\mathbb{Z}\text{ و }-۵\le x\le ۲\}$

مثال ۲: مجموعه $E=\{۲\text{ و }۴\text{ و }۶\text{ و ... }\}$ (مجموعه اعداد زوج طبیعی) را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ:

ابتدا رابطه ی بین اعضا را تعیین میکنیم: ۲ و ۴ و ۶ و ... $\rightarrow$ ۲k

حال محدوده مناسب را برای متغییر k در نظر میگیریم که: $k\in\mathbb{N}\text{ و }۱\le k$

در نتیجه: $E=\{۲k|\ k\in\mathbb{N}\text{ و }۱\le k\}$

مثال ۳: مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) مجموعه اعداد فرد طبیعی ب) $B=\{-۳۵\text{ و }-۳۰\text{ و... و }۴۵\}$

پاسخ:

الف) اعداد طبیعی فرد عبارت اند از ۱ و ۳ و ۵ و ...

پس رابطه بین اعداد $۲k-۱$ میباشد. برای محدوده ای که k از آن انتخاب میشود نیز میتوان اعداد طبیعی را در نظر گرفت. در نتیجه: $O=\{۲k-۱\ |\ k\in\mathbb{N}\text{ و }۱\le k\}$

ب) رابطه ی بین : $۵x$ برای تعیین محدوده ای که x از آن انتخاب میشود با تقسیم اعضا به ۵ میتوان دریافت که:

$-۷<x\le ۹\text{ و }x\in\mathbb{Z}$ در نتیجه داریم: $B=\{۵x|x\in\mathbb{Z}\text{ و }-۷<x\le ۹\}$

مجموعه اعداد گویا و نمایش جبری آن

تعریف اعداد گویا: هر عدد که بتوان بصورت کسری نوشت بطوریکه صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج عددی غیر صفر باشد را عدد گویا می نامیم.

مجموعه اعداد گویا: مجموعه ایست شامل همه ی اعداد گویا که با حرف $\mathbb{Q}$ نامگذاری میشود.

نمایش جبری مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \text{ و } b \in \mathbb{Z} \text{ و } b \neq 0\right\}$

نکته : در پایه هشتم خواندید که هر عدد صحیح ، عدد گویاست (چون میتوانیم برای آن مخرج یک قرار دهیم) پس میتوان گفت مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد گویا هستند.

به نمودار ون و رابطه زیر دقت کنید:

$$\mathbb{E} \text{ و } \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در فصل دوم بیشتر با مجموعه اعداد گویا بیشتر آشنا خواهید شد.

برای درک بهتر مفاهیم کاردرکلاس صفحه: ۶ و ۸تمرین صفحه: ۱۰ را حل کنید.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها

اشتراک مجموعه ها:

گفت و گو: آقا علی میخوایم کار امروز را با بررسی یک سوال شروع کنیم

دو مجموعه $D = \{۳ و ۲ و ۱\}$ و $C = \{۲ و ۳ و ۴\}$ را در نظر بگیرید. آیا عبارت: « عضو های مشترک مجموعه های Dو C » مشخص کننده ی یک مجموعه است؟

آقا علی: آقا اجازه ، بله آقا چون اعضاء مشترکشون کاملا مشخصه (اعداد ۲ و ۳).پس میشه مجموعه ی $\{۳ , ۲\}$

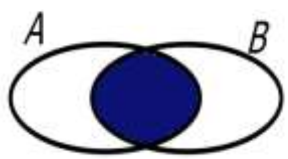
آفرین علی جان حالا به توضیحات من توجه کنید:

ایستگاه مطالعه

تعریف اشتراک دو مجموعه A و B : مجموعه ای است که شامل همه عضوهایی که هم عضو A هستند و هم عضو مجموعه B و آن را با نماد $A \cap B$ (میخوانیم A اشتراک B) نمایش میدهیم.

نمایش به زبان ریاضی: $$A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$$

نمایش با استفاده از نمودار ون:

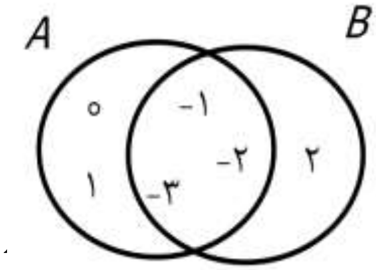


$A \cap B$

مثال ۱: دو مجموعه $D = \{۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $C = \{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیرید. اشتراک این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

پاسخ: $$C \cap D = \{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\} \cap \{۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\} = \{۳ \text{ و } ۲\}$$

مثال ۲: باتوجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار ون سه عدد ۱- و ۲-و ۳- در قسمت مشترک مجموعه ها قرار دارند پس:

$$A \cap B = \{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } -۳\}$$

مثال ۳: با توجه به مجموعه های A و B و C تساوی های زیر را تکمیل کنید.

$A = \{$ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ $\}$ و $B = \{$ ۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵ $\}$ و $C = \{$ ۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ $\}$

$A \cap B =$ $\qquad$ $A \cap C =$ $\qquad$ $B \cap C =$ $\qquad$ $A \cap B \cap C =$

پاسخ:

$A \cap B = \{$ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ $\} \cap \{$ ۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵ $\} = \{$ ۴ و ۵ $\}$

$A \cap C = \{$ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ $\} \cap \{$ ۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ $\} = \{$ ۲ و ۴ $\}$

$B \cap C = \{$ ۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵ $\} \cap \{$ ۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ $\} = \{$ ۴ و ۶ و ۸ $\}$

دقت شود که مفهوم $A \cap B \cap C$ ، مجموعه عضو های مشترک سه مجموعه A و B و C است.

$A \cap B \cap C = \{$ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ $\} \cap \{$ ۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵ $\} \cap \{$ ۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ $\} = \{$ ۴ $\}$

نکته ۱: واضح است اشتراک مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cap A = A$

نکته ۲: اشتراک هر مجموعه با مجموعه تهی، تهی میباشد چون تهی با هیچ مجموعه ای عضو مشترک ندارد.

$A \cap \emptyset = \emptyset$

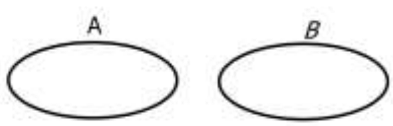
نکته ۳: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم، اشتراک این دو مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آنهاست.

$(A \cap B) \subseteq A$ و $(A \cap B) \subseteq B$

چون هر عضو اشتراک دو مجموعه A و B ، در هر کدام از مجموعه های A و B قرار دارد.

تعریف دو مجموعه مجزا(جدا از هم): اگر دو مجموعه A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی

$A \cap B = \emptyset$ آنگاه مجموعه های A و B را جدا از هم می گوییم و نمودار ون آنها بصورت زیر است:



مثال: مجموعه های E(اعداد زوج طبیعی) و O (اعداد فرد طبیعی) مجزا هستند.

ایستگاه حل سوال

۱ . مجموعه های $A=\{a+۱ \mid a\in\mathbb{N} ، ۲<a\leq ۵\}$ و $B=\{\frac{b}{۲} \mid b=۴ ، ۶ ، ۸\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای A و B را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A\cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.

$$A=\{۴ ، ۵ ، ۶\} \quad و \quad B=\{۲ ، ۳ ، ۴\}$$

ب) $A\cap B=\{۴ ، ۵ ، ۶\}\cap\{۲ ، ۳ ، ۴\}=\{۴\}$

۲ . اگر مجموعه A ، اعداد حسابی زوج یک رقمی و مجموعه B، اعداد اول یک رقمی و مجموعه C، اعداد طبیعی فرد یک رقمی باشد؛

الف) مجموعه A و مجموعه ...... جدا از هم هستند.(B ، C)

ب) تساوی های زیر را کامل کنید:

$n(A)=$ $\qquad$ $B\cap C=$ $\qquad$ $n(B\cap C)=$

$n(A\cap B)=$ $\qquad$ $n(A\cap B\cap C)=$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A=\{۰ ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸\} \quad و \quad B=\{۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷\} \quad و \quad C=\{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۹\}$$

الف) C ، چون مجموعه های A و C عضو مشترکی ندارند.

ب) $n(B\cap C)$ یعنی تعداد عضوهای مشترک B و C، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

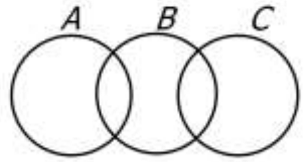
$n(A)=۵$ $\qquad$ $B\cap C=\{۳ ، ۵ ، ۷\}$ $\qquad$ $n(B\cap C)=n(\{۳ ، ۵ ، ۷\})=۳$

تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه جدا از هم صفر است در نتیجه:

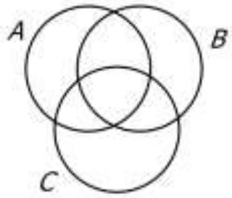
$n(A\cap B)=n(\emptyset)=۰$ $\qquad$ $n(A\cap B\cap C)=n(\emptyset)=۰$

پاسخ در این سوال بصورت کامل پاسخ نوشته شده است، درامتحان بصورت $n(B\cap C)=۳$ نوشته شود ، کفایت می کند.

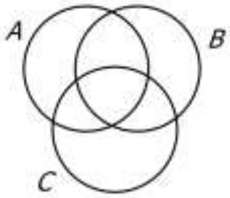
۳. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:



$A \cap B$

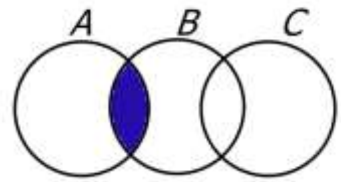


$A \cap C$

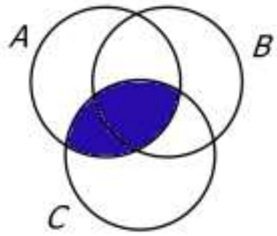


$A \cap B \cap C$

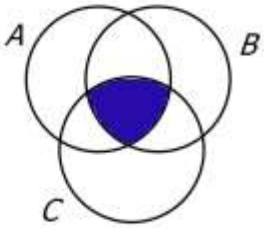
پاسخ:



$A \cap B$



$A \cap C$



$A \cap B \cap C$

۴ . مجموعه های $A = \{$۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶$\}$ و $B = \{$۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹$\}$

و $C = \{$۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۹ و ۱۰$\}$ را روی نمودار ون نمایش دهید:

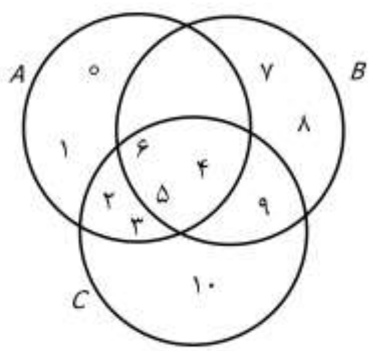
پاسخ: بهتر است ابتدا $A \cap B \cap C$ و $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ را مشخص کنیم و سپس با نوشتن عضوهای باقی مانده نمودار را کامل کنیم:

اعداد۴ و ۵ و ۶ به هر سه مجموعه تعلق دارند پس در قسمت $A \cap B \cap C$ این سه عدد را می نویسیم.

بقیه ی عضوهای مشترک A و C اعداد ۲ و ۳ هستند.

بقیه ی عضوهای مشترک B و C عدد ۹ است .

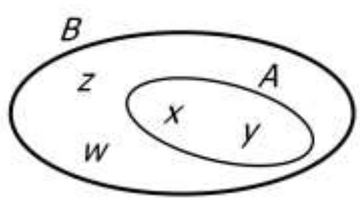
بنابراین داریم:



ایستگاه مطالعه

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$A \cap B =$

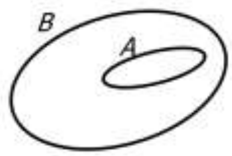


پاسخ:

$$A \cap B = \{x \text{ و } y\} = A$$

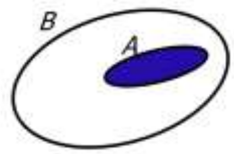
نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه اشتراک A و B برابر مجموعه A است؛ چون اعضای A در هر دو مجموعه قرار دارند.

ایستگاه حل سوال



۱ . در نمودار ون مقابل $A \cap B$ را هاشور بزنید.

پاسخ: چون A زیرمجموعه B است پس:



۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} =$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} =$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} =$ $\qquad$ $\mathbb{N} \cap \{۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} =$

پاسخ: با توجه به اینکه: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{N} \cap \{۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \emptyset$

ایستگاه مطالعه

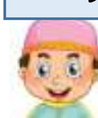
اجتماع مجموعه ها:

گفت و گو: علی جان مجموعه های $A = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲\}$ و $B = \{۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\}$ را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ بدین:

الف) آیا عدد ۲ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟

_ آقا اجازه بله آقا چون در دو مجموعه قرار دارد.

ب) آیا عدد ۰ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟



_ آقا اجازه بله چون در مجموعه A قرار دارد.

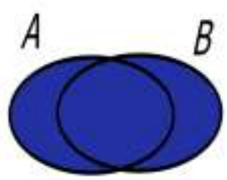
پ) یک مجموعه تشکیل دهید که اعضا آن حداقل در یکی از مجموعه های A و B قرار داشته باشد.

_ آقا اجازه مجموعه $\{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\}$ اعضایی که داره حداقل در یکی از دو مجموعه عضو هستند.

آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

اجتماع دو مجموعه A و B : اجتماع در لغت به معنای **در یک جا جمع شدن** است، در مجموعه ها نیز اگر اعضای مجموعه های A و B را درون یک مجموعه بنویسیم (اعضای تکراری یک بار نوشته شوند) به آن مجموعه اجتماع A و B میگوییم. به بیان دیگر مجموعه ای شامل همه عضو هایی که **حداقل** در یکی از مجموعه های A یا B باشند، را اجتماع دو مجموعه A و B می نامیم و آن را با نماد $A \cup B$ نشان میدهیم.

نمایش به زبان ریاضی : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$ نمایش با استفاده از نمودار ون:



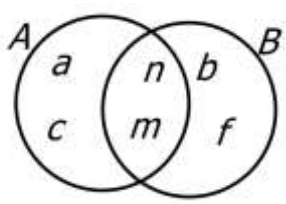
$A \cup B$

مثال ۱: دو مجموعه $D = \{۱ و ۲ و ۳\}$ و $C = \{۲ و ۳ و ۴\}$ را در نظر بگیرید. اجتماع این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

پاسخ: دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C \cup D = \{۲ و ۳ و ۴\} \cap \{۱ و ۲ و ۳\} = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$$

مثال ۲: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.



$A \cup B = ?$

پاسخ: $A \cup B = \{a و b و c و f و m و n\}$

نکته ۱: واضح است اجتماع مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cup A = A$

نکته ۲: اجتماع مجموعه دلخواه A با مجموعه تهی، مجموعه A میباشد چون تهی هیچ عضوی ندارد که به اجتماع اضافه کند، و اعضای اجتماع همان اعضای مجموعه A هستند. $A \cup \emptyset = A$

نکته ۳: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم : $B \subseteq (A \cup B)$ و $A \subseteq (A \cup B)$

چون هر عضو مجموعه A و B ، در اجتماعشان قرار دارد.

مثال: $A = \{۰ و ۱\}$ و $B = \{۱ و ۲\}$ را در نظر بگیرید.

$$A \cup B = \{۰ و ۱ و ۲\}$$

در نتیجه: $\underbrace{\{۱ و ۲\}}_{B} \subseteq \underbrace{\{۰ و ۱ و ۲\}}_{A \cup B}$ و $\underbrace{\{۰ و ۱\}}_{A} \subseteq \underbrace{\{۰ و ۱ و ۲\}}_{A \cup B}$

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \left\{a^{۲} + ۱ \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \le a \le ۴\right\}$ و $B = \left\{۲b \mid b = ۴ \text{ و } ۵\right\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای A و B را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A \cup B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.

$$A = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷\right\} \qquad \text{و} \qquad B = \left\{۸ \text{ و } ۱۰\right\}$$

ب) $A \cap B = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷\right\} \cup \left\{۸ \text{ و } ۱۰\right\} = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷ \text{ و } ۸\right\}$

۲. اگر مجموعه A ، اعداد اول زوج و مجموعه B، اعداد طبیعی فرد یک رقمی و مجموعه C، $\left\{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\right\}$باشد؛

تساوی های زیر را کامل کنید:

$B \cup C =$ $\qquad\qquad$ $n(B \cup C) =$

$n(A \cup B) =$ $\qquad\qquad$ $n(A \cup B \cup C) =$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A = \{۲\} \quad \text{و} \quad C = \left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\right\} \quad \text{و} \quad B = \left\{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}$$

$n(B \cup C)$ یعنی تعداد عضوهای اجتماع B و C، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

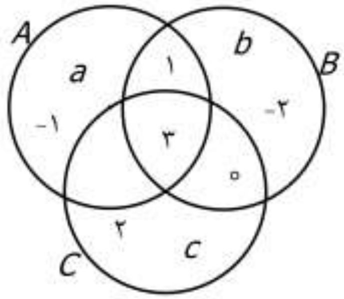
$B \cup C = \left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}$ $\qquad$ $n(B \cup C) = n\left(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}\right) = ۷$

$n(A \cup B) = n\left(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}\right) = ۶$

$n(A \cup B \cup C) = n\left(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}\right) = ۷$

در این سوال به صورت کامل پاسخ نوشته شده است. در امتحان پاسخ به صورت $n(A \cup B) = ۶$ نوشته شود ، کفایت می کند.

۳ . با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.

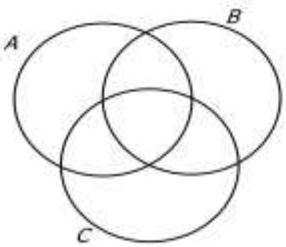


$A \cup B =$ $\qquad\qquad$ $B \cup C =$

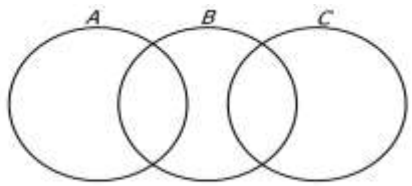
پاسخ:

$A \cup B = \{a$ و b و ۱- و ۲- و ۰ و ۱ و ۳$\}$ $\qquad$ $B \cup C = \{b$ و c و ۲- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳$\}$

۴. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:

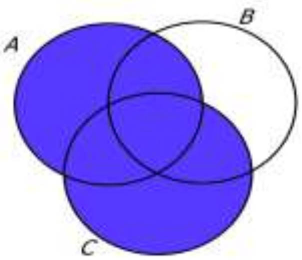


$A \cup C$

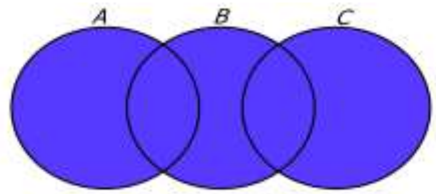


$A \cup B \cup C$

پاسخ:



$A \cup C$



$A \cup B \cup C$

ایستگاه مطالعه

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

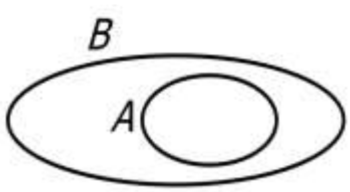
$A \cup B =$

پاسخ:

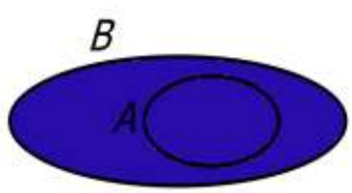
$A \cup B = \{w$ و x و y و $z\} = B$

نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه اجتماع A و B برابر مجموعه B است.

۱ . در نمودار ون مقابل $A \cup B$ را هاشور بزنید.



پاسخ: چون A زیرمجموعه B است پس:



۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N}\cup\mathbb{W}=$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}\cup\mathbb{N}=$ $\qquad$ $\mathbb{N}\cup\{$۰ و ۱− و ۲− و ...$\}=$

پاسخ: با توجه به اینکه: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N}\cup\mathbb{W}=\mathbb{W}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}\cup\mathbb{N}=\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}\cup\{$۰ و ۱− و ۲− و ...$\}=\{$... و ۲ و ۱ و ۰ و ۱− و ۲− و ...$\}=\mathbb{Z}$

ایستگاه مطالعه

تفاضل مجموعه ها:

گفت و گو: علی جان مجموعه های $A=\{$۲ و ۱ و ۰$\}$ و $B=\{$۲ و ۳$\}$ را در نظر بگیرید و به سوالت پاسخ بدین:

الف) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در مجموعه A هستند ولی در مجموعه B نیستند؟

_ آقا اجازه ۲ هم در A و هم در B است، پس ۲ رو از اعضای A حذف میکنیم و جواب میشه: $\{$۱ و ۰$\}$

ب) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در B هستند ولی در A نیستند؟

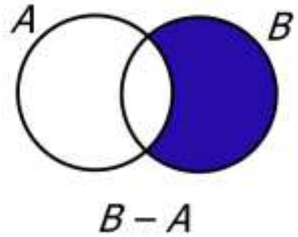
_ آقا اجازه همون طور که گفتیم عدد ۲ در هر دو مجموعه قرار داره پس اونو از اعضای B حذف میکنیم،
پس مجموعه مد نظر میشه: $\{$۳$\}$

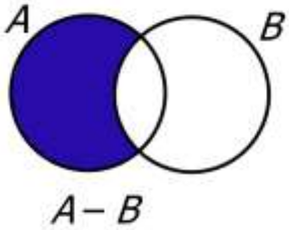
آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

تعریف تفاضل دو مجموعه: $A-B$ (A منهای B) مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی است که عضو مجموعه ی A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. بصورت مشابه؛ $B-A$ (B منهای A) شامل همه ی عضوایی است که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه A نیستند.

به زبان ریاضی: $B-A=\{x\mid x\in B$ و $x\notin A\}$ و $A-B=\{x\mid x\in A$ و $x\notin B\}$

به نمودار ون زیر توجه کنید:





مثال ۱: دو مجموعه $D = \{۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $C = \{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیرید. اعضای هر کدام از مجموعه های زیر را تعیین کنید.

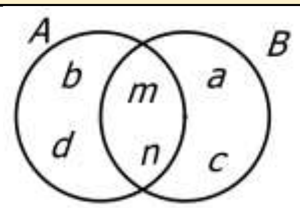
پاسخ: دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C - D = \{\cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } ۴\} - \{۱ \text{ و } \cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳}\} = \{۴\}$$

$$D - C = \{۱ \text{ و } \cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳}\} - \{\cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } ۴\} = \{۱\}$$

نتیجه مهم: یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش این است که تصور میکنند $A - B = B - A$؛
درحالت کلی اگر $A \neq B$ آنگاه $A - B \neq B - A$.

مثال ۲: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.



$B - A = ?$ $\qquad$ $A - B = ?$

پاسخ: $A - B = \{a \text{ و } c\}$ و $A - B = \{b \text{ و } d\}$

نکته ۱: برای مجموعه دلخواه A و تهی ($\emptyset$) روابط مقابل را میتوان بیان کرد: $A - \emptyset = A$ و $A - A = \emptyset$

نکته ۲: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم :

$(B - A) \subseteq B$ و $(A - B) \subseteq A$

مثال: $A = \{۱ \text{ و } ۰\}$ و $B = \{۲ \text{ و } ۱\}$ را در نظر بگیرید. $A - B = \{۰\}$ همانطور که ملاحظه کردید $A - B \subseteq A$
برای درستی رابطه ی $B - A \subseteq B$ مثالی بیان کنید.

نکته ۳: در صورتی که A و B دو مجموعه جدا از هم باشند می توان گفت: $(B - A) = B$ و $(A - B) = A$

مثال: $A = \{۱ \text{ و } ۰\}$ و $B = \{۲ \text{ و } -۱\}$ را در نظر بگیرید.

$$A - B = \{۰ \text{ و } ۱\} - \{-۱ \text{ و } ۲\} = \{۰ \text{ و } ۱\} = A$$

$$B - A = \{-۱ \text{ و } ۲\} - \{۰ \text{ و } ۱\} = \{-۱ \text{ و } ۲\} = B$$

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A=\{a^{۲}+۱ \mid a\in \mathbb{N} \text{ و } -۳<a\le ۳\}$ و $B=\{b+۱ \mid b=۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای A و B را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A-B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

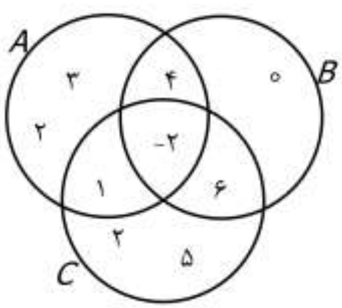
پ) $n(B-A)=?$

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید. در مجموعه A اعداد ۲- و ۱- و ۰ در محدوده قرار نمیگیرند چون عدد طبیعی نیستند.

$$A=\{۲ \text{ و } ۵ \text{ و } ۱۰\} \qquad \text{و} \qquad B=\{۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶\}$$

ب) $A-B=\{۲ \text{ و } \cancel{۵} \text{ و } ۱۰\}-\{۴ \text{ و } \cancel{۵} \text{ و } ۶\}=\{۲ \text{ و } ۱۰\}$

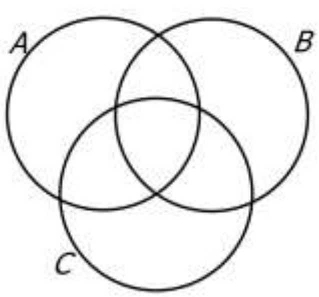
ج) $n(B-A)=۲$



۲. با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های مقابل را تعیین کنید.

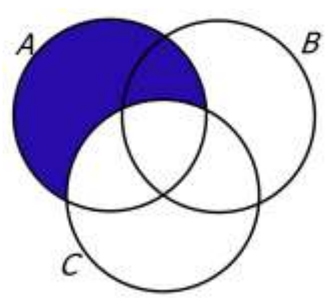
$B-C=$ $\qquad$ $A-B=$

پاسخ: $B-C=\{۰ \text{ و } ۴\}$ و $A-B=\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$

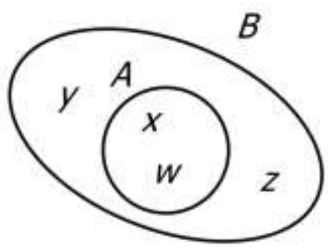


۳. در نمودار ون مقابل مجموعه ی $A-C$ را در نمودار هاشور بزنید:

پاسخ :



ایستگاه مطالعه



مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$$A - B =$$

پاسخ:

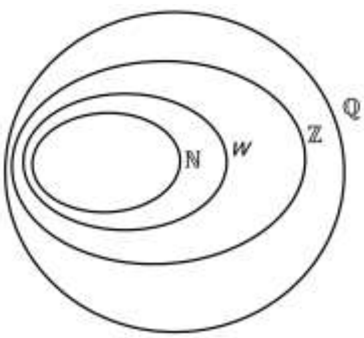
$$A - B = \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x}\} - \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x} \text{ و } y \text{ و } z\} = \emptyset$$

نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه A منهای B برابر مجموعه تهی است.

ایستگاه حل سوال

۱. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N} - \mathbb{W} =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} =$



پاسخ: طبق نمودار ون مقابل داریم : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$

۲ . آیا تساوی های زیر درست هستند؟ چرا؟

الف) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = ۰$

ب) $\mathbb{N} - \{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \emptyset$

پاسخ:

الف) نادرست_نماد آکولاد برای عدد صفر قرار داده نشده. در نتیجه صورت درست آن: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$

ب) نادرست مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد $\{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\}$ دو مجموعه جدا از هم هستند. در نتیجه صورت درست آن: $\mathbb{N} - \{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \mathbb{N}$

سوالات ترکیبی بخش سوم:

۱ . با توجه به مجموعه های A و B و C اعضای هر قسمت را تعیین کنید.

$$A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} \quad \text{و} \quad B = \{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\} \quad \text{و} \quad C = \{۰ \text{ و } ۱\}$$

الف) $(A \cup C) - B = ?$

ب) $(A - B) \cup (B - A) = ?$

ج) $(A \cap C) \cup B = ?$

پاسخ: برای حل اینگونه سوالات ابتدا تکلیف پرانتز ها را روشن کنید.

