

به نام خدا

ریاضیات پایه نهم

فصل پنجم: عبارت های جبری

تهیه و تنظیم: مهندس رسول دلپار

کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی تهران

دبیر ریاضیات مدارس استان قم و مدرس کنکور

شماره تماس دارای واتساپ و تلگرام: ۰۹۰۱۰۸۲۵۲۵۸

Telegram: @Rasouldelyar

تعیین و تقسیم: دلایل

09010825258

فصل پنجم: عبارت‌های جبری

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله ای: هر عبارت را که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامفرد (حسابی)

یک یا چند متغیر باشد، یک جمله ای می‌نامیم.

* عبارت‌های زیر همگی یک جمله ای هستند:

$$v, x, \Delta x^4, -\sqrt{3} a^2 x^2 z, \frac{1}{5} xy, \pi y^2, \frac{mx^2}{9}, \epsilon z$$

و عبارت‌های زیر یک جمله ای نیستند:

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2 + 2x, \sqrt{y}, x+1, x|y|$$

تذکره: (۱) هر عدد ثابت حقیقی به تنهایی یک جمله ای محسوب می‌شود.

(۲) فرم کلی یک جمله ای با یک متغیر به صورت αx^n است که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

(۳) قهوه متغیر در توان باشد (مانند: 2^x)، یا متغیر زیر رادیکال باشد (مانند $\sqrt{-y}$)، یا متغیر در

مخرج کسر باشد (مانند: $\frac{\sqrt{2}}{x^2}$) یا متغیر در قدر مطلق باشد (مانند: $|3x|$)، یک جمله ای نخواهد بود.

* یک جمله ای های متساوی :

هرگاه نسبت های عرض دو یا چند یک جمله ای یکسان باشد ، به آن ها یک جمله ای های متساوی گفته می شود .

به عنوان مثال :

یک جمله ای های $4x^2y$ ، $\frac{7}{2}x^2y$ و $-x^2y$ و $\sqrt{3}yx^2$ متساوی اند .

همچنین یک جمله ای های xy^3 ، $-\frac{3}{4}xy^3$ و $\sqrt{2}xy^3$ و $\frac{y^3x}{8}$ متساوی اند .

اما یک جمله ای های $3x$ و $3x^2$ متساوی نیستند و یا یک جمله ای های $2xy^2$ و $2yx^2$ متساوی نیستند .

* درجه یک جمله ای ها :

در هر یک جمله ای ، توان هر متغیر را درجه یک جمله ای نسبت به آن متغیر می گوئیم .

مثلاً در یک جمله ای $z\sqrt{5}x^2y^3$ ، درجه یک جمله ای نسبت به x برابر ۲ و درجه یک جمله ای

نسبت به y برابر ۳ و درجه نسبت به z برابر ۱ می باشد .

درجه یک جمله ای نسبت به تمام متغیرها : مجموع توان متغیرها ، درجه یک جمله ای نسبت به آن متغیرها را تعیین می کند .

مثلاً در یک جمله ای $z\sqrt{5}x^2y^3$ ، درجه نسبت به تمام متغیرها برابر $2+3+1=6$ می باشد ،

همچنین درجه نسبت به دو متغیر x و y برابر با $2+3=5$ است .

مثال ۱: در جدول زیر، درجه هر یک از جمله‌های نسبت به متغیرها یا متغیرهای خواسته شده را تعیین کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به تمام متغیرها
$21a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	$۲+۴=۶$	$۳+۲+۴=۹$
$\sqrt{11}x^3m^4n$	x, m, n	۳	۰	۳	$۳+۴+۱=۸$
$-y^3zx^3$	y, z, x	۳	۳	$۳+۳=۶$	$۳+۱+۳=۷$
$-\varepsilon u$	u	۰	۰	۰	۱

مثال ۲: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $۲(-\varepsilon x \cdot ۷x^۲) = ۲(-۲۸x^۳) = -۵۶x^۳$

ب) $\left(\frac{۲}{۳}x^۲y^۳\right)^۲ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \cdot (x^۲)^۲ \cdot (y^۳)^۲ = \frac{۸}{۹}x^۴y^۶$

پ) $(-۳x^۳)^۲ \left(\frac{1}{۳}x^۲\right)^۲ = (۹x^۶) \cdot \left(\frac{1}{۹}x^۴\right) = x^{۱۰}$

ت) $\left(\frac{1}{۲}a^۲b\right)(ab)\left(\frac{-۲}{۷}a^۲c^۵\right) = -\frac{1}{۷}a^۵b^۲c^۵$

ث) $۲(\Delta xy^4)^۲(-۲x^5y^۲) = ۲(۲\Delta x^۲y^۸)(-۲x^5y^۲) = -۸\Delta x^۷y^{۱۰}$

ج) $(۲x^۲y)(۳x^۲y^۳) + xy^۳(-\Delta x^۳y) = ۶x^۴y^۴ - \Delta x^۴y^۴ = x^۴y^۴$

تکثیر و تقسیم: دلایل

تذکره: یک جمله ای حاکی $3x^2y^3$ و $-5x^2y^2$ را که متساوی نیستند، یک جمله ای حاکی غیر متساوی می گوئیم.
 یک جمله ای حاکی غیر متساوی، با یکدیگر ساده نمی شوند. (در جمع و تفریق)

* چند جمله ای ها: چنانچه تعدادی یک جمله ای را با یکدیگر جمع صبری (جمع یا تفریق) کنیم، چند جمله ای حاصل می شود. چند جمله ای می تواند یک جمله ای یا جمع صبری چند یک جمله ای غیر متساوی باشد، مانند:

$$5x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2xy, \quad -2ax, \quad \frac{2}{3}a^2b - \frac{3}{2}ab, \quad x - \sqrt{5}$$

* درجه چند جمله ای ها: در هر چند جمله ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگترین درجه نسبت به آن متغیر، تعریف می کنیم.

به عنوان مثال: در چند جمله ای $-2xy^3 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با 2 و درجه نسبت به y برابر با 3 است.

همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگترین درجه یک جمله ای حاکی آن نسبت به متغیرهای مورد نظر، تعریف می کنیم. مثلاً در چند جمله ای $-2xy^3 + x^2y - 1$ درجه نسبت به x و y برابر 4 است. (بر اساس یک جمله ای $-2xy^3$)

مثال: چند جمله ای $\frac{2}{3}xy^2z - \frac{1}{3}xyz^3 - xyz$ را در نظر بگیرید:

درجه این چند جمله ای نسبت به x برابر 1، درجه نسبت به y برابر با 2 و درجه نسبت به z برابر 3 می باشد.
 درجه نسبت به x و z برابر 4، درجه نسبت به x و y برابر 3 و درجه نسبت به تمام متغیرها برابر 5 است.

بر اساس جمله $-\frac{1}{3}xyz^3$ بر اساس جمله $\frac{2}{3}xy^2z$

نکته: در چند جمله‌ای‌ها معمولاً جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب می‌کنند.

مثال: چند جمله‌های زیر را نسبت به متغیر x مرتب می‌کنند.

الف) $3x^2 + 5 - 2x + 2x^3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

ب) $-3bxy^2 + ax^2y - \varepsilon bx^2y^2 = -\varepsilon bx^2y^2 + ax^2y - 3bxy^2$

پ) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 + 3x^2y - \varepsilon = 3x^2y + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 - \varepsilon$

مثال: عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آن‌ها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [\varepsilon a^2 + \delta ax - (3a^2 - 1ax)] =$

$= -5a^2 - 3ax + x^2 - [\varepsilon a^2 + \delta ax - 3a^2 + 1ax]$

$= -5a^2 - 3ax + x^2 - (a^2 + 13ax) = -5a^2 - 3ax + x^2 - a^2 - 13ax$

$= -6a^2 - 16ax + x^2 = x^2 - 16ax - 6a^2$

ب) $(\varepsilon x + \delta x^2)(x^2 - x + 1) = \varepsilon x^3 - \varepsilon x^2 + \varepsilon x + \delta x^4 - \delta x^3 + \delta x^2$

$= \varepsilon x^3 + x^2 + \varepsilon x + \delta x^4 - \delta x^3$

$= \delta x^4 + \varepsilon x^3 - \delta x^3 + x^2 + \varepsilon x$

$$\begin{aligned}
 \text{ج) } (x+x^r)(x^\xi+x^r+1) &= x^\Delta + x^r + x + x^\gamma + x^\xi + x^r \\
 &= x^\gamma + x^\Delta + x^\xi + x^r + x^r + x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{د) } (x^r-2x+1)(x^r+x^r-2) &= \underline{x^\xi} + \underline{x^\Delta} - \underline{2x^r} - \underline{2x^r} - \underline{2x^\xi} + \underline{\xi x} + \underline{x^r} + \underline{x^r} - 2 \\
 &= -x^\xi + x^\Delta - x^r - x^r + \xi x - 2 \\
 &= x^\Delta - x^\xi - x^r - x^r + \xi x - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{هـ) } (\Delta x^r - 2x)(x^\xi - 1) &= \Delta x^\nu - \Delta x^r - 2x^\Delta + 2x \\
 &= \Delta x^\nu - 2x^\Delta - \Delta x^r + 2x
 \end{aligned}$$

09010825258

تعمیر و تنظیم: دلدار

مفهوم اتحاد: اگر دو عبارت به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، مقدار یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری صبری حاصل از آنها را اتحاد صبری می نامیم.

بعنوان مثال: برابری $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ یک اتحاد است، زیرا:

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

پس این دو عبارت صبری به ازای هر مقدار برای متغیر x ، برابر خواهند بود.

همچنین برابری $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ یک اتحاد است، زیرا:

$$(x-3)(x+3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$$

مفهوم معادله: معادله یک تساوی صبری است که به ازای بعضی از مقادیر متغیر یا متغیرها به تساوی عددی تبدیل می شود.

مثلاً تساوی صبری $3x - 3 = x + 1$ را در نظر بگیرید، به ازای $x = 2$ این تساوی برقرار

نمی باشد. چون:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طرف چپ} = 3(2) - 3 = 6 - 3 = 3 \\ \text{طرف راست} = 2 + 1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \neq 3$$

پس برابری $3x - 3 = x + 1$ یک اتحاد نیست، چون به ازای مقادیری از x ، برقرار نخواهد بود.

تخصیص و تقسیم، دلایل

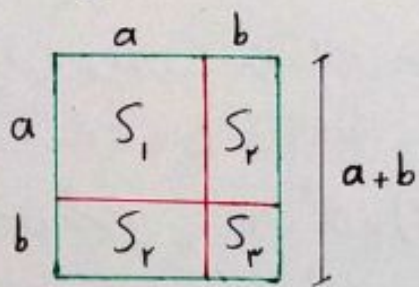
09010825258

احتماد مربع دو جمله ای :

① آیا برابری $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یک احتمال است ؟ بله - زیرا :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

تذکره : برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت های مشخص شده در شکل زیر، می توان



درستی احتمال بالا را نشان داد :

$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = S_1 + 2S_2 + S_4 = a^2 + 2ab + b^2$$

② آیا برابری $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ یک احتمال است ؟ بله - زیرا :

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تقسیم و تنظیم: دلایل

* اتحاد مربع دو جمله‌ای برای مجموع دو جمله:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{به صورت صبری:}$$

$$(\text{دومی} + \text{اولی})^2 = (\text{اولی})^2 + 2 \times (\text{اولی}) \times (\text{دومی}) + (\text{دومی})^2 \quad \text{به صورت کلامی:}$$

* اتحاد مربع دو جمله‌ای برای تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{به صورت صبری:}$$

$$(\text{دومی} - \text{اولی})^2 = (\text{اولی})^2 - 2 \times (\text{اولی}) \times (\text{دومی}) + (\text{دومی})^2 \quad \text{به صورت کلامی:}$$

تذکره: حاصل اتحاد مربع دو جمله‌ای، همواره سه جمله است.

مثال: حاصل هر یک از عبارات داده‌شده زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بدست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a)^2 + 2(a)(4) + (4)^2 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(x-1)^2 = (x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 - 2x + 1$

پ) $(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(y) + (y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

ت) $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

مربع جمله اول (9x²)
 دو برابر حاصل ضرب دو جمله (-12x)
 مربع جمله دوم (4)

$$c) (2x + 3y)^r = (2x)^r + r(2x)(3y) + (3y)^r = 2^r 2^r x^r + 3^r \cdot xy + 9 y^r$$

$$e) (\varepsilon b - 3a)^r = (\varepsilon b)^r - r(\varepsilon b)(3a) + (3a)^r = 16 b^r - 2\varepsilon ab + 9a^r$$

$$e) (3-x)^r = (3)^r - r(3)(x) + (x)^r = 9 - 6x + x^r = x^r - 6x + 9$$

$$e) (x^r + \frac{1}{r})^r = (x^r)^r + r(x^r)(\frac{1}{r}) + (\frac{1}{r})^r = x^{\varepsilon} + x^r + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$e) (\frac{3}{\varepsilon} - y^r)^r = (\frac{3}{\varepsilon})^r - r(\frac{3}{\varepsilon})(y^r) + (y^r)^r = \frac{9}{16} - \frac{3}{r} y^r + y^{\varepsilon}$$

$$d) (xy + \sqrt{r})^r = (xy)^r + r(xy)(\sqrt{r}) + (\sqrt{r})^r = x^r y^r + r\sqrt{r} xy + r$$

$$j) (\sqrt{r} + 3\sqrt{r})^r = (\sqrt{r})^r + r(\sqrt{r})(3\sqrt{r}) + (3\sqrt{r})^r = r + 6\sqrt{r} + 27 = 29 + 6\sqrt{r}$$

$$d) (2 - 2\sqrt{r})^r = (2)^r - r(2)(2\sqrt{r}) + (2\sqrt{r})^r = 2^r - 2 \cdot \sqrt{r} + 4 = 2^r - 2\sqrt{r} + 4$$

$$j) (rxy - \frac{1}{r} x^r)^r = (rxy)^r - r(rxy)(\frac{1}{r} x^r) + (\frac{1}{r} x^r)^r$$

$$= \varepsilon x^r y^r - 2x^{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} x^{\varepsilon}$$

$$j) (\sqrt{r}x - \frac{r}{c})^r = (\sqrt{r}x)^r - r(\sqrt{r}x)(\frac{r}{c}) + (\frac{r}{c})^r$$

$$= r x^r - 6\sqrt{r} \frac{x}{c} + \frac{9}{c^r}$$

$c \neq 0$

$$(\underbrace{\quad}_{\text{عجله اول}} + \underbrace{3b^r}_{\text{عجله دوم}})^2 = \underbrace{\epsilon a^r}_{\text{مربع عجله اول}} + \underbrace{\quad}_{\text{دو برابر حاصل ضرب عجله ها}} + \underbrace{9b^{\epsilon}}_{\text{مربع عجله دوم}}$$

$$\text{مربع عجله اول} = \epsilon a^r = (2a)^r \rightarrow \text{عجله اول} = 2a$$

$$\text{دو برابر حاصل ضرب عجله ها} = 2(2a)(3b^r) = 12ab^r$$

$$(2a + 3b^r)^2 = \epsilon a^r + 12ab^r + 9b^{\epsilon}$$

در نتیجه داریم:

$$(xy - \dots)^2 = \dots - \dots + \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow (xy - \frac{1}{r})^2 = x^r y^r - xy + \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{مربع عجله دوم} = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \text{عجله دوم} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{r}$$