الف) $A \cup C = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} \cup \{۰ \text{ و } ۱\} = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\}$ در نتیجه:

$$(A \cup C) - B = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} - \{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\} = \{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵\}$$

ب) $(A - B) = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} - \{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\} = \{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵\}$ و

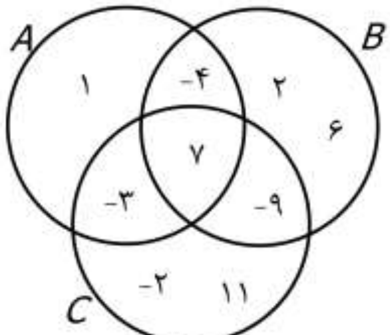
$(B - A) = \{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\} - \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} = \{۰\}$ در نتیجه:

$$(A - B) \cup (B - A) = \{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵\} \cup \{۰\} = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵\}$$

ج) $(A \cap C) = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ... \text{ و } ۶\} \cap \{۰ \text{ و } ۱\} = \{۱\}$ در نتیجه:

$$(A \cap C) \cup B = \{۱\} \cup \{۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\} = \{۱ \text{ و } ۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶\}$$

۲ . با توجه به نمودار ون اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.



$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = ?$ $\qquad$ $A \cup (B - C) = ?$

پاسخ: ابتدا تکلیف پرانتز ها را روشن می کنیم:

$B \cap C = \{۷ \text{ و } -۹\}$ $\quad$ $A \cap C = \{-۳ \text{ و } ۷\}$ $\quad$ $A \cap B = \{-۴ \text{ و } ۷\}$ $\quad$ $B - C = \{-۴ \text{ و } ۲ \text{ و } ۶\}$

بنابراین:

$$A \cup (B - C) = \{۱ \text{ و } -۴ \text{ و } ۷ \text{ و } -۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۶\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{-۳ \text{ و } -۴ \text{ و } ۷ \text{ و } -۹\}$$

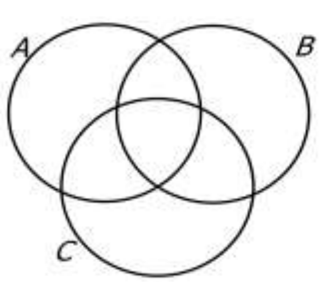
۳. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{W}) = ?$ $\qquad$ $(\mathbb{N} - \mathbb{W}) \cup \mathbb{Z} = ?$

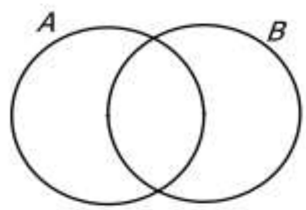
پاسخ:

$(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{W}) = \mathbb{Q} \cap \mathbb{W} = \mathbb{W}$ $\qquad$ $(\mathbb{N} - \mathbb{W}) \cup \mathbb{Z} = \emptyset \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

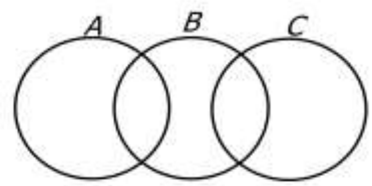
۴. مجموعه های داده شده را روی نمودار ون هاشور بزنید.



$A \cup (B - C)$

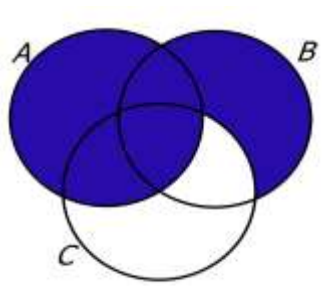


$(A - B) \cup (B - A)$

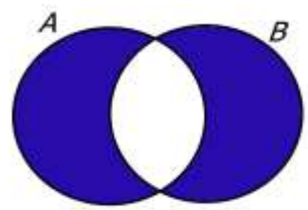


$(A \cap C) \cup B$

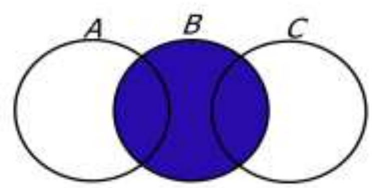
پاسخ:



$A \cup (B - C)$



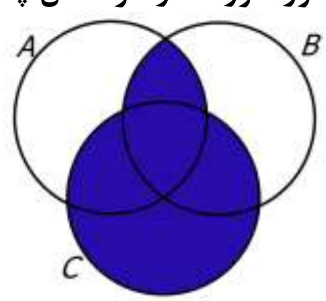
$(A - B) \cup (B - A)$



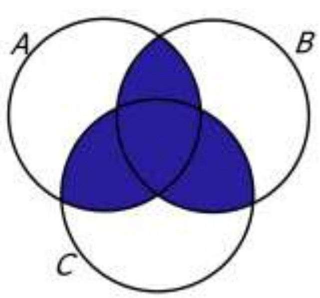
$(A \cap C) \cup B$

دقت کنید چون دو مجموعه A و C مجزا هستند پس $A \cap C = \emptyset$ و $B \cup (A \cap C) = B \cup \emptyset = B$

۵ . قسمت هاشور خورده در هر شکل چه مجموعه ای را مشخص میکند.



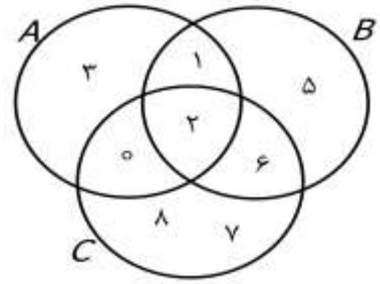
(ب)



(الف)

پاسخ: $\quad C \cup (A \cap B)$: (ب) $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$: (الف)

۶. با توجه به نمودار مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) مجموعه ی $(A-B)\cap(C-B)$ را با اعضاء مشخص کنید.

ب) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱) ۷ $\in (A-C)$ ...   ۲) {۲ و ۶} $\subseteq (B\cap C)$ ...   ۳) ۳ $\in (B\cup C)$ ...

پاسخ:

الف) $(A-B)\cap(C-B) =$ {۳ و ۰} $\cap$ {۰ و ۸ و ۷} $=$ {۰}

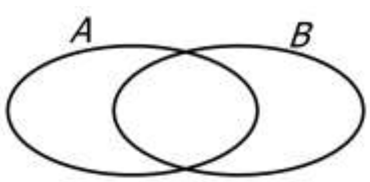
ب)

۱) $A-C=$ {۱ و ۳} بنابراین رابطه **نادرست** است چون ۷ به این مجموعه تعلق ندارد.

۲) $B\cap C=$ {۲ و ۶} و هر مجموعه ای زیرمجموعه ی خودش است پس رابطه **درست** است.

۳) $B\cup C=$ {۱ و ۲ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۰} و عدد ۳ به این مجموعه تعلق ندارد پس عبارت **نادرست** است.

۷. نمودار ون مقابل را با اطلاعات داده شده کامل کنید.

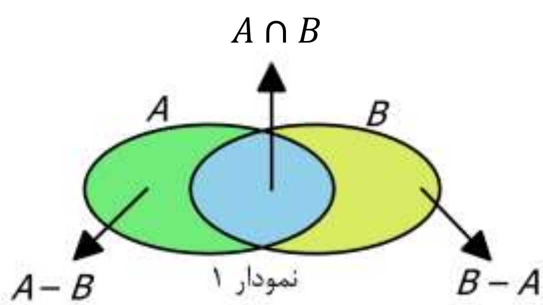


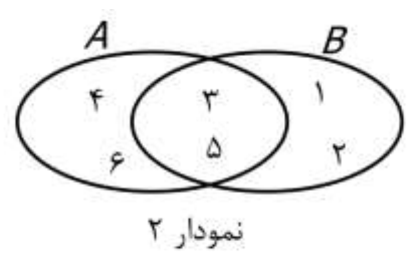
$B-A=$ {۱ و ۲} و $A-B=$ {۴ و ۶} و $A\cap B=$ {۳ و ۵}

پاسخ:

دقت کنید در نمودار شماره ۱ مجموعه های سوال مشخص شده اند.

بنابراین پاسخ طبق نمودار شماره ۲ است.





برای درک بهتر مطالب کار در کلاس صفحه ۱۳ و تمرین صفحه ۱۴ را حل کنید.

ایستگاه مطالعه

درس چهارم: مجموعه ها و احتمال

احتمال: برای نشان دادن احتمال روی دادن یک اتفاق(پیشامد) ، از یک نسبت(کسر) استفاده میکنیم. این نسبت به صورت مقابل است:

$$\frac{\text{تعداد حالت های مورد نظر}}{\text{تعداد تمام حالت های ممکن}} = \text{احتمال روی دادن اتفاق}$$ **(رابطه ۱)**

برای بدست آوردن احتمال رخ دادن یک اتفاق مانند A ، میتوان همه ی حالت های ممکن را در یک مجموعه به نام S (که به آن فضای نمونه ای گفته می شود) بنویسیم و همه ی حالت های مورد نظر در یک مجموعه (مثلا با نام A) بنویسیم، آن گاه احتمال روی دادن اتفاق A را که با P(A) نشان میدهیم به صورت زیر نمایش میدهیم که معادل رابطه ی ۱ می باشد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ ← احتمال روی دادن اتفاق A

$n(A)$ ← عدد اصلی مجموعه A (تعداد حالت های روی دادن A)

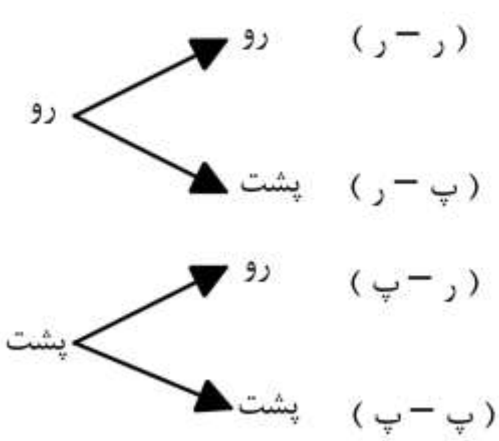
$n(S)$ ← عدد اصلی مجموعه S (تعداد کل حالت های ممکن)

مثال ۱: مجموعه حالت های ممکن (S) را برای هر یک از قسمت های زیر تشکیل دهید. و n(S) را تعیین کنید.

الف) پرتاب دو سکه ب) پرتاب یک تاس

پ) پرتاب دو تاس ت) پرتاب یک سکه و یک تاس

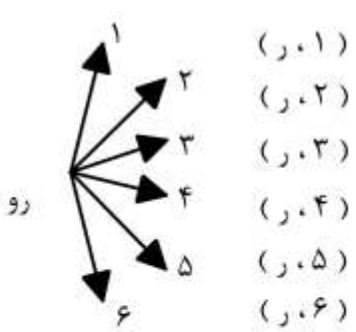
پاسخ: در پایه هشتم آموختید برای تعیین تعداد کل حالات میتوان از نمودار درختی یا جدول استفاده کرد؛ مثلاً:

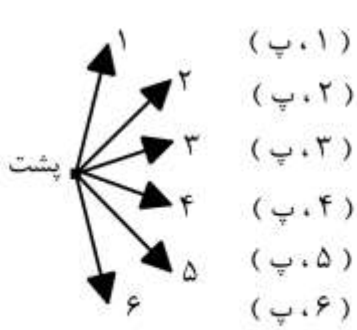


نمودار درختی پرتاب دو سکه

تاس۱ / تاس۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

جدول حالت های ممکن پرتاب دو تاس





نمودار درختی پرتاب یک سکه و یک تاس

الف) $S = \{$(پ، پ) و (ر،پ) و (پ، ر) و (ر، ر)$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۴$

ب) $S = \{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۶$

پ) $n(S) = ۳۶$

ت) $S = \{$(۶، پ) و ... و (۲، پ) و (۱،پ) و (۶، ر) و ... و (۲، ر) و (۱،ر)$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۱۲$

نتیجه ۱: تعداد کل حالت‌ها: الف) اگر n سکه را پرتاب کنیم: $n(S) = ۲^n$ ؛ ب) اگر m تاس را پرتاب کنیم؛ $n(S) = ۶^m$ ، ج) اگر nسکه و m تاس را با هم پرتاب کنیم: $n(S) = ۲^n \times ۶^m$ میباشد.

مثال ۲: اگر سه سکه و یک تاس را پرتاب کنیم، تعداد حالت های ممکن را تعیین کنید.

پاسخ : $n(S) = ۲^۳ \times ۶^۱ = ۸ \times ۶ = ۴۸$

مثال ۳: اگر تاسی را بیندازیم چقدر احتمال دارد؟

الف) عدد رو شده مضرب ۲ باشد. ب) عدد روشده بزرگتر از ۶ باشد.

پ) عدد رو شده از ۷ کوچکتر باشد. ت) عدد روشده شمارنده ۴ باشد.

پاسخ: ابتدا مجموعه کل حالت های ممکن را تشکیل میدهیم؛

$S = \{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۶$

الف) مضارب ۲ که روی تاس هستند عبارت اند از : ۲ و ۴ و ۶ در نتیجه این پیشامد را با مجموعه A مشخص میکنیم:

$A = \{$۶ و ۴ و ۲$\}$ پس: $n(A) = ۳$ در نتیجه : $P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) هیچ عددی روی تاس از ۶ بزرگتر نیست در نتیجه: $n(B) = ۰ \leftarrow B = \emptyset$ پس $P(B) = \frac{۰}{۶} = ۰$

پ) همه ی اعداد روی تاس از ۷ کوچکترهستند در نتیجه:

$$C = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶\} \rightarrow n(C) = ۶ \rightarrow P(C) = \frac{۶}{۶} = ۱$$

ت)

$$D = \{۱ و ۲ و ۴\} \rightarrow n(D) = ۳ \rightarrow P(D) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

نکته: به هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد می گوییم. به طور مثال در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $S = \{$رو , پشت$\}$ این مجموعه دو عضو و بنابراین $۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه دارد پس تعداد پیشامدهایی که برای پرتاب یک سکه می توان تعریف کرد چهار پیشامد است.

آقا علی: آقا اجازه ، یعنی چهار مجموعه ی S و $\{$پشت$\}$ و $\{$رو$\}$ و $\emptyset$ همه پیشامدهای پرتاب یک سکه هستند؟

بله علی جان کاملا درسته و در حالتی که تعداد اعضای پیشامد ها برابر باشد به آن ها پیشامد هم شانس می گوییم و در این مثال دو پیشامد هم شانس وجود دارد چون دو زیرمجموعه ی یک عضوی دارد.

نتیجه: اگر $A=\emptyset$ در نتیجه $n(A)=۰$ پس $P(A)=۰$ و اصطلاحاً به مجموعه A در این حالت پیشامد غیرممکن گوئیم. و اگر $A=S$ باشد در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ پس $P(A)=۱$. اصطلاحاً به مجموعه A در این حالت پیشامد حتمی گوئیم.

نتیجه: $۰\leq P(A)\leq ۱$

ایستگاه سوالات

۱ . در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۷ مهره سبز وجود دارد، اگر یک مهره را به تصادف از این جعبه خارج کنیم چه قدر احتمال دارد که:

الف) این مهره آبی باشد؟ ب) این مهره قرمز یا سبز باشد؟ پ)این مهره سبز نباشد؟

پاسخ: در این سوال تعداد کل حالات ، تعداد مهره های در جعبه است یعنی:

$$n(S)=۴+۳+۷=۱۴$$

الف) $A=\{$آبی$_۳$ و آبی$_۲$ و آبی$_۱\}$ پس: $n(A)=۳\ \rightarrow\ P(A)=\frac{۳}{۱۴}$

ب) $B=\{$قرمز$_۴$ و قرمز$_۳$ و قرمز$_۲$ و قرمز$_۱$ و سبز$_۷$ و سبز$_۶$ و سبز$_۵$ و سبز$_۴$ و سبز$_۳$ و سبز$_۲$ و سبز$_۱\}$

$$n(B)=۷+۴=۱۱\rightarrow\ P(B)=\frac{۱۱}{۱۴}$$

پ) این مهره سبز نباشد معادل اینست که مهره آبی یا قرمز باشد در نتیجه:

$C=\{$قرمز$_۴$ و قرمز$_۳$ و قرمز$_۲$ و قرمز$_۱$ و آبی$_۳$ و آبی$_۲$ و آبی$_۱\}$ پس: $n(B)=۳+۴=۷\rightarrow\ P(B)=\frac{۷}{۱۴}=\frac{۱}{۲}$

۲ . در ظرفی ۱۵ کارت با شماره های ۱ و ۲ و ... و ۱۵ قرار دارد. یک کارت را بطور تصادفی از ظرف خارج میکنیم.

الف) مجموعه کل حالت های ممکن را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که عدد روی کارت خارج شده عدد اول فرد باشد.

پ) چقدر احتمال دارد که عدد کارت خارج شده بین ۵ و ۱۰ باشد.

پاسخ:

الف) $S=\{۱ و ۲ و ۳ و ... و ۱۵\}\rightarrow n(S)=۱۵$

ب) $A=\{۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳\}\rightarrow n(A)=۵\ \rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$

پ) $B=\{۶ و ۷ و ۸ و ۹\}\rightarrow n(B)=۴\ \rightarrow P(A)=\frac{۴}{۱۵}$

۳ . اگر تاسی را ۲ بار بیندازیم:

الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید.

ب) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده دقیقا ۵ باشد.

پ) چقدر احتمال دارد دو عدد رو شده مثل هم باشند.

ت) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده حداقل ۱۰ شود.

پاسخ:

الف) خواندیم که تعداد حالت های پرتاب تاس از رابطه ۶^n بدست می آید در نتیجه:

$$\left(\text{تعداد پرتاب}\right) n = ۲ \rightarrow n(S) = ۶^۲ = ۳۶$$

ب) مجموعه از حالت های تشکیل میدهیم که مجموع دو عدد روی تاس ها برابر ۵ باشد؛

$$A = \{(۳،۲) \text{ و } (۲،۳) \text{ و } (۴،۱) \text{ و } (۱،۴)\} \quad \text{در نتیجه:} \quad n(A) = ۴ \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

$$\text{پ)} \quad B = \{(۶،۶) \text{ و } (۵،۵) \text{ و } (۴،۴) \text{ و } (۳،۳) \text{ و } (۲،۲) \text{ و } (۱،۱)\} \quad \text{در نتیجه:}$$

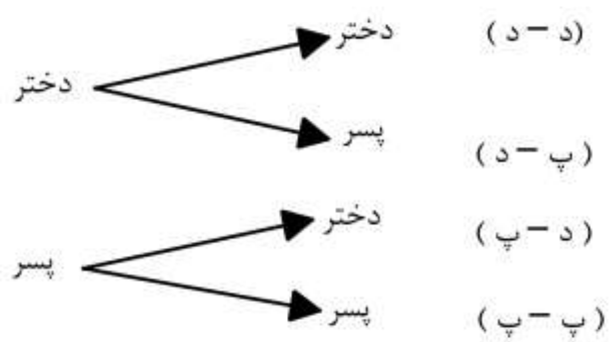
$$n(B) = ۶ \rightarrow P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ت) با توجه به اعداد روی تاس؛ حداقل ۱۰ یعنی مجموع دو عدد ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ باشد. پس:

$$B = \{(۶،۶) \text{ و } (۶،۵) \text{ و } (۵،۶) \text{ و } (۵،۵) \text{ و } (۶،۴) \text{ و } (۴،۶)\} \quad \text{در نتیجه:} \quad n(A) = ۶ \rightarrow P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۴ . اگر خانواده‌ای دارای ۲ فرزند باشد، ابتدا مجموعه S را تعیین کنید سپس چقدر احتمال دارد این خانواده دقیقاً دارای دو پسر باشد؟

پاسخ: اینگونه مسائل مشابه مسائل پرتاب سکه است، با این تفاوت که در پرتاب سکه حالت های ممکن بر اساس رو و پشت تعیین میشود، در حالی که اینجا حالت های ممکن بر اساس پسر(با مخفف پ) و دختر(با مخفف د) تعیین میشود. در نتیجه برای n فرزند؛ ۲^n حالت ممکن وجود دارد.



نمودار درختی حالات دو فرزند

$$\text{در نتیجه:} \quad S = \{(\text{پ،پ}) \text{ و } (\text{د،پ}) \text{ و } (\text{پ،د}) \text{ و } (\text{د،د})\} \quad \text{پس:} \quad n(S) = ۴$$

$$\text{خانواده دقیقا دو پسر داشته باشد:} \quad A = \{(\text{پ،پ})\} \quad \text{در نتیجه:} \quad n(A) = ۱ \rightarrow P(A) = \frac{۱}{۴}$$

@riazicafe

۵. یک سکه و یک تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم:

الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید................

ب) احتمال اینکه سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

پ) احتمال اینکه سکه پشت یا تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

پاسخ: در مثال ۱ حالت های ممکن برای پرتاب یک سکه و یک تاس بیان شده است.

الف) $n(S) = ۲ \times ۶ = ۱۲$

ب) A = {(پ،۶) و (پ،۴) و (پ،۲)} پس: $n(A) = ۳ \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

پ) B = {(پ،۶) و (ر،۴) و (ر،۲) و (ر،۶) و (پ،۶) و (پ،۵) و (پ،۴) و (پ،۳) و (پ،۲) و (پ،۱)} پس:

$n(B) = ۹ \rightarrow P(B) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$

دقت کنیم که در مثال قسمت پ با توجه به این که در صورت سوال بین دو عبارت کلمه ی " یا " قرار گرفته است باید اجتماع حالتهایی که سکه پشت آمده و حالتهایی که تاس زوج آمده است را به عنوان مجموعه ی مطلوب درنظر گرفت.

سکه پشت بیاید: {(پ،۶) و (پ،۵) و (پ،۴) و (پ،۳) و (پ،۲) و (پ،۱)}

تاس زوج بیاید: {(ر،۶) و (ر،۴) و (ر،۲) و (پ،۶) و (پ،۴) و (پ،۲)}

اجتماع دو مجموعه ی بالا مجموعه ی B را به وجود می آورد.

۶ . خانواده‌ای دارای سه فرزند است چقدر احتمال دارد این خانواده:

الف) حداقل ۲ پسر داشته باشد. ب) دقیقاً ۲ دختر داشته باشد. پ) حداکثر ۲ دختر داشته باشد.

پاسخ:

S = {(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ) و (پ،د،د) و (د،پ،د) و (د،د،پ) و (د،د،د)}

الف) حداقل ۲ پسر معادل است با؛ پسر۲ یا ۳ پسر. پس حالت هایی را در نظر میگیریم که در آنها دو پسر (پ) و سه پسر وجود دارد. A = {(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ)} $\rightarrow n(A) = ۴ \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

ب) دقیقا ۲ دختر یعنی حالت های مد نظر هستند که در آنها فقط دو دختر(د) وجود دارد نه بیشتر و نه کمتر.

B = {(پ،د،د) و (د،پ،د) و (د،د،پ)} $\rightarrow n(B) = ۳ \rightarrow P(B) = \frac{۳}{۸}$

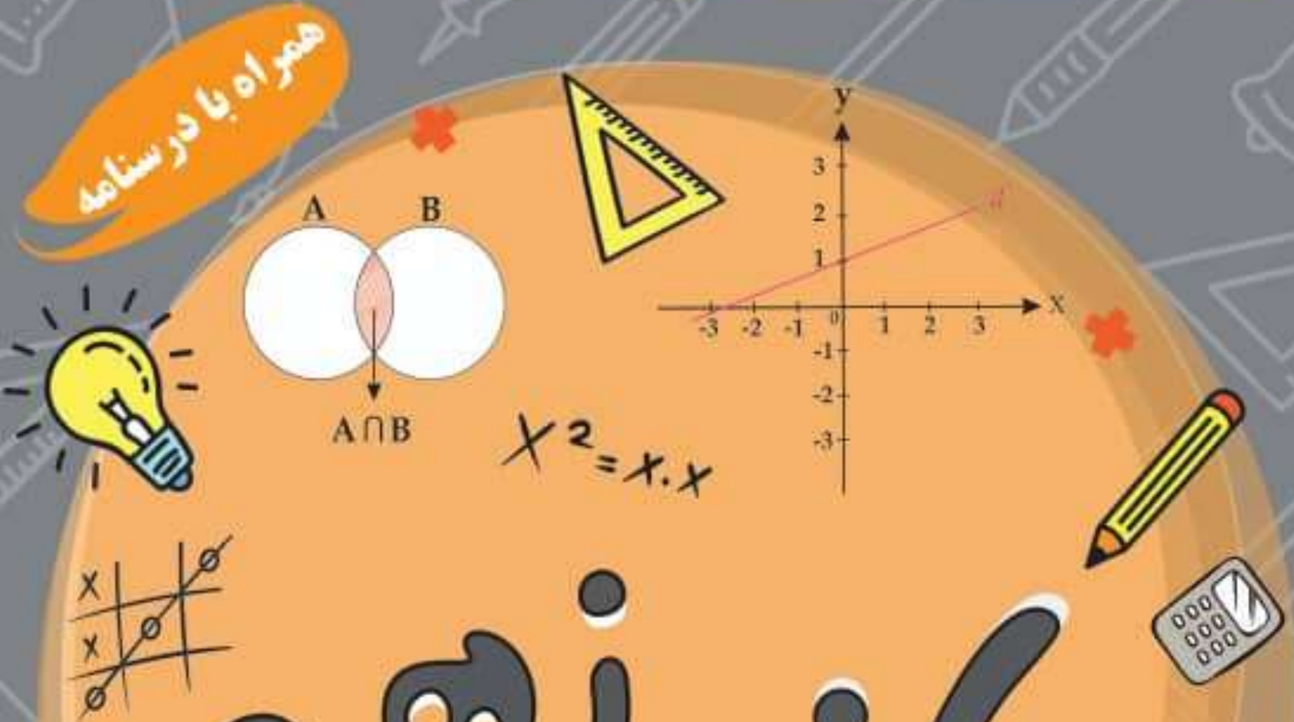
پ) حداکثر ۲ دختر معادل است با؛ ۲ دختر یا ۱ دختر یا ۰ دختر. پس حالت هایی را در نظر می گیریم که در آنها ۲ دختر(د) یا ۱ دختر یا اصلا دختری وجود ندارد را در نظر میگیریم پس:

C = {(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ) و (پ،د،د) و (د،پ،د) و (د،د،پ)}

$n(C) = ۷ \rightarrow P(C) = \frac{۷}{۸}$

دانش آموزان عزیز برای تسلط و درک مطالب این درس تمرین صفحه ۱۷ را حل کنید.

همراه با درسنامه



ریاضی نهم

- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

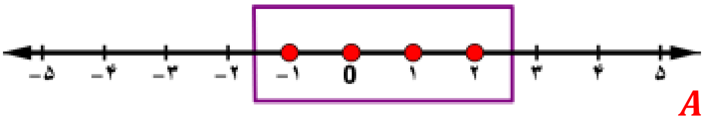
فصل ۲ (عدد های حقیقی) گردآوری ، تایپ و تنظیم مطالب : رویا حیازی – محمدباقر میرزاوند

فهرست

❖ درس اول عددهای گویا

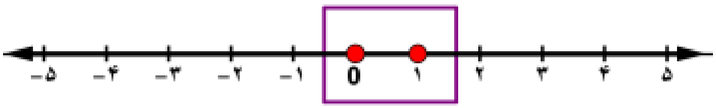
یادآوری. هرکدام از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف* A: اعداد صحیح بین ۲- و ۳؛



حل: $A = \{x | x \in \mathbb{Z}$ و $-۲ < x < ۳\}$

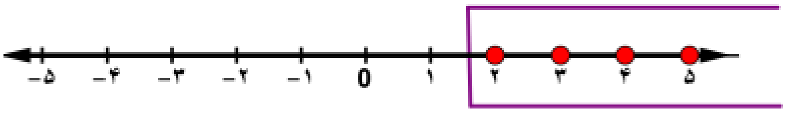
ب* B: اعداد حسابی کوچکتر از ۲؛



حل: $B = \{x | x \in \mathbb{W}$ و $x < ۲\}$

پ* C: اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲؛

حل: $C = \{x | x \in \mathbb{N}$ و $۲ \le x\}$



تمرین۲. الف* مجموعهٔ اعداد گویای بین ۲- و ۳ چند عضو دارد؟

حل: بی شمار عضو دارد

ب* آیا می توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد؟

حل: خیر- چون مجموعهٔ اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین نمی توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد.

پ*آیا می توان این مجموعه را روی محور نمایش داد؟

حل: خیر

یادآوری

❖ مجموعهٔ اعداد گویا

هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و در ضمن، مخرج آن صفر نباشد عددی گویا است.

✧ **نکته:** مجموعهٔ اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم.

✧ **نکته:** همهٔ عددهای طبیعی، صحیح و رادیکالی با جذر دقیق، عضو مجموعهٔ اعداد گویا هستند. یعنی

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

نکته: چون مجموعهٔ اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین مجموعهٔ اعداد گویا را فقط با نماد ریاضی نمایش می دهیم. یعنی $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \quad , \quad b \neq ۰ \right\}$

نکته: بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد.