 $x \neq 0$

$$(\dots - \dots)^2 = x^{\epsilon} - \dots + \frac{1}{x^{\epsilon}} \rightarrow (x^r - \frac{1}{x^r})^2 = x^{\epsilon} - 2x^r \left(\frac{1}{x^r} \right) + \frac{1}{x^{\epsilon}}$$

$$\text{مربع عجله اول} = x^{\epsilon} \rightarrow \text{عجله اول} = x^r \qquad = x^{\epsilon} - 2 + \frac{1}{x^{\epsilon}}$$

$$\text{مربع عجله دوم} = \frac{1}{x^{\epsilon}} \rightarrow \text{عجله دوم} = \frac{1}{x^r}$$

$$(\dots - \dots)^2 = 36x^r - 12xy + \dots$$

$$\text{مربع عجله اول} = 36x^r \rightarrow \text{عجله اول} = 6x \Rightarrow (6x - y)^2 = 36x^r - 12xy + y^r$$

مسئله: حاصل اعداد توان دار زیر را با استفاده از اتحادها، حساب کنید.

الف) $101^2 = (100 + 1)^2 = (100)^2 + 2(100)(1) + (1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$

ب) $99^2 = (100 - 1)^2 = (100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

پ) $98^2 = (100 - 2)^2 = (100)^2 - 2(100)(2) + (2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

ت) $53^2 = (50 + 3)^2 = (50)^2 + 2(50)(3) + (3)^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$

ث) $997^2 = (1000 - 3)^2 = (1000)^2 - 2(1000)(3) + (3)^2 = 1000000 - 6000 + 9 = 994009$

مسئله: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید. (تمرین ۴ ص ۱۵)

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

سمت چپ تساوی = $x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = \cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2xy - \cancel{y^2} = 4xy$

ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$ ، $a \neq 0$

سمت راست تساوی = $a^2 + 2(a)\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^2} - 2 = a^2 + \cancel{2} + \frac{1}{a^2} - \cancel{2} = a^2 + \frac{1}{a^2}$

09010825258

کتاب و تقسیم: دلایل

تقسیم و تقسیم: دلایل

تجزیه عبارت‌ها را صبراً:

اگر جمع و تفریق دو یا چند جمله صبری را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسیم، به این عمل، تجزیه گفته می‌شود.

(۱) تجزیه به کمک فاکتورگیری:

مراحلی فاکتورگیری، عامل یا بخش مشترک (ب.م.م) جملات را تعیین کرده و بیرون بیاوریم. به این عمل، تجزیه می‌گویند.

تذکره: در فاکتورگیری، برعکس خاصیت بخشش (توزیع پذیری) ضرب نسبت به جمع، عمل می‌کنیم.

$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{خاصیت بخشش (توزیع پذیری)}$$

$$ab+ac = a(b+c) \quad \text{تبدیل به ضرب یا تجزیه کردن}$$

تذکره: در عمل فاکتورگیری، ابتدا ب.م.م ضرایب را بدست می‌آوریم و سپس متغیرها را مشابه با کمترین توان را تعیین می‌کنیم.

DELYAR
RASOUL

مثال: عبارت‌ها را تجزیه کنید.

(الف) $8x^2 + 12x = 4x(2x+3)$

(ب) $6a^2 - 18a^3 = 6a^2(1-3a)$

(پ) $25y^4 + 20y^3 = 5y^3(5y+4)$

(ت) $-9x^2y + 6xy^2 = 3xy(-3x+2y)$

(ث) $7x^3 - 14x^2 + 21x = 7x^2(x-2+3)$

(ج) $5a^2b - 10ab^2 + 15a^2b = 5a^2b - 10ab^2 = 5ab(2a-2b)$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مربع دو جمله ای:

هرگاه عبارتی شامل ۳ جمله بوده و به فرم $(دوم)^2 \pm ۲(اولی)(دوم) + (اولی)^2$ باشد، برای تجزیه آن از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده می‌کنیم.

$$a^r + 2ab + b^r = (a+b)^r = (a+b)(a+b)$$

$$a^r - 2ab + b^r = (a-b)^r = (a-b)(a-b)$$

مثال: چند جمله ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^r + 6x + 9 = (x+3)^r = (x+3)(x+3)$

ب) $a^r - 4a + 4 = (a-2)^r = (a-2)(a-2)$

پ) $x^r + 9y^r - 6xy = x^r - 6xy + 9y^r = (x-3y)^r = (x-3y)(x-3y)$

ت) $n^r - 10n^r + 25 = (n^r - 5)^r = (n^r - 5)(n^r - 5)$

ث) $2y^r + 4y + 2 = 2(y^r + 2y + 1) = 2(y+1)^r = 2(y+1)(y+1)$
 اتحاد مربع دو جمله ای

ج) $x^r - 2x^r + x = x(x^r - 2x + 1) = x(x-1)^r = x(x-1)(x-1)$

د) $14ax^r + 24axy + 14ay^r = 2a(7x^r + 12xy + 7y^r) = 2a(2x+3y)^r = 2a(2x+3y)(2x+3y)$
 اتحاد مربع دو جمله ای

$(14, 24, 14) = 2$

بسیار

تمرین ۱۵۵ : ۱- عبارت های صبری زیر را ساده کنید.

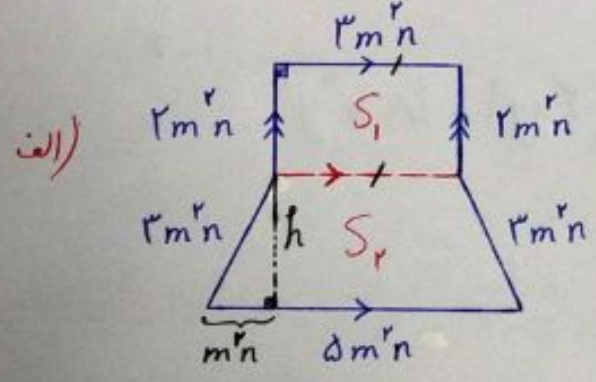
الف) $(-5m)^r (-2m)^r - \left(\frac{1}{2}m\right)^r (-2m)^r = (-2m)^r \left((-5m)^r - \left(\frac{1}{2}m\right)^r \right)$
 $= -8m^r \left(25m^r - \frac{1}{2}m^r \right) = -8m^r \left(\frac{49}{2}m^r \right) = -198m^{\delta}$

ب) $7a^r - 8b^r + 5c^r - (a^r - 9b^r - 11c^r)$
 $= 7a^r - 8b^r + 5c^r - a^r + 9b^r + 11c^r = 6a^r + b^r + 16c^r$