روش های پیدا کردن کسر بین دو کسر

روش ۱(هم مخرج کردن): در این روش ابتدا با کمک مخرج مشترک، کسرها را هم مخرج کرده، سپس عددهای بین دو صورت را با مخرج مشترک می نویسیم.

تمرین ۳. الف* سه کسر بین $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{8}$ بنویسید.

حل: $\frac{۱\times۴}{۶\times۴} = \frac{۴}{۲۴}$ و $\frac{۵\times۳}{۸\times۳} = \frac{۱۵}{۲۴} \Rightarrow \frac{۴}{۲۴} < \frac{۵}{۲۴} < \frac{۶}{۲۴} < \frac{۷}{۲۴} < \frac{۱۵}{۲۴}$

ب* دو کسر بین $-\frac{۳}{۸}$ و $-\frac{۴}{۹}$ بنویسید.

حل: $-\frac{۴\times۸}{۹\times۸} = -\frac{۳۲}{۷۲}$ و $-\frac{۳\times۹}{۸\times۹} = -\frac{۲۷}{۷۲} \Rightarrow -\frac{۳۲}{۷۲} < -\frac{۳۱}{۷۲} < -\frac{۳۰}{۷۲} < -\frac{۲۷}{۷۲}$

نکته: گاهی وقت ها پس از هم مخرج کردن کسرها،بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد. در این حالت می توانیم برای به دست آوردن کسرهای خواسته شده، صورت و مخرج دو کسر را درعددی طبیعی که یک واحد بیشتر از تعداد کسرهای خواسته شده است ضرب کنیم. (در واقع، مخرج مشترک را عدد بزرگتری در نظر می گیریم)

تمرین ۴. چهار کسر بین $-\frac{۶}{۷}$ و $-\frac{۷}{۸}$ بنویسید.

حل: $-\frac{۶\times۸}{۷\times۸} = -\frac{۴۸}{۵۶}$ و $-\frac{۷\times۷}{۸\times۷} = -\frac{۴۹}{۵۶}$

چون بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و تعداد کسرهای خواسته شده چهار است بنابراین صورت و مخرج را در عدد پنج یا عددی بزرگتر از پنج ضرب می کنیم.

$-\frac{۴۸\times۵}{۵۶\times۵} = -\frac{۲۴۰}{۲۸۰}$ و $-\frac{۴۹\times۵}{۵۶\times۵} = -\frac{۲۴۵}{۲۸۰}$

$$-\frac{۲۴۵}{۲۸۰} < -\frac{۲۴۴}{۲۸۰} < -\frac{۲۴۳}{۲۸۰} < -\frac{۲۴۲}{۲۸۰} < -\frac{۲۴۱}{۲۸۰} < -\frac{۲۴۰}{۲۸۰}$$

روش۲ (میانگین گرفتن): در این روش، دو کسر را جمع کرده و سپس حاصل جمع را بر ۲ تقسیم می کنیم. برای به دست آوردن تعداد بیشتری کسر،این روش را با کسرهای جدید ادامه می دهیم.

نکته: میانگین دو عدد دلخواه، دقیقاً وسط آن دو عدد قرار دارد و فاصلهٔ آن از دو عدد به یک اندازه می باشد.

تمرین۵. الف* بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$ دو کسر به روش میانگین پیدا کنید.

حل: $\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۸+۳}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۱}{۱۲}\div ۲=\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۱}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴}\ ،\ \boxed{\frac{۱۱}{۲۴}}\ ،\ \frac{۲}{۳}$

حال برای پیدا کردن کسر دیگر کافی است که کسر $\frac{۱۱}{۲۴}$ را با یکی از دو کسر $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۲}{۳}$ در نظر بگیریم و به همین روش عمل کنیم؛

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱۱}{۲۴}=\frac{۶+۱۱}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱۷}{۲۴}\div ۲=\frac{۱۷}{۲۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۷}{۴۸}$$

$$\frac{۱}{۴}\ ،\ \boxed{\frac{۱۷}{۴۸}}\ ،\ \boxed{\frac{۱۱}{۲۴}}\ ،\ \frac{۲}{۳}$$

ب* بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۸}$ کسری بنویسید که فاصلهٔ آن از دو کسر به یک اندازه باشد.

حل: در واقع باید میانگین این دو کسر را حساب کنیم؛

$$\frac{۳}{۵}+\frac{۵}{۸}=\frac{۲۴+۲۵}{۴۰}=\frac{۴۹}{۴۰} \Rightarrow \frac{۴۹}{۴۰}\div ۲=\frac{۴۹}{۴۰}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۴۹}{۸۰} \Rightarrow \frac{۳}{۵}\ ،\ \boxed{\frac{۴۹}{۸۰}}\ ،\ \frac{۵}{۸}$$

روش ۳ (جمع صورت ها با هم و مخرج ها با هم): اگر صورت دو کسر را با هم و مخرج ها را نیز با هم جمع کنیم کسر حاصل، بین دو کسر داده شده خواهد بود.

تمرین۶. الف* سه کسر بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۵}$ بنویسید.

حل:

$$\frac{۲}{۳} < \frac{\overbrace{۶}^{۲+۴}}{\underbrace{۸}_{۳+۵}} < \frac{\overbrace{۱۰}^{۶+۴}}{\underbrace{۱۳}_{۸+۵}} < \frac{\overbrace{۱۴}^{۱۰+۴}}{\underbrace{۱۸}_{۱۳+۵}} < \frac{۴}{۵}$$

ب* چهار کسر بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۹}$ بنویسید.

حل:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{\overbrace{۶}^{۱+۵}}{\underbrace{۱۱}_{۲+۹}} < \frac{\overbrace{۱۱}^{۶+۵}}{\underbrace{۲۰}_{۱۱+۹}} < \frac{\overbrace{۱۶}^{۱۱+۵}}{\underbrace{۲۹}_{۲۰+۹}} < \frac{\overbrace{۲۱}^{۱۶+۵}}{\underbrace{۳۸}_{۲۹+۹}} < \frac{۵}{۹}$$

❖ نمایش اعشاری اعداد گویا

تعریف: برای محاسبه ی کسر $\frac{۵}{۴}$ اگر با ماشین حساب عدد ۵ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل ۱/۲۵ می شود. و برای محاسبه ی کسر $\frac{۷}{۳}$ اگر با ماشین حساب عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کنیم ، حاصل ...۲/۳۳۳۳۳ می شود.

پس هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری است.

✓ **مثال:**

$\frac{۷}{۵۰}=۰/۱۴$

$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶۶۶۶...$

$\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$

$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳۳...$

$\frac{۱}{۲}=۰/۵$

$۱۷=۱۷/۰$

عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا به دو حالت کلی زیر تقسیم می شود:

الف)اعداد اعشاری مختوم یا متناهی(باپایان) **ب)اعداد اعشاری متناوب**

الف)کسری دارای نمایش اعشاری مختوم است که اگر صورت را برمخرج تقسیم کنیم بالاخره باقی مانده صفر می شود. و تعداد رقم های بعد از اعشار آنها متناهی بوده، و در یک رقمی ،قطع شده و تمام می شود.

✓ مثال:

$\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵$

قسمت اعشاری کسر $\frac{۱}{۸}$ متناهی(فقط ۱ و ۲ و ۵) است و بعد از رقم ۵ به پایان می رسد.

۶

توجه: عدد صحیحی مانند ۶ نیز مختوم است زیرا اگر به آن مخرج یک($\frac{۶}{۱}$) بدهیم و صورت را بر مخرج تقسیم کنیم باقی مانده صفر می شود.

ب)کسری دارای نمایش اعشاری متناوب است که با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن، باقی مانده هیچ گاه صفر نمی شود و قسمت اعشاری آنها انتها ندارد. در قسمت اعشاری این اعداد یک یا چند رقم به صورت متناوب (یعنی پشت سرهم) تکرار می شوند.و از نماد زیر برای نمایش رقم هایی که تکرار می شود استفاده می کنند.

✓ مثال:

$\frac{۵}{۹}=۰/۵۵۵۵۵...=۰/\overline{۵}$

عدد ۵ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{۲}{۱۱}=۰/۱۸۱۸۱۸...=۰/\overline{۱۸}$

عدد ۱۸ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{۷}{۶}=۱/۱۶۶۶۶...=۱/۱\overline{۶}$

رقم ۱ ثابت و رقم ۶ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

علامت تکرار(‾)روی رقمی قرار می گیرد،که بطور متناوب تکرار می شود.

تمرین: به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را به دست آورده و مختوم بودن یا متناوب بودن هر کدام را مشخص کنید.

مختوم $\frac{۱۷}{۵}=۳/۴$ **متناوب** $\frac{۱۳}{۲۱}=۰/\overline{۶۱۹۰۴۷}$

مختوم $\frac{۱}{۴۰۰۰}=۰/۰۰۰۲۵$ **متناوب** $\frac{۲}{۲۱}=۰/۰۹۵۲۳۸۰۹۵...$

مختوم $\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$ **متناوب** $-\frac{۱}{۳۳}=-۰/۰۳۰۳۰۳...$

مختوم (دقت کنید قسمت اعشار عدد متناهی است. و تمام می شود.) $۰/۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷$

سوال چالشی: بدون استفاده از ماشین حساب و انجام تقسیم چطور می تونیم بفهمیم کسر مختوم است یا متناوب؟

نکته۱: ※قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند.※ اگر مخرج کسر را به عامل های اول تجزیه کنیم کسری که مخرج آن فقط عوامل اول ۲ یا ۵ داشته باشد. مختوم یا متناهی است. مانند: $\frac{۱۳}{۲۰},\frac{۷}{۵},\frac{۱}{۲},....$توجه کسرهایی مانند $\frac{۶}{۱}$که مخرج آنها یک است و هیچ عامل اولی ندارد. نیز مختوم می باشد.(می دانیم عدد یک نه اول است، نه مرکب)

مثال:

مخرج کسر تنها دارای عامل اول ۲ است. مختوم $\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۲\times۲}=۱/۷۵$

مخرج کسر دارای عامل اول ۲ و ۵ است. مختوم $\frac{۹}{۵۰}=\frac{۹}{۵\times۵\times۲}=۰/۱۸$

کسر قابل ساده شدن است اول ساده می کنیم. مخرج فقط عامل اول ۵ دارد. مختوم $\frac{۹۹\div۳}{۷۵\div۳}=\frac{۳۳}{۲۵}=\frac{۳۳}{۵\times۵}=۱/۳۲$

مخرج کسر هیچ عامل اول ندارد. مختوم $\frac{۱۰}{۱}$

به عدد مخرج یک می دهیم .مخرج یک هیچ عامل اولی ندارد.مختوم $۱۸۵=\frac{۱۸۵}{۱}$

نکته۲: ※قبل از بررسی یک کسر باید مطمعن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند.※ اگر مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم. و عامل اولی غیر از ۲ یا ۵ مانند ۳,۷,۱۱,....... دیدیم. در این صورت کسر متناوب خواهد بود.

مثال:

مخرج دارای عامل اول غیر از ۲ یا ۵ است. متناوب $\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷...$

مخرج علاوه بر ۲ دارای عامل اول ۳ می باشد. متناوب $\frac{۵}{۶}=\frac{۵}{۲\times۳}=۰/۸۳۳۳۳...$

مخرج علاوه بر ۲ و ۵ دارای عامل اول ۷ است. متناوب $\frac{۱}{۷۰}=\frac{۱}{۲\times۵\times۷}=۰/۰۱۴۲۸...$

تمرین: نوع عدد اعشاری حاصل از هریک از اعداد گویای زیر را بدون انجام تقسیم مشخص کنید.

$\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}\rightarrow$ متناوب

$\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}\rightarrow$ مختوم

$\frac{۷}{۵۰}=\frac{۷}{۲\times۵\times۵}\rightarrow$ مختوم

$\frac{۲}{۵}\rightarrow$ مختوم

$\frac{۷}{۳۳}=\frac{۷}{۳\times۱۱}\rightarrow$ متناوب

$\frac{۹}{۱۴}=\frac{۹}{۲\times۷}\rightarrow$ متناوب

$\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}\rightarrow$ متناوب

$\frac{۱۳}{۱۲}=\frac{۱۳}{۲\times۲\times۳}\rightarrow$ متناوب

سوالات امتحانی حل شده

۱-نمایش اعشاری کسر $\frac{۵}{۶}$ ، مختوم است. (سمنان-خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ مخرج عامل غیر از ۲ یعنی ۳ دارد. $\frac{۵}{۲\times۳}$

۲-نمایش اعشاری $\frac{۳}{۱۰}$ عدد به صورت ...۰/۳۳۳۳ است.(خراسان شمالی-خرداد۹۵) ص غ

حل: غ $\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$

۳-عدد $۰/\overline{۳}$ از عدد $۰/\overline{۳۲}$ کوچکتر است. (تهران نوبت صبح-خرداد۹۶) ص غ

حل: غ رقم دوم اعشار هر دو عدد را مقایسه کنید. $۰/۳۳۳۳۳... > ۰/۳۲۳۲۳۲۳۲...$

۴-نمایش اعشاری کسر $\frac{۲}{۵}$ ....است.(مختوم-متناوب)(اصفهان-خرداد۹۶)

حل: مختوم زیرا مخرج فقط عامل ۵ دارد.

۵-عدد $۳/\overline{۱۳}$ از ۳/۱۳ ....است.(بزرگتر-کوچکتر-مساوی)(سمنان-خرداد ۹۵)

حل: بزرگترزیرا $۳/۱۳۱۳۱۳۱۳... > ۳/۱۳$ رقم سوم اعشار عدد(...۳/۱۳۱۳۱۳) یک ولی رقم سوم اعشار عدد (۳/۱۳)صفر است.

۶-کدام یک از اعداد زیر نمایش اعشاری مختوم دارد.(تهران-خرداد۹۶)

$\frac{۷}{۳۰}$ $\frac{۱}{۵۵}$ $\frac{۱}{۸}$ $\frac{۳}{۱۷}$

حل: زیرا مخرج فقط عامل ۲ دارد. $\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲\times۲\times۲}$

۷-کدام کسر نمایش اعشاری متناوب دارد.(قزوین-خرداد۹۶)

$\frac{۷}{۸}$ $\frac{۵}{۹}$ $\frac{۳}{۱۰}$ $\frac{۷}{۲۵}$

حل: مخرج عامل اول ۳ دارد. $\frac{۵}{۹}=\frac{۵}{۳\times۳}$

۸-نمایش اعشاری $\frac{۵}{۱۶}$ برابر است با: .(آذربایجان شرقی-خرداد۹۵)

۰/۳۱۲ $۰/۳\overline{۱}$ $۰/۳۱\overline{۳۵}$ ۰/۳۱۲۵

حل: ۰/۳۱۲۵ صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

۹-کدام یک از اعداد زیر عدد اعشاری مختوم نمی باشد. .(چهارمحال بختیاری-خرداد۹۵)

$\frac{۲۱}{۳۹}$ $-\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱۲}{۱۵}$ $-\frac{۲۱}{۳۵}$

حل: زیرا مخرج عامل اول ۱۳ دارد. $\frac{۲۱\div۳}{۳۹\div۳}=\frac{۷}{۱۳}$

۱۰-حاصل کسر مرکب $\dfrac{۲-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}}$ مساوی عدد $\frac{-۱}{۳}$ است. (آذربایجان غربی-خرداد۹۵) ص غ

حل : غ یادآوری ترتیب عملیات

۱-اول پرانتزهارا حساب کن۲-حاصل توان۳-در هنگام محاسبه چه داخل پرانتز چه بیرون پرانتز همواره از سمت چپ به راست ضرب و تقسیم را انجام می دهیم۴-پس از ضرب و تقسیم، جمع و تفریق را انجام می دهیم.

صورت: $\frac{۲}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}=\frac{۸-۲+۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$ مخرج: $\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۴}$ صورت بر مخرج $\dfrac{\frac{۹}{۴}}{-\frac{۳}{۴}}=-۳$

۱۱-حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (کرمانشاه-خرداد۹۵) $\frac{-۱}{۲}+\frac{-۵}{۶}\div\frac{۷}{۳}=$

حل : $\frac{-۱}{۲}+\frac{-۵}{۶}\div\frac{۷}{۳}=\frac{-۱}{۲}+\frac{-۵}{۶}\times\frac{۳}{۷}=\frac{-۱\times۷}{۲\times۷}-\frac{۵}{۱۴}=\frac{-۷-۵}{۱۴}=\frac{-۱۲}{۱۴}=-\frac{۶}{۷}$

❖ درس دوم عددهای حقیقی

آشنایی با عددهای گُنگ

عددهایی مانند $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۶},\sqrt{۷},\sqrt{۱۰}$, ۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱... که تعداد رقم های اعشار ی آنها بی شمار است و دارای دوره تناوب نیست. **گُنگ یا اَصم** می گوییم.

※مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را با نماد Q' یا Q^{C} نمایش می دهیم.※

✓ **مثال:**

هیچ نظمی در قسمت اعشاری وجود ندارد. بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ← $\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۲۵۶۲...$

بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ← ۰/۳۴۳۴۴۴۳۴۴۴...

بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ← ۰/۱۲۱۱۲۱۱۱۲۱۱۱۱۲...

- ※توجه در اعداد گویای متناوب یک یا چند عدد بصورت نامتناهی و به طور منظم تکرار می شود ولی در اعداد بالا اعداد به صورت نامنظم ادامه پیدا می کنند و ما نمی توانیم دوره ی تناوب مشخصی برای آنها قائل باشیم.※

✧**نکته۱:** یکی از اعداد معروف گنگ، عدد π است. که در زیر ، تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است. اما در محاسبات حداکثر تا دو رقم اعشار استفاده می شود.

$\pi=$۳/ ۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹

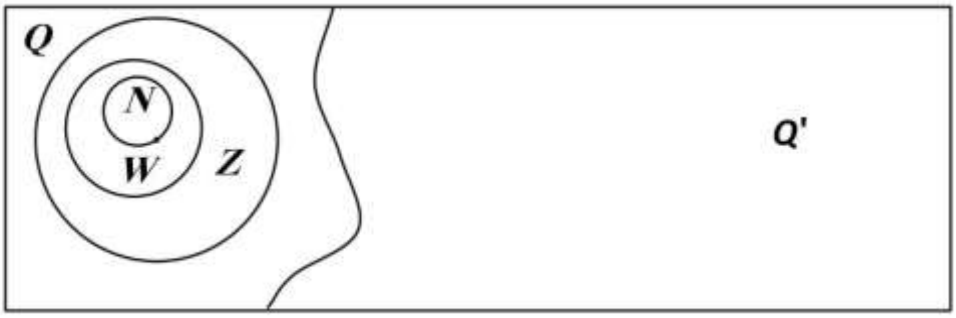
✧**نکته۲:** جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است.

مانند: $\sqrt{۱۰},\sqrt{۰/۹},\sqrt{۷/۵},\sqrt{۱۵},\sqrt{۶},\sqrt{۲۰},\sqrt{۴۶}$

- توجه: عددهایی که جذر کامل دارند مثل $۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,.....$ این عددها وقتی زیر رادیکال هستند گویا هستند و گنگ نمی باشند. زیرا

$$\sqrt{۹}=۳,\sqrt{۱۶}=۴,\sqrt{۲۵}=۵,\ ۰/۷=\frac{۷}{۱۰}=\sqrt{\frac{۴۹}{۱۰۰}}=\sqrt{۰/۴۹}....$$

✧**نکته۳:** در نمودار وِن مجموعه های $\mathbb{Q}',\mathbb{Q},\mathbb{Z},\ W,\mathbb{N}$ به صورت زیر می باشند.



✧**نکته۴:** مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ دو مجموعه ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک ندارند، به بیان دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$

- ❋توجه طبق نمودار وِن $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

تمرین:کدام عبارت درست و کدام نادرست است.

$\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q}$ ص	$\sqrt{۵}\in\mathbb{Q}'$ ص	ص $۲/۳۰۳۰۰۳۰۰۰۳...\in\mathbb{Q}'$	$-۳\in\mathbb{Q}'$ غ
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ ص	$\frac{\sqrt{۹}}{۴}\in\mathbb{Q}'$ غ	$\sqrt{۷}\in\mathbb{Q}$ غ	$\sqrt{۳/۷}\in\mathbb{Q}'$ ص
$W\not\subset\mathbb{Q}'$ ص	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}'$ غ	$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ ص	$\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ ص

سوالات امتحانی حل شده

۱- $۰/۳\in\mathbb{Q}$ (گیلان-خرداد۹۵) ص غ

حل: ص

۲-عدد $۰/\overline{۱۷}$ گنگ است. (البرز-خرداد۹۶) ص غ

حل: غ گویاست.

۳-عددی وجود دارد که هم گویا و هم گنگ باشد. ص غ

حل: غ مجموعه گویا و گنگ دو مجموعه جدا از هم هستند.

۴-عدد $\sqrt{۹}$ عدد گنگ است. (زنجان -خرداد۹۵) ص غ

حل: غ گویاست. $\sqrt{۹}=۳$

۵-عدد π عددی اصم است. (لرستان-خرداد۹۶) ص غ

حل: ص

۶-عدد ...۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲ یک عدد گویا است. (قم-خرداد۹۵)   ص   غ

حل: غ گنگ است.

۷-حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.   ص   غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{۳}+(-\sqrt{۳})=۰$

۸-حاصلضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.   ص   غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴$

۹-حاصل تقسیم عددی گویای غیر صفر و عدد گنگ برهم، عددی گنگ است.   ص   غ

حل: ص مثال ۲ عددی گویا و $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است. حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ هر دو گنگ هستند.

۱۰-کدام عدد به مجموعه عددهای گنگ تعلق دارد. (بوشهر-خرداد۹۵)

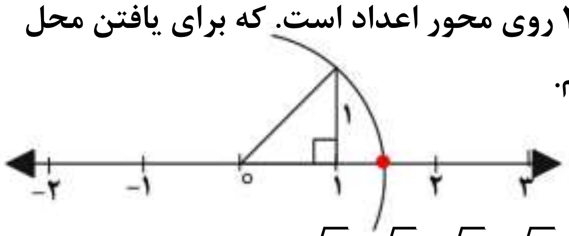
$\sqrt{۱}$ $۰/۲\overline{۳}$ $\sqrt{۳}$ $\frac{۷}{۱۱}$

حل: $\sqrt{۳}$

❖ نمایش هندسی اعداد گنگ

هر عدد گنگ متناظر با یک نقطه روی محور اعداد می باشد.

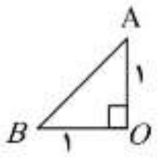
به عنوان مثال نقطه ی نمایش عدد $\sqrt{۲}$ یک نقطه بین دو عدد ۱و ۲ روی محور اعداد است. که برای یافتن محل دقیق در روی محور مطابق شکل از روش هندسی استفاده می کنیم.



※برای به دست آوردن محل دقیق اعداد گنگ رادیکالی مانند $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},......$ از همین روش که در پایه ی هشتم آموختیم استفاده می کنیم.※

یادآوری پایه ی هشتم

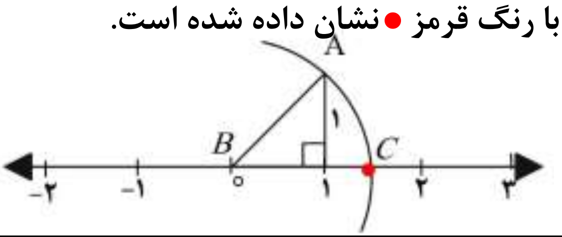
برای رسم پاره خط هایی به طول $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷}$ و ....از رابطه ی فیثاغورس و مثلث قائم الزاویه کمک می گیریم. مثلا برای رسم پاره خطی به طول $\sqrt{۲}$ از مثلثی به شکل زیر استفاده می کنیم.



$$AB^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲\rightarrow AB=\sqrt{۲}$$

همان طور که در شکل میبینید. طبق رابطه ی فیثاغورس، مثلث قائم الزاویه با ضلع های قائمهٔ ۱ وتری به اندازه ی $\sqrt{۲}$ به ما می دهد.اگر همین مثلث را روی محور رسم کنیم و کمانی به مرکزنقطه ی ۰ و شعاع AB بزنیم.

محل برخورد با محور یعنی نقطه ی C،نقطه ی نمایش $\sqrt{۲}$ است.که با رنگ قرمز ● نشان داده شده است.



- *توجه برای اینکه راحت تر بتوانیم مثلث قائم الزاویه مورد نظر را پیدا کنیم. عدد زیر رادیکال را به صورت مجموع دو یا چند مربع کامل می نویسیم. این اعداد مربع کامل، مجذور طول اضلاع قائمه ی مثلث هستند. *

✓ **مثال:**

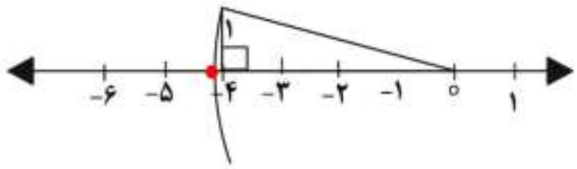
$-\sqrt{17}$

$$-\sqrt{17}=-\sqrt{16+1}$$

۴ ۱

*نقطه شروع مبدا مختصات

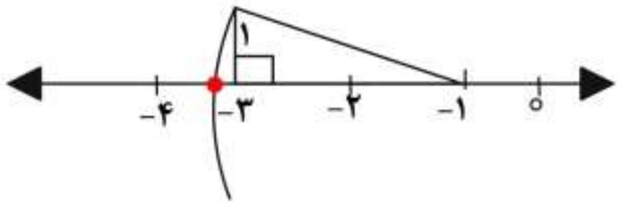
*چون منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم



$-1-\sqrt{5}$

*نقطه ی شروع -1

*چون $\sqrt{5}$ منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم.



$\sqrt{5}$

$$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}$$

۲ ۱

زیرا: $5=2^2+1^2$ برای اینکه طول اضلاع را بفهمیم از ۴ و ۱ جذر می گیریم.

پس برای رسم $\sqrt{5}$ داریم:

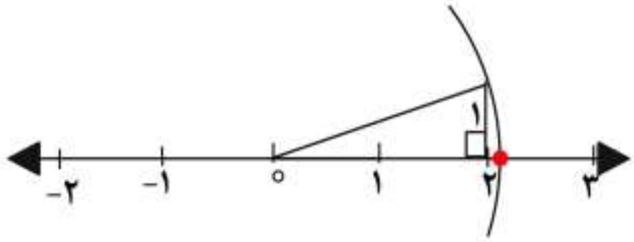
مثلثی به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ رسم می کنیم.

*نقطه ی شروع مبدا مختصات

*چون $\sqrt{5}$ مثبت است پس به سمت راست حرکت می کنیم.

*۲واحد به سمت راست

*یک واحد به سمت بالا

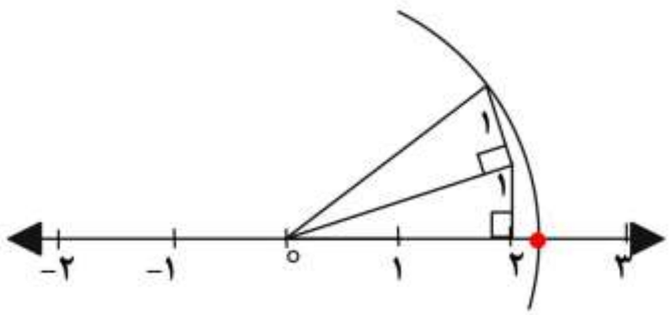


$\sqrt{6}$

$$\sqrt{6}=\sqrt{5+1}=\sqrt{4+1+1}$$

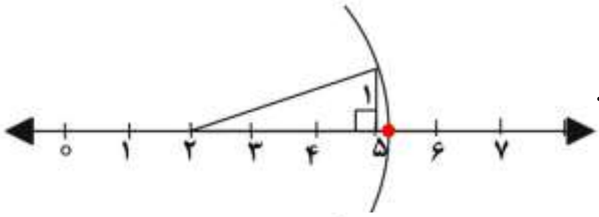
۲ ۱

ابتدا $\sqrt{5}$ را رسم می کنیم سپس مثل قسمت های قبلی برای بدست آوردن $\sqrt{6}$ مثلث قائم الزاویه به طول ضلع قائمه ی۱ روی وتر مثلث اول می سازیم. وکمان می زنیم.