ج) $(x^m - 1)(x^m - 1) = x^{2m} - x^m - x^m + 1 = x^{2m} - 2x^m + 1$

د) $x - [(y-x) - (y-1)] = x - (y-x-y+1) = x+x-1 = 2x-1$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



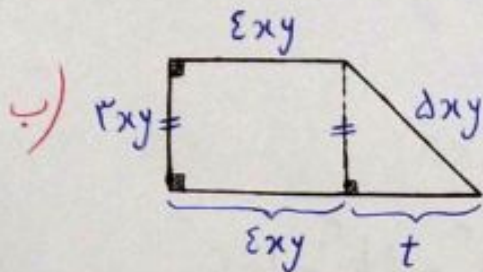
محیط = $3m^r n + 2(2m^r n) + 2(3m^r n) + 5m^r n$
 $= 3m^r n + 8m^r n + 6m^r n + 5m^r n$
 $= 18m^r n$

برای بدست آوردن ارتفاع ذوزنقه از قضیه فیثاغورث استفاده می کنیم، با توجه به تقارن ذوزنقه می توان نوشت

$h^r = (2m^r n)^r - (m^r n)^r = 9m^{\epsilon} n^r - m^{\epsilon} n^r = 8m^{\epsilon} n^r \Rightarrow h = \sqrt{8m^{\epsilon} n^r} = 2\sqrt{2} m^{\epsilon} n$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{مساحت شغل} = S_1 + S_2 &= (2m^2n)(2m^2n) + \frac{2m^2n + 4m^2n}{2} (2\sqrt{2}m^2n) \\ &= 4m^4n^2 + 8\sqrt{2}m^4n^2 = 2m^4n^2(2 + 4\sqrt{2}) \end{aligned}$$



شکل مقابل یک ذوزنقه قائم الزاویه می باشد، برای
محاسبه آوردن مابعد یابین آن، از قضیه فیثاغورث
در مثلث کفک می گیریم:

$$t^2 = (\Delta xy)^2 - (2xy)^2 = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 16x^2y^2 = (\epsilon xy)^2 \Rightarrow t = \epsilon xy$$

در نتیجه مابعد یابین ذوزنقه برابر است با:

$$\epsilon xy + \epsilon xy = 2\epsilon xy$$

$$\text{محیط شغل} = 2xy + \epsilon xy + \Delta xy + 2\epsilon xy = 20xy$$

$$\text{مساحت شغل} = \frac{\epsilon xy + 2\epsilon xy}{2} (2xy) = 6xy (2xy) = 12x^2y^2$$

09010825258

کتاب و نظم: دلایر

۳- طرف دیگر عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها بدست آورید.

$$\text{الف) } (\Delta y - 3x)^2 = (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)(3x) + (3x)^2 = \Delta y^2 - 6xy + 9x^2$$

$$\text{ب) } (-3a^2 - a)^2 = (-3a^2)^2 - 2(-3a^2)(a) + (a)^2 = 9a^4 + 6a^3 + a^2$$

$$\text{ج) } \left(8x - \frac{1}{3}\right)^2 = (8x)^2 - 2(8x)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$\text{د) } (2, 7)^2 + 2(2, 7)(3, 3) + (3, 3)^2 = (2, 7 + 3, 3)^2 = (6)^2 = 36$$

**DELVAR
RASOUL**

۵- عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 2x^2 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 4x + 4) = 2x(x+2)^2 = 2x(x+2)(x+2)$$

$$\text{ب) } 3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(3a^2 - 12b^2 + ab^2)$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } a(x+1) + b(x+1)^2 &= (x+1)(a + b(x+1)) = (x+1)(a + bx + b) \\ &= (x+1)(bx + a + b) \end{aligned}$$

$$\text{د) } a^2 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2 = a(a-1)(a-1)$$

$$\text{ه) } x^2y^2 - 2xy + 1 = (xy)^2 - 2(xy)(1) + (1)^2 = (xy-1)^2 = (xy-1)(xy-1)$$

$$\begin{aligned} \text{و) } 2\Delta x^2 + 3x^2 + 9x^2 &= x^2(2\Delta x^2 + 3x + 9) = x^2(\Delta x + 3)^2 \\ &= x^2(\Delta x + 3)(\Delta x + 3) \end{aligned}$$

۶- با تبدیل b به $-b$ در اتحاد $(a+b)^r = a^r + 2ab + b^r$ ، طرف دوم تساوی زیر را

$$\underbrace{(a+(-b))^r}_{(a-b)^r} = (a)^r + 2a(-b) + (-b)^r = a^r - 2ab + b^r \quad \text{کامل کنید.}$$

* اتحاد مربع سه جمله ای:

حاصل عبارت $(a+b+c)^2$ را بدست آورید:

روش اول: $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$

$$= a^2 + \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ba} + b^2 + \underline{bc} + \underline{ca} + \underline{cb} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

روش دوم: $((a+b) + c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

در نتیجه اتحاد مربع سه جمله ای را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

به صورت جبری:

به صورت اگلامی:

$$(سومی + دومی + اولی)^2 = (اولی)^2 + (دومی)^2 + (سومی)^2 + 2(اولی)(دومی) + 2(اولی)(سومی) + 2(دومی)(سومی)$$

تذکره: حاصل اتحاد مربع سه جمله ای، شش جمله است.

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (a+b-c)^r &= (a)^r + (b)^r + (-c)^r + r ab + r a(-c) + r b(-c) \\ &= a^r + b^r + c^r + rab - rac - rbc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad (x-y-z)^r &= x^r + (-y)^r + (-z)^r + r x(-y) + r x(-z) + r(-y)(-z) \\ &= x^r + y^r + z^r - rxy - rxz + ryz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad (2x+3y-d)^r &= (2x)^r + (3y)^r + (-d)^r + r(2x)(3y) + r(2x)(-d) + r(3y)(-d) \\ &= 2^r x^r + 3^r y^r + d^r + 12xy - 2^r x - 3^r y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت)} \quad (a^r - 2a + 9)^r &= (a^r)^r + (-2a)^r + (9)^r + r(a^r)(-2a) + r a^r (9) + r(-2a)(9) \\ &= a^{2r} + \underline{\underline{9}} - 2^r a^{r+1} + \underline{\underline{9a^r}} - 18a \\ &= a^{2r} - 2^r a^{r+1} + 9a^r - 18a + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ث)} \quad (y+y^r+y^{2r})^r &= (y)^r + (y^r)^r + (y^{2r})^r + r y(y^r) + r y(y^{2r}) + r y^r(y^{2r}) \\ &= y^r + \underline{\underline{y^\xi}} + y^\delta + r y^r + \underline{\underline{r y^\xi}} + r y^\delta \\ &= y^\delta + r y^\delta + r y^\xi + r y^r + y^r \end{aligned}$$

تقسیم و تنظیم: دلایل

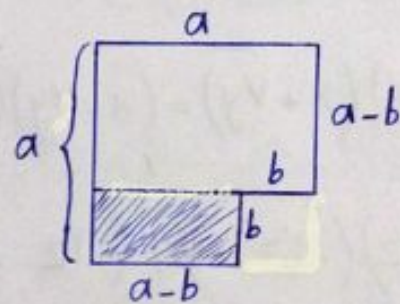
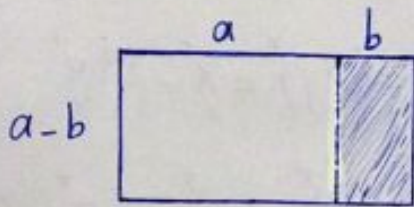
09010825258

* اتحاد مزدوج:

حاصل عبارت $(a-b)(a+b)$ را بدست آورید.