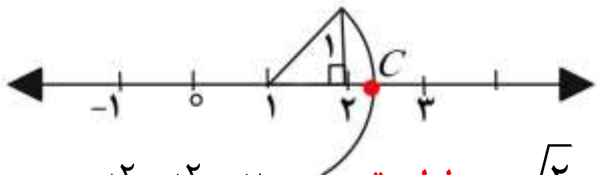
تمرین:

۱-نقطه ی نمایش عدد گنگ $۲+\sqrt{۱۰}$ را روی محور نشان دهید.



حل:

۲- در شکل زیر نقطه ی C چه عددی را نشان می دهد.



حل: اول طول وتر را پیدا می کنیم. $۱^۲+۱^۲=۲\rightarrow$ طول وتر= $\sqrt{۲}$

*نقطه ی شروع ۱+ است.

* چون از نقطه ی شروع به سمت راست حرکت کرده پس $\sqrt{۲}$ مثبت است. $C=+۱+\sqrt{۲}$

❖ چالش اعداد گنگ و گویا روی محور

*نکته:مربع های کامل $۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱,۱۰۰,۱۲۱,.......$

بدون نمایش هندسی،چگونه تشخیص دهیم اعداد گنگ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

✓ **مثال۱:** $\sqrt{۱۵}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۱۵ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۱۵ بین دو مربع کامل ۹ و ۱۶ قرار دارد.($۹<۱۵<۱۶$)پس $\sqrt{۱۵}$ بین دو عدد $\sqrt{۹}=۳,\sqrt{۱۶}=۴$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$۹<۱۵<۱۶\rightarrow\sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}\rightarrow۳=\sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}=۴\rightarrow۳<\sqrt{۱۵}<۴$$

پس بین دو عدد صحیح ۳ و۴ قرار می گیرد.

✓ **مثال۲:** $۲+\sqrt{۷}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۷ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۷ بین دو مربع کامل ۴ و ۹ قرار دارد.($۴<۷<۹$)پس $\sqrt{۷}$ بین دو عدد $\sqrt{۴}=۲,\sqrt{۹}=۳$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$۴<۷<۹\rightarrow\sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}\rightarrow۲<\sqrt{۷}<۳$$

اینجا باید $\sqrt{۷}$ را طبق سوال با عدد ۲ جمع کنیم. ($۲+\sqrt{۷}$)پس دو طرف آن یعنی ۲ و ۳ را هم باید با ۲ جمع کنیم.($۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳$)

$$\rightarrow۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳\rightarrow۴<۲+\sqrt{۷}<۵$$ پس بین دو عدد۴ و ۵ قرار می گیرد.

✧**نکته:** بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال۳:** بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

*اول ۵ و ۶ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$۵\times۵=۲۵, ۶\times۶=۳۶$

$\sqrt{۲۵}=۵, \sqrt{۳۶}=۶$

$\sqrt{۲۵}<\ldots,\ldots\ldots,.?\ldots,\ldots\ldots<\sqrt{۳۶}$

$\sqrt{۲۵}<\sqrt{۲۶}<\sqrt{۲۷}<\sqrt{۲۸}<\sqrt{۳۰}<\sqrt{۳۶}$

توجه هنوز هم می توانیم بنویسیم .مانند: $\sqrt{۲۵}<\sqrt{۲۶/۱}<\sqrt{۲۷/۵}<\sqrt{۲۷/۵۵}<\sqrt{۳۰/۱}<\sqrt{۳۶}$

*این سوال بی شمار جواب داره یعنی می تونیم هنوز عدد بنویسیم که گنگ باشند. دانش آموز عزیز۳ تا عدد گنگ دیگه رو برای تمرین اضافه کن.

✓ **مثال ۲:** بین دو عدد ۱ و ۲ هفت عدد گنگ بنویسید.

حل:

*اول ۱ و ۲ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$۱\times۱=۱, ۲\times۲=۴$

$\sqrt{۱}=۱, \sqrt{۴}=۲$

$\sqrt{۱}<\sqrt{۱/۵}<\sqrt{۲}<\sqrt{۲/۱}<\sqrt{۳}<\sqrt{۳/۴}<\sqrt{۳/۷}<\sqrt{۳/۹}<\sqrt{۴}$

✧**نکته:** بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۳:** بین دو عدد $\sqrt{۷}, \sqrt{۱۰}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

*دو عدد زیر رادیکال هستند و ما براحتی می توانیم اعداد گنگ را پیدا کنیم.

$\sqrt{۷}<\sqrt{۷/۵}<\sqrt{۸}<\sqrt{۸/۳}<\sqrt{۹/۴}<\sqrt{۹/۷}<\sqrt{۱۰}$

☺ توجه اشتباه رایج شاگردان، $\sqrt{۹}$ را هم به عنوان عدد گنگ می نویسند ولی می دانیم $\sqrt{۹}=۳$ گویاست.

✧**نکته:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۴:** بین ۲ و $\sqrt{۵}$ چهار عدد گویا و چهار عددگنگ مشخص کنید.

حل:

برای پیدا کردن عدد گویا اول مقدار تقریبی $\sqrt{۵}$ حدود دو رقم اعشار می نویسیم :

$$\sqrt{۵} \simeq ۲/۲۴$$

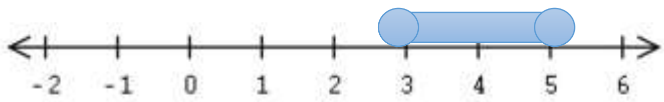
$$۲ < ۲/۰۴ < ۲/۰۹ < ۲/۱۲ < ۲/۲۲ < \sqrt{۵} \simeq ۲/۲۴$$

برای عدد گنگ اول باید عدد ۲ را زیر رادیکال ببریم و برای اینکار عدد را دو بار در خودش ضرب می کنیم.

$$۲ = \sqrt{۴} < \sqrt{۴/۲} < \sqrt{۴/۲۳} < \sqrt{۴/۵} < \sqrt{۴/۸} < \sqrt{۵}$$

✧ **جمع بندی:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

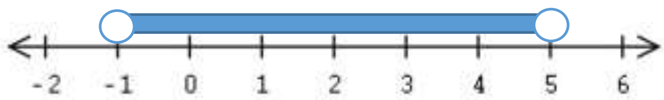
✓ **مثال ۵:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} | ۳ \leq x \leq ۵\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۳ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۳ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال ، فقط اعداد گویا ($x \in \mathbb{Q}$)از ۳ تا ۵ را از ما می خواهد.

✓ **مثال ۶:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q}' | -۱ < x < ۵\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۱- و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۱- تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال ، فقط اعداد گنگ ($x \in \mathbb{Q}'$) از ۱- تا ۵ را از ما می خواهد.

سوالات امتحانی حل شده

۱- عدد $\sqrt{۳}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.(همدان-خرداد ۹۶)

۰,۱   ۳,۴   ۲,۳   ۱,۲

حل: $\sqrt{۱} < \sqrt{۳} < \sqrt{۴} \rightarrow ۱ < \sqrt{۳} < ۲ \rightarrow ۱+۱ < \sqrt{۳}+۱ < ۲+۱ \rightarrow ۲ < \sqrt{۳}+۱ < ۳$

۲- $-۴+\sqrt{۱۰}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد. (آذربایجان-خرداد ۹۶)

$۲,۳$ $\qquad$ $۱,۲$ $\qquad$ $۰,۱$ $\qquad$ $-۱,۰$

حل:

$$\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۶}\to ۳<\sqrt{۱۰}<۴\to -۴+۳<-۴+\sqrt{۱۰}<-۴+۴\to -۱<-۴+\sqrt{۱۰}<۰$$

۳-بین دو عدد ۳ و ۴ دو عدد گنگ بنویسید. (هرمزگان-خرداد ۹۶)

حل: $۳=\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۱}<\sqrt{۱۶}=۴$

۴- بین $\sqrt{۳}$ و ۴ یک عدد گنگ بنویسید. (البرز-خرداد ۹۶)

حل: $\sqrt{۳}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}=۴$

۵-عدد $\sqrt{۹۰}-۱۰$ بین کدام اعداد صحیح قرار دارد.

حل:

چون ۹۰ بین دو مربع کامل ۸۱ و ۱۰۰ قرار دارد.($۸۱<۹۰<۱۰۰$)پس $\sqrt{۹۰}$ بین دو عدد ۹،۱۰ قرار دارد.($\sqrt{۸۱}=۹,\sqrt{۱۰۰}=۱۰$) به قسمت زیر دقت کنید.

$$۸۱<۹۰<۱۰۰\to\sqrt{۸۱}<\sqrt{۹۰}<\sqrt{۱۰۰}\to ۹<\sqrt{۹۰}<۱۰$$

اینجا باید طبق سوال $\sqrt{۹۰}$ ، منهای ۱۰ شود. ($\sqrt{۹۰}-۱۰$)پس دو طرف آن یعنی ۹ و ۱۰ را هم باید منهای ۱۰ کنیم.($۹-۱۰<\sqrt{۹۰}-۱۰<۱۰-۱۰$)به قسمت زیر دقت کنید.

$$۹-۱۰<\sqrt{۹۰}-۱۰<۱۰-۱۰\to -۱<\sqrt{۹۰}-۱۰<۰$$

پس بین ۱- و ٥ قرار دارد

❖ اعداد حقیقی

عددها به دو دسته جدا از هم، عددهای **گویا** و عددهای **گنگ** تقسیم می شوند. **اجتماع** مجموعه ی عددهای گویا و عددهای گنگ را **مجموعه عددهای حقیقی** می نامیم و آن را با نماد $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم.

✧**نکته۱:** $\mathbb{R}=\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}$ تساوی بین سه مجموعه اعداد گویا و گنگ و حقیقی برقرار است.

✧**نکته۲:** نمودار ون:

✧**نکته۳:** $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

✓ **مثال:**

$۳/۲۴\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $۰/۰۵۰۵۵۰۵۵۵۰۵۵۵....\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $-\left(۱+\sqrt{۳}\right)\in\mathbb{R}$

$\pi\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\frac{۵}{\sqrt{۲}}\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $-\frac{۶}{۷}\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{۳۵}\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $۵\in\mathbb{R}$

تمرین:داخل ....علامت $\in$ یا $\notin$قرار دهید.

$-\sqrt{۹}\ldots\mathbb{R}$ $\qquad$ $\frac{۹}{۰}\ldots\mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۷}\ldots\mathbb{R}$ $\qquad$ $۰/۴۷\ldots\mathbb{Q}$ $\qquad$ $-۳\ldots\mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۵}\ldots\mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{۵/۷}\ldots\mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\sqrt{۰/۸۱}\ldots\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\sqrt{۰/۴}\ldots\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\frac{-۶}{۳}\ldots\mathbb{N}$

حل:

$-\sqrt{۹}..\in..\mathbb{R}$ $\qquad$ $\frac{۹}{۰}\ldots\notin.\mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۷}..\in\ldots\mathbb{R}$ $\qquad$ $۰/۴۷\ldots\in\ldots\mathbb{Q}$ $\qquad$ $-۳\ldots\in..\mathbb{Z}$

$۰=\frac{۰}{۵}..\in..\mathbb{R}$ $\qquad$ $\sqrt{۵/۷}\ldots\in\ldots\mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\frac{۹}{۱۰}=\sqrt{\frac{۸۱}{۱۰۰}}=\sqrt{۰/۸۱}..\in\ldots\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\frac{-۶}{۳}\ldots\notin\mathbb{N}$

$\sqrt{۰/۴}\ldots\notin..\mathbb{Q}$

※توجه مجموعه ی اعداد گویا و مجموعه ی اعداد گنگ زیر مجموعه ی اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R},\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

تمرین:با توجه به مفاهیم قبلی و یا استفاده از نمودار وِن جاهای خالی را پر کنید.

$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\ldots..$ $\qquad$ $\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}=\ldots.$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cup\mathbb{N}=\ldots.$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=\ldots..$

$\mathbb{Q}'\cap\mathbb{R}=\ldots..$ $\qquad$ $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}=\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}=\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=\ldots..$

حل:

$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=..\mathbb{Z}\ldots$ $\qquad$ $\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}=..\mathbb{R}..$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cup\mathbb{N}=..\mathbb{Q}..$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=..\mathbb{Q}\ldots$

$\mathbb{Q}'\cap W=..\phi\ldots$ $\qquad$ $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}=\ldots\phi\ldots.$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{N}=\ldots.\mathbb{N}\ldots$ $\qquad$ $\mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=..\mathbb{R}\ldots$

سوالات امتحانی حل شده

۱-عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۲-هر عدد گویا حقیقی است. (خوزستان-خرداد۹۶) ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۳- $\sqrt{۱}\in\mathbb{R}$ ص غ

حل: ص

۴-از اجتماع دو مجموعه ی $\mathbb{Q},\mathbb{Q}'$ مجموعه ی ....بوجود می آید. (تهران-خرداد۹۶)

حل: مجموعه اعدادحقیقی $\mathbb{R}$

۵-اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و عددهای ....مجموعه عددهای حقیقی می نامیم.(صحیح-اصم)

حل: اصم

۶-کدام گزینه کامل شده ی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\ldots\ldots$ است. (آذربایجان-خرداد۹۶)

$\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Q}'$ $\quad$ W

۷- کدام گزینه نادرست است. (تهران-خرداد۹۶)

$۱/۱\overline{۶}\in\mathbb{Q}$ $\quad$ $\pi\in\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ $\quad$ $(\phi\cap\mathbb{Q}')\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

۸-کدام گزینه نادرست است. (کردستان-خرداد۹۶)

$\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{Z}\cap W=W$ $\quad$ $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}=\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$

۹-کدام گزینه درست است. (کرمان -خرداد۹۵)

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$

۱۰-با توجه به مجموعه اعداد کدام گزینه صحیح نیست. (کرمانشاه-خرداد۹۶)

$W-\mathbb{N}=\{۰\}$ $\quad$ $\mathbb{N}-\mathbb{Z}=\phi$ $\quad$ $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

✓ **مثال:** هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهایش مشخص کنید.

$$A=\{۵n+۳|n\in\mathbb{N}\},B=\{x^{۲}-۱|x\in\mathbb{Z},-۲\le x<۱\},C=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x\le ۵\}$$

حل:

$$A=\{۵n+۳|n\in\mathbb{N}\}=\{۸,۱۳,\ldots\}$$

$$n=۱,۲,۳,۴,\ldots\rightarrow ۵\times۱+۳=۸,۵\times۲+۳=۱۳,\ldots$$

$$B=\{x^{۲}-۱|x\in\mathbb{Z},-۲\le x<۱\}=\{۳,۰,-۱\}$$

$$x=-۲,-۱,۰\rightarrow(-۲)^{۲}-۱=۴-۱=۳,(-۱)^{۲}-۱=۱-۱=۰,(۰)^{۲}-۱=۰-۱=-۱$$

$$C=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x\le۵\}=?$$

$$x=-۱,۱,۱/۵,\sqrt{۲},-\sqrt{۳},\frac{-۳}{۲},\ldots$$

※توجه:در قسمت های قبلی یاد گرفتیم بین هر دو عدد حقیقی (گویا یا گنگ) بی شمار عدد حقیقی بصورت گویا یا گنگ وجود دارد. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی را نمی توان با اعضا نمایش داد.پس برای نمایش مجموعه اعداد حقیقی از محور استفاده می کنیم. ※

❖ محور اعداد حقیقی

اعداد حقیقی را می توان روی یک محور نشان داد که به این محور، محور اعداد حقیقی می گوییم.

※هر نقطه روی این محور نشان دهنده ی یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ است.

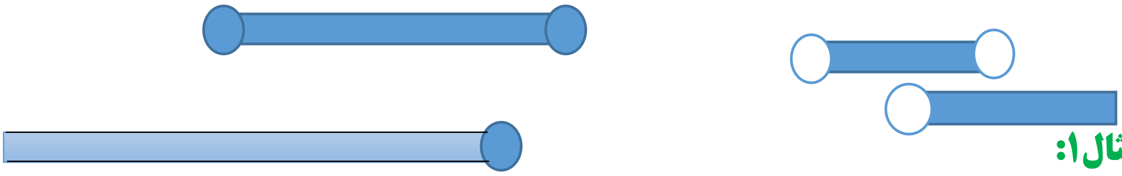
به عبارت دیگر یک تناظر یک به یک بین اعداد حقیقی و نقاط روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

به صورت زیر:

※هر عدد حقیقی فقط یک نقطه را روی محور نشان می دهد و هر نقطه روی محور اعداد حقیقی، نمایش یک عدد حقیقی است.

❖ نمایش هندسی مجموعه ها روی محوراعداد حقیقی

می خواهیم مجموعه های زیر را روی محور اعداد نشان دهیم برای این کار از خط ها و دایره های توپر و توخالی به شکل زیر استفاده می کنیم.



✓ **مثال۱:**

$A=\{x\in\mathbb{R}|۲<x\leq ۳\}$

ابتدای خط

انتهای خط

مساوی دارد دایره توپر

مساوی ندرد دایره توخالی

- **توجه:** در علامت های $\geq,\leq$ (بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی) علامت مساوی به معنای آن است که خود عدد هم جزو مجموعه است و ما برای نشان داد نقاط ابتدایی یا انتهایی روی محور آن را با دایره ی تو پر مشخص می کنیم.

علامت $<,>$ به معنای این است که نقاط ابتدا یا انتهایی جزو مجموعه نیستند و روی محورآن را با دایره ی توخالی نشان می دهیم.

✓ **مثال:** مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

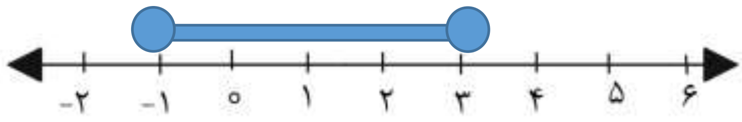
$A=\{x\in\mathbb{R}|-۱\leq x\leq ۳\}$

ابتدای خط

انتهای خط

توپر

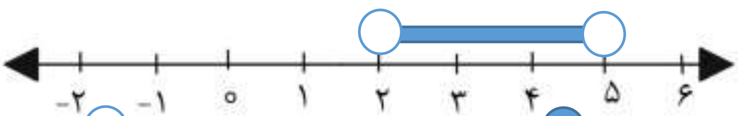
توپر



$B=\{x\in\mathbb{R}|۲<x<۵\}$

ابتدا و توخالی

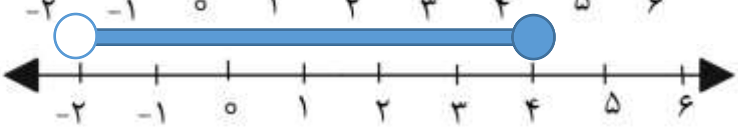
انتها و توخالی



$C=\{x\in\mathbb{R}|-۲<x\leq ۴\}$

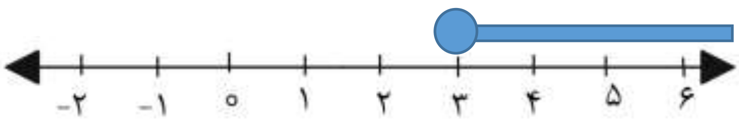
ابتدا و توخالی

انتها و توپر

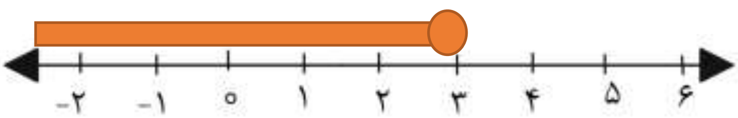


$D=\{x\in\mathbb{R}|x\geq ۳\}$

ابتدا و توپر



*اشتباه رایج دانش آموزان: عدد ۳ را انتها می گیرند و نمودار را به شکل زیر رسم می کنند.این غلط است.

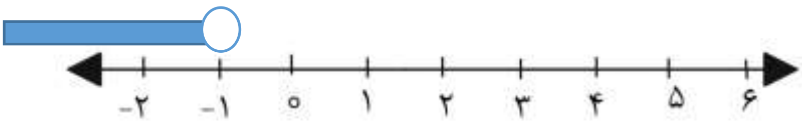


* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید(x های بزرگتر از ۳)

وقتی می خوانیم بزرگتر یعنی به سمت راست ۳ باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت راست حرکت کنیم عدد بزرگتر و هر چقدر به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر می شود.

$E=\{x\in\mathbb{R}|x<-۱\}$

انتها و توخالی

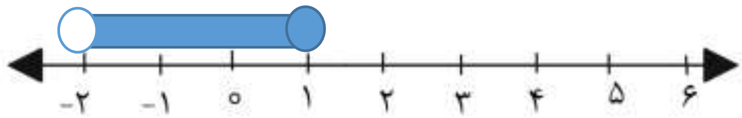


*اشتباه رایج دانش آموزان: عدد ۱- را ابتدا می گیرند.و به شکل زیر رسم می کنند که غلط می باشد.

* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید(x های کوچکتر از -۱)

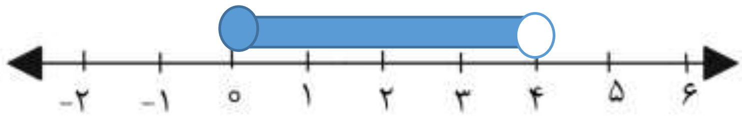
وقتی می خوانیم کوچکتر یعنی به سمت چپ -۱ باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر و هر چقدر به سمت راست حرکت کنیم عدد بزرگتر می شود.

$F=\{x\in\mathbb{R}|۱\geq x>-۲\}$



به جهت علامت ها دقت کنید.

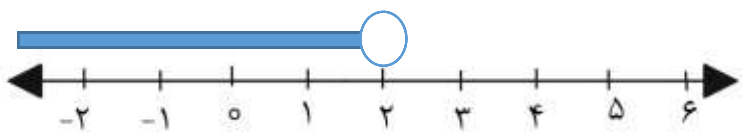
✓ **مثال:** با توجه به محور مجموعه ی متناظر با آن را بنویسید.



حل: ابتدا صفر و توپر ، انتها ۴ و توخالی $A=\{x\in\mathbb{R}|۰\leq x<۴\}$

*دقت کنید $x\in\mathbb{R}$ است. اشتباه رایج شاگردان $x\in\mathbb{Q}$ یا $x\in\mathbb{Z}$ می نویسند.

✓ **مثال۳:**



حل: انتها ۲ و توخالی،حرکت به سمت چپ پس x های کمتر از ۲ $A=\{x\in\mathbb{R}|x<۲\}$

*اشتباه رایج شاگردان $x>۲$ می نویسند. دقت کنید حرکت به سمت چپ است.

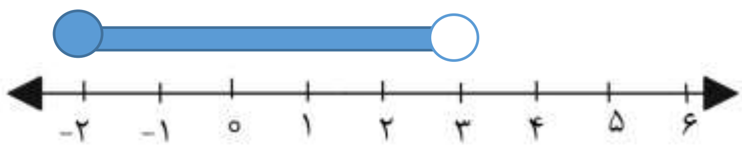
سوالات امتحانی حل شده

۱-الف)مجموعه را روی محور نشان دهید. (مرکزی- خرداد۹۶) $A=\{x\in\mathbb{R}|-۲\le x<۳\}$

ب)در داخل ....علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

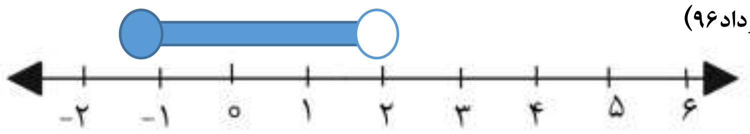
$\sqrt{۸}.........A$

حل:الف



حل :ب) $\sqrt{۸}\in A$ زیرا $\sqrt{۸}\cong ۲/۸۲$ عددی بین ۲ و ۳ است. یا می توانیم از روش قبلی بدون استفاده از ماشین حساب استفاده کنیم. $\sqrt{۴}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹}\to ۲<\sqrt{۸}<۳$

۲-شکل مقابل معرف کدام مجموعه است. (اصفهان- خرداد۹۶)



$\{۰,۱\}$ $\{-۱,۰,۱,۲\}$

$\{x\in\mathbb{R}|-۱\le x<۲\}$ $\{x\in\mathbb{R}|-۱<x\le ۲\}$

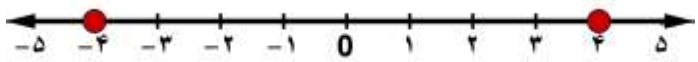
❖ درس سوم قدرمطلق و محاسبه ی تقریبی

فاصلهٔ نقطهٔ نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد، تا مبدأ(صفر) را قدرمطلق آن عدد می نامند.

قدرمطلق عدد a را با $|a|$ نشان می دهیم.

✓ **مثال:** فاصله نقاط نظیر دو عدد ۴ و ۴- تا مبدأ ، برابر ۴ است؛ پس قدرمطلق هر دو عدد ۴ و (۴-) برابر ۴ است؛

یعنی: $|۴|=|-۴|=۴$.



✧**نکته:** قدرمطلق عدد صفر، مساوی صفر می باشد. یعنی $a=۰ \Rightarrow |a|=۰$

✧**نکته:** قدرمطلق عددهای مثبت، مساوی خود عدد می باشد. یعنی $a>۰ \Rightarrow |a|=a$

✧**نکته:** قدرمطلق عددهای منفی، مساوی قرینهٔ آن عدد می باشد. یعنی $a<۰ \Rightarrow |a|=-a$

تمرین۱. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ت* $|۰|=۰$ پ* $|\sqrt{۷}|=\sqrt{۷}$ ب* $\left|\frac{-۳}{۸}\right|=\frac{۳}{۸}$ الف* $|-۴/۰۲|=۴/۰۲$

✧**نکته:** قدر مطلقِ حاصل ضربِ دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلقِ آنها است. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b ؛ $|a\times b|=|a|\times|b|$

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{l}|(-۸)\times(+۶)|=|-۴۸|=۴۸\\ |-۸|\times|+۶|=۸\times۶=۴۸\end{array}\right\}\Longrightarrow |(-۸)\times(+۶)|=|-۸|\times|+۶|$$

✧**نکته**: قدر مطلقِ حاصل تقسیمِ دو عدد، مساوی با حاصل تقسیم قدر مطلقِ آنهاست. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b که $b \neq ۰$ ؛

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{-۲۴}{۲}\right| = |-۱۲| = ۱۲ \\ \frac{|-۲۴|}{|۲|} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\frac{-۲۴}{۲}\right| = \frac{|-۲۴|}{|۲|}$$

تمرین۲. آیا قدر مطلقِ حاصل جمعِ دو عدد، همواره مساوی با حاصل جمع قدر مطلقِ آنهاست؟

حل: خیر – مثلاً

$$\left.\begin{array}{l} |-۹+۲| = |-۷| = ۷ \\ |-۹| + |+۲| = ۹ + ۲ = ۱۱ \end{array}\right\} \Longrightarrow |-۹+۲| \neq |-۹| + |+۲|$$

✧**نکته:** قدرمطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق آنها کوچکتر یا مساوی است. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b؛

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{l} |-۷+۳| = |-۴| = ۴ \\ |-۷| + |+۳| = +۷ + ۳ = ۱۰ \end{array}\right\} \xRightarrow{۴<۱۰} |-۷+۳| < |-۷| + |+۳|$$

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{l} |۸+۹| = |۱۷| = ۱۷ \\ |۸| + |۹| = ۸ + ۹ = ۱۷ \end{array}\right\} \xRightarrow{۱۷=۱۷} |۸+۹| = |۸| + |۹|$$

تمرین۳. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $|۹-۲۰+۷| = |\overbrace{۹-۲۰}^{-۱۱}+۷| = |-۴| = ۴$

ب) $|(-۶)\times(+۴)| = |-۲۴| = ۲۴$

پ) $|-(-۵+۷)| = |-\overbrace{(-۵+۷)}^{۲}| = |-۲| = ۲$

ت) $|-۶\times۳+۷| = |\overbrace{-۶\times۳}^{-۱۸}+۷| = |-۱۱| = ۱۱$

ث) $|-|۳-۱۵|| = \left|-|\overbrace{۳-۱۵}^{-۱۲}|\right| = |-(+۱۲)| = |-۱۲| = ۱۲$

ج) $|-۵^۲| = |-۲۵| = ۲۵$

چ) $\left|\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۳}\right| = \left|\frac{۹-۲}{۶}\right| = \left|\frac{۷}{۶}\right| = \frac{۷}{۶}$

ح) $|-\sqrt{۷}+۳+\sqrt{۷}| = |\cancel{-\sqrt{۷}}+۳+\cancel{\sqrt{۷}}| = |+۳| = ۳$

خ) $-|-۸-(-۳)| = -|-۸+۳| = -\overbrace{|-۵|}^{+۵} = -۵$

@riazicafe

✧**نکته:** برای محاسبهٔ قدرمطلق هایی که دارای عبارت های گنگ هستند، می توان ابتدا مقدار تقریبی عبارت درون قدرمطلق را به دست آورد تا منفی یا مثبت بودن عبارت داخل قدرمطلق مشخص شود. اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق منفی شد، عبارت درون قدرمطلق را قرینه کرده و از قدرمطلق خارج می کنیم و اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق مثبت شد، عبارت درون قدرمطلق را بدون تغییر از قدرمطلق خارج می کنیم.