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 - b^2$$

اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد، درستی اتحاد بالا را می توان از شکل زیر نتیجه گرفت:



$$S_1 = a(a-b) + b(a-b)$$

$$S_2 = a(a-b) + b(a-b)$$

بنابراین $S_1 = S_2$. از طرفی مساحت دو شکل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S_1 = (a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad S_2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

در نتیجه اتحاد مزدوج را برای دو عدد حقیقی a و b به صورت زیر بیان می کنیم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

به صورت صبری:

$$(دومس - اولس)(دومس + اولس) = (اولس)^2 - (دومس)^2$$

به صورت کلامی:

تذکر: حاصل اتحاد مزدوج، دو جمله است.

مثال: حاصل عبارت‌ها را با استفاده از اتحاد مزدوج، بدست آورید.

$$\text{الف) } (t+3)(t-3) = (t)^2 - (3)^2 = t^2 - 9$$

$$\text{ب) } (1+x)(1-x) = (1)^2 - (x)^2 = 1 - x^2$$

$$\text{پ) } (2a+d)(2a-d) = (2a)^2 - (d)^2 = 4a^2 - d^2$$

$$\text{ت) } (1-x)(x+1) = (1-x)(1+x) = (1)^2 - (x)^2 = 1 - x^2$$

$$\text{ث) } (-\sqrt{y}+x)(x+\sqrt{y}) = (x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y}) = (x)^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - \sqrt{y}^2$$

$$\text{ج) } (-x-2z)(-2z+x) = (-2z-x)(-2z+x) = (-2z)^2 - (x)^2 = 4z^2 - x^2$$

$$\text{ح) } (-\sqrt{y}-2t)(2t-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y}-2t)(-\sqrt{y}+2t) = (-\sqrt{y})^2 - (2t)^2 = y - 4t^2$$

$$\text{ع) } \left(b - \frac{\sqrt{r}}{r}\right)\left(b + \frac{\sqrt{r}}{r}\right) = (b)^2 - \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^2 = b^2 - \frac{r}{r^2}$$

$$\text{غ) } \left(\frac{r}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{r^2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{د) } (a^r + b^r)(a^r - b^r) = (a^r)^2 - (b^r)^2 = a^{2r} - b^{2r}$$

$$\begin{aligned} \text{ذ) } (x-2y+d)(x+2y-d) &= (x-(2y-d))(x+(2y-d)) = (x)^2 - (2y-d)^2 \\ &= x^2 - (4y^2 - 4y + d^2) = x^2 - 4y^2 + 4y - d^2 \end{aligned}$$

$$1) (\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2}x)^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 2x^2 - \frac{1}{2}$$

$$2) (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$$

نکته: دو عبارت صبری $a+b$ و $a-b$ را مزدوج هم می‌گویند، مانند: $2x+3$ و $2x-3$.

تذکره: گاهی اوقات می‌توان ضرب دو عدد را به شکل اتحاد مزدوج نوشت.

مثال: حاصل ضرب را بدست آورید.

$$الف) 98 \times 102 = (100-2)(100+2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$ب) 497 \times 503 = (500-3)(500+3) = (500)^2 - (3)^2 = 250000 - 9 = 249991$$

* تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: نگاه عبارتی به صورت قاضی دو عبارت مربع کامل باشد، می‌توانیم برای تجزیه آن از اتحاد مزدوج استفاده کنیم.

$$\xrightarrow{\text{تجزیه}} a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال: عبارت‌ها زیر را به کمک اتحاد مزدوج، تجزیه کنید.

$$الف) x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$ب) t^2 - 9 = t^2 - (3)^2 = (t-3)(t+3)$$

$$پ) 36 - y^2 = (6)^2 - y^2 = (6-y)(6+y)$$

09010825258

RASOUL
DELYAR

$$\text{ب) } 9x^r - 2d = (3x)^r - (d)^r = (3x-d)(3x+d)$$

$$\text{ب) } \varepsilon a^r - 16 = (2a)^r - (\varepsilon)^r = (2a-\varepsilon)(2a+\varepsilon)$$

$$\text{ج) } \varepsilon y^r - \frac{1}{\varepsilon} z^r = (2y - \frac{1}{\varepsilon} z)(2y + \frac{1}{\varepsilon} z)$$

$$\text{د) } 2a^r - 2b^r = (\sqrt{2}a - \sqrt{2}b)(\sqrt{2}a + \sqrt{2}b)$$

$$x \neq 0 \leftarrow \text{ع) } \frac{9}{x^r} - d = \left(\frac{3}{x}\right)^r - (\sqrt{d})^r = \left(\frac{3}{x} - \sqrt{d}\right)\left(\frac{3}{x} + \sqrt{d}\right)$$

$$\text{ح) } (2x+1)^r - y^r = [(2x+1)-y][(2x+1)+y] = (2x+1-y)(2x+1+y)$$

$$\text{د) } 1 - (2a+z)^r = [1 - (2a+z)][1 + (2a+z)] = (1-2a-z)(1+2a+z)$$

$$\text{ز) } (2x+1)^r - (3x+\varepsilon)^r = [(2x+1) - (3x+\varepsilon)][(2x+1) + (3x+\varepsilon)] \\ = (-x-2)(\varepsilon x+d)$$

$$\varepsilon x^r = (2x)^r$$

$$\text{ح) } \varepsilon x^r - (v-2y)^r = [2x - (v-2y)][2x + (v-2y)] = (2x - v + 2y)(2x + v - 2y)$$

$$\text{ز) } \frac{x^\varepsilon - y^\varepsilon}{(x^r)^r - (y^r)^r} = \frac{(x^r - y^r)(x^r + y^r)}{\text{اتحاد مزدوج}} = (x-y)(x+y)(x^r + y^r)$$

تقسیم و تقسیم: دلایل

* اتحاد جمله مشترک :

حاصل عبارت $(x+a)(x+b)$ را بدست آورید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

دو جمله ای های $(x+a)$ و $(x+b)$ هر دو در جمله x مشترک هستند و جمله های a و b جمله های غیر مشترک می باشند.

در نتیجه اتحاد جمله مشترک را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{به صورت صوری:}$$

$$= (\text{مشترک})^2 + (\text{جمع غیر مشترک ها})x + (\text{ضرب غیر مشترک ها}) \quad \text{به صورت کلامی:}$$

مسئله: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک بدست آورید.