تمرین۴. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|\sqrt{۶}-\sqrt{۷}|$$

حل: چون مقدار $\sqrt{۷}$ از $\sqrt{۶}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{\sqrt{۶}-\sqrt{۷}}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{۶}-\sqrt{۷}) = -\sqrt{۶}+\sqrt{۷} = \sqrt{۷}-\sqrt{۶}$$

$$|۷-\sqrt{۱۵}| =$$

حل: مقدار $\sqrt{۴۹} = ۷$ از $\sqrt{۱۵}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را بدون تغییر خارج کنیم.

$$|\underbrace{۷-\sqrt{۱۵}}_{\text{مثبت}}| = ۷-\sqrt{۱۵}$$

$$|۶-۵\sqrt{۳}| =$$

حل: مقدار $\sqrt{۷۵} = \sqrt{۲۵\times۳} = ۵\sqrt{۳}$ از $\sqrt{۳۶} = ۶$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{۶-۵\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}| = -(۶-۵\sqrt{۳}) = -۶+۵\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}-۶$$

$$|۵-\sqrt{۲}|+|-۱+\sqrt{۲}| = |\underset{۵=\sqrt{۲۵}>\sqrt{۲}}{\overbrace{۵-\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}}| + |\underset{۱=\sqrt{۱}<\sqrt{۲}}{\overbrace{-۱+\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}}| = ۵-\cancel{\sqrt{۲}}-۱+\cancel{\sqrt{۲}} = ۴$$

$$|\sqrt{۳}-۲|+|۷+\sqrt{۳}| = |\underset{\sqrt{۳}<۲=\sqrt{۴}}{\overbrace{\sqrt{۳}-۲}^{\text{منفی}}}| + |\overbrace{۷+\sqrt{۳}}^{\text{مثبت}}| = -(\sqrt{۳}-۲)+۷+\sqrt{۳} =$$

$$-\cancel{\sqrt{۳}}+۲+۷+\cancel{\sqrt{۳}} = ۹$$

$$|-\sqrt{۶}-۱۱|-|\sqrt{۶}+۲| = |\overbrace{-\sqrt{۶}-۱۱}^{\text{منفی}}| - |\overbrace{\sqrt{۶}+۲}^{\text{مثبت}}| = -(-\sqrt{۶}-۱۱)-(\sqrt{۶}+۲) =$$

$$\cancel{\sqrt{۶}}+۱۱-\cancel{\sqrt{۶}}-۲ = ۹$$

$$|۴-\sqrt{۵}|+|-\sqrt{۵}| = |\underset{۴=\sqrt{۱۶}>\sqrt{۵}}{\overbrace{۴-\sqrt{۵}}^{\text{مثبت}}}| + |\overbrace{-\sqrt{۵}}^{\text{منفی}}| = ۴-\sqrt{۵}-(-\sqrt{۵}) = \cancel{۴}-\cancel{\sqrt{۵}}+\sqrt{۵} = ۴$$

$$۴|\sqrt{۳}-۲|+|۱۳+۴\sqrt{۳}|-|-۷| = ۴\times\Big|\overbrace{\underbrace{\sqrt{۳}-۲}_{\sqrt{۳}<۲=\sqrt{۴}}}^{\text{منفی}}\Big|+\Big|\overbrace{۱۳+۴\sqrt{۳}}^{\text{مثبت}}\Big|-\Big|\underbrace{\overbrace{-۷}^{\text{منفی}}}_{+۷}\Big| =$$

$$-۴\times(\sqrt{۳}-۲)+۱۳+۴\sqrt{۳}-(+۷) = -۴\sqrt{۳}+۸+۱۳+۴\sqrt{۳}-۷ = ۱۴$$

$$\left|\frac{۱-\sqrt{۵}}{-۲}\right| = \frac{\Big|\overbrace{۱-\sqrt{۵}}^{\text{منفی}}\Big|}{|-۲|} = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

- **توجه:** اعدادی که بین صفر و یک هستند هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می شوند.

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{r}(۰/۲)^{۲} = ۰/۰۴\\ (۰/۲)^{۳} = ۰/۰۰۸\\ (۰/۲)^{۴} = ۰/۰۰۱۶\\ (۰/۲)^{۵} = ۰/۰۰۰۳۲\end{array}\right\} \Longrightarrow (۰/۲)^{۲} > (۰/۲)^{۳} > (۰/۲)^{۴} > (۰/۲)^{۵}$$

✓ **مثال:** $(۰/۹۲)^{۱۷} > (۰/۹۲)^{۱۹}$ و $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲۱} < \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۴}$

تمرین ۵. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|(۰/۵)^{۲۰}-(۰/۵)^{۱۹}| =$$

※الف

حل: مقدار $(۰/۵)^{۱۹}$ از $(۰/۵)^{۲۰}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|(۰/۵)^{۲۰}-(۰/۵)^{۱۹}| = -\left((۰/۵)^{۲۰}+(۰/۵)^{۱۹}\right) =-(۰/۵)^{۲۰}+(۰/۵)^{۱۹}$$

$$|(۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}| =$$

حل: مقدار $(۲/۳)^{۱۲}$ از $(۲/۳)^{۸}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق، عبارت درون آن را بدون تغییر می نویسیم.

$$|(۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}| = (۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}$$

تمرین ۶. در جاهای خالی علامت >، = یا < قرار دهید.

$$|\sqrt{۳}-۲| \;\square\; |\sqrt{۳}|+|-۲|$$

حل: $|\sqrt{۳}|+|-۲| \simeq ۱/۷+۲ = ۳/۷$ و $|\sqrt{۳}-۲| \simeq \Big|\overbrace{۱/۷-۲}^{-۰/۳}\Big| = ۰/۳$

بنابراین $|\sqrt{۳}-۲| \;\boxed{<}\; |\sqrt{۳}|+|-۲|$

$$\frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|} \;\square\; \left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right|$$

حل: $\frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|} \;\boxed{=}\; \left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $\left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right| = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$

$$|۲^۲| - |۳^۲| \;\square\; |۲^۲ - ۳^۲|$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} |۲^۲ - ۳^۲| = |۴ - ۹| = |-۵| = ۵ \\ |۲^۲| - |۳^۲| = |۴| - |۹| = ۴ - ۹ = -۵ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |۲^۲ - ۳^۲| \;\boxed{>}\; |۲^۲| - |۳^۲|$$

تمرین۷. اگر $a = ۲$ ، $b = \frac{۱}{۳}$ و $c = -\frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $|۴\square - b - c|$ را به دست آورید.

حل: مقادیر داده شده را در عبارت $|4\,a - b - c|$ جایگذاری کرده و حاصل را به دست می آوریم؛

$$|۴\,a - b - c| = \left|۴ \times ۲ - \left(\frac{۱}{۳}\right) - \left(-\frac{۳}{۴}\right)\right| = \left|۸ - \frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۴}\right| = \left|\frac{۹۶-۴+۹}{۱۲}\right| = \left|\frac{۱۰۱}{۱۲}\right| = \frac{۱۰۱}{۱۲}$$

تمرین۸. اگر $a = -۳$ ، $b = ۱$ و $c = ۷$ باشد، حاصل عبارت $\frac{|b|-c}{|a-b+c|}$ را به دست آورید.

حل: $$\frac{|b|-c}{|a-b+c|} = \frac{|۱|-۷}{|-۳-۱+۷|} = \frac{۱-۷}{|۳|} = \frac{-۴}{۳}$$

تمرین۹.مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف ✲ $a = -۵$ و $b = ۹$: $\quad \frac{|a|+۳|b|}{۴|a-b|} =$

حل: $$\frac{|a|+۳|b|}{۴|a-b|} = \frac{|-۵|+۳\times|۹|}{۴\times|-۵-۹|} = \frac{۵+\overbrace{۳\times۹}^{۲۷}}{۴\times|-۱۴|} = \frac{\overbrace{۵+۲۷}^{۳۲}}{\underbrace{۴\times۱۴}_{۵۶}} = \frac{۳۲}{۵۶} = \frac{۴}{۷}$$

$a = -۵$ و $b = ۲$: $\quad |a + b| - ۳|ab| =$

حل:

$$|a + b| - ۳|ab| = |-۵ + ۲| - ۳ \times |-۵ \times ۲| = |-۳| - ۳ \times |-۱۰| =$$
$$۳ - \underbrace{۳ \times ۱۰}_{۳۰} = ۳ - ۳۰ = -۲۷$$

$a = -۸$ و $b = \sqrt{۳}$: $\quad |۲\,a - b| - b =$

حل:

$$|۲\,a - b| - b =$$
$$|۲ \times (-۸) - \sqrt{۳}| - \sqrt{۳} = \underbrace{|-۱۶ - \sqrt{۳}|}_{-(-۱۶-\sqrt{۳})} - \sqrt{۳} = ۱۶ + \sqrt{۳} - \sqrt{۳} = ۱۶$$

تمرین۱۰. بزرگترین عدد صحیحی که اگر به جای مربع قرار دهیم، نامساوی زیر برقرار باشد چیست؟

$$|۳-۲\times۴| > ۴+\square$$

حل: $|۳-\underbrace{۲\times۴}_{۸}| > ۴+\square \Rightarrow |-۵| > ۴+\square \Rightarrow ۵ > ۴+\square \Rightarrow$

$$\begin{cases} ۵ \not> ۴+\boxed{۱}=۵ \\ ۵ > ۴+\boxed{۰}=۴ \checkmark \\ ۵ > ۴+\boxed{-۱}=۳ \\ ۵ > ۴+\boxed{-۲}=۲ \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow$$

بنابراین جواب مورد نظر، عدد صحیح صفر می باشد.

تمرین۱۱. عبارت کلامی مربوط به هر یک از رابطه های زیر را بنویسید.

الف* $a>۰ \xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی مثبت است. پ* $a\geq۰ \xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی نامنفی است.

ب* $a<۰ \xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی منفی است. ت* $a\leq۰ \xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی نامثبت است.

تمرین۱۲. الف* فرض کنید $a<۰$ و $b<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|a| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{a}^{\text{منفی}}|=-a$ ۲) $|b| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{b}^{\text{منفی}}|=-b$

۳) $|-b| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |-b|=-|\overbrace{b}^{\text{منفی}}|=-(-b)=b$

۴) $|ab| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{\underbrace{a\times b}_{-\times-=+}}^{\text{مثبت}}|=ab$ چون حاصل ضرب دو عدد منفی همواره مثبت است پس علامت عبارت درون قدر مطلق مثبت می شود.

۵) $|a+b| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{\underbrace{a+b}_{(-)+(-)=-}}^{\text{منفی}}|=-(a+b)=-a-b$

چون حاصل جمع دو عدد منفی همواره منفی است پس علامت عبارت درون قدر مطلق منفی می شود.

ب* فرض کنید $a>۰$ و $b<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|ab| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{\underbrace{a\times b}_{+\times-=-}}^{\text{منفی}}|=-(ab)=-ab$ ۲) $|a-b| \xRightarrow{\text{پاسخ}} |\overbrace{\underbrace{a-b}_{(+)-(-)=+}}^{\text{مثبت}}|=a-b$

پ* فرض کنید $a>b>۰$ و $c<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $\left|\frac{ab}{c}\right|=$

حل: چون علامت a و b مثبت و c منفی است بنابراین علامت کل عبارت $\frac{ab}{c}$ منفی می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق باید قرینه شود. $\left|\frac{ab}{c}\right|=-\frac{ab}{c}$

@riazicafe

$۲)\ |abc^۲| =$

حل: علامت $c^۲$ همواره مثبت است. از طرفی علامت a و b نیز مثبت است بنابراین علامت کل عبارت $abc^۲$ مثبت می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق تغییری نمی کند. $|abc^۲| = abc^۲$

تمرین۱۳. فرض کنید $۰ < x < ۱$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|x-۵| + |x+۷| =$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۰ و ۱ است (مانند ۰/۲) پس عبارت $x-۵$ همواره منفی است.

(مثلاً $x - ۵ = ۰/۲ - ۵ = -۴/۸$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

از طرفی عبارت $x+7$ همواره مثبت است. (مثلاً $x + ۷ = ۰/۲ + ۷ = ۷/۲$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، تغییری نمی کند.

$$|\overbrace{\underbrace{x-۵}_{\text{منفی}}}^{-(x-۵)}| + |\overbrace{\underbrace{x+۷}_{\text{مثبت}}}^{x+۷}| = -\cancel{x} + ۵ + \cancel{x} + ۷ = ۱۲$$

تمرین۱۴. فرض کنید $۳ < x < ۴$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|x-۴| + |x| =$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۳ و ۴ است (مانند ۳/۵) پس عبارت $x-۴$ همواره منفی است.

(مثلاً $x - ۴ = ۳/۵ - ۴ = -۰/۵$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

$$|\overbrace{\underbrace{x-۴}_{\text{منفی}}}^{-(x-۴)}| + |\overbrace{\underbrace{x}_{\text{مثبت}}}^{x}| = -\cancel{x} + ۴ + \cancel{x} = ۴$$

نکته: جذر توان دوم هر عدد با قدر مطلق آن عدد مساوی است. یعنی $\sqrt{a^۲} = |a|$.

مثال:

$$\sqrt{(-۳)^۲} = \sqrt{۹} = ۳ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-۳)^۲} = |-۳| = ۳$$
$$\sqrt{(+۵)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(+۵)^۲} = |+۵| = ۵$$
$$\sqrt{(-۱۲)^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-۱۲)^۲} = |-۱۲| = ۱۲$$

تمرین۱۵. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(\sqrt{۷}-۶)^۲} = |\overbrace{\underbrace{\sqrt{۷}-۶}_{\sqrt{۷}<۶=\sqrt{۳۶}}}^{\text{منفی}}| = -(\sqrt{۷}-۶) = -\sqrt{۷}+۶$$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲} = |\overbrace{\underbrace{۱-\sqrt{۵}}_{\sqrt{۱}<\sqrt{۵}}}^{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۵}) = -۱+\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{(۲\sqrt{۶}-۵)^۲}=|\overbrace{\underbrace{۲\sqrt{۶}-۵}_{۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲۴}<۵=\sqrt{۲۵}}}^{\text{منفی}}|=-(۲\sqrt{۶}-۵)=-۲\sqrt{۶}+۵$$

$$۵\sqrt{(\sqrt{۱۱}-۴)^۲}=۵\times|\overbrace{\underbrace{\sqrt{۱۱}-۴}_{\sqrt{۱۱}<۴=\sqrt{۱۶}}}^{\text{منفی}}|=-۵(\sqrt{۱۱}-۴)=-۵\sqrt{۱۱}+۲۰$$

$$\sqrt{(۵+\sqrt{۱۷})^۲}-\sqrt{۱۷}=|\overbrace{۵+\sqrt{۱۷}}^{\text{مثبت}}|-\sqrt{۱۷}=۵+\cancel{\sqrt{۱۷}}-\cancel{\sqrt{۱۷}}=۵$$

$$\sqrt{(۱۲-\sqrt{۳۱})^۲}+|۵-\sqrt{۳۱}|=|\overbrace{\underbrace{۱۲-\sqrt{۳۱}}_{۱۲=\sqrt{۱۴۴}>\sqrt{۳۱}}}^{\text{مثبت}}|+|\overbrace{\underbrace{۵-\sqrt{۳۱}}_{۵=\sqrt{۲۵}<\sqrt{۳۱}}}^{\text{منفی}}|=۱۲-\sqrt{۳۱}-(۵-\sqrt{۳۱})=$$

$$۱۲-\sqrt{۳۱}-۵+\sqrt{۳۱}=۷$$

$$\sqrt{(۳-\sqrt{۱۰})^۲}-|-۹\sqrt{۱۰}|=|\overbrace{\underbrace{۳-\sqrt{۱۰}}_{۳=\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}}}^{\text{منفی}}|-\overbrace{|-۹\sqrt{۱۰}|}^{+۹\sqrt{۱۰}}=-(۳-\sqrt{۱۰})-(+۹\sqrt{۱۰})=$$

$$-۳+\sqrt{۱۰}-۹\sqrt{۱۰}=-۳-۸\sqrt{۱۰}$$

✧**توجه:** در فصل چهار خواهیم دید که برای جمع و تفریق رادیکال هایی که عبارت زیر رادیکال آنها مساوی است، کافی است ضریب آن رادیکال ها را با هم جمعِ جبری کنیم. مثلاً

$\sqrt{۷}-۴\sqrt{۷}=(۱-۴)\sqrt{۷}=-۳\sqrt{۷}$ و $\boxed{۹}\sqrt{۵}-\boxed{۲}\sqrt{۵}=(۹-۲)\sqrt{۵}=۷\sqrt{۵}$

تمرین۱۶. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $x<0 \ ، \ y<0 \Rightarrow \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=$

حل: $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|\overbrace{x}^{\text{منفی}}|+|\overbrace{y}^{\text{منفی}}|=-x-y$

ب) $x<0 \ ، \ y>0 \Rightarrow \sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=$

حل: $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|\overbrace{x}^{\text{منفی}}|+|\overbrace{y}^{\text{مثبت}}|=-x+y=y-x$

پ) $x<0 \ ، \ y<0 \Rightarrow \sqrt{x^۲}-\sqrt{y^۲}=$

حل: $\sqrt{x^۲}-\sqrt{y^۲}=|\overbrace{x}^{\text{منفی}}|-|\overbrace{y}^{\text{منفی}}|=-x-(-y)=-x+y=y-x$

ت) $x<0 \ ، \ y>0 \Rightarrow \sqrt{(xy)^۲}=$

حل: $\sqrt{(xy)^۲}=|\overbrace{\underbrace{x\times y}_{-\times+=-}}^{\text{منفی}}|=-(xy)=-xy$

ث٭ $x<0 \Rightarrow 5\sqrt{x^2}-x=$

حل: $5\sqrt{x^2}-x=5\times|\overset{\text{منفی}}{x}|-x=-5x-x=-6x$

نمونه سوال امتحانی پایان فصل

۱-اگر $a<0, b>0$ آنگاه $|a-b|=b-a$ ص غ

۲- مجموعه عدد های گویا را می توان با محور اعداد نمایش داد. ص غ

۳-عدد ....۳/۲۵۲۲۵۲۲۲۵ عددی گویا است. ص غ

۴- تساوی $\sqrt{a^2}=-a$ به ازای $a<0$ همواره برقرار است. ص غ

۵- حاصل $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$ برابر با مجموعه اعداد ....است.

۶-حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ برابر............است

۷- اگر $x>0, y>0$ و باشد، حاصل $\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}$ برابر با............است.

۸-عدد $0/3\overline{45}$ از عدد $0/\overline{345}$ .... است.(بزرگتر-کوچکتر-مساوی)

۹-مقدار عبارت $|x|+x$ به ازای $x=-2$ برابر کدام گزینه است

۴   -4 ۰   ۲

۱۰-نمایش اعشاری کدام یک از کسرهای زیر مختوم است.

$\frac{2}{3}$ $\frac{8}{20}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{11}$

۱۱-عدد $\sqrt{3}+1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است.

۰,۱   ۴,۳   ۳,۲   ۲,۱

۱۲-کدام گزینه نادرست است

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{N}$

۱۳-الف-بین $\frac{2}{7}, \frac{1}{4}$ سه کسر بنویسید.

ب-نمایش اعشاری کسر $\frac{14}{55}$ متناوب است یا مختوم؟

۱۴-مجموعه ی $A=\{x\in\mathbb{R} -2\leq x<3\}$ را روی محور نشان دهید.

سپس با توجه به مجموعه A درستی و نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$-2\in A$ $+3\in A$ $\sqrt{5}+1\in A$

۱۵- بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید

۱۶-عدد $\sqrt{۵}-۳$ را روی محور نشان دهید.

۱۷-حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\left(-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲}\right)\div\left(-۱-\frac{۱}{۹}\right)\times\frac{۵}{۳}$$

۱۸-با توجه به محور مجموعه ی متناظر را بنویسید.

۱۹-در مورد مجموعه $A=\{x\in\mathbb{Q}'-۲<x<۳\}$ کدام درست و کدام نادرست است.

$\frac{۵}{۳}\in A$ $\qquad$ $-\frac{۱}{۳}\notin A$ $\qquad$ $\sqrt{۵}\in A$ $\qquad$ $\pi\notin A$ $\qquad$ $۱/۵۳۵۵۳۵۵۳....\in A$

$\circ\in A$ $\qquad$ $-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}}\in A$

۲۰-حاصل عبارت های زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بدست آورید.

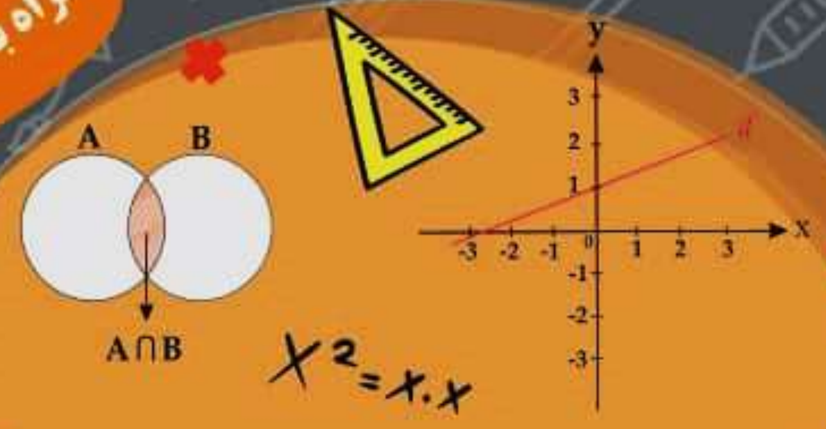
الف) $|۵-\sqrt{۵}|+|-۴-\sqrt{۵}|$ $\qquad$ ب) $\sqrt{(۳-\sqrt{۱۰})^{۲}}+-\sqrt{۱۰}$

۲۱- حاصل عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده بنویسید.

الف-اگر $a=-۲,b=۳,c=-۴$ باشد، $|a+b|+۵|c-b|$

ب-اگر $a=-۲,b=\sqrt{۳},c=۳$ باشد، $|۲a-b+c|$

همراه با درسنامه



ریاضی نهم

@riazicafe

- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اوّل متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

فصل۳: هندسه و استدلال

ندا بهرامی نیا – عبداله براتی

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

بسمه تعالی

درسنامه ، نکات ، مثال های کاربردی و حل چند تمرین از فصل سوم ریاضی پایه نهم (عبداله براتی – ندا بهرامی نیا)

فصل سوم : هندسه و استدلال

درس اول

استدلال: یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

در بسیاری از کارهای روزمره به استدلال نیاز پیدا می کنیم و از راه حل های مختلفی برای استدلال کردن استفاده می کنیم که درجه ی اعتبار آن ها با هم متفاوت است و ممکن است به نظر دیگران قابل اعتماد یا معتبر نباشد.

مثال: استدلالهای زیر را از نظر اعتبار مقایسه کنید.

الف) در تمام خانواده هایی که دو فرزند به نام علی و حسین دارند علی فرزند بزرگ تر بوده است پس دوست من که علی نام دارد از برادرش حسین بزرگتر است. (نامعتبر – بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)

ب) چون اعداد ۳ و ۵ و ۷ اعدادی اول و فرد هستند ، بنابراین همه ی اعداد فرد اولند.**(نامعتبر – بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)**

ج) چون همه ی قرص های مسکن خواب آور هستند پس در این قرص ها ماده ای هست که باعث خواب آلودگی می شود. **(معتبر – بر پایه ی استنتاج منطقی)**

برخی از انواع استدلال:

بیشتر بدانیم

استدلال ; توانمندی ارزشمند ذهن انسان است. برخی از انواع استدلال عبارتند از:

الف) شهودی (درک به کمک حواس)

ب) استقرایی(استدلال از جزء به کل بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات)

ج) مثال نقض

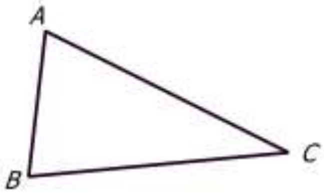
د)استدلال تمثیلی(یافتن نوعی شباهت بین دوچیز مثلا چون علی باهوش است پس برادرش هم باهوش است.

ه)استدلال استنتاجی(هنگامی که در استدلال از یک نظریه ی کلی استفاده می کنیم تا به فرضیه های جزئی برسیم) و ...

نکته: معتبرترین نوع استدلال در هندسه استدلال استنتاجی است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد ، اثبات می گوییم.

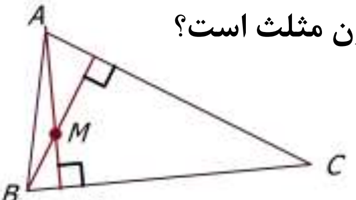
به مثال زیر توجه کنید.



مثال : الف) دو ارتفاع این مثلث را رسم کنید.

ب) آیا محل برخورد ارتفاع ها درون مثلث است؟

ج) آیا با مثال بالا می توان نتیجه گرفت محل برخورد دو ارتفاع هر مثلث همیشه درون مثلث است؟



شکل ۱

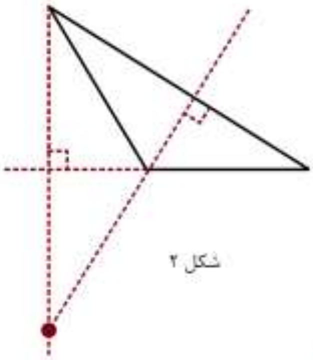
پاسخ:

الف) در شکل ۱ ارتفاع های دو مثلث را به کمک گونیا ترسیم کرده ایم.

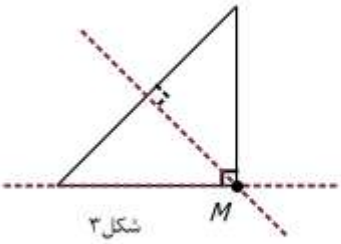
ب) بله طبق شکل ۱ محل برخورد با نقطه ی M نمایش داده شده است.

ج) خیر در شکل۲ و ۳ محل برخورد دو ارتفاع درون مثلث نیست.

در مثلث قائم الزاویه محل برخورد ارتفاع ها ، راس زاویه ی قائمه و در مثلث هایی با داشتن یک زاویه ی باز ، محل برخورد بیرون مثلث است



شکل ۲



شکل۳

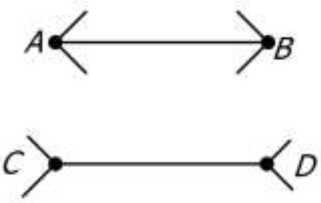
> **مثال نقض**: برای رد درستی یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم. کافی است با یک مثال مناسب نشان دهیم آن ادعا نادرست است. به این مثال نادرست ، مثال نقض می گویند.

برای رد درستی هر یک از ادعاهای زیر از مثال نقض استفاده کنید.

الف) جمع دو عدد اول همواره مرکب است.   مثال نقض : جمع ۲ و ۵ عدد ۷ است و می دانیم ۷ عددی اول است.

ب) تمام شکل های هندسی زاویه دارند.   مثال نقض : دایره ، بیضی ، کره و ... زاویه ندارند

ج) همه ی اعداد اول فرد هستند.   مثال نقض : ۲ عددی اول ولی زوج است



به تصویر مقابل دقت کنید.

به نظر شما کدام پاره خط بزرگتر است؟

با استفاده از خط کش یا کاغذ شفاف از درستی پاسخ خود اطمینان پیدا کنید.

آیا می توان با مشاهده یا استفاده از حواس از درستی یک موضوع اطمینان حاصل کرد؟ چرا؟

خیر زیرا حواس ما خطا دارند و گاهی دچار خطای دید می شویم.

نکته: ضعیف ترین استدلال ، استدلال شهودی است.

سوال : برای هر کدام از مثال های زیر مشخص کنید استدلال به کار رفته معتبر است یا غیر معتبر؟چرا؟

رضا می گوید: معلم هیچ وقت روزهای دوشنبه از من درس نپرسیده است. امروز دوشنبه است پس امروز هم معلم از من درس نمی پرسد.