الف) $(x+2)(x+5) = (x)^2 + (2+5)(x) + (2)(5) = x^2 + 7x + 10$

ب) $(x+9)(x-4) = x^2 + (9-4)x + 9(-4) = x^2 + 5x - 36$

پ) $(y-1)(y+2) = y^2 + (-1+2)y + (-1)(2) = y^2 + y - 2$

ت) $(2a-3)(2a+1) = (2a)^2 + (-3+1)(2a) + (-3)(1) = 4a^2 - 4a - 3$

$$\text{د) } (3x-2)(7+3x) = (3x-2)(3x+7) = (3x)^2 + (-2+7)(3x) + (-2)(7) \\ = 9x^2 + 15x - 14$$

$$\text{ه) } (\sqrt{5} + 2x)(\sqrt{5} + 3x) = (\sqrt{5})^2 + (2x+3x)(\sqrt{5}) + (2x)(3x) \\ = 5 + 5\sqrt{5}x + 6x^2$$

$$\text{و) } (x^2-y)(x^2-2y) = (x^2)^2 + (-y-2y)(x^2) + (-y)(-2y) \\ = x^4 - 3yx^2 + 2y^2$$

**DELYAR
RASOUL**

تذکر: حاصل اتحاد جمله مشترک، سه جمله است.

* تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a+b)x + ab \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+a)(x+b)$$

اگر عبارتی دارای سه جمله بود، ممکن است به کمک اتحاد جمله مشترک، قابل تجزیه باشد:

۱) جذر جمله ای که مربع کامل است را می‌گیریم که در نتیجه آن، جمله مشترک دو پرانتز بدست می‌آید.

۲) با توجه به مقدار مجموع و نیز حاصل ضرب دو عدد غیر مشترک، آن دو عدد را بدست می‌آوریم.

نکته: اگر حاصل ضرب دو عدد، منفی باشد، دو عدد هم علامت نیستند، یعنی یکی مثبت و یکی منفی است.

اگر حاصل ضرب دو عدد، مثبت باشد، دو عدد هم علامت اند یعنی هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند.

تصیه و تقسیم: دلایل

مثال: عبارت‌ها را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کنید.

الف) $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

جمله مشترک: x

ضرب دو عدد = 10
جمع دو عدد = 7

آن دو عدد 2 و 5 هستند

ب) $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

جمله مشترک: x

ضرب دو عدد = 12
جمع دو عدد = 7

آن دو عدد 3 و 4 هستند

پ) $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$

جمله مشترک: y

ضرب دو عدد = -6
جمع دو عدد = +1

آن دو عدد 3 و -2 هستند

ت) $y^2 - y - 6 = (y-3)(y+2)$

ث) $a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3)$

09010825258

ج) $t^2 + 10t - 24 = (t-2)(t+12)$

جمله مشترک: t

ضرب دو عدد = -24
جمع دو عدد = 10

آن دو عدد 12 و -2 هستند

ح) $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$

ضرب دو عدد = +15
جمع دو عدد = -8

آن دو عدد 3 و 5 هستند

$$ع) t^2 - 13t + 36 = (t-4)(t-9)$$

$$غ) x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$د) \underbrace{\Sigma x^2}_{\text{عبارت مشترک} = 2x} + 18x + 18 = (2x)^2 + (2x)(9) + 18 = (2x+3)(2x+6)$$

\downarrow ضرب دو عدد = 18 \downarrow جمع دو عدد = 9

$$ز) a^2 + 7a - 18 = (a+9)(a-2)$$

$\left. \begin{array}{l} \downarrow \text{ضرب دو عدد} = -18 \\ \downarrow \text{جمع دو عدد} = +7 \end{array} \right\} \Rightarrow$ آن دو عدد $+9$ و -2 هستند

$$ح) b^2 - 2b - 3d = (b-7)(b+d)$$

\downarrow ضرب دو عدد = $-3d$ \downarrow جمع دو عدد = -2

09010825258

$$ز) x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$ز) z^2 + 9z + 20 = (z+4)(z+5)$$

$$س) \Sigma x^2 + 8x + 3 = (2x)^2 + \Sigma (2x) + 3 = (2x+1)(2x+3)$$

\downarrow جمع دو عدد = 8 \downarrow ضرب دو عدد = 3

$$ش) x^2 + x^2 - 56 = (x^2+8)(x^2-7)$$

$\left. \begin{array}{l} \downarrow \text{عبارت مشترک} = x^2 \\ \downarrow \text{ضرب دو عدد} = -56 \\ \downarrow \text{جمع دو عدد} = +1 \end{array} \right\} \Rightarrow$ آن دو عدد $+8$ و -7 هستند

۱- حاصل عبارت‌ها را با استفاده از اتحادها بدست آورید.

الف) $(\frac{1}{\varepsilon} - x)(\frac{1}{\varepsilon} + x) = (\frac{1}{\varepsilon})^2 - (x)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} - x^2$

ب) $(3x + y - z)(3x + y + z) = ((3x + y) - z)((3x + y) + z) = (3x + y)^2 - (z)^2$
 $= (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2 - z^2$
 $= 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$

ب) $(5x + \varepsilon)(5x + 3) = (5x)^2 + \frac{(\varepsilon + 3)(5x)}{1} + (\varepsilon \times 3) = 25x^2 + 35x + 12$

ت) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = \underbrace{(x^2-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x^2)^2 - (1)^2 = x^4 - 1$

ث) $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = (z)^2 - (\sqrt{3})^2 = z^2 - 3$

ج) $(x-2)(x+2)(x^2+3) = \underbrace{(x^2-4)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(x^2+3)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = (x^2)^2 + (-4+3)(x^2) + (-4)(3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت های تقه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

الف) $(xy - z)(xy + z) = x^2 y^2 - z^2$ (اتحاد مزدوج)

ب) $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$ (اتحاد مزدوج)

ج) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$ (اتحاد جمله مشترک)

د) $(x^2 + 7x)(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - 35$ (اتحاد جمله مشترک)

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$

ب) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2 = (x - 6)(x - 6)$

پ) $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

ت) $(x+y)^2 - 9 = ((x+y) - 3)((x+y) + 3) = (x+y-3)(x+y+3)$

ث) $x^2 - 2x - 1 = (x - 2)(x + 1)$

ج) $bx^2 - 5bx - 5b = b(x^2 - 5x - 5) = b(x - 1)(x + 5)$

ح) $\Sigma ax^2 - a = a(\Sigma x^2 - 1) = a(2x-1)(2x+1)$

ع) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحاد بدست می آید؟

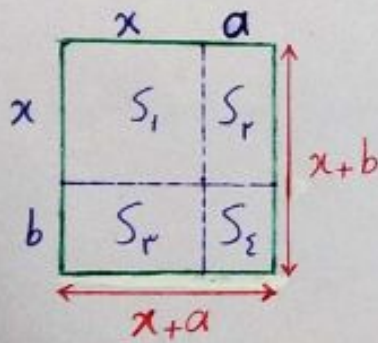
$$(x+a)(x+a) = (x+a)^2 \quad \text{اتحاد مربع دو جمله ای}$$

اگر a و b قرینه باشند، کدام اتحاد بدست می آید؟

$$a = -b$$

$$(x-b)(x+b) = x^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبرو، اتحاد جمله مشترک را بدست آورید.



$$\text{مساحت کل شکل} = S = (x+a)(x+b) \quad \text{(I)}$$

$$\text{از طرفین: } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$\Rightarrow S = x^2 + ax + bx + ab$$

$$S = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{(II)}$$

از (I) و (II) نتیجه می گیریم:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^3 - 14x^2 + 48x = x(x^2 - 14x + 48) = x(x-6)(x-8)$

ب) $y^3 - y^2 - 20y = y(y^2 - y - 20) = y(y-5)(y+4)$

09010825258

تجزیه و تقسیم: دلایل

تجزیه با شکل‌ها:

مثال: عبارت‌ها را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad 2x^2 + 3x + 1 &= x^2 + 2x + 1 + x^2 + x = (x+1)^2 + x(x+1) = (x+1)(x+1+x) \\ &= (x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad a^2 - 2ab + a'b - 2b^2 &= \underbrace{a^2 + a'b} - \underbrace{2ab - 2b^2} = a'(a+b) - 2b(a+b) \\ &= (a+b)(a' - 2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad x^3 - 2x + 2 &= \underbrace{x^3 - x} - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x-1) = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) \\ &= (x-1)(x(x+1) - 2) = (x-1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

درس سوم: نابرابری ها و نامعادله ها

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت های زیر را خواهم داشت:

(۱) a بزرگتر از b باشد: $a > b$

(۲) a کوچکتر از b باشد: $a < b$

(۳) a برابر با b باشد: $a = b$

* تبدیل نابرابری (نامساوی) به برابری (مساوی):

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p وجود دارد، به طوری که $a = b + p$

مسئله: با توجه به برابری های زیر، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

(الف) $x = y + \varepsilon \rightarrow x > y$

(ب) $a - 2 = b + 3 \rightarrow a = b + 5 \rightarrow a > b$

(پ) $m + 1 = n + 3 \Rightarrow m = n + 2 \Rightarrow m > n$

(ت) $2m = 3n \quad (m, n > 0) \rightarrow 2m = 2n + n \xrightarrow{\div 2} m = n + \frac{n}{2} \rightarrow m > n$

نکته: (۱) اگر عدد حقیقی a منفی نباشد، در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ که می‌نویسیم: $a \geq 0$

(۲) اگر عدد حقیقی a مثبت نباشد، در این صورت $a < 0$ یا $a = 0$ که می‌نویسیم: $a \leq 0$

* نمادهای نامساوی برای دو عدد حقیقی a و b به چهار صورت زیر است:

(۱) $a > b$ یعنی عدد a از b بزرگتر است.

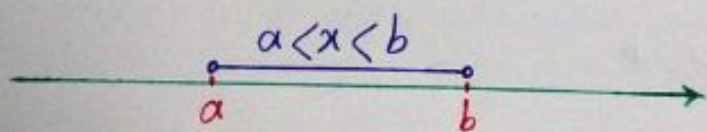
(۲) $a \geq b$ یعنی عدد a از b بزرگتر و یا با آن برابر است.

(۳) $a < b$ یعنی a از b کوچکتر است.

(۴) $a \leq b$ یعنی a از b کوچکتر و یا با آن برابر است.

نکته: برای سه عدد حقیقی a و b و x به طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a < b$)

می‌نویسیم: $a < x < b$ که نمایش آن روی محور به صورت زیر است:



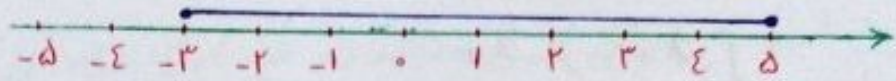
تذکره: (۱) اگر $a + b > 0$ یا $a + b < 0$ باشد، در مورد علامت a و b نمی‌توان اظهار نظر کرد.

(۲) اگر $ab > 0$ یا $\frac{a}{b} > 0$ ، آنگاه a و b هم علامت‌اند. یعنی هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند.

(۳) اگر $ab < 0$ یا $\frac{a}{b} < 0$ ، آنگاه a و b غیر هم علامت‌ند. یعنی یکی مثبت و یکی منفی خواهد بود.

۱- متناظر با هر یک از نامبرهای مستقیم شده روی محور، یک نامبر بزرگ بنویسید.

$$-3 \leq x \leq 5$$



(الف)

$$2 \leq x < 5$$



(ب)

۲- درسی یا نادرسی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر $a > 0$ ، آنگاه a و b هر دو مثبت هستند: نادرست است.

(ب) اگر $ab > 0$ ، آنگاه a و b هم علامت هستند: درست است.

(پ) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ ، آنگاه a و b و c منفی هستند: نادرست است. چون ممکن است یکی از

آن‌ها منفی و دو عدد دیگر مثبت باشند.

(ت) اگر $a^2 b < 0$ ، آنگاه b منفی است: درست است. چون a^2 عددی همواره مثبت است.

۳- عبارت‌های کلامی زیر را به صورت صریح بنویسید.

(الف) ۳ برابر عددی منفی یک، از ۷ بزرگتر است: $3x - 1 > 7$

(ب) ۱ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگتر است: $1 > -(2x + 3)$

تقسیم و تنظیم: دلایل

قوانین نامساوی ها:

(۱) اگر دو طرف یک نامساوی را با عددی مانند c جمع (یا تفریق) کنیم، نامساوی همچنان برقرار است:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \end{cases}$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3+3 < 1+3 \rightarrow 0 < 4$$

بعنوان مثال:

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3-7 < 1-7 \rightarrow -10 < -6$$

(۲) اگر دو طرف یک نامساوی را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نامساوی همچنان برقرار است:

$$a > b \xrightarrow{c > 0} ac > bc$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -7 \times 3 > -9 \times 3 \rightarrow -21 > -27$$

بعنوان مثال:

تذکر: اگر دو طرف یک نامساوی را بر عدد مثبتی مانند c تقسیم کنیم، نامساوی همچنان برقرار است.

(۳) اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی منفی مانند c ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

$$a > b \xrightarrow{c < 0} ac < bc$$

$$\text{مثال: } -2 < 3 \xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})} -2 \times (-\frac{1}{2}) > 3 \times (-\frac{1}{2}) \rightarrow +1 > -\frac{3}{2}$$

تذکر: اگر دو طرف یک نامساوی را بر عددی منفی مانند c تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

نامعادله: نامعادله یک نامساوی شامل مجهول (متغیر) می باشد.

بعنوان مثال، نابرابری (نامساوی) $2x+1 > 7$ یک نامساوی شامل متغیر x است و درجه نسبت به x برابر 1 است. پس به این نامساوی، نامعادله یک مجهولی درجه اول می گوئیم.

مجموعه جواب نامعادله: مجموعه معادله‌ری که به ازای آن‌ها، نامعادله به یک نامساوی درست تبدیل شود.

بعنوان مثال در نامعادله $2x+1 > 7$:

اعداد 6 و 7 در مجموعه جواب این نامعادله قرار دارند، چون:

$$2(6)+1=13 > 7 \quad \text{و} \quad 2(7)+1=15 > 7$$

ولی اعداد 3 و -1 در مجموعه جواب این معادله قرار ندارند، چون:

$$2(3)+1=7 \not> 7 \quad \text{و} \quad 2(-1)+1=-1 \not> 7$$

بزرگتر نیست

تذکره: $a \neq b$ یعنی a بزرگتر از b نیست که معادل است با $a < b$.
 $a \not< b$ یعنی a کوچکتر از b نیست که معادل است با $a \geq b$.

نکته: می دانیم اگر دو طرف نامساوی را با عدد یا عبارتی جمع (یا تفریق) کنیم، نامساوی همچنان برقرار است، پس در نتیجه این ویژگی، اگر عدد یا عبارتی را به طرف دیگر نامساوی منتقل کنیم، علامت آن قرینه می شود. بعنوان مثال:

$$2x+2 \geq x+1 \rightarrow 2x-x \geq -2+1 \rightarrow x \geq -1$$

حل نامعادلات: برای حل نامعادلات به همان روش حل معادلات عمل می‌کنیم، با این تفاوت که قوانین نامساوی‌ها را باید رعایت کنیم.