پاسخ: خیر زیرا بر اساس مشاهدات گذشته نتیجه ای گرفته است که ممکن است درست نباشد.

احمد می گوید: عدد ۳۵۹۱ بر ۳ بخش پذیر است چون جمع ارقامش ۱۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات قبلی می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر باشد.

حسین می گوید: در لوزی مثل متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات گذشته می دانیم لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند پس لوزی نیز این خاصیت را دارد.

امیر می گوید: جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است زیرا مثلث متساوی الاضلاع این ویژگی را دارد.

پاسخ: خیر زیرا با ذکر یک مثال درست نمی توان نتیجه ای را برای تمامی مثلث ها بیان کرد

سوال: یک استدلال بنویسید که شبیه استدلال زیر باشد.

- **تیم فوتبال مدرسه ی ما هر بار با لباس قرمز وارد زمین شده است مسابقه را باخته است. رنگ لباس امروز این تیم قرمز است پس امروز هم مسابقه را می بازد.**

پاسخ: همه ی فرزندان خاله ی من پسر هستند. پس فرزند دیگرش که ماه آینده به دنیا می آید هم پسر خواهد بود. (نتیجه گیری اشتباه بر اساس توجه به مشاهدات قبلی)

سوال: یک استدلال بنویسید که در آن فردی با توجه به مشاهدات قبل خود، نتیجه ای نادرست می گیرد.

پاسخ: هر بار باران می بارد حیاط مدرسه ی ما خیس می شود. امروز حیاط مدرسه خیس است پس حتما دیشب باران باریده است. (نادرست به این علت که ممکن است علت خیس بودن زمین باران نباشد وحیاط مدرسه را شسته باشند)

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

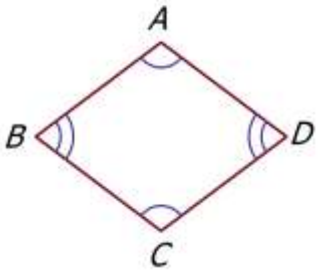
برای اثبات یا مشخص کردن درستی یک موضوع ابتدا باید بدانیم در مورد این موضوع چه اطلاعاتی وجود دارد.

فرض: به اطلاعات داده شده در صورت مساله فرض مساله (داده های مساله) می گویند.

بعد از تشخیص فرض ، باید دقت کنیم مساله چه چیزی را از ما می خواهد و باید چه چیزی را نشان بدهیم.

حکم: خواسته ی مساله را حکم مساله می گویند.

برای اثبات یک ادعا در روند استدلالمان از داشته های مساله (فرض) و اصولی که از قبل درستی آن ها برای ما مشخص شده است برای رسیدن به حکم مساله استفاده می کنیم.

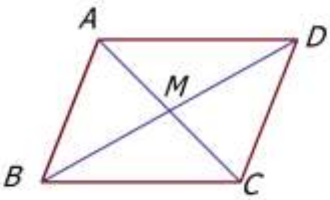


مثال: در هر کدام از مساله های زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

۱) در لوزی ، زاویه های رو به رو با هم برابرند.

پاسخ: برای نوشتن فرض و حکم می توان روابط را به زبان ریاضی نوشت

فرض	چهارضلعی ABCD لوزی است
حکم	زاویه های رو به رو برابرند(به زبان ریاضی: $\widehat{B}=\widehat{D}$ و $\widehat{A}=\widehat{C}$)



۲) در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند.

فرض	چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است
حکم	قطرها همدیگر را نصف می کنند(به زبان ریاضی: $\overline{AM}=\overline{CM}$ و $\overline{BM}=\overline{DM}$)

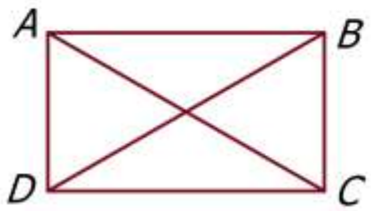
۳) در مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور به ساق های برابر، با هم برابرند.

فرض	ABC مثلث متساوی الساقین است(به زبان ریاضی: $\overline{AB}=\overline{AC}$)
حکم	زوایای مجاور به ساق با هم برابرند(به زبان ریاضی: $\widehat{B}=\widehat{C}$)

۴) در مستطیل قطرها با هم برابرند.

پاسخ:

ABCD مستطیل است	**فرض**
قطرهای مستطیل ، مساوی است	**حکم**



شکل ۱

با توجه به شکل ۱ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$\text{فرض :}\begin{cases}\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=۹۰^{\circ}\\ \overline{AB}=\overline{CD}\ \text{ و }\ \overline{AD}=\overline{BC}\\ AB \parallel CD\ \text{ و }\ AD \parallel BC\end{cases}$$

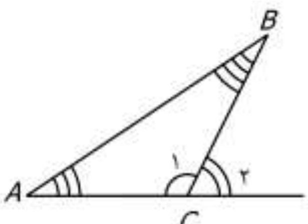
$$\text{حکم :}\ \overline{AC}=\overline{BD}$$

مثال: در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.

پاسخ:

ABC مثلث است	**فرض**
اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.	**حکم**

با توجه به شکل ۲ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:



شکل ۲

$$\text{فرض :}\begin{cases}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C_۱}=۱۸۰^{\circ}\\ \widehat{C_۱}+\widehat{C_۲}=۱۸۰^{\circ}\end{cases}$$

$$\text{حکم :}\ \widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C_۲}$$

حل:

ضلع AC را امتداد و زاویه ی خارجی C را مشخص می کنیم. بنا به دانسته های قبلی می دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است . همچنین دو زاویه $\widehat{C_۲}$ و $\widehat{C_۱}$ مکملند پس مجموع این دو زاویه هم ۱۸۰ درجه است بنابراین استدلال زیر را داریم:

$$\left.\begin{matrix}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C_۱}=۱۸۰^{\circ}\\ \widehat{C_۱}+\widehat{C_۲}=۱۸۰^{\circ}\end{matrix}\right\}\rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\cancel{\widehat{C_۱}}=\cancel{\widehat{C_۱}}+\widehat{C_۲}\rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C_۲}$$

دقت کنیم با استدلالی مشابه با استدلال بالا این خاصیت برای زاویه های خارجی دیگر مثلث هم برقرار است پس می توان این ویژگی را به هر زاویه از مثلث تعمیم داد.

تعمیم : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم (مانند زاویه ی خارجی C در مثال بالا) اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم ، در سایر عضوهای مجموعه (دو زاویه ی خارجی دیگر مثلث مثال بالا) باشد ، می توان درستی نتیجه را به همه ی عضوهای مجموعه (همه ی زوایای خارجی) تعمیم داد.

برای درک بهتر مفهوم تعمیم به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱) در هر متوازی الاضلاع ، ضلع های رو به رو دو به دو موازی و مساویند. می دانیم مربع ، مستطیل و لوزی هر سه نوعی متوازی الاضلاع هستند. بنابراین این ویژگی به این سه شکل هم تعمیم داده می شود.

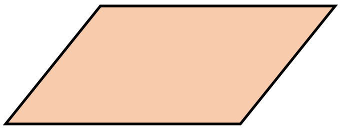
یعنی در مربع ، مستطیل و لوزی نیز اضلاع رو به رو با هم موازی و برابرند.

مثال ۲) آیا استدلال های زیر معتبر هستند؟چرا؟

مستطیل یک متوازی الاضلاع است

چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است

$\Leftarrow$ $ABCD$ مستطیل است



شکل ۱

پاسخ: با یک مثال نقض نشان می دهیم استدلال نادرست است. (شکل۱ متوازی الاضلاعی که مستطیل نیست)

مثال ۳) آیا استدلال زیر معتبر است؟چرا؟

در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند

مربع نوعی لوزی است

$\Leftarrow$ در مربع قطرها عمود منصف یکدیگرند

پاسخ: استدلال درست است. زیرا مربع نوعی لوزی است پس خواص لوزی به مربع تعمیم داده می شود.

فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

ابتدا به تعاریف زیر دقت کنیم:

نیمساز : نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

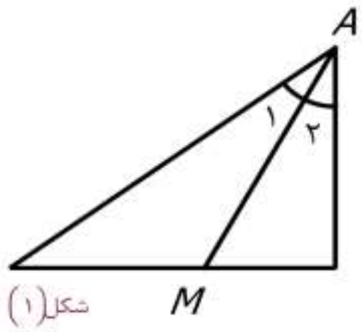
ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل یا امتداد آن عمود باشد .

عمودمنصف: خطی است که از وسط ضلع برآن عمود شده باشد.

میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

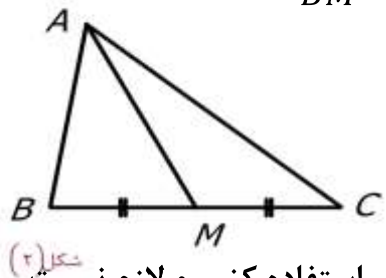
با توجه به نکات درس قبل، در صورت سوال از هر کدام از عبارات بالا می توان فرض مناسب را در نظر گرفت.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.



مثال۱: در شکل(۱) پاره خط AM نیمساز زاویه ی A است یعنی: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

مثال۲: در شکل (۲) پاره خط AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است یعنی: $\overline{BM} = \overline{CM}$



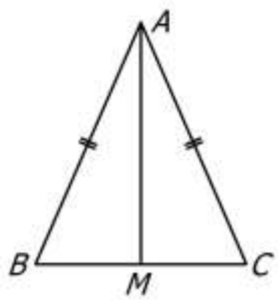
برای اینکه نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند می توانیم از یکی از حالتهای زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمامی اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

حالت اول: برابری سه ضلع (ض ض ض)

اگر هرسه ضلع مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو برابر باشند آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال : مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده BC است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟

پاسخ:



میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند ، پس $\overline{BM} = \overline{CM}$ **. بنابراین داریم:**

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{AC} : & \text{زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \overline{BM} = \overline{CM} : & \text{زیرا } AM \text{ میانه است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} : & \text{زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

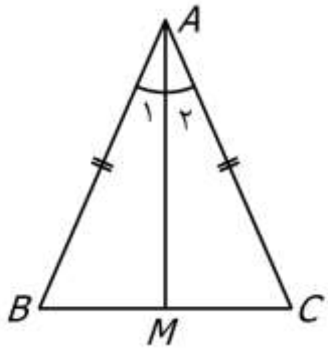
بنا به حالت (ض ض ض)

@riazicafe

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها (ض ز ض)

اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه ی بین آن دو ضلع در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال۲: مثلث **ABC** متساوی الساقین و **AM** نیمساز زاویه ی **A** است. چرا دو مثلث **ABM** و **ACM** هم نهشتند؟



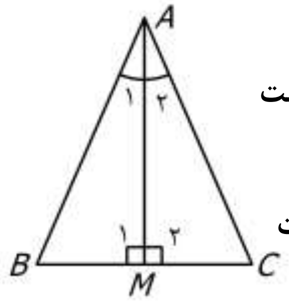
پاسخ: **AM** نیمساز زاویه ی **A** است پس : $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{AC} & \text{: زیرا مثلث متساوی الساقین است} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} & \text{: زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} & \text{: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ض ز ض)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها (ز ض ز)

اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آن دو زاویه در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال: در مثلث **ABC** پاره خط **AM** نیمساز زاویه ی **A** و بر **BC** عمود است. چرا دو مثلث **ABM** و **ACM** هم نهشتند؟



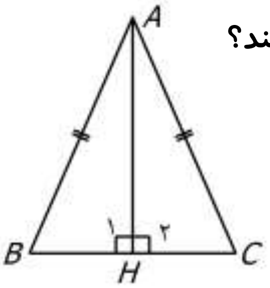
$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰^\circ & \text{: زیرا AM بر BC عمود است} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} & \text{: زیرا } AM \text{ نیمساز } \hat{A} \text{است} \\ \overline{AM} = \overline{AM} & \text{: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ABM \cong \triangle ACM$$

در مثلث های قائم الزاویه اگر وترها برابر باشند می توان از دو حالت دیگر نیز استفاده کرد

حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه در مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند؟



پاسخ:

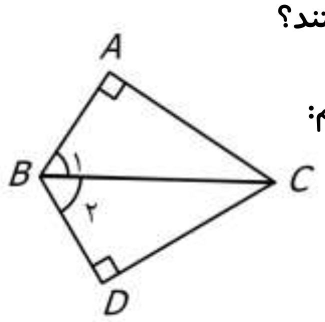
ابتدا توجه کنیم چون **AH** ارتفاع است پس دو مثلث **ABH** و **ACH** قائم الزاویه هستند و **AB** و **AC** در دو مثلث وتر هستند

بنابراین داریم:
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{H_۱} = \widehat{H_۲} = ۹۰^\circ \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AH} \text{ ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{بنا به حالت (وتر و یک ضلع)}} \Delta ABH \cong ACH$$

حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟



پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها BC است داریم:

بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ\\ \overline{BC}=\overline{BC}\\ \widehat{B_۱}=\widehat{B_۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta ABC \cong DBC$$

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن

درس چهارم: برای حل یک مساله هندسی راه حل کلی وجود ندارد ولی می توان مراحلی را مشخص کرد و با دقت بیشتری به جواب رسید.

قدم های حل مساله:

۱) فهمیدن صورت مساله
۲) رسم شکل مناسب
۳) تشخیص فرض و حکم
۴) استدلال

ابتدا صورت مساله را با دقت می خوانیم و مفاهیم تشکیل دهنده ی آن را شناسایی می کنیم. اگر مساله فاقد شکل است با توجه به صورت مساله ، یک شکل مناسب برای آن رسم می کنیم. داده های مساله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص می دهیم و در یک جدول می نویسیم و برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا می کنیم و مساله را اثبات می کنیم.

برای بهتر فهمیدن گام های حل مساله به سوال زیر توجه کنید.

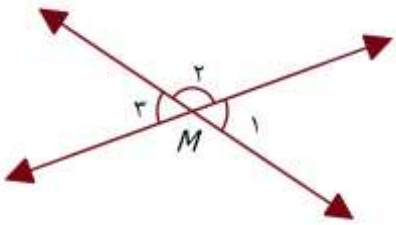
مثال۱: نشان دهید زوایای متقابل به راس با هم برابرند.

پاسخ: گام اول: زوایای متقابل به راس از برخورد دو خط راست ایجاد می گردد.

گام دوم: دو زاویه متقابل به راس رسم می کنیم و زاویه ها را نام گذاری می کنیم.

گام سوم:فرض مساله متقابل به راس بودن دو زاویه و حکم مساله نشان دادن تساوی آن هاست.

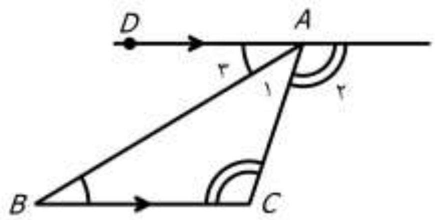
گام چهارم: دقت کنیم طبق شکل دو زاویه ی ۱ و ۲ مکمل و دو زاویه ی ۲ و ۳ نیز مکمل یکدیگرند. بنابراین طبق شکل زیر داریم:



$$\underbrace{\left.\begin{aligned}\widehat{M_۱}+\widehat{M_۲}&=۱۸۰^\circ\\ \widehat{M_۳}+\widehat{M_۲}&=۱۸۰^\circ\end{aligned}\right\}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \widehat{M_۱}+\cancel{\widehat{M_۲}}=\widehat{M_۳}+\cancel{\widehat{M_۲}} \Rightarrow \underbrace{\widehat{M_۱}=\widehat{M_۳}}_{\text{حکم}}$$

مثال۲: نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

پاسخ: مثلث دلخواه ABC را رسم می کنیم. از راس دلخواهی خطی موازی با ضلع مقابل به آن رسم می کنیم (مطابق با شکل ۱) و با توجه به خاصیت خطوط موازی و مورب و تساوی زوایا حکم را اثبات می کنیم.



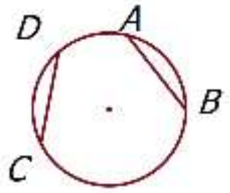
طبق فرض $AD \parallel BC$ و AB مورب است پس : $\widehat{B}=\widehat{A_۳}$

طبق فرض $AD \parallel BC$ و AC مورب است پس : $\widehat{C}=\widehat{A_۲}$

AD خط راست است پس : $\widehat{A_۳}+\widehat{A_۱}+\widehat{A_۲}=۱۸۰^\circ$

$$\left.\begin{aligned}\widehat{B}&=\widehat{A_۳}\\ \widehat{C}&=\widehat{A_۲}\end{aligned}\right\} \to \widehat{B}+\widehat{A_۱}+\widehat{C}=\widehat{A_۳}+\widehat{A_۱}+\widehat{A_۲}=۱۸۰^\circ$$

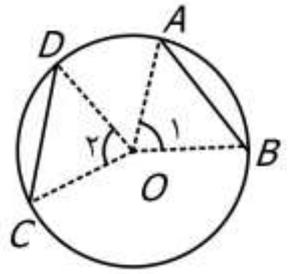
گاهی در اثبات یک حکم باید از تساوی اجزای متناظر استفاده کرد به مثال زیر و گام های حل مساله توجه کنید:



مثال ۳: **نشان دهید در یک دایره وترهای مقابل به کمان های مساوی با هم برابرند.**

گام اول: در صورت سوال از کمان و دایره نام برده شده بنابراین از مفاهیم مربوط به آن باید استفاده کرد.

گام دوم : برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم.



شکل ۱

گام سوم: در دایره ی رسم شده مرکز را با نقطه ی O نشان داده ایم و AB و CD طبق فرض مساله کمان هایی مساوی هستند. می خواهیم ثابت کنیم $\overline{AB}=\overline{CD}$ (حکم مساله)

فرض	$\widehat{AB}=\widehat{CD}$
حکم	$\overline{AB}=\overline{CD}$

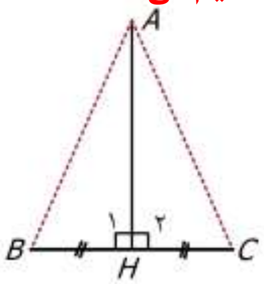
گام چهارم: برای نشان دادن این حکم دو مثلث در نظر میگیریم و هم نهشتی بین آن ها را اثبات و از این هم نهشتی تساوی اجزای آن ها را نتیجه می گیریم. بنابراین طبق شکل ۱ داریم:

چون کمان های AB و CD با هم برابرند زوایای مرکزی مقابل به آن ها هم با هم برابرند . از طرفی اضلاع دو مثلث شعاع های دایره هستند بنابراین با خلاصه کردن توضیحات بالا داریم:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{r}\overline{BO}=\overline{DO}\\ \widehat{O}_{۱}=\widehat{O}_{۲}\\ \overline{AO}=\overline{CO}\end{array}\right\}}_{\text{فرض}}\xRightarrow{(\text{ض ز ض})}\triangle OAB\cong\triangle OCD\xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}}\underbrace{\overline{AB}=\overline{CD}}_{\text{حکم}}$$

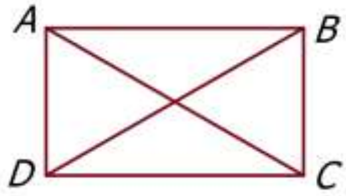
مثال ۴: نقطه ی A روی عمودمنصف BC است. می خواهیم نشان دهیم AB=AC (یعنی فاصله ی A از دو سر پاره خط برابر است.) نقطه ی A را به دو سر پاره خط وصل می کنیم و دو مثلث قائم الزاویه می سازیم.

دقت کنیم عمود منصف خطی است که بر پاره خط عمود شده و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.



$$\left.\begin{array}{ll}\overline{BH}=\overline{CH} & \text{: زیرا AH عمود منصف BC است}\\ \widehat{H}_{۱}=\widehat{H}_{۲}=۹۰^{\circ} & :\\ \overline{AH}=\overline{AH} & \text{: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است}\end{array}\right\}\xRightarrow{(\text{ض ز ض})}\triangle ABH\cong\triangle ACH$$

وقتی دو مثلث هم نهشت باشند اجزای متناظر آن ها با هم برابر است بنابراین داریم: $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{AC}}$ پس حکم ما برای نقطه ی A اثبات شد.با توجه به مساله ی بالا با تغییر مکان نقطه ی A برای سایر نقاط روی عمود منصف با همان استدلال بالا و در حالت کلی می توان نشان داد هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از دو سر آن به یک فاصله است و این خاصیت به تمام نقاط روی عمودمنصف تعمیم داده می شود.



تمرین ۱: نشان دهید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

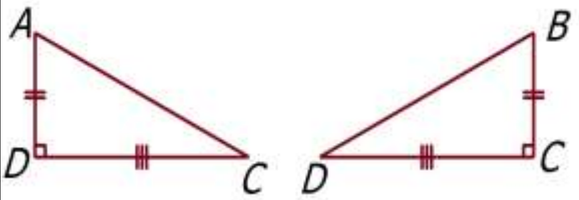
پاسخ:

برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم. در مستطیل داده شده AC و BD قطرهای مستطیل هستند.

می خواهیم نشان دهیم: $\overline{AC} = \overline{BD}$

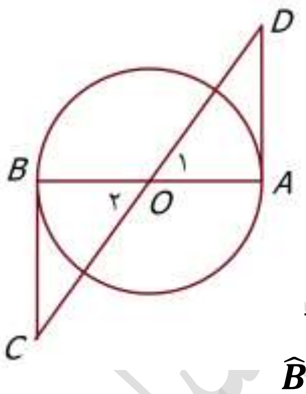
فرض مساله مستطیل بودن چهارضلعی است و می دانیم در مستطیل اضلاع رو به رو دو به دو مساوی و هر چهار زاویه قائمه هستند. با انتخاب دو مثلث مناسب و نشان دادن هم نهشتی بین آن ها می توان تساوی قطرها را نتیجه گرفت . دقت کنیم مثلثهایی را انتخاب کنیم که قطرهای AC و BD اجزای متناظر آن ها باشند.

می توان دو مثلث قائم الزاویه ی ADC و BDC را انتخاب کرد برای درک بهتر این دو مثلث را به صورت جداگانه می کشیم.



طبق فرض مساله و خواص مستطیل استدلال زیر را داریم:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \widehat{D} = \widehat{C} = ۹۰^{\circ} \\ \overline{DC}: \text{ضلع مشترک هر دو مثلث} \end{matrix}\right\}}_{\text{فرض}} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta ADC \cong \Delta BDC \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AC} = \overline{BC}}_{\text{حکم}}$$



تمرین۲: در شکل مقابل O مرکز و BC و AD بر دایره مماسند. نشان دهید : $\overline{AD} = \overline{BC}$

پاسخ:

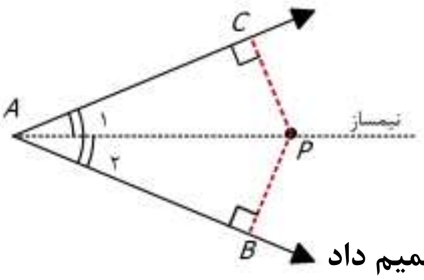
دقت کنیم شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است

پس زوایای A **و** B **قائمه هستند.**

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} \overline{OB} = \overline{OA} \\ \widehat{B} = \widehat{A} = ۹۰^{\circ} \\ \widehat{O_۲} = \widehat{O_۱} \end{matrix}\right\}}_{\text{فرض}} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta BOC \cong \Delta AOD \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{BC} = \overline{AD}}_{\text{حکم}}$$

تمرین ۳: نشان دهید فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو سر زاویه برابر است.

پاسخ: نقطه ی P را روی نیم ساز زاویه ی A در نظر می گیریم.برای نشان دادن فاصله ی P از اضلاع زاویه، از نقطه ی P بردو ضلع زاویه عمود رسم می کنیم و نقطه ی برخورد با ضلع را B و C می نامیم. باید نشان دهیم : $\overline{BP} = \overline{CP}$. دقت کنیمAP وتر مشترک دو مثلث است پس می توان از حالت وتر و یک زاویه تند استفاده کرد.



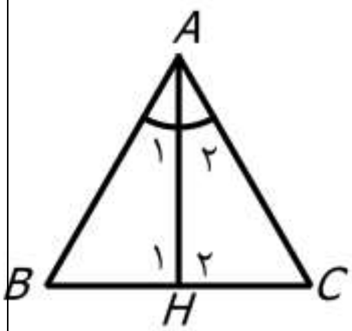
$$\underbrace{\left.\begin{array}{c}\widehat{C} = \widehat{B} = ۹۰^{\circ} \\ AP: \text{وتر مشترک} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}\end{array}\right\}}_{\text{فرض}} \xRightarrow{\text{(وتر و یک زاویه ی تند)}} \Delta ACP \cong \Delta ABP \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{PC} = \overline{PB}}_{\text{حکم}}$$

دقت کنیم این استدلال را به هر نقطه ی دیگر روی نیمساز زاویه ی A می توان تعمیم داد

تمرین ۴: نشان دهید در هر مثلث متساوی الاضلاع نیمساز وارد بر قاعده ، عمودمنصف قاعده نیز می باشد.

پاسخ: ABC متساوی الاضلاع و AH نیمساز زاویه A است. باید نشان دهیم: $\widehat{H_۱} = \widehat{H_۲} = ۹۰^{\circ}$ و $\overline{BH} = \overline{CH}$

نشان می دهیم دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند و از تساوی اجزای متناظر به خواسته ی مساله می رسیم.

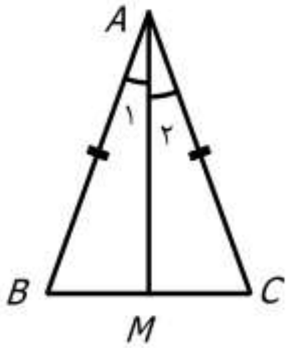


$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} = \overline{AC} \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۱} \\ AH: \text{در هر دو مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \left\{\begin{array}{c}\widehat{H_۱} = \widehat{H_۲} = ۹۰^{\circ} \\ \overline{BH} = \overline{CH}\end{array}\right.$$

با استدلالی مشابه استدلال بالا این خاصیت به نیمساز های وارد بر قاعده های دیگر هم تعمیم داده می شود.

تمرین ۵: نشان دهید در مثلث متساوی الساقین میانه ی وارد بر قاعده ، نیم ساز راس مثلث است.

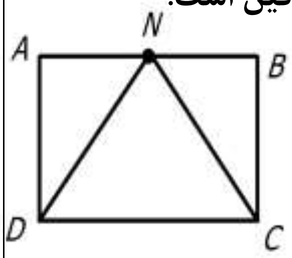
پاسخ:مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است . نشان می دهیم: $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۱}$



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{MB} = \overline{MC} \\ AH: \text{در هر دو مشترک}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \widehat{A_۱} = \widehat{A_۱}$$

توجه کنیم که خاصیت اثبات شده برای میانه ی وارد بر قاعده برای میانه ی وارد بر ساق هم قابل تعمیم نیست ، زیرا میانه های دیگر ویژگی های میانه ی وارد بر قاعده ی BC را ندارند.

تمرین ۶: نقطه ی N وسط طول مستطیل ABCD است. ثابت کنید مثلث NBC متساوی الساقین است.