مسئله: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بدست آورید.

الف) $2x+1 > 7 \xrightarrow{-1} 2x+1-1 > 7-1 \rightarrow 2x > 6 \xrightarrow{\div 2} \frac{2x}{2} > \frac{6}{2}$
 $\rightarrow x > 3 \rightarrow$ مجموعه جواب نامعادله $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

ب) $2x+7 \geq 15 \xrightarrow{-7} 2x+7-7 \geq 15-7 \rightarrow 2x \geq 8 \xrightarrow{\div 2} x \geq 4$
 مجموعه جواب نامعادله $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ج) $3(x-1) \geq 2x+1 \rightarrow 3x-3 \geq 2x+1 \rightarrow 3x-2x \geq +3+1$
 $\rightarrow x \geq 4 \rightarrow$ مجموعه جواب نامعادله $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

د) $-8-9a \geq 5a+5 \rightarrow -9a-5a \geq +8+5 \rightarrow -14a \geq 13$
 $\xrightarrow{\div (-14)} \frac{-14a}{-14} \leq \frac{13}{-14} \rightarrow a \leq -1 \rightarrow$ مجموعه جواب $= \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq -1\}$
 جمع نامساوی عوض می‌شود

ه) $5(t+2) \geq 4t-3 \rightarrow 5t+10 \geq 4t-3 \rightarrow 5t-4t \geq -3-10$
 $\rightarrow t \geq -13 \rightarrow$ مجموعه جواب نامعادله $= \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq -13\}$

$$ع) 3-2x \leq (1-x) \rightarrow 3-2x \leq 1-x \rightarrow -2x+x \leq 1-3$$

$$\rightarrow -x \leq -2 \xrightarrow{\times(-1)} x \geq 2 \rightarrow \text{مجموعة جواب} = D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

$$ع) 2(x-1) \leq -x+2 \rightarrow 2x-2 \leq -x+2 \rightarrow 2x+x \leq +2+2$$

$$\rightarrow 2x \leq 4 \xrightarrow{\div 2} x \leq 2 \rightarrow \text{مجموعة جواب امامت} = D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

$$ع) 2x + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{5} + x \rightarrow 2x - x \geq \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 2x \geq \frac{1}{5} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2}(2x) \geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \Rightarrow x \geq \frac{1}{10} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{10}\}$$

$$ع) \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) < 6 \times \frac{(x-1)}{6}$$

$$\Rightarrow 2x - 3 < x - 1 \Rightarrow 2x - x < +3 - 1 \rightarrow x < 2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$د) \frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{5} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6} \quad \text{ك 12 مخرج ها}$$

$$\xrightarrow{\times 12} 12 \times \frac{2}{3}(x+7) - 12 \times \frac{x}{5} \leq 12 \times \frac{1}{2}(3-x) + 12 \times \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow 8(x+7) - 3x \leq 6(3-x) + 2x$$

$$\Rightarrow 8x + 56 - 3x \leq 18 - 6x + 2x \Rightarrow 5x + 56 \leq 18 - 4x$$

$$\Rightarrow 5x + 4x \leq 18 - 56 \Rightarrow 9x \leq -38 \xrightarrow{\div 9} x \leq -\frac{38}{9} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{38}{9}\}$$

DELVAR
RASOUL

۱- برای هر کدام از برابری‌های زیر، یک نابرابری بنویسید.

الف) $a - b = 1 \rightarrow a = b + 1 \rightarrow a > b$

ب) $u - v = -2 \rightarrow u + 2 = v \rightarrow u < v$

پ) $2(p-1) = 2q-3 \rightarrow 2p-2 = 2q-3 \rightarrow 2p+1 = 2q \rightarrow p + \frac{1}{2} = q \Rightarrow p < q$

ت) $\frac{a-b}{2} = -3 \rightarrow a-b = -6 \rightarrow a+6 = b \rightarrow a < b$

۲- علامت عددهای حقیقی a ، b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$ با توجه به اینکه b^2 همواره مثبت است، پس a و c هم علامت نیستند.

ب) $\frac{a}{bc} > 0$ یا هر سه باید مثبت باشند و یا دو منفی منفی باشند و یکی مثبت.

پ) $ab > 0$ a و b هم علامت اند، هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند.

ت) $\frac{a^2}{bc} > 0$ با توجه به اینکه a^2 همواره مثبت است، پس b و c هم علامت اند.

$$\text{الف) } 2(x-2) + 5 < 5 - x \rightarrow 2x - 4 + 5 < 5 - x \rightarrow 2x - 1 < 5 - x$$

$$\Rightarrow 2x + x < 5 + 1 \Rightarrow 3x < 6 \xrightarrow{\div 3} x < 2 \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$\text{ب) } 3 - 2x \geq 5(3 - 2x) \rightarrow 3 - 2x \geq 15 - 10x \rightarrow -2x + 10x \geq 15 - 3$$

$$\Rightarrow 8x \geq 12 \xrightarrow{\div 8} \frac{8x}{8} \geq \frac{12}{8} \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$$

$$\text{ج) } \frac{y-3}{\varepsilon} - 1 > \frac{y}{2} \xrightarrow{\times \varepsilon} \varepsilon \times \left(\frac{y-3}{\varepsilon} - 1 \right) > \varepsilon \times \frac{y}{2} \Rightarrow y - 3 - \varepsilon > \frac{\varepsilon y}{2}$$

$$\Rightarrow y - \varepsilon > \frac{\varepsilon y}{2} \Rightarrow -\varepsilon > \frac{\varepsilon y}{2} - y \Rightarrow -\varepsilon > y \Rightarrow D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -\varepsilon\}$$

$$\text{د) } -2 - \frac{q}{\varepsilon} \leq \frac{1+q}{3} \xrightarrow{\times 12} 12 \times \left(-2 - \frac{q}{\varepsilon} \right) \leq 12 \times \frac{1+q}{3}$$

$$\Rightarrow -24 - 12q \leq 4(1+q) \Rightarrow -24 - 12q \leq 4 + 4q \Rightarrow -12q - 4q \leq 4 + 24$$

$$\Rightarrow -16q \leq 28 \xrightarrow{\div (-16)} q \geq -\frac{7}{4} \Rightarrow D = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -\frac{7}{4}\}$$

بجست نامساوی عوضوں میں نمود

۴- اگر $a^2 > b^2$ باشد، آیا ہواڑ میں توان نتیجہ گرفت $a > b$ ؟

خیر۔ بعنوان مثال $2^2 > (-3)^2$ ولی $2 \not> -3$

۵- اگر $a, b > 0$ و $a^r > b^r$ باشد، نشان دهید $a > b$.

$$a^r > b^r \rightarrow a^r - b^r > 0 \xrightarrow{\text{انحاد مزدوج}} (a-b)(a+b) > 0$$

چون $a > 0$ و $b > 0$ است، پس $a+b$ نیز مثبت خواهد بود: $a+b > 0$

پس در نتیجه باید: $a-b > 0$ و این یعنی $a > b$.

نکته: اگر طرفین یک نامساوی، مثبت باشند، با عبور گرفتن از طرفین، نامساوی همچنان برقرار است.

۶- عبارت های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

(الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می شود.

پول علی را x در نظر می گیریم، در نتیجه داریم:

$$3x \geq 2x + 300$$

(ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{1}{2}a + 4b \leq 6$$