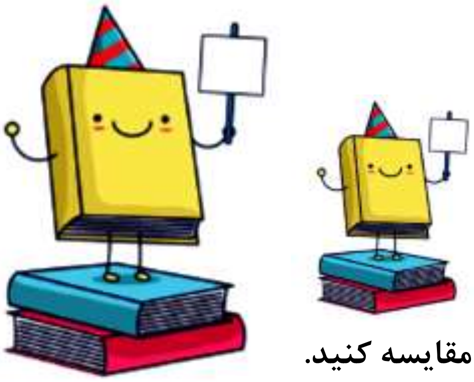


پاسخ: می خواهیم نشان دهیم $\overline{\mathrm{DN}} = \overline{CN}$

برای اثبات این حکم دو مثلث AND و BNC که در آن ها DN و CN اجزای متناظرند را در نظر گرفته و هم نهشتی آن ها را اثبات و از تساوی اجزای متناظرشان حکم مساله را نتیجه می گیریم.

$$\left.\begin{matrix} \overline{\mathrm{AN}} = \overline{BN} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = ۹۰^{\circ} \\ \overline{\mathrm{AD}} = \overline{BD} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH \xRightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \overline{\mathrm{DN}} = \overline{CN} \Rightarrow \Delta NDC: \text{متساوی الساقین است}$$

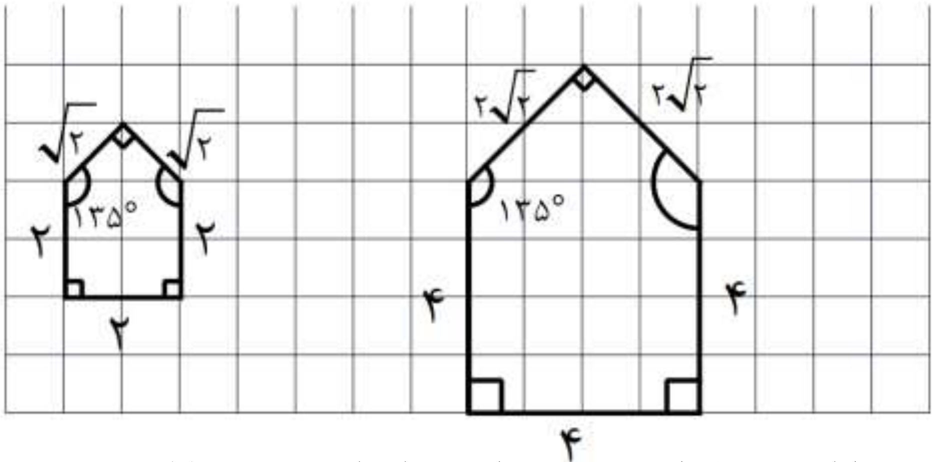
فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.



درس پنجم: شکل های متشابه

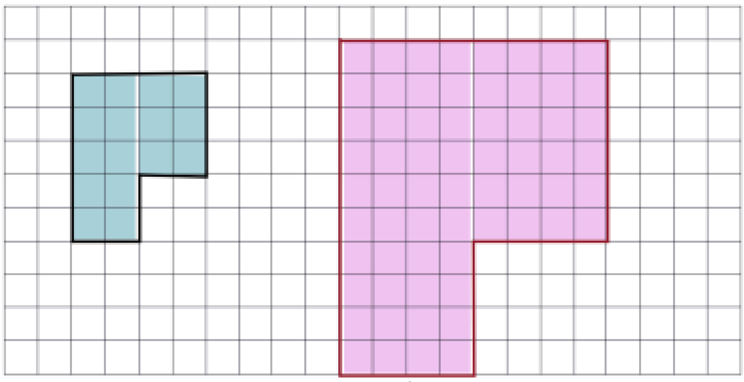
به تصویر مقابل نگاه کنید . در مورد شباهت ها یا تفاوت های این دو تصویر چه چیزی می توان گفت؟

مثال ۱) **اندازه ی اضلاع و زوایای شکل های زیر را بنویسید و آن ها را با هم مقایسه کنید.**



پاسخ: اندازه ی اضلاع و زوایا روی هر کدام نوشته شده است . با مقایسه ی دو شکل می بینیم زوایای متناظر با هم برابر و اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر کرده اند(دو برابر شده اند)

مثال ۲) **در صفحه ی شطرنجی شکلی رسم کنید که اندازه ی اضلاعش دو برابر شکل رسم شده و زاویه های متناظر با هم برابر باشند.**



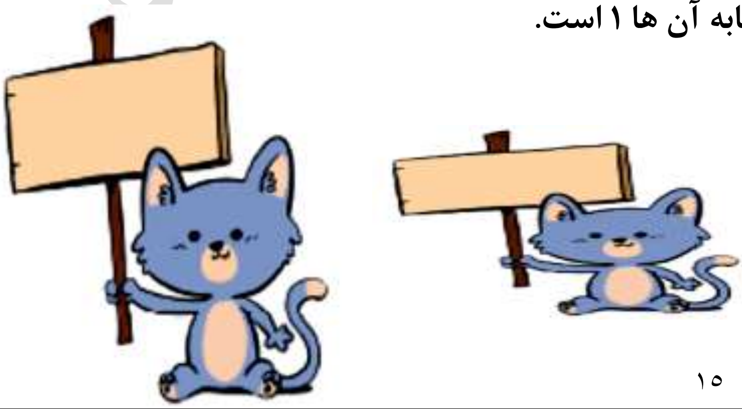
پاسخ

هرگاه در دو چندضلعی با تعداد اضلاع برابر ، همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند(کوچک یا بزرگ شده یا تغییر نکرده باشند) و زوایای متناظر در هر دو شکل با هم برابر باشند آن دو چندضلعی با هم متشابهند.

به نسبت بین دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، **نسبت تشابه** می گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت با هم متشابهند و نسبت تشابه آن ها ۱ است.

دو تصویر زیر متشابه نیستند چون متناسب نیستند.



مثال۳: نسبت تشابه دو مربع $\frac{۲}{۷}$ است. اگر ضلع مربع کوچکتر ۶۰ سانتیمتر باشد ضلع مربع بزرگتر چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از نسبت تشابه و تناسب بین اضلاع داریم:

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{۲}{۷} \xrightarrow{\times ۳۰} = \frac{۶۰}{x} \qquad x = ۷ \times ۳۰ = ۲۱۰$$

مثال۴: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر با مثلثی که اضلاعش به ترتیب از کوچک به بزرگ $x-۱$ و ۱۵ و $۲y+۳$ است متشابهند.

الف) نسبت تشابه دو شکل را بنویسید.

ب) مقدار **x** و **y** را محاسبه کنید.

پاسخ: چون اضلاع دو مثلث به ترتیب کوچک به بزرگ نوشته شده اند پس تناسب بین اضلاع به صورت زیر است:

$\frac{۷}{۲y+۳} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۴}{x-۱}$ پس نسبت تشابه آن ها $\frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۱۵}$ یا ۱ به ۳ است.

با تشکیل تناسب اضلاع و محاسبه ی آن ها داریم:

$$۲y + ۳ = ۳ \times ۷ = ۲۱ \rightarrow \quad ۲y = ۲۱ - ۳ = ۱۸ \quad \rightarrow y = ۱۸ \div ۲ = ۹$$

$$x - ۱ = ۴ \times ۳ = ۱۲ \quad \rightarrow \quad x = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

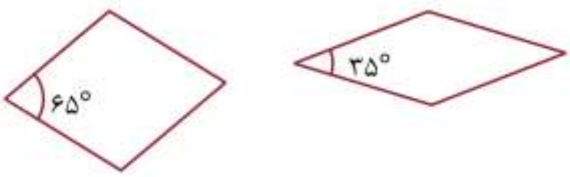
در درس مطالعات اجتماعی با نقشه و کاربرد نقشه آشنا شدید . نقشه ها شکل های متشابه با طبیعت می باشند و در نقشه نسبت تشابه را مقیاس می نامند. در مطالعات هشتم در مورد مقیاس در نقشه مطالبی را آموخته اید.

مثال۵: مقیاس یک نقشه ۲۰۰۰۰ : ۱ است. اگر فاصله ی دو مدرسه در نقشه **cm** ۴ باشد ، فاصله ی این دو میدان در واقعیت چقدر است؟

$$\frac{\text{فاصله در نقشه}}{\text{فاصله ی واقعی}} = \frac{۱}{۲۰۰۰۰} \xrightarrow{\times ۴} = \frac{۴}{x} \qquad x = ۴ \times ۲۰۰۰۰ = ۸۰۰۰۰\ cm = ۸۰۰\ m$$

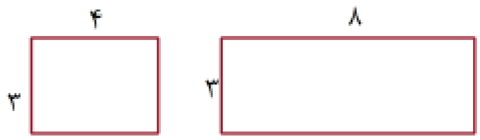
مثال۶: با یک مثال نشان دهید جملات زیر نادرستند.

الف) هر دو لوزی دلخواه متشابهند.



در این دو شکل زوایای متناظر برابر نیستند

ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند.

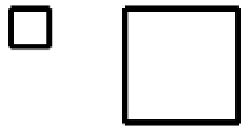


در این دو شکل اضلاع متناظر متناسب نیستند

(نسبت طول ها ۱ به ۲ است ولی عرض ها برابرند)

نکته۱: هر دو مربع دلخواه و هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه و در حالت کلی هر دو چندضلعی منتظم با تعداد اضلاع مساوی دلخواه با هم متشابهند.

مثال۷: اضلاع دو مربع داده شده ۱ و ۳ سانتیمتر است.



الف) نسبت تشابه دو مربع را بنویسید. $\frac{۱}{۳} = \frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}}$

ب) محیط دو مربع را محاسبه کنید و نسبت محیط دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت محیط های آن ها وجود دارد؟

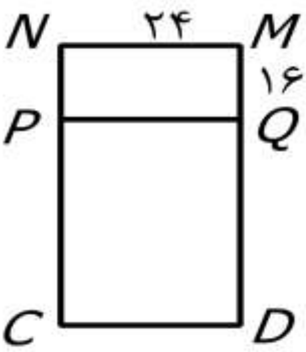
نسبت محیط دو مربع با نسبت تشابه آن ها برابر است. $\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{\text{محیط مربع کوچک}}{\text{محیط مربع بزرگ}}$

ج) مساحت دو مربع را محاسبه کنید و نسبت مساحت دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت مساحت های آن ها وجود دارد؟

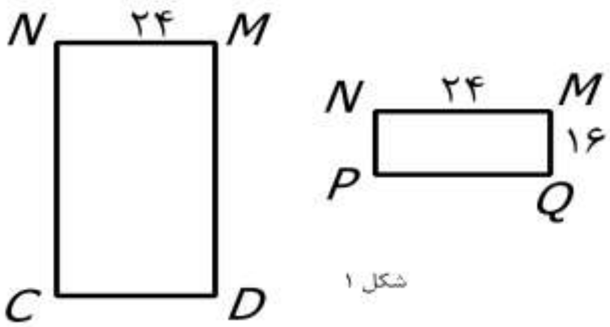
نسبت مساحت دو مربع با مجذور نسبت تشابه آن ها برابر است. $(\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹} = \frac{\text{مساحت مربع کوچک}}{\text{مساحت مربع بزرگ}}$

نکته۲: اگر نسبت تشابه دو شکل $\frac{a}{b}$ باشد نسبت محیط های آنها $\frac{a}{b}$ و نسب مساحت آن ها $(\frac{a}{b})^۲$ است.

مثال۸: دو مستطیل MNPQ و MNCD متشابهند. اندازه ی پاره خط NC را محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا برای تشخیص بهتر اضلاع دو مستطیل را جداگانه ترسیم می کنیم (شکل۱)



شکل ۱

دقت کنیم طول مستطیل کوچک (MN و PQ) و عرض مستطیل بزرگ (MNوCD) با هم برابرند

بنابراین: $\frac{MN}{NC} = \frac{MQ}{MN} \Rightarrow \frac{۲۴}{NC} = \frac{۱۶}{۲۴} \Rightarrow NC = \frac{۲۴\times۲۴}{۱۶} = ۳۶$

مثال۹) مثلثی به اضلاع ۵ و ۳ و ۴ با مثلثی دیگر به محیط ۳۶ متر متشابه است . اضلاع مثلث بزرگتر را محاسبه کنید.

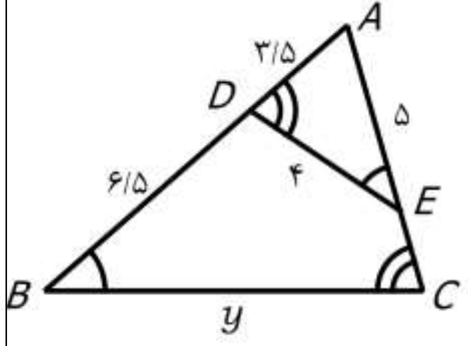
پاسخ: محیط مثلث اول برابر است با : $p_۱ = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$

طبق نکته ی۲ نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط آن ها برابر است

پس $\qquad \text{نسبت تشابه} = \frac{p_۱}{p_۲} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$

بنابراین اضلاع مثلث دوم سه برابر مثلث اول و به ترتیب ۱۵ و ۹ و ۱۲ است.

مثال۱۰) دو مثلث ABC و ADE متشابهند و زوایای متناظرشان در شکل مشخص شده است. تناسب بین اضلاع را بنویسید و مقدار y را محاسبه کنید.



پاسخ : با توجه به تساوی زوایای متناظر اضلاع متناسب را مشخص می کنیم.

$\hat{B} = \hat{E}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AC و AD با هم متناسبند.

$\hat{C} = \hat{D}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AB و AE با هم متناسبند.

زاویه ی A در هر دو مثلث مشترک است پس اضلاع روبه رو به آن در دو مثلث یعنی BC و DE با هم متناسبند .

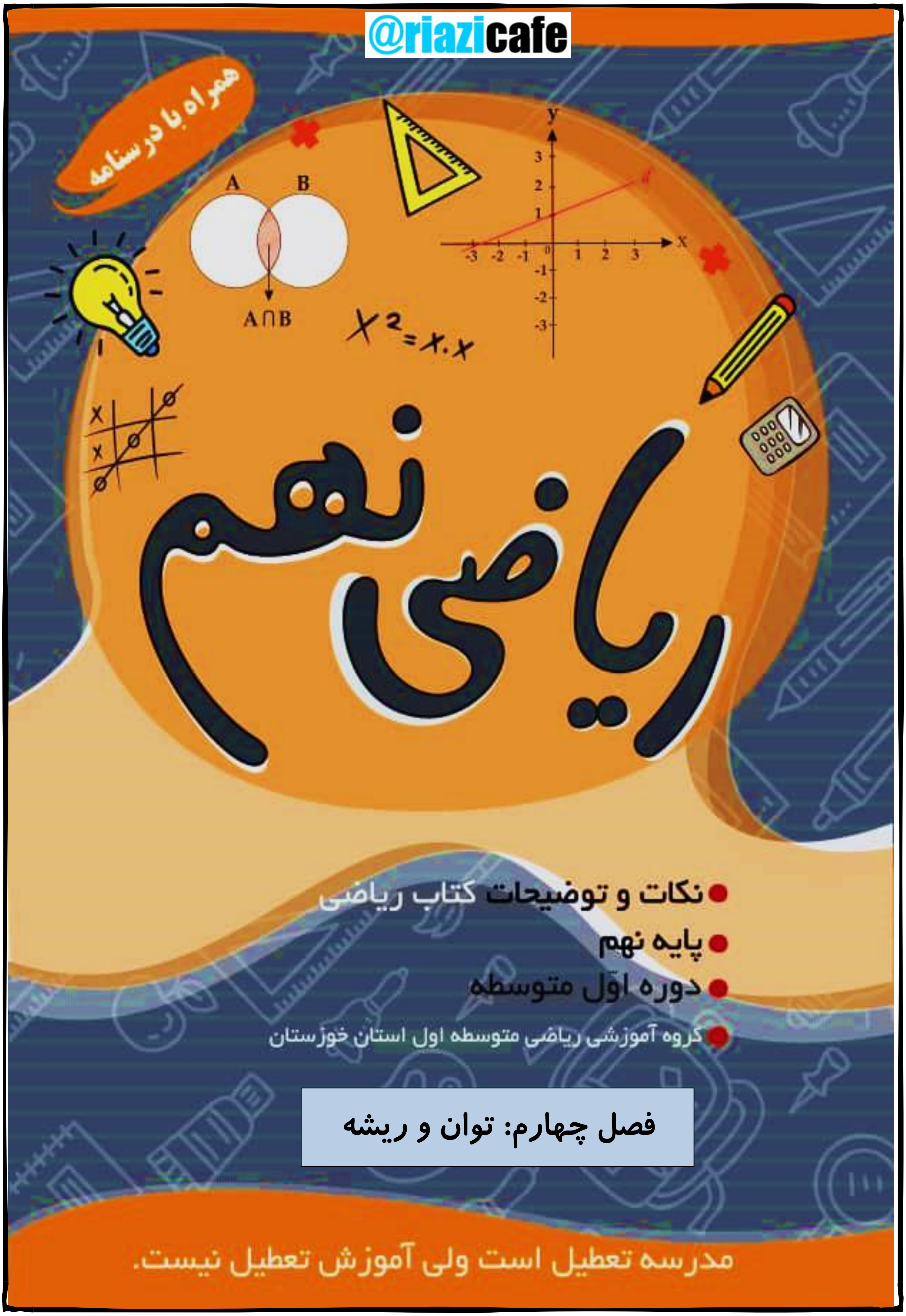
با توضیحات بالا تناسب بین اضلاع برابر است با : $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$

دقت کنیم $\overline{AB} = ۶/۵ + ۳/۵ = ۱۰$

پس : $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{۵}{۱۰} = \frac{۴}{y} \rightarrow y = \frac{۴\times۱۰}{۵} = ۸$

فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان



فصل چهارم: توان و ریشه

فصل چهار

ریاضی نهم

درس اول و دوم :

تهیه و تنظیم :

محسن رضائی دبیر ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) شهرستان اهواز ناحیه ی سه

عبدالرضا اعتماد نژاد دبیر ریاضی مدارس دزفول

فصل چهارم : درس اول توان صحیح:

در سال گذشته با اعداد توان‌دار آشنا شدیم ، مانند:

$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴} = \frac{۱۶}{۸۱}$ $\quad$ $۴^{۳} = ۶۴$ $\quad$ $(-۵)^{۳} = -۱۲۵$

※نکته : هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر یک است . $\quad a^{۰} = ۱ \quad , \quad a \neq ۰$

※※ آیا می توانیم یک عدد با توان منفی داشته باشیم ؟ مثلا حاصل $۳^{-۵}$ برابر چند است؟

به جدول زیر توجه کنید: حاصل هر خانه از سطر اول برابر همان عدد است که در زیر آن نوشته شده است .

در سطر اول از سمت چپ ، از توان اعداد توان‌دار در هر مرحله یک واحد کم می شود و در سطر دوم از سمت چپ اعداد بر۳ تقسیم می شوند.

$۳^{۴}$	$۳^{۳}$	$۳^{۲}$	$۳^{۱}$	$۳^{۰}$	$۳^{-۱}$	$۳^{-۲}$	$۳^{-۳}$	$۳^{-۴}$	$۳^{-۵}$
۸۱	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳^{۲}}$	$\frac{۱}{۲۷} = \frac{۱}{۳^{۳}}$	$\frac{۱}{۸۱} = \frac{۱}{۳^{۴}}$	$\frac{۱}{۲۴۳} = \frac{۱}{۳^{۵}}$

همچنین می توانیم بنویسیم :

$$۳^{-۱} = \frac{۱}{۳^{۱}} \qquad ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳^{۲}} \qquad ۳^{-۵} = \frac{۱}{۳^{۵}} = \frac{۱}{۲۴۳}$$

« اگر عددی غیر از صفر ، توان صحیح منفی داشته باشد ، می توانیم پایه را معکوس کنیم و توان را با علامت مثبت بنویسیم .

و به زبان ریاضی می نویسیم

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^{n}} = \left(\frac{۱}{a}\right)^{n} \quad و \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , a و b \neq ۰ \, , n \in \mathbb{N}$$

به مثال های زیر توجه کنید :

$$۴^{-۲} = \frac{۱}{۴^{۲}} = \frac{۱}{۱۶} \quad و \quad (-۷)^{-۲} = \frac{۱}{(-۷)^{۲}} = \frac{۱}{۴۹} \quad و \quad \left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۳} = \frac{۱}{\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳}} = \frac{۱}{\frac{۸}{۱۲۵}} = \frac{۱۲۵}{۸} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}$$

※نکته : ترتیب انجام عملیات های ریاضی در محاسبات توانی :

۱) پرانتز یا کروشه $\qquad$ ۲) توان یا جذر $\qquad$ ۳) ضرب یا تقسیم $\qquad$ ۴) جمع یا تفریق

مثال : حاصل عبارت داده شده را بدست آورید ؟

جواب :

$$۲۷\left[\left(\frac{۱۵}{۳۶} \times \frac{۱۲}{۱۸}\right)^{۳} \div \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳}\right]^{۲} = ۳^{۳}\left[\frac{۵^{۳}}{۳^{۳} \times ۶^{۳}} \times \frac{۶^{۳}}{۵^{۳}}\right]^{۲} = ۳^{۳} \times \left(\frac{۱}{۳^{۳}}\right)^{۲} = ۳^{۳} \times \frac{۱}{۳^{۶}} = \frac{۱}{۳^{۳}} = \frac{۱}{۲۷}$$

$$۲۷ = ۳^{۳} \qquad \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۳} = \frac{۵^{۳}}{۶^{۳}}$$

نمونه سوالات امتحانی خرداد ماه ۹۸ :

۱-حاصل عبارت $۴^{-۱}+۳^{-۱}$ برابر کدام گزینه است ؟ (آذربایجان غربی)

جواب $۳^{-۱}+۴^{-۱}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۴+۳}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$

الف) $۷^{-۱}$ ب) $\frac{۷}{۱۲}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۴}$

۲-حاصل عبارت روبرو را بدست آورید. (یزد) $۲^{-۳}+۴^{-۱}=\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱+۲}{۸}=\frac{۳}{۸}$

۳-در جای خالی علامت $(<=>)$ قرار دهید . (ایلام) $۵^۲ \ldots (۰/۲)^{-۲}$ $۲^{-۱} \ldots ۲^{-۲}$

جواب : $۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$ و $۲^{-۲}=\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۱}{۴} \rightarrow \frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۴}$

$۵^۲=۲۵$ و $(۰/۲)^{-۲}=\left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{-۲}=\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۲=۵^۲=۲۵ \rightarrow ۵^۲=(۰/۲)^{-۲}$

۴)حاصل عبارت زیر را بنویسید .(تهران)

$$\frac{۲^۰}{۳}-۳^{-۲}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳^۲}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۹}=\frac{۳-۱}{۹}=\frac{۲}{۹}$$

***** فرزندم با توجه به مطالب بالا ، حالا شما حل کنید .

$\left(\frac{۲}{۷}\right)^{-۴}=\frac{۱}{}=$ $۴^{-۳}=\frac{۱}{}=$

$(-۶)^{-۲}=$ $(۰/۳)^{-۴}=$

** در سالهای گذشته ضرب و تقسیم عبارات توان‌دار با پایه یا توان مساوی را یاد گرفتیم . $۳^۴\times۳^۵=۳^{۴+۵}=۳^۹$

الف) در ضرب اعداد توان‌دار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توانها را جمع می کنیم . $۶^۴\times۳^۴=۱۸^۴$

ب) در ضرب اعداد توان‌دار با توانهای مساوی ،پایه ها را ضرب کرده و یکی از توانها را می نویسیم . $۲^۸\div۲^۵=۲^{۸-۵}=۲^۳$

ج) در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه های مساوی،یکی از پایه ها را نوشته و توانها را کم می کنیم . $۳^۷\div۸^۷=\left(\frac{۳}{۸}\right)^۷$

د) درتقسیم اعداد توان‌دار با توانهای مساوی،پایه ها را بر هم تقسیم کرده و یکی از توانها را می نویسیم .

ه) اگر عددی توان‌دار درون پرانتز مجددا به توان برسد ، پایه را نوشته و توانها را در هم ضرب می کنیم . $\left(۳^۴\right)^۵=۳^{۴\times۵}=۳^{۲۰}$

** این قوانین برای اعداد توان‌دار با توانهای صحیح منفی هم کاربرد دارد .

$$۳^{-۴} \times ۳^{۵} = ۳^{-۴+۵} = ۳^{۱}$$

$$۶^{-۴} \times ۳^{-۴} = ۱۸^{-۴}$$

$$۲^{-۸} \div ۲^{-۵} = ۲^{-۸-(-۵)} = ۲^{-۳}$$

$$۳^{-۷} \div ۸^{-۷} = \left(\frac{۳}{۸}\right)^{-۷}$$

$$\left(۳^{-۴}\right)^{۵} = ۳^{-۴\times۵} = ۳^{-۲۰} = \frac{۱}{۳^{۲۰}}$$

مثال : پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید .

۱) $۵^{-۳} \to \begin{cases} \frac{۱}{۱۲۵} \ ☑ \\ \cancel{-۱۵} \end{cases}$ $\quad ۵^{-۳} = \frac{۱}{۵^{۳}} = \frac{۱}{۱۲۵}$

۲) $۳^{-۱} \times ۲^{-۱} \to \begin{cases} ۵^{-۱} \\ ۶^{-۱} \ ☑ \end{cases}$ $\quad ۳^{-۱} \times ۲^{-۱} = (۳\times۲)^{-۱} = ۶^{-۱}$

۳) $۵^{-۱} + ۶^{-۱} \to \begin{cases} \frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶} \ ☑ \\ ۱۱^{-۱} \end{cases}$ $\quad ۵^{-۱} + ۶^{-۱} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶}$

مثال : جرم یک اتم حدود $۱۰^{-۳۶}$ گرم است . جرم یک وزنه ی ۱۰۰۰ کیلو گرمی چند برابر جرم این اتم است ؟

جواب : هر کیلوگرم ۱۰۰۰ گرم است یعنی : $۱۰۰۰ = ۱۰^{۳}$ پس : $۱۰^{۳} \times ۱۰^{۳} = ۱۰^{۶}$

$$۱۰^{۶} \div ۱۰^{-۳۶} = ۱۰^{۶-(-۳۶)} = ۱۰^{۴۲}$$

*نکته : برای مقایسه ی اعداد توان‌دار (با توان عدد طبیعی) یکی از دو کار زیر را انجام دهیم تا راحت تر بتوانیم آنها را مقایسه کنیم .

الف) پایه ها برابر شوند . هر عددی با پایه ی برزگتر از یک که توان بیشتری باشد، بزرگتر است .

مثال : اعداد توان‌دار روبرو را از کوچک به بزرگ از سمت چپ به راست مرتب کنید . $۴^{۲}$ و $۱۶^{۳}$ و $۸^{۵}$ و $۲^{۶}$

جواب : تمام پایه ها با تجزیه شدن ، به ۲ تبدیل می شوند .

$$۸^{۵} = (۲^{۳})^{۵} = ۲^{۱۵} \text{ و } ۱۶^{۳} = (۲^{۴})^{۳} = ۲^{۱۲} \text{ و } ۴^{۲} = (۲^{۲})^{۲} = ۲^{۴} \text{ و } ۲^{۶}$$

$$۸^{۵} > ۱۶^{۳} > ۲^{۶} > ۴^{۲} \quad \text{یا} \quad ۲^{۱۵} > ۲^{۱۲} > ۲^{۶} > ۲^{۴}$$

※نکته : اگر توانها برابر باشند و پایه عددی بین صفر و یک باشد . هر چه عدد به صفر نزدیکتر باشد حاصل عبارت کوچکتر است .

$$۰/۲^{۵} = ۰/۰۰۰۳۲ \quad < \quad \left(\frac{۵}{۱۰}\right) = ۰/۰۳۱۲۵ \quad < \quad \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^{۵} = ۰/۳۲۷۶۸$$

ب) توان ها برابر شوند . هر عدد (با پایه ی بزرگتر از یک) که پایه ی بزرگتری داشته باشد . بزرگتر است .

$$۸^{۳۰} \qquad ۶^{۴۵} \qquad ۲^{۶۰}$$

مثال : اعداد تواندار داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$\left(۸^{۲}\right)^{۱۵} \qquad \left(۶^{۳}\right)^{۱۵} \qquad \left(۲^{۴}\right)^{۱۵}$$

جواب : تمام توانها بر ۱۵ بخش پذیرند (ب م م توانها ۱۵ است .) پس می نویسیم :

$$۶۴^{۱۵} \qquad ۲۱۶^{۱۵} \qquad ۱۶^{۱۵}$$

اعداد درون پرانتز را به توان رسانده و می نویسیم :

در نهایت با توجه به اینکه توانها برابرند از کوچکترین پایه شروع به مرتب کردن می کنیم .

$$۱۶^{۱۵} < ۶۴^{۱۵} < ۲۱۶^{۱۵}$$

※نکته : اعداد تواندار با پایه ی منفی:

با توجه به توان مثبت ، دارای حاصل مثبت و با توان منفی ، دارای حاصل منفی هستند. (به شرطی که پایه درون پرانتز باشد و توان بیرون پرانتز)

مثال : اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$(-۳)^{۵}$ و $(-۱)^{۱۳}$ و $(-۲)^{۸}$

$$(-۳)^{۵} = -۳^{۵} = -۲۴۳ \qquad (-۱)^{۱۳} = -۱^{۱۳} = -۱ \qquad (-۲)^{۸} = ۲^{۸} = ۲۵۶$$

$$(-۳)^{۵} < (-۱)^{۱۳} < (-۲)^{۸}$$

معادلات توانی

※※ در حل اینگونه معادلات باید یکی از دو کار زیر را انجام داد :

- اگر مجهول مساله در توان قرار بگیرد ، برای بدست آوردن مقدار مجهول ؛ ابتدا باید دو طرف تساوی را به صورت یک عدد تواندار بنویسیم که دو حالت به وجود می آید .
- الف) پایه ها مساوی باشند که توانها نیز با هم برابر خواهند شد و

با حل یک معادله ی معمولی به جواب می رسیم .

$$\left(۳^{۸}\right)^{۳x} = ۸۱ \qquad ۳^{۲۴x} = ۳^{۴}$$

$$۲۴x = ۴ \qquad x = \frac{۴}{۲۴} = \frac{۱}{۶}$$

- ب) پایه ها مساوی نباشند که در این حالت باید توانها را برابر جداگانه صفر قرار دهیم .

$$۵^{۲a-۴} = ۳^{۵b+۱۵} \qquad ۲a - ۴ = ۰ \rightarrow \quad a = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$۵b + ۱۵ = ۰ \rightarrow ۵b = -۱۵ \rightarrow b = -\frac{۱۵}{۵} = -۳$$

نمونه سوالات نهایی خرداد ماه ۹۸

۱)حاصل عبارات زیر را به صورت عددی توان‌دار با توان مثبت بنویسید .

کرمان : $(۵^{۲})^{-۳} \times ۱۲۵^{۴} = ۵^{-۶} \times (۵^{۳})^{۴} = ۵^{-۶} \times ۵^{۱۲} = ۵^{۶}$

اردبیل : $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۵} \times \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۶} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۵} \times \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۶} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۱۱}$

قم : $\frac{۳^{۴} \times ۹^{۳}}{۳^{-۲}} = \frac{۳^{۴} \times (۳^{۲})^{۳}}{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}} = ۳^{۴} \times ۳^{۶} \times ۳^{۲} = ۳^{۱۲}$

ایلام : $\frac{۱۶^{-۲} \times ۲^{-۱}}{۸^{-۴} \times ۴^{۲}} = \frac{(۲^{۴})^{-۲} \times ۲^{-۱}}{(۲^{۳})^{-۴} \times (۲^{۲})^{۲}} = \frac{۲^{-۸} \times ۲^{-۱}}{۲^{-۱۲} \times ۲^{۴}} = \frac{۲^{-۹}}{۲^{-۸}} = \frac{۲^{۸}}{۲^{۹}} = \frac{۱}{۲}$

***** فرزندم با توجه به سوالات حل شده ی بالا ، حالا شما حل کنید .

$\left(\frac{۳}{۷}\right)^{-۲} \times \left(\frac{۱۰}{۶}\right)^{۲} =$

$۶۴ \times \left(\frac{۱}{۴}\right)^{-۲} =$

$\frac{۱۵^{۴} \div ۱۵^{-۴}}{۳^{۷} \times ۳} =$

***** فرزندم : با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که**

صفحه ی ۶۰ تا صفحه ی ۶۴ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها ، کاردرکلاس ها و تمرین را بنویسید .

شناسایی اعداد اعشاری مثبت ، بزرگتر یا کوچکتر از یک :اگر عدد قبل از اعشار صفر بود، یعنی عدد داده شده کوچکتر از یک است . مثل: ۰/۰۳و ۰/۰۲۱ و ۰/۰۰۰۷۶ و ۰/۵۸۶۳۲ و . .. در همه‌ی این مثالها، عدد قبل از اعشار صفر است ،پس این اعداد کوچکتر از یک می باشند .اگر عدد قبل از اعشار ، عددی غیر از صفر بود، یعنی عدد داده شده بزرگتر از یک می باشد . مثل: ۲۵۵/۳ و ۲۱/۳۵۵۸ و ۵/۸۶ و . در این مثالها، عدد قبل از اعشار یک عدد غیرصفر است، پس این اعداد بزرگتر از یک هستند.

درس دوم : نماد علمی

احمد مشغول نوشتن یک مقاله ی علمی در مورد کهکشانها بود او می دانست که سرعت نور برابر با ۳۰۰۰۰۰۰۰۰ متر بر ثانیه است .همچنین می دانست که در فضا برای محاسبات سرعت ، از سرعت نور استفاده می کنند . در مساله ی مورد نظر احمد باید مسافت طی شده ی نور در مدت ۱۰۰ ساعت را باید محاسبه می کرد . او مشغول نوشتن شد و احساس می کرد که تعداد صفر های اعداد بدست آمده خیلی زیاد شدند و هر لحظه باید آنها را بشمارد تا دچار اشتباه نشود . و سرانجام بعد از صرف کلی وقت توانست محاسباتش را به پایان برساند .

او نوشت : ثانیه ۳۶۰۰۰۰ = ۳۶۰۰ × ۱۰۰ = ۱۰۰ ساعت ثانیه ۳۶۰۰ = دقیقه ۶۰ = ۱ ساعت

مسافتی که شهاب سنگ در مدت ۱۰۰ ساعت طی می کند. ثانیه/متر۱۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۳۰۰۰۰۰۰۰۰ × ۳۶۰۰۰۰

رضا که تا این لحظه فقط نظاره گر کارهای احمد بود ، گفت چرا این همه صفر نوشتی ؟ و نگاهی به مساله و اعداد انداخت . ناگهان به احمد گفت : بیا از شر صفر ها راحت شویم . احمد گفت : آخه مگر برای حذف صفر ها مجاز هستیم ؟

رضا گفت : خیر ، اما میدانیم که جدول ارزش مکانی اعداد بر حسب دسته های ۱۰ تایی بنا شده اند، پس میتوان نوشت :

$۱۰ = ۱۰^{۱}$ و $۱۰۰ = ۱۰^{۲}$ و $۱۰۰۰ = ۱۰^{۳}$ و ...

لذا می شود اعداد بزرگ با این همه صفر را به صورت عددی اعشاری مثبت با یک رقم صحیح مخالف صفر در توانی از ۱۰ نمایش بدهیم.

احمد گفت این را از کجا یاد گرفتی ؟ رضا گفت : آخه دیروز همین درس را آقا معلم داشت برایمان توضیح می داد .

حالا اعداد مساله را بر اساس مطلب بالا بنویسیم و نوشت :

ثانیه $۳/۶ \times ۱۰^{۵}$ = ثانیه ۳۶۰۰۰۰ = ۳۶۰۰ × ۱۰۰ = ۱۰۰ ساعت ثانیه $۳/۶ \times ۱۰^{۳}$ = ۳۶۰۰ = دقیقه ۶۰ = ۱ ساعت

سرعت نور = $۳۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۳ \times ۱۰^{۸}$

و در نهایت متر بر ثانیه $۳ \times ۱۰^{۸} \times ۳/۶ \times ۱۰^{۵} = ۱۰/۸ \times ۱۰^{۱۳} = ۱/۰۸ \times ۱۰^{۱۴}$

احمد گفت: چقدر ضرب ها راحتتر محاسبه شدند . البته از قوانین توان ها هم استفاده شد .حالا راه حلت را توضیح بده تا من هم یاد بگیرم .

رضا گفت که: هر عدد گویا را می توانیم به صورت یک عدد اعشاری مثبت ، با یک رقم صحیح غیر از صفر در توانی از ۱۰ نمایش داد . مثلا ۳۶۰۰ را به صورت ۳/۶ نوشت و به تعداد ارقام عدد داده شده غیر از ۳ ، توانی برای ۱۰ نوشت .

یعنی: $۳۶۰۰ = ۳/۶ \times ۱۰^{۳}$

در نماد علمی، کلیه اعداد به شکل: $a \times ۱۰^{n}$ نوشته می‌شوند. که در آن توان n یک عدد صحیح، و ضریب a یک عددمثبت حقیقی است

$$a \times ۱۰^{n} \ , \ a \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{Z} \ \text{و} \ ۱ \leq a < ۱۰$$

میتوان گفت که : نماد علمی روشی است برای نوشتن اعدادی که خیلی بزرگ یا خیلی کوچک هستند و نمی‌توان به سادگی آن‌ها را در نماد دهدهی نوشت.

نماد علمی تعدادی ویژگی‌های کاربردی دارد و استفاده از آن در ماشین‌حساب‌ها و توسط دانشمندان، ریاضی‌دانان، متخصصین سلامت و مهندسان رایج است. همچنین انجام محاسبات ریاضی با نماد علمی راحت تر می باشد .

از جمله کاربردهای نماد علمی می توان در محاسبات فضایی ، محاسبات مهندسی ، پزشکی و ... اشاره کرد که در انتهای درس چند مثال از کاربرد نماد علمی در علوم مختلف را برایتان حل شده است .

برای نوشتن اعداد به صورت نمادعلمی دو حالت داریم:

حالت اول : عددی که به ما داده شده، اعشار ندارد.

❋ عدد ۳۷۵۳۲۰۰۰۰۰۰۰ رو با نماد علمی بنویسید.

قدم اول : بعد از اولین رقم از سمت راست ، یک اعشار بزنید. ۳/۷۵۳۲۰۰۰۰۰۰۰

قدم دوم : اکنون بعد از اعشاری که زدید، تعداد ارقام اعداد را بشمارید. تعداد ارقام بعد از ممیز = ۱۱ عدد

قدم سوم : عدد ممیز زده را بدون صفر ها بنویسید . ۳/۷۵۳۲

قدم چهارم : عدد ۳/۷۵۳۲را در ۱۰ ضرب کنیم وعدد ۱۱ را که در قدم دوم بدست آمده را به عنوان توان برای ۱۰ بنویسیم.

$$۳۷۵۳۲۰۰۰۰۰۰۰ = ۳/۷۵۳۲ \times ۱۰^{۱۱}$$

حالت دوم: عدد داده شده دارای اعشار باشد.

الف) عدد از یک بزرگتر است؟ بله خیر ☑

مثال: عدد ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲۵۸ را به صورت نماد علمی بنویسید.

قدم اول .تعیین کنید که عدد داده شده بزرگتر از یک یا کوچکتر از یک است . کوچکتر از یک است

قدم دوم :از سمت چپ عدد شروع به حرکت کنید، به اولین رقم غیر صفر که رسیدید بعدش یک اعشار بزنیم.

چون عدد داده شده خودش یک ممیز داشت ، از ممیز عدد داده شده تا ممیزی که خودمان نوشتیم تعداد ارقام را بشماریم.

$$۰/\underbrace{۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳}_{\text{دوازده رقم}}۲۵۸$$

قدم سوم :در این مرحله عدد ۳/۲۵۸ را در ۱۰ ضرب کرده و برای توان ۱۰ ، تعداد ارقامی که شمارده ایم را با علامت منفی بنویسیم .

$$۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲۸۵ = ۳/۲۵۸ \times ۱۰^{-۱۲}$$

ب) عدد بزرگتر از یک

مثال : عدد داده شده را با نماد علمی بنویسید . ۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱

قدم اول : **از سمت چپ بعد از اولین رقم (مخالف صفر) یک ممیز بنویسید .**

$\underbrace{۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲}_{\text{نه رقم}}~/۰۲۱$

قدم دوم : **تعداد ارقام بین ممیز عدد تا ممیزی که جدید زده ایم را بشمارید .**

قدم دوم : عدد ۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱ را در ۱۰ ضرب کنید .وتعداد ارقام شمارش شده ی بین دو ممیز(۹) را برای توان ۱۰ بنویسید .

$$۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱ = ۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱ \times ۱۰^{۹}$$

سوالات آزمون نهایی خرداد ۹۸

۱) **شعاع خورشید ۶۹۵۰۰۰ کیلو متر است .این عدد را با نماد علمی بنویسید .(قم ۹۸)**

جواب : عدد از یک بزرگتر است . پس از سمت چپ اولین عدد غیر صفر را مشخص کرده و جلوی آن ممیز نوشته و می نویسیم.

$$۶۹۵۰۰۰ = ۶/۹۵ \times ۱۰^{۵}$$

۲)فاصله ی مریخ تا زمین ۹۷۱۰۰۰۰۰ کیلومتر است . این عدد را با نماد علمی بنویسید .(تهران ۹۸)

جواب: $۹۷۱۰۰۰۰۰ = ۹/۷۱ \times ۱۰^{۷}$

۳)قطر خورشید $۱۰^{۹} \times ۱/۴$ متر و قطر زمین حدوداً $۱۰^{۷} \times ۱/۳$ متر است . قطر خورشید چند برابر قطر زمین است ؟

جواب :

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{۱/۴\times۱۰^{۹}}{۱/۳\times۱۰^{۷}} = ۱/۰۸\times۱۰^{۲} = ۱۰۸$$

۴) نمایش اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید .

کرمان : $۷۸۴۰۰۰۰۰ = ۷/۸۴ \times ۱۰^{۷}$

اردبیل : $۱۳۹۸/۰۳۰۱ = ۱/۳۹۸۰۳۰۱ \times ۱۰^{۳}$

سیستان و بلوچستان : $۹۸۰۰۰۰۰۰۰ = ۹/۸ \times ۱۰^{۸}$

سمنان : $۵۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{۵} \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۲}$

۵) نمایش اعشاری اعداد داده شده را بنویسید . (تالیفی)

جواب: چون توان ۱۰ منفی است این عدد از یک کوچکتر است پس: از عدد توان بدون در نظر گرفتن علامت، یک واحد کم می کنیم و بعد از ممیز تا عدد ۲ به تعداد عدد حاصله صفر می نویسیم . (۸-۱=۷)

$$۲/۷۵ \times ۱۰^{-۸} = ۰/\underbrace{۰۰۰۰۰۰۰}_{\text{هشت رقم}}۲۷۵$$

جواب : چون توان ۱۰ مثبت است این عدد از یک بزرگتر است پس : به تعداد ارقام بعد از ممیز از توان ۱۰ کم می کنیم و به اندازه ی عدد بدست آمده جلوی عدد ۴ ، صفر می نویسیم . (۶-۳=۳)

$$۳/۰۲۴ \times ۱۰^{۶} = \underbrace{۳۰۲۴۰۰۰}_{\text{شش رقم}}$$

۶) حاصل عبارات زیر را به دست آورید .(تالیفی)

$$۶ \times ۱۰^{۸} \times \frac{۳}{۷} \times ۱۰^{-۶} = \left(۶ \times \frac{۳}{۷}\right) \times (۱۰^{۸} \times ۱۰^{-۶}) = ۲۲/۲ \times ۱۰^{۲} = ۲/۲۲ \times ۱۰ \times ۱۰^{۲} = ۲/۲۲ \times ۱۰^{۳}$$

۷) عبارات درست را با ☑ و عبارات نادرست را با ☒ مشخص کنید .(عبارات نادرست را به صورت درست بنویسید .) (تالیفی)

(۱) $۲/۶۸ \times ۱۰^{۳} = ۲۶۸۰۰۰$ **(۲)** $۵/۸ \times ۱۰^{-۶} = ۰/۰۰۰۰۵۸$ **(۳)** $۳/۱۷ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۰۳۱۷$ **(۴)** $۹/۸۵۴۷ \times ۱۰^{۵} = ۹۸۵۴۷۰$

۱) نادرست ☒ $۲/۶۸ \times ۱۰^{۳} = ۲۶۸۰$ ۲)درست ☑ $۵/۸ \times ۱۰^{-۶} = ۰/۰۰۰۰۰۵۸$

۳) نادرست☒ $۳/۱۷ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۳۱۷$ ۴)درست ☑ $۹/۸۵۴۷ \times ۱۰^{۵} = ۹۸۵۴۷۰$

۸)اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید . (تالیفی)

$۲/۸ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۴/۳۵ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۱/۷ \times ۱۰^{-۲}$ ، $۱/۵ \times ۱۰^{-۳}$

ابتدا با توجه به توانهای عدد ۱۰ به مقایسه می پردازیم ، در صورتی که توانها برابر بودند، سراغ قسمت اعشاری رفته و آنها را با هم مقایسه می کنیم . با توجه به توانهای عدد ۱۰ داریم : $-۲ > -۳$ ، چون سه عدد دارای توان ۲- هستند اکنون باید اعداد اعشاری را مقایسه کنیم :

$$۱/۷ < ۲/۸ < ۴/۳۵$$

و در نهایت داریم : $۱/۵ \times ۱۰^{-۳} < ۱/۷ \times ۱۰^{-۲} < ۲/۸ \times ۱۰^{-۲} < ۴/۳۵ \times ۱۰^{-۲}$

❋❋❋ فرزندم : حالا با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که صفحه ی ۶۵ تا صفحه ی ۶۷ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها ، کاردرکلاس ها و تمرین را بنویسید .

موفق باشید و سربلند.

محسن رضائی دبیر ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) شهرستان اهواز ناحیه ی ۳

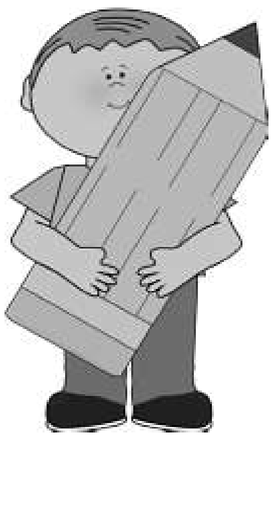
جزوه فصل چهارم

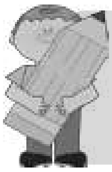
پایه نهم

موضوع : ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

گردآورنده: آقای اعتمادنژاد

شهریور ۹۹





موضوع: جمع و تفریق رادیکال ها

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

نکته ۱: همانطور که در سال گذشته خواندید برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها باید فرجه‌ها مثل هم باشند.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\qquad$ a و b مثبت (اعداد حسابی)

$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\qquad$ $(b \neq ۰)$

مثال: ضرب و تقسیم کنید.

الف) $\sqrt{۷} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۷ \times ۲} = \sqrt{۱۴}$

ب) $\sqrt{۱۵۰} \div \sqrt{۵} = \sqrt{\frac{۱۵۰}{۵}} = \sqrt{۱۵}$

نکته: گاهی اوقات پس از ضرب و تقسیم می‌توان جذر گرفت.

$$\sqrt{۲} \times \sqrt{۳۲} = \sqrt{۲ \times ۳۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

$$\sqrt{۲۷} \div \sqrt{۳} = \sqrt{\frac{۲۷}{۳}} = \sqrt{۹} = ۳$$

نکته ۲: همین مطلب (نکته۱) برای فرجه ۳ نیز استفاده می‌شود.

$\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a} \times \sqrt[۳]{b}$ $\qquad$ a و b عدد حقیقی

$\sqrt[۳]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}}$ $\qquad$ $(b \neq ۰)$

مثال:

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{۲ \times ۴} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$$\sqrt[۳]{۱۲۸} \div \sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{\frac{۱۲۸}{۲}} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

نکته ۳: اما برای جمع و تفریق تساوی‌های زیر همیشه برقرار نیستند.

$$\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b} \neq \sqrt[۳]{a+b} \qquad \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt[۳]{a} - \sqrt[۳]{b} = \sqrt[۳]{a-b} \qquad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

سوال: آیا تساوی زیر درست است؟ چرا؟

$$\sqrt{۵} + \sqrt{۲۰} = \sqrt{۲۵}$$

حل: خیر، زیرا:

$$\sqrt{۵} + \sqrt{۲۰} = \sqrt{۲۵} \Rightarrow \underbrace{۲/۲ + ۴/۴}_{۶/۸} = ۵ \Rightarrow ۶/۸ \neq ۵$$

سوال۱: حاصل هر عبارت را بدست آورید؟

الف) $-۵\sqrt{۳} \times ۲\sqrt{۵} = (-۵ \times ۲)(\sqrt{۳} \times \sqrt{۵}) = -۱۰\sqrt{۱۵}$

ب) $۷\sqrt[۳]{-۲} \times ۹\sqrt[۳]{۴} = (۷ \times ۹)(\sqrt[۳]{-۲ \times ۴}) = ۶۳\sqrt[۳]{-۸} = ۶۳ \times (-۲) = -۱۲۶$

پ) $۱۵\sqrt{۵۰} \div ۳\sqrt{۲} = (۱۵ \div ۳)\sqrt{\frac{۵۰}{۲}} = ۵\sqrt{۲۵} = ۵ \times ۵ = ۲۵$

ت) $۴۲\sqrt[۳]{۲۵۰} \div ۱۴\sqrt[۳]{۲} = (۴۲ \div ۱۴)\sqrt[۳]{\frac{۲۵۰}{۲}} = ۳\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۳ \times ۵ = ۱۵$

سوال۲: آیا تساوی $\sqrt[۳]{-۵} = -\sqrt[۳]{۵}$ درست است؟ بلی ☑ خیر ☐

سوال۳: اگر مساحت یک مکعب $۲۴a^۲$ باشد حجم آن بر حسب a چیست؟

الف) $۸a^۳$ ☑ ب) $۸a^۲$ ☐ پ) $۶۴a^۳$ ☐ ت) $۱۶a^۳$ ☐

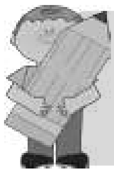
حل: $۲۴a^۲ \div ۶ = ۴a^۲ \to \sqrt{۴a^۲} = ۲a \to ۲a.۲a.۲a = ۸a^۳$

۹) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ گیلان)

$$\underbrace{۲\sqrt[۳]{۵} \times ۴\sqrt[۳]{۲۵}} = (۲ \times ۴)\sqrt[۳]{۵ \times ۲۵} = ۸\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۸ \times ۵ = ۴۰$$

۲) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ یزد)

$$\frac{\sqrt[۳]{۵۴} \times \sqrt[۳]{۲۰}}{\sqrt[۳]{۵}} = \sqrt[۳]{\frac{۵۴ \times \cancel{۲۰}}{\cancel{۵}}} = \sqrt[۳]{\underbrace{۵۴ \times ۴}} = \sqrt[۳]{۲۱۶} = ۶$$



جمع و تفریق رادیکال‌ها:

نکته۱: ساده کردن یک عبارت رادیکالی را در سال گذشته خواندید. مثال:

$$\sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

نکته۲: برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی در صورتی که رادیکال‌ها مثل هم باشند از فاکتورگیری کمک می‌گیریم:

الف) $۵\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = (۵ + ۲)\sqrt{۳} = ۷\sqrt{۳}$

ب) $۱۸\sqrt{۷} - ۲\sqrt{۷} = (۱۸ - ۲)\sqrt{۷} = ۱۶\sqrt{۷}$

نکته ۳: گاهی اوقات برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی باید ابتدا تجزیه کنیم:

$$\sqrt{۱۸} + \sqrt{۸} = \sqrt{۹ \times ۲} + \sqrt{۴ \times ۲} = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

جذر دارد   جذر دارد

۱۸ → ۹ ، ۲   ۸ → ۴ ، ۲

نکته۴: اگر قبل از رادیکال عددی داشتیم بعد از جذر گرفتن ضرب می‌کنیم:

$$۵\sqrt{۲۷} - ۲\sqrt{۱۲} = \underbrace{۵\sqrt{۹ \times ۳} - ۲\sqrt{۴ \times ۳}} = \underbrace{۵ \times ۳\sqrt{۳} - ۲ \times ۲\sqrt{۳}}$$

$$= ۱۵\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = ۱۱\sqrt{۳}$$

نکته: برای جمع و تفریق رادیکال‌ها

۱) قسمت رادیکالی دو عدد بعد از ساده کردن یکسان باشند.

۲) فرجه رادیکال‌ها باید مثل هم باشند. مثال:

$۲\sqrt{۵} + \sqrt[۳]{۲}$ → نمی‌توان جمع کرد

تمرین:

۱) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\sqrt{۹۰} + \sqrt{۱۶۰} - \sqrt{۴۰} = \sqrt{۹ \times ۱۰} + \sqrt{۱۶ \times ۱۰} - \sqrt{۴ \times ۱۰}$$

$$= ۳\sqrt{۱۰} + ۴\sqrt{۱۰} - ۲\sqrt{۱۰} = (۳ + ۴ - ۲)\sqrt{۱۰} = ۵\sqrt{۱۰}$$

۲) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$-۲\sqrt[۳]{۵۴} + ۵\sqrt[۳]{۱۶} - ۲\sqrt[۳]{۲۷ \times ۲} + ۵\sqrt[۳]{۸ \times ۲} = -۲ \times ۳\sqrt[۳]{۲} + ۵ \times ۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$= -۶\sqrt[۳]{۲} + ۱۰\sqrt[۳]{۲} = ۴\sqrt[۳]{۲}$$

۳)الف) مساحت مربعی به ضلع $۵\sqrt{۲}$ را بدست آورید.

یک ضلع ضربدر خودش = مساحت مربع

$$۵\sqrt{۲} \times ۵\sqrt{۲} = (۵ \times ۵)(\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}) = ۲۵ \times \sqrt{۴} = ۲۵ \times ۲ = ۵$$

ب) محیط مربع بالا را محاسبه کنید.

۴) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید.

$$\sqrt{۴+\frac{۱}{۸۱}+\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۳۲۴+۱+۳۶}{۸۱}}=\sqrt{\frac{۳۶۱}{۸۱}}=\frac{۱۹}{۹}$$

سوالات امتحان نهایی فصل۴

۱) عبارت زیر را ساده کنید. (خ ۹۶ کردستان)

$$۷\sqrt{۲۰}-\sqrt{۴۵}=۷\sqrt{۴\times ۵}-\sqrt{۹\times ۵}=۷\times ۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}=۱۱\sqrt{۵}$$

۲) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید. (تهران خ ۹۶)

$$۳\sqrt{۴۵}-\sqrt{۵}=۳\sqrt{۹\times ۵}-\sqrt{۵}=۳\times ۳\sqrt{۵}-۱\sqrt{۵}$$
$$=(۹-۱)\sqrt{۵}=۸\sqrt{۵}$$

۳) حاصل عبارت مقابل را ساده کنید.

$$\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=\sqrt{۳۶\times ۲}-\sqrt{۱۶\times ۲}+\sqrt{۹\times ۲}=۶\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}$$
$$=(۶-۴+۱)\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی

محاسبه کدام‌یک از عبارت‌های زیر راحت‌تر است؟

الف) $\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۷}$

ب) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}+\frac{۳}{\sqrt{۷}}$

نکته: برای گویا کردن مخرج

الف) وقتی فرجه رادیکال ۲ باشد کافی است صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج ضرب کنیم.

مثال: مخرج عبارت زیر را گویا کنید.

$$\frac{۳}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\times\sqrt{۵}}{\underbrace{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

ب) اگر فرجه رادیکال ۳ باشد گویا کردن مخرج دو حالت دارد:

۱) عدد زیر رادیکال توان یک داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال با توان دو ضرب می‌کنیم.

$$\frac{-۱۷}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{-۱۷\times\sqrt[۳]{۲^{۲}}}{\underbrace{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲^{۲}}}}=\frac{-۱۷\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{-۱۷\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$

۲) عدد زیر رادیکال توان دو داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج با توان یک ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۴}{\sqrt[۳]{۷^{۲}}}=\frac{۴\times\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۷^{۲}}\times\sqrt[۳]{۷}}=\frac{۴\times\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۳۴۳}}=\frac{۴\times\sqrt[۳]{۷}}{۷}$$

تمرین:

۱) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$-\frac{۵}{۲\sqrt{a}}=\frac{-۵\times\sqrt{a}}{۲\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{-۵\sqrt{a}}{۲a}$$

۲) برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{x}}$ باید صورت و مخرج را در .... ضرب شوند.

الف) $\sqrt[۳]{x^۲}$ ب) x پ) $\sqrt[۳]{x}$ ت) $۲\sqrt{x}$

حل:

$$\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{x}}=\frac{۱\times\sqrt[۳]{x^۲}}{۲\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{۲\sqrt[۳]{x^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{۲x}$$

۳) ساده شده عبارت $\frac{۱۵}{۲\sqrt{۵}}$ پس از گویا کردن مخرج کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۵}$ ب) $\frac{۱}{۵}$ پ) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$ ت) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

سوالات امتحان نهایی

۱) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ مازندران)

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲\sqrt{۲۵}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۲\times۵}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۰}$$

۲) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ کهکیلویه و بویراحمد)

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۱\times\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۲^۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$$

۳) مخرج کسر را گویا کنید. (مولف)

$$\frac{-۵}{\sqrt[۳]{۴a}}=\frac{-۵\times\sqrt[۳]{۲a^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲a}\times\sqrt[۳]{۲a^۲}}=\frac{-۵\times\sqrt[۳]{۲a^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۳a^۳}}=\frac{-۵\times\sqrt[۳]{۲a^۲}}{۲a}$